

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika



Atomové procesory a kvantové sítě

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Tomáš Odstrčil
Vedoucí práce: Prof. Ing. Igor Jex, DrSc.
Konzultant: Ing. Jaroslav Novotný, PhD.
Rok: 2010

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu uvedenou v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto díla ve smyslu § 60 zákona č.121/200Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

.....
Tomáš Odstrčil

Poděkování

Děkuji Prof. Ing Igoru Jexovi, DrSc. za trpělivé pročitání práce a mnoho podnětných připomínek. Stejně tak děkuji i všem ostatním, kteří si moji práci přečetli a přispěli tak k jejímu konečnému tvaru.

Tomáš Odstrčil

Název práce:

Atomové procesory a kvantové sítě

Autor: Tomáš Odstrčil

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Prof. Ing. Igor Jex, DrSc.
Katedra fyziky, FJFI, ČVUT v Praze

Konzultant: Ing. Jaroslav Novotný, PhD.
Katedra fyziky, FJFI, ČVUT v Praze

Abstrakt:

Cílem této práce je alespoň mírně přispět k souhrnu vědomostí potřebných k realizaci kvantového počítače. V první části je uveden popis otevřených kvantových systému a náhodné unitární sítě. V druhé části práce jsou důkladně prozkoumány vlastnosti speciální sítě, tzv. atomového procesoru. Byla úspěšně nalezena asymptotická dynamika 4 a 9 qubitového procesoru a byl proveden odhad rychlosti konvergence.

Klíčová slova: kvantové počítače, náhodné unitární sítě, atomové procesory, vývoj otevřených systémů

Title:

Atom processors and quantum networks

Author: Tomáš Odstrčil

Abstract:

This thesis begins with introduction to description of open quantum system and their irreversible evolution. As example of open system dynamics are introduced quantum unitary networks. In second part of this thesis as example of random unitary networks are investigated atom processors and their dynamics for 4 and 9 qubits.

Key words: quantum computers, random unitary networks, atom procesor, open dynamics

Obsah

Úvod	7
1 Základy kvantové mechaniky	8
1.1 Matematický formalizmus	8
1.2 Operátory	9
1.2.1 Omezené operátory	9
1.2.2 Neomezené operátory	10
1.2.3 Hilbert-Schmidtovy operátory	11
1.2.4 Jaderné operátory	11
1.2.5 Statistický operátor	12
1.3 Tenzorový součin	13
1.4 Postuláty kvantové mechaniky	15
2 Vývoj otevřených systémů	18
2.1 Dynamika redukováných systémů	18
2.2 Úplně pozitivní zobrazení	19
2.3 Dynamické semigrupy	19
3 Kvantové sítě	22
3.1 Kvantové obvody	22
3.2 Dynamické matice	23
3.3 Náhodné unitární operátory	25
3.3.1 Vlastní vektory superoperátoru	28
3.4 Maximálně propojená síť	29
3.4.1 Odhad rychlosti konvergence	32

4 Atomové procesory	34
4.1 Superoperátor na atomovém procesoru	34
4.1.1 Vztah mezi maximálně propojenou sítí a atomovým procesorem	36
4.2 Symetrie a invariance	37
4.2.1 Symetrie super-operátoru	37
4.2.2 Symetrie atraktorového prostoru	39
4.3 Atomové procesory 2×2 a 3×3	41
4.3.1 Rychlost konvergence	43
Závěr	47
Seznam použitých zdrojů	48

Úvod

Cílem této bakalářské práce bylo prozkoumat relativně nové odvětví kvantové mechaniky, kterými jsou kvantové počítače. Zprovoznění kvantového počítače by mělo značný dopad na vývoj v mnoha odvětvích kvantové mechaniky, ale i na šifrování a kryptoanalýzu.

Problém dnešních kvantových experimentů je, že jakákoli manipulace s kvantovými systémy je nesmírně experimentálně náročná a lze na nich realizovat jenom velmi omezené množství fyzikálních operací. Proto je snaha vymyslet v rámci daných možností nějaké smysluplné a ověřitelné experimenty. Příkladem mohou být atomové procesory rozebrané v této práci, které mohou sloužit k ověření teoretických předpovědí.

V první kapitole jsou shrnuty základní poznatky kvantové mechaniky, které se budou v dalším textu používat. V této kapitole je mimo jiné uvedena většina důležitých definic a také souhrn základních postulátů.

V druhé kapitole je popsán vývoj otevřených systémů. Otevřený systém je systém interagující s vnějším rezervoárem. Příkladem otevřeného systému jsou i kvantové počítače, protože se žádná jejich fyzikální realizace nevyhne interakci s okolím. Tato interakce způsobuje ztrátu informace tzv. dekoherenci, což je jeden z mnoha jevů komplikujících vytvoření funkčního kvantového počítače.

Třetí kapitola je úvodem do problematiky kvantových sítí a náhodných unitárních operací. Napřed jsou uvedeny základní typy kvantových obvodů a hradel. Potom je obecně prozkoumána dynamika kvantových sítí. Na závěr je příklad užití dokázaných tvrzení nalezen atraktorový prostor maximálně propojené sítě a proveden odhad rychlosti konvergence.

V poslední kapitole je analyzováno asymptotické chování atomových procesorů. Jsou nalezeny základní vlastnosti, které musí asymptotický stav splňovat. Pro procesor velikosti 2×2 a 3×3 nalezneme bázi prostoru, do kterého systém zkonverguje. Znalost této báze nám umožňuje zkoumat dynamiku asymptotického stavu těchto dvou procesorů. Na závěr je proveden odhad rychlosti konvergence a porovnání s maximálně propojenou sítí.

Kapitola 1

Základy kvantové mechaniky

V této kapitole jsou uvedena základní matematická tvrzení a značení, která budeme v dalších kapitolách používat. Důkazy těchto tvrzení lze nalézt například v knihách [9, 8]. Předpokládá se znalost lineární algebry alespoň v rozsahu skript [17, 14]. V závěru kapitoly jsou uvedeny postuláty kvantové mechaniky.

1.1 Matematický formalismus

Při popisu matematického formalismu budeme uvažovat pro zjednodušení pouze separabilní Hilbertovy prostory a budeme je označovat písmenem \mathcal{H} . K popisu prvků Hilbertovy prostoru použijeme Diracova formalismu a vektorům přiřadíme tzv. kety (ket-vektory), například $|\psi\rangle$.

Duální prostor k \mathcal{H} je podle Rieszova lemmatu izomorfní z \mathcal{H} . Prvky duálního prostoru budeme nazývat bra-vektory a značit například $\langle\varphi|$. To nám umožňuje zapsat skalární součin ket-vektorů $|\varphi\rangle$ a $|\psi\rangle$ takto

$$(|\varphi\rangle, |\psi\rangle) = \langle\varphi|(|\psi\rangle) = \langle\varphi|\psi\rangle,$$

kde $\langle\varphi|$ je lineární funkcionál (bra-vektor) příslušející ke ket-vektoru $|\varphi\rangle$. Ket-vektory budou vždy značit normované vektory, tedy $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$ a budeme to v dalším textu dodržovat. Stejněho formalismu použijeme i pro hustě definované, ale neomezené lineární resp. antilineární formy ($|\)$ resp. $\langle |$) na \mathcal{H} . Tyto formy nelze normovat na jedničku, proto je budeme normovat k δ -funkci. Příkladem je funkcionál $|x\rangle$ na $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}, dx)$, který je zobecněným vlastním vektorem operátoru polohy Q , a splňuje vztah

$$\hat{Q}|x\rangle = x|x\rangle.$$

Dá se dokázat, že neexistuje nenulový vektor z \mathcal{H} , který by tento vztah splňoval. Definiční obor $|x\rangle$ je Schwartzův prostor a ten je hustý v prostoru L_2 . Navíc je normalizován $|x\rangle$ tak, že platí

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x').$$

Zadefinujme amplitudu pravděpodobnosti $\psi(x)$ vektoru ψ tímto předpisem

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle,$$

Nyní se vraťme k vlastnostem vektorů z \mathcal{H} . V každém separabilním Hilbertově prostoru existuje spočetná ortonormální báze, označme ji $|e_i\rangle$. Jednorozměrné projektory $|e_i\rangle\langle e_i|$ na lineární obaly e_i nám umožňují zapsat *relaci úplnosti*, která má v Diracově reprezentaci jednoduchý tvar

$$I = \sum_j |e_j\rangle\langle e_j|.$$

Jakýkoli vektor z \mathcal{H} lze rozepsat v této bázi

$$|\psi\rangle = \sum_i |e_i\rangle\langle e_i|\psi\rangle,$$

kde komplexní čísla $\langle e_i|\psi\rangle$ se nazývají Fourierovy koeficienty. Využijeme-li ortonormality báze $|e_i\rangle$ můžeme normu vektoru vyjádřit tímto způsobem

$$\| |\psi\rangle \|^2 = \langle \psi|\psi\rangle = \sum_i |\langle e_i|\psi\rangle|^2.$$

Tento vztah se nazývá *Parsevalova rovnost*. I pro zobecněné funkce můžeme zavést obdobu relací úplnosti. Je-li \hat{A} libovolný samosdružený operátor se spojitým spektrem a $|a\rangle$ je zobecněný vlastní vektor příslušející k vlastní hodnotě a , normovaný k δ -funkci potom

$$\int_{a_{min}}^{a_{max}} |a\rangle\langle a| da = I,$$

kde a_{min} a a_{max} je minimální a maximální hodnota ve spektru \hat{A} .

Podobně můžeme zapsat Parsevalovu rovnost

$$\| |\psi\rangle \|^2 = \int_{a_{min}}^{a_{max}} |\langle a|\psi\rangle|^2 da \equiv \int_{a_{min}}^{a_{max}} |\psi(a)|^2 da.$$

1.2 Operátory

Definiční obor operátoru \hat{A} budeme značit $D(\hat{A})$ a obor hodnot jako $R(\hat{A})$.

1.2.1 Omezené operátory

Mějme normovaný lineární prostor V , lineární operátor \hat{B} nazveme *omezený*, pokud existuje $c \geq 0$, že pro všechny $x \in V$ platí

$$\| \hat{B}x \| \leq c \| x \|, \tag{1.1}$$

množinu omezených operátorů na V označíme $\mathfrak{B}(V)$ a nejmenší číslo c splňující (1.1) je norma operátoru $\hat{A} \in \mathfrak{B}(V)$. Množina $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tvoří vzhledem k normě (1.1) Banachův prostor (úplný vektorový prostor s normou).

Ke každému operátoru $\hat{A} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ můžeme z Rieszova lemmatu najít *sdužený* operátor $\hat{A}^\dagger \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ splňující

$$\langle \psi | \hat{A} \varphi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi | \varphi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}.$$

Omezený operátor splňující $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ nazveme *hermitovský*. Operátor \hat{A} nazveme *antihermitovský*, pokud je $i\hat{A}$ hermitovský. Omezený operátor \hat{A} splňující rovnost $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$ nazveme *normální*. Operátor \hat{U} je *unitární*, pokud $D(\hat{U}) = \mathcal{H}$ a platí $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$.

Operátor \hat{A} je *pozitivní* ($\hat{A} \geq 0$) je-li jeho kvadratická forma kladná

$$\langle \psi | \hat{A} \psi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Hermitovský operátor \hat{E} na \mathcal{H} , který je *idempotentní* ($\hat{E}^2 = \hat{E}$) nazveme *ortogonální projektor*, množinu ortogonálních projektorů označíme jako $\mathcal{E}(\mathcal{H})$

V prostoru $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ nemusí posloupnost operátorů konvergovat v operátorové normě. Je proto nutné zavést i slabší typy konvergenčí. Říkáme, že posloupnost operátorů $\{\hat{A}_n\}$ konverguje k \hat{A}

- unitárně, pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{A}_n - \hat{A}\| = 0$ a značíme u -lim
- silně, pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\hat{A}_n - \hat{A})\psi\| = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$ a značíme s -lim
- slabě, pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi | (\hat{A}_n - \hat{A}) \varphi \rangle = 0 \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}$ a značíme w -lim
- *-slabě, pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr}((\hat{A}_n - \hat{A})T) = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ a značíme w^* -lim

1.2.2 Neomezené operátory

V případě neomezených operátorů nastává problém s definicí hermitovského sdužení protože Rieszovo lemma platí jen pro spojité funkcionály. Důsledek je, že sdužený operátor nebude definovaný na celém \mathcal{H} . Necht \hat{A} je hustě definovaný operátor, potom označíme $D(\hat{A}^\dagger)$ množinu vektorů ψ_1 , pro které existuje ψ_2 splňující rovnici

$$\langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\hat{A}).$$

Nyní definujeme operátor \hat{A}^\dagger s definičním oborem $D(\hat{A}^\dagger)$ tak, že $\hat{A}^\dagger \psi_1 := \psi_2$. Definiční obor \hat{A} je podmnožinou $D(\hat{A}^\dagger)$. Hustě definovaný operátor, se nazývá *symetrický*, pokud

$$\hat{A} \varphi = \hat{A}^\dagger \varphi \quad \forall \varphi \in D(\hat{A}).$$

Pokud navíc je $D(\hat{A}) = D(\hat{A}^\dagger)$, potom ho nazveme *samosdužený*.

1.2.3 Hilbert-Schmidtovy operátory

Pro definici HS-operátorů je nejdříve nutné zavést stopu operátoru. Necht $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální báze \mathcal{H} , potom stopa \hat{A} je

$$\mathrm{Tr} \hat{A} := \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i | \hat{A} e_i \rangle \quad (1.2)$$

z definice snadno dokážeme nezávislost na volbě báze. Stopa součinu dvou operátorů je invariantní vůči jejich záměně

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \mathrm{Tr}(\hat{B}\hat{A})$$

a z toho plyne invariance stopy vůči transformaci operátoru

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{A}^{-1}) = \mathrm{Tr}(\hat{B}),$$

kde \hat{A} je libovolný invertibilní operátor.

Operátor $\hat{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ je *Hilbert-Schmidtův*, pokud

$$\mathrm{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{B}) < \infty, \quad (1.3)$$

kde operátor $\hat{B}^\dagger \hat{B}$ je pozitivní, protože $\langle \psi | \hat{B}^\dagger \hat{B} | \psi \rangle = \|\hat{B}\psi\|^2 \geq 0$. Pro HS-operátory můžeme zavést normu

$$\|\hat{B}\|_2 := \sqrt{\mathrm{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{B})}.$$

Mezi touto Hilbert-Schmidtovou normou a normou na $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ platí vztah $\|\hat{B}\|_2 \geq \|\hat{B}\|$. Navíc HS-operátory tvoří oboustranný ideál v $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, to znamená, že je-li \hat{A} omezený operátor a \hat{B} je Hilbert-Schmidtův operátor, potom jsou $\hat{A}\hat{B}$ i $\hat{B}\hat{A}$ také Hilbert-Schmidtovy operátory.

Na prostoru HS-operátorů zavedeme skalární součin takto

$$\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle := \mathrm{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})$$

a platí, že prostor Hilbert-Schmidtových operátorů s tímto skalárním součinem je Hilbertův. Podstatné je, že prostor HS-operátorů není úplný vzhledem k normě v $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Poslední triviální tvrzení je, že na konečně rozměrném vektorovém prostoru je každý operátor Hilbert-Schmidtův.

1.2.4 Jaderné operátory

Nyní zavedeme třídu operátorů, jejichž podmnožinou budou statistické operátory, což je velmi významná množina operátorů v kvantové mechanice.

Abychom mohli zavést tuto třídu operátorů, musíme zobecnit definici stopy i pro operátory, které nejsou pozitivní. Pro libovolný pozitivní operátor \hat{A} existuje jediný

operátor \hat{B} takový, že platí $\hat{B}^2 = \hat{A}$, operátor \hat{B} označíme jako $\sqrt{\hat{A}}$. Definujeme absolutní hodnotu z operátoru tímto vztahem

$$|\hat{A}| := \sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}}.$$

Jaderný operátor je $\hat{T} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, pro které platí

$$\text{Tr} |\hat{T}| < \infty.$$

Množinu jaderných operátorů označíme $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, dále na prostoru jaderných operátorů definujeme normu

$$\|\hat{A}\|_1 := \text{Tr} |\hat{A}|.$$

Jaderné operátory tvoří vzhledem k normě $\|\cdot\|_1$ Banachův prostor. Další vlastností operátorů z $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ je že tvoří oboustranným ideálem v $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Duální prostor k $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ je izomorfní s $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ a dualita je dána lineárním funkcionálem

$$f_B(\hat{T}) = \text{Tr}(\hat{T}\hat{B}) \quad \text{pro } \hat{T} \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \text{ a } \hat{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

Ke každému omezenému lineární zobrazení Λ na $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ existuje duální zobrazení $\Lambda^* : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ splňující

$$\text{Tr}(\Lambda(\hat{T})\hat{A}) = \text{Tr}(\hat{T}\Lambda^*(\hat{A})) \quad \forall \hat{T} \in \mathcal{T}(\mathcal{H}), \forall \hat{A} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}). \quad (1.4)$$

1.2.5 Statistický operátor

Statistický operátor, též zvaný *matice hustoty*, je pozitivní jaderný operátor s jednotkovou stopou. Množinu těchto operátorů budeme v této práci značit \mathcal{W} . Statistické operátory tvoří konvexní množinu, protože pro $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2 \in \mathcal{W}$ a $\alpha \in (0; 1)$ platí

$$\alpha\hat{\rho}_1 + (1 - \alpha)\hat{\rho}_2 \geq 0 \quad \text{Tr}(\alpha\hat{\rho}_1 + (1 - \alpha)\hat{\rho}_2) = 1.$$

Extrémní body konvexní množiny M jsou takové body m , že $\forall m_1, m_2 \in M$ a $\alpha \in (0, 1)$ splňující rovnost

$$m = \alpha m_1 + (1 - \alpha)m_2,$$

platí $m_1 = m_2 = m$. Extrémní body \mathcal{W} se nazývají čisté stavy a jsou to jednorozměrné projektory na \mathcal{H} . Z toho vyplývají dvě charakteristiky čistého stavu:

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad \|\hat{\rho}\| = 1.$$

Každý statistický operátor $\hat{\rho} \in \mathcal{W}$ tedy lze rozepsat jako konvexní kombinaci čistých stavů

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|,$$

kde vektory $|\psi\rangle$ jsou normované k jedné, $p_i > 0$ a $\sum_i p_i = 1$.

K popisu vlastností matice hustoty se používají některé funkcionály, nejčastěji entropie. Von-Neumannovo zobecnění Boltzmanovy entropie je dáno následující definicí

$$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i,$$

kde λ_i jsou vlastní čísla operátoru $\hat{\rho}$. Entropie je nezáporná konkávní funkce na \mathcal{W} , to znamená, že pro $p_j > 0$, $\sum_j p_j = 1$ a $\hat{\rho}_j \in \mathcal{W}$ platí

$$\sum_j p_j S(\hat{\rho}_j) \leq S\left(\sum_j p_j \hat{\rho}_j\right).$$

Entropií lze měřit smíšenost stavu a platí, že stav je čistý právě tehdy, když je jeho entropie nulová.

1.3 Tenzorový součin

Nechť $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ jsou dva Hilbertovy prostory se skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle_1, \langle \cdot | \cdot \rangle_2$. Realizací jejich *tenzorového součinu* nazveme libovolnou dvojici \mathcal{H}, φ , kde \mathcal{H} je Hilbertův prostor a bilineární zobrazení $\varphi : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \mapsto \mathcal{H}$ a $\varphi(x, y) \equiv x \otimes y$ splňující tyto podmínky

$$(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle, |\psi'\rangle \otimes |\varphi'\rangle) = \langle \psi | \psi' \rangle_1 \langle \varphi | \varphi' \rangle_2 \quad \forall |\psi\rangle, |\psi'\rangle \in \mathcal{H}_1 \quad \forall |\varphi\rangle, |\varphi'\rangle \in \mathcal{H}_2 \quad (1.5)$$

$$\text{množina } M = \{\varphi \otimes \varphi'; \varphi \in \mathcal{H}_1, \varphi' \in \mathcal{H}_2\} \quad \text{je totální v } \mathcal{H}. \quad (1.6)$$

V dalším textu, pokud to nebude nezbytně nutné, budeme znak \otimes vynechávat.

V konečně rozměrném případě lze pomocí Schmidty dekompozice [11] ke každému prvku $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ najít bázi $|\sigma_i^{(1)}\rangle$ prostoru \mathcal{H}_1 a bázi $|\sigma_i^{(2)}\rangle$ prostoru \mathcal{H}_2

$$\psi = \sum_i s_i |\sigma_i^{(1)}\rangle |\sigma_i^{(2)}\rangle,$$

kde Schmidty koeficienty s_i jsou reálná nezáporná čísla a počet prvků sumy odpovídá dimenzi menšího z prostorů \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2

Například je-li $\dim \mathcal{H}_1 = 3$ a $\dim \mathcal{H}_2 = 2$, a mají-li vektory $|x\rangle \in \mathcal{H}_1$ a $|y\rangle \in \mathcal{H}_2$ v dané bázi tento tvaru

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

potom pokud má vektor $|x\rangle|y\rangle$ tento tvar

$$|x\rangle|y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_1 \\ x_3 y_2 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

tak splňuje vlastnosti (1.5) a (1.6). Každá jiná realizace tenzorového součinu je s touto izomorfní. Necht' jsou dány operátory \hat{A}_1, \hat{A}_2 na \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2 . Tenzorový součin těchto operátorů definujeme

$$\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2 |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle = |\hat{A}_1 \psi_1\rangle |\hat{A}_2 \psi_2\rangle \quad (1.8)$$

a tento vztah lineárně rozšíříme na celé $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Definiční obor $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ je

$$D(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2) = D(\hat{A}_1) \otimes D(\hat{A}_2).$$

Uvedeme zde jeden konkrétní příklad realizace tenzorového součinu. Necht' $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ a $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ jsou matice operátorů

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

potom je matice operátorů $C = A \otimes B \in \mathbb{R}^{6,6}$ rovna

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}\hat{B} & a_{12}\hat{B} & a_{13}\hat{B} \\ a_{21}\hat{B} & a_{22}\hat{B} & a_{23}\hat{B} \\ a_{31}\hat{B} & a_{32}\hat{B} & a_{33}\hat{B} \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

což se dá ověřit dosazením (1.9) a (1.7) do vzorce (1.8). Označme vlastní čísla operátoru \hat{A} jako a_i a vlastní vektory $|a_i\rangle$ a podobně pro operátor \hat{B} označme vlastní čísla b_i a vektory $|b_i\rangle$. Potom jsou vlastní čísla a vektory operátoru $\hat{A} \otimes \hat{B}$ dány takto

$$\text{vlastní vektory: } |a_i\rangle |b_j\rangle \quad \text{vlastní čísla: } a_i b_j \quad \forall i, j.$$

Dále se budeme zabývat vlastnostmi tenzorových součinů operátorů. Jsou-li dány operátory $\hat{A}_1 \in \mathcal{T}_1$ a $\hat{A}_2 \in \mathcal{T}_2$ potom pro ně platí

$$\text{Tr}(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2) = \text{Tr}(\hat{A}_1) \text{Tr}(\hat{A}_2). \quad (1.10)$$

Jsou-li $\hat{\rho}_1$ a $\hat{\rho}_2$ matice hustoty pak ze vztahu (1.10) a (1.5) plyne, že $\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ je také matice hustoty. Pro entropii tenzorového součinu matic hustoty platí

$$S(\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2) = S(\hat{\rho}_1) + S(\hat{\rho}_2).$$

Z toho plyne, že tenzorový součin čistých stavů je opět čistý stav.

Jestliže $\hat{\rho}$ je statistický operátor na $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, potom je následujícím vztahem dán jednoznačně statistický operátor $\hat{\rho}_1 \in \mathcal{W}(\mathcal{H}_1)$

$$\text{Tr} \hat{\rho}_1 \hat{A} = \text{Tr}(\hat{\rho}(\hat{A} \otimes I_2)) \quad \forall \hat{A} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1),$$

kde I_2 je operátor identity na \mathcal{H}_2 . Tato operace se nazývá *částecná stopa* a statistický operátor $\hat{\rho}_1$ definovaný tímto vztahem se nazývá *redukováná matice hustoty*

$$\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_{\mathcal{H}_2} \hat{\rho}.$$

Ekvivalentní definice matice částečná stopy v bázi $\{a_i\}$ v \mathcal{H}_1 a bázi $\{b_\nu\}$ v \mathcal{H}_2 takto

$$\langle a_i | \text{Tr}_{\mathcal{H}_2}(\rho) | a_j \rangle = \sum_{\nu} \langle a_i \otimes b_\nu | \rho | a_j \otimes b_\nu \rangle.$$

Jsou-li $\hat{\rho}_1 \in \mathcal{W}(\mathcal{H}_1)$ a $\hat{\rho}_2 \in \mathcal{W}(\mathcal{H}_2)$ dá se ověřit, že

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_2} \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_1 \quad \text{Tr}_{\mathcal{H}_1} \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_2.$$

Ale částečná stopa čistého stavu již nemusí být čistý stav. Je-li počet nenulových prvků Schmidty dekompozice tohoto stavu větší než jedna, potom se jedná o provázaný stav obou podsystémů a entropie udává míru provázání. Není-li celý systém v čistém stavu, potom je určení míry provázání komplikovanější a používá se více různých způsobů, ale všechny přecházejí pro čistý stav von Neumanovu entropii. Je-li $\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_{\mathcal{H}_2} \hat{\rho}$ a $\hat{\rho}_2 = \text{Tr}_{\mathcal{H}_1} \hat{\rho}$, potom pro entropii platí nerovnost

$$S(\hat{\rho}) \leq S(\hat{\rho}_1) + S(\hat{\rho}_2)$$

a rovnost nastává právě tehdy, když je $\hat{\rho}$ tenzorovým součinem $\hat{\rho}_1$ a $\hat{\rho}_2$, to znamená, že systémy nejsou provázané.

1.4 Postuláty kvantové mechaniky

V této podkapitole zavedeme stručně základní postuláty kvantové mechaniky. Znění postulátů je převzato z [5]. První postulát nám říká, jak je možné matematicky popsat stav kvantového systému.

*P 1.1 Každému kvantovému systému přísluší komplexní Hilbertův prostor \mathcal{H} , který nazýváme **stavovým prostorem** daného systému.*

*P 1.2 Každému stavu uvažovaného systému odpovídá nějaký **paprsek**, tj. jednorozměrný podprostor v \mathcal{H} .*

Stav systému definujeme jako výsledek posloupnosti fyzikálních operací provedených na systému, které dohromady tvoří přípravu tohoto stavu. Navíc, zachováme-li při přípravě všechny podstatné podmínky, získáme vždy stejný stav. Obvykle se předpokládá, že \mathcal{H} je navíc separabilní prostor.

P 1.3 Každé pozorovatelné daného systému odpovídá nějaký samosdružený operátor na \mathcal{H} .

Pozorovatelná je veličina kvantového systému, u které lze měřicími přístroji určit její hodnotu, například poloha a hybnost částice.

Protože se budeme v další kapitole zabývat jevy spojenými s dekoherencí, je nutné použít obecnější popis systému než pomocí paprsků v \mathcal{H} . Postulát P 1.2 lze zobecnit takto

P 1.2 Každému stavu odpovídá nějaký operátor hustoty $\hat{\rho} \in \mathcal{W}$ na stavovém prostoru \mathcal{H} .

Další postulát nám říká jak se systém vyvíjí v čase.

P 2.1 Časový vývoj systému je popsán unitárním propagátorem a platí

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, s)\hat{\rho}(s)\hat{U}(t, s)^\dagger \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

kde $\hat{\rho}(t)$ je stav v čase t .

P 2.2 Je-li systém konzervativní, potom má propagátor tvar

$$\hat{U}(t, s) = \hat{U}(t - s) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-s)},$$

kde \hat{H} je hamiltonián tohoto systému. Navíc propagátor $\hat{U}(t)$ tvoří jednoparametrickou silně spojitou grupu.

Unitární propagátor je množina $\{\hat{U}(t, s); s, t \in \mathbb{R}\}$ unitárních operátorů na \mathcal{H} , pro které platí

1. $\hat{U}(t, s)\hat{U}(s, u) = \hat{U}(t, u) \quad \forall s, t, u \in \mathbb{R}$
2. zobrazení $(s, t) \mapsto \hat{U}(s, t)$ je silně spojitě na \mathbb{R}^2 .

V postulátu *P 2.1* předpokládáme, že systém je buď izolovaný nebo interaguje s vnějším makroskopickým polem, které není kvantovým systémem ovlivňováno. V další kapitole uvidíme, že není-li tento předpoklad splněn, potom nemusí být časový vývoj systému unitární. Lze dokázat, že pokud pro definiční obor \hat{H} platí

$$\hat{\rho}(s)D(\hat{H}) \subset D(\hat{H}),$$

pro nějaký čas $s \in \mathbb{R}$ potom $\forall \psi \in D(\hat{H})$ a $t \in \mathbb{R}$ je funkce $t \mapsto \hat{\rho}_t \psi$ diferencovatelná a časový vývoj systému je dán kvantovou Liouvilleovu rovnicí

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) \psi = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \psi \quad \forall \psi \in D(\hat{H}). \quad (1.12)$$

Následující postulát se týká popisu systémů složených z konečného množství pod-systémů.

P 3.1 Stavový prostor složeného systému je tenzorovým součinem stavových prostorů podsystémů

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n.$$

v postulátu předpokládáme, že prostory \mathcal{H}_i jsou navzájem různé, není-li tomu tak, musíme jako stavový prostor vzít podprostor \mathcal{H} symetrických, resp. antisymetrických funkcí odpovídajících bosonům, resp. fermionům.

Pro srovnání stavový prostor klasického systému je dán direktním součtem stavových prostorů podsystémů. Tento postulát má několik neintuitivních důsledků. Stav složeného systému nelze, kromě speciálních případů, rozložit do tenzorového

součinu podsystémů. Mezi algebrou pozorovatelných \mathcal{A} složeného systému a jeho podsystémů \mathcal{A}_i platí vztah

$$\mathcal{A} \supset \bigotimes_i \mathcal{A}_i,$$

takže opět až na speciální případy nelze pozorovatelnou na \mathcal{H} zapsat jako tenzorový součin pozorovatelných na \mathcal{H}_i .

Další postuláty se týkají kvantového měření:

\mathcal{P} 4.1 *Možnými výsledky měření veličiny A jsou body ze spektra příslušejícího operátoru \hat{A} .*

\mathcal{P} 4.2 *Pravděpodobnost toho, že na systém ve stavu $\hat{\rho}$ naměříme hodnotu pozorovatelné A ležící v borelovské množině $\Delta \subset \mathbb{R}$ je rovna*

$$\mu_\rho^A(\Delta) = \text{Tr}(\hat{E}_A(\Delta)\hat{\rho}), \quad (1.13)$$

μ_ρ^A je pravděpodobnostní míra pozorovatelné A ve stavu $\hat{\rho}$ a E_A je spektrální míra \hat{A} .

\mathcal{P} 4.3 *Nechť je systém před měřením ve stavu $\hat{\rho}$. Naměříme-li hodnotu pozorovatelné A v množině Δ , potom je stav po měření popsán statistickým operátorem $\hat{\rho}'$*

$$\hat{\rho}' = \frac{\hat{E}_A(\Delta)\hat{\rho}\hat{E}_A(\Delta)}{\text{Tr}(\hat{E}_A(\Delta)\hat{\rho})}, \quad (1.14)$$

pokud je pravděpodobnost naměření hodnoty z Δ nenulová.

Pro střední hodnotu veličiny A ve stavu $\hat{\rho}$, kterou budeme značit $\langle A \rangle_\rho$ plyne z postulátu \mathcal{P} 4.2

$$\langle A \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} x \mu_\rho^A(dx) = \int_{\mathbb{R}} x \text{Tr}(\hat{E}_A(dx)\hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}).$$

Měříme-li výsledek n kompatibilních pozorovatelných¹ \hat{A}_i , zavádíme spektrální míru \hat{E} , že $\forall \Delta_1, \dots, \Delta_n \subset \mathbb{R}$ platí

$$\hat{E}(\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n) = \hat{E}_{A_1}(\Delta_1) \dots \hat{E}_{A_n}(\Delta_n).$$

Pravděpodobnostní míra i stav po měření jsou dány opět vztahy (1.13), (1.14). Při měření se nezachovává unitarita časového vývoje, protože zobrazení (1.14) nemusí být unitární.

¹pozorovatelné jsou kompatibilní právě tehdy, když jejich operátory komutují.

Kapitola 2

Vývoj otevřených systémů

Postulát $\mathcal{P}2.1$ z předchozí kapitoly nám říká jak se bude vyvíjet uzavřený systém. Interaguje-li systém s okolím, tak nemůžeme k popisu jeho časového vývoje použít propagátory z postulátu $\mathcal{P}2.1$. V této kapitole si ukážeme jak lze vývoj takového systému popsat pomocí Markovovi rovnice a dynamických semigrup.

2.1 Dynamika redukováných systémů

Nejjednodušší model otevřeného systému \mathcal{S} lze získat, pokud se tento systém obklopí rezervoárem \mathcal{R} , se kterým interaguje. Stavový prostor celého systému $\mathcal{S} + \mathcal{R}$ je potom

$$\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{R}}.$$

Hamiltonián celého systému H_{tot} ¹ lze napsat v tomto tvaru

$$H_{tot} = H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{R}} + H_{int},$$

$H_{\mathcal{S}}$ a $H_{\mathcal{R}}$ jsou hamiltoniány jednotlivých uzavřených systémů a H_{int} je hamiltonián vzájemné interakce. Předpokládejme, že máme v čase $t = 0$ systém ve faktorizovaném stavu $\omega_0 = \rho_0 \otimes \sigma_0 \in \mathcal{H}_{tot}$. Vývoj celkového systému je unitární, proto v libovolném čase $t > 0$ existuje unitární operátor U , splňující

$$\omega_t = U\omega_0U^\dagger.$$

Stav systému \mathcal{S} získáme částečnou stopou operátoru ω přes \mathcal{R}

$$\rho = \text{Tr}_{\mathcal{R}}(U\rho_0 \otimes \sigma_0U^\dagger),$$

vztahem $\rho = \Psi\rho_0$ je definováno lineární zobrazení Ψ . Na rozdíl do vývoje uzavřeného systému, toto zobrazení udává nevratný vývoj systému a nemusí mít tvar (1.11). Ten by mělo, pokud by $H_{int} = 0$. Zvolme bázi $\{b_\nu\}$ prostoru $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ takovou, aby v ní měla matice σ_0 diagonální tvar

$$\sigma_0 = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} |b_{\nu}\rangle\langle b_{\nu}|$$

¹v následujících kapitolách budeme stříšky nad operátory vynechávat

a libovolnou bázi $\{a_k\}$ prostoru \mathcal{H}_S . Spočteme-li částečnou stopu vzhledem k \mathcal{H}_R v těchto bázích, získáme maticový zápis Ψ

$$(\Psi\rho)_{kl} = \sum_{\mu,\nu,m,n} \lambda_\nu U_{m\nu}^{k\mu} \rho_{mn} \bar{U}_{l\mu}^{n\nu}.$$

Pokud zavedeme operátory A_α tak, že $\{\alpha\} \equiv \{(\mu, \nu)\}$, $(A_\alpha)_{kn} = \sqrt{\lambda_\nu} U_{k\mu}^{m\nu}$, vyjde předpis pro Ψ

$$\Psi\rho = \sum_\alpha A_\alpha \rho A_\alpha^\dagger \quad \sum_\alpha A_\alpha^\dagger A_\alpha = I, \quad (2.1)$$

kde takto získané Ψ budeme nazývat *dynamické zobrazení*.

2.2 Úplně pozitivní zobrazení

Aby zobrazovalo dynamické zobrazení pozitivní matice hustoty opět na matice hustoty i tehdy je-li systém provázaný s dalším systémem, musí dynamická zobrazení splňovat speciální podmínku, *úplnou pozitivitu*. Začneme definicí úplně pozitivního zobrazení. Nechť \mathcal{U} je C^* -algebra operátorů, což je podprostor $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, uzavřený vzhledem ke sdružení (involuci) a uzavřený v operátorové normě. Zobrazení Φ je úplně pozitivní, pokud pro všechna $N \in \mathbb{N}$ a libovolnou matici $(X_{jk})_{j,k=1}^N$ s prvky $X_{jk} \in \mathcal{U}$, která je pozitivně definitní ve smyslu, že

$$\sum_{j,k=1}^N \langle \psi_j | X_{jk} | \psi_k \rangle \geq 0 \quad \forall \{\psi_l\}_{l=1}^N \in \mathcal{H}$$

je matice $(\Phi(X_{jk}))_{j,k=1}^N$ také pozitivně definitní

$$\sum_{j,k=1}^N \langle \psi_j | \Phi(X_{jk}) | \psi_k \rangle \geq 0 \quad \forall \{\psi_l\}_{l=1}^N \in \mathcal{H}.$$

Ekvivalentní definice, pro všechny $N \in \mathbb{N}$, libovolnou posloupnost operátorů $\{X_j\}_{j=1}^N \in \mathcal{U}$ a vektorů $\{\psi_k\}_{k=1}^N \in \mathcal{H}$ platí

$$\sum_{j,k=1}^N \langle \psi_j | \Phi(X_j^\dagger X_k) | \psi_k \rangle \geq 0.$$

Označíme Φ jako duální zobrazení k Ψ ze vztahu (2.1), $\Phi = \Psi^*$. Dá se dokázat (viz [9]), že zobrazení Φ je úplně pozitivní. A naopak, je-li Φ úplně pozitivní, potom existuje prostor \mathcal{H}_0 , stav $\omega \in \mathcal{H}_0$ a unitární operátor U na $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_0$ tak, že platí

$$\Psi(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_0} U(\rho \otimes \omega)U^\dagger.$$

2.3 Dynamické semigrupy

K určení časového vývoje otevřeného systému potřebujeme znát jedno-parametrickou množinu zobrazení

$$\{\Psi_t, t > 0\},$$

keré zobrazují stav v čase $t = 0$ do stavu v čase $t > 0$. Obecné nalezení této množiny může být velmi obtížné. Nicméně se ukazuje, že vývoj mnoha fyzikálních systémů lze zapsat pomocí kvantově dynamických semigrup [1]. Kvantově dynamická semigrupa na stavovém prostoru je množina dynamických zobrazení $\{\Psi_t, t \in \mathbb{R}^+\} \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ splňujících

1. $\Psi_t \cdot \Psi_s = \Psi_{t+s}$ pro $t, s \in \mathbb{R}^+$
2. $\Psi_0 = I$
3. zobrazení $\{\Psi_t\}$ z $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathfrak{B}(\mathcal{T}(\mathcal{H}))$ je silně spojitě, tedy spojitě v normě na $\mathcal{T}(\mathcal{H})$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\Psi_t(T) - T\|_1 = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}).$$

Pokud se budeme zajímat o časový vývoj v Heisenbergově obraze musíme zavést dynamickou semigrupu Φ_t na prostoru pozorovatelných. Ta splňuje stejné podmínky jako Ψ_t , s tím rozdílem, že požadujeme pouze w^* -spojitost

$$w^* - \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_t(X) = X \quad \forall X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

Vztahem

$$\mathcal{K}(T) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\Psi_t(T) - T}{t} \quad \forall T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \quad (2.2)$$

je určen hustě definovaný infinitesimální generátor Ψ_t a platí $\Psi_t = \exp(\mathcal{K}t)$ pro $t \geq 0$. Je-li Ψ_t stejnoměrně spojitě, potom je \mathcal{K} všude definované omezené zobrazení. Časový vývoj systému splňuje ústřední Markovovu rovnici

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \mathcal{K}(\rho_t), \quad (2.3)$$

V případě uzavřeného systému přechází tato rovnice na Liouvilleovu rovnici. Podobně v Heisenbergově obraze pro vývoj pozorovatelné X_t platí

$$\frac{dX_t}{dt} = \mathcal{L}(X_t) = \mathcal{K}^*(X_t).$$

Nyní odvodíme obecný tvar \mathcal{K} pro konečné N -rozměrné prostory [1]. Zavedeme bázi $\{B_k\}_{k=0}^{N^2-1}$ v prostoru $\mathcal{T}(\mathcal{H}_S)$ takovou, že $B_0 = I$ a zapíšeme v ní Ψ_t rozložené podle vzorce (2.1)

$$\Psi_t \rho = \sum_{k,l=0}^{N^2-1} C_{kl}(t) B_k \rho B_l^\dagger$$

a $(C_{kl})_{k,l=0}^{N^2-1}$ je pozitivně definitní komplexní matice. Dosadíme do definice \mathcal{K} (2.2)

$$\mathcal{K}\rho = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \left((C_{00}(t) - 1) B_0 \rho B_0^\dagger + \sum_{k=1}^{N^2-1} (C_{0k}(t) B_k \rho B_0^\dagger + C_{k0}(t) B_0 \rho B_k^\dagger) + \sum_{k,l=1}^{N^2-1} C_{kl}(t) B_k \rho B_l^\dagger \right)$$

Využijeme toho, že C_{kl} je symetrická matice a $B_0 = I$. Definujeme operátor A

$$A = \sum_{k=1}^{N^2-1} a_{0k} B_k,$$

kde označíme $a_{kl} = \lim_{t \searrow 0} C_{kl}(t)/t$. Protože je $\Psi_t^*(I) = I$, platí $C_{00} \equiv 1$ a získáme generátor \mathcal{K} ve tvaru

$$\mathcal{K}\rho = A\rho + \rho\hat{A}^\dagger + \sum_{k,l=1}^{N^2-1} a_{kl}B_k\rho B_l^\dagger, \quad (2.4)$$

matice $(a_{kl})_{k,l=1}^{N^2-1}$ je také pozitivně definitní. Využijeme toho, že zobrazení Ψ_t zachovává stopu, z čehož plyne podmínka $\text{Tr}(\mathcal{K}\rho) = 0$ a $\mathcal{K}^*(I) = 0$, kterou dosadíme do (2.4)

$$A + A^\dagger = - \sum_{k,l=1}^{N^2-1} a_{kl}B_k^\dagger B_l.$$

Matici A rozdělíme na reálnou a imaginární část, záporně vzatou imaginární část označíme jako operátor H/\hbar a za reálnou dosadíme z předchozího vztahu

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) + i\frac{1}{2i}(A - A^\dagger) = -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{N^2-1} a_{kl}B_k^\dagger B_l - \frac{i}{\hbar}H,$$

to samé provedeme i s A^\dagger a dosadíme vztah (2.4)

$$\mathcal{K}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{N^2-1} a_{kl} \left([B_k\rho, B_l^\dagger] + [B_k, \rho B_l^\dagger] \right), \quad (2.5)$$

porovnání tohoto vztahu s Liouvilleovou rovnicí (1.12) je vidět, že operátor H má význam hamiltoniánu, který nemusí odpovídat hamiltoniánu systému kdyby byl uzavřený a za druhou část ve vztahu je zodpovědná interakce s rezervoárem. Vztah (2.5) můžeme „diagonalizovat“. V konečně rozměrném případě lze vždy nalézt množinu posloupností $\{\beta^\alpha\}_{\alpha=1}^{N^2-1}$, že

$$a_{ij} = \sum_{\alpha} \beta_i^\alpha \bar{\beta}_j^\alpha.$$

Definujeme operátor $V_\alpha = \sum_i \beta_i^\alpha B_i$, poté získá předpis pro \mathcal{K} tento tvar

$$\mathcal{K}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left([V_\alpha\rho, V_\alpha^\dagger] + [V_\alpha, \rho V_\alpha^\dagger] \right), \quad (2.6)$$

Tento vztah se nazývá Lindbladovská forma. Bylo dokázáno v článku [13], že toto je nejobecnější tvar omezeného generátoru \mathcal{K} i na separabilních nekonečně rozměrných Hilbertových prostorech.

Při odvozování přibližné Markovovy rovnice se používají různé aproximace. Například se předpokládá, že je interakce mezi systémem \mathcal{S} a rezervoárem \mathcal{R} je slabá a nebo tzv. Markovova aproximace, které je založená a předpokladu, že stav systému závisí pouze na stavech, které mu bezprostředně předcházely [1].

Dokážeme-li nalézt nějakým způsobem operátory V_α , tak získáme předpis pro časový vývoj takového systému a můžeme vyšetřit jeho dynamiku, nalézt asymptotický stav atd.

Kapitola 3

Kvantové sítě

3.1 Kvantové obvody

Kvantové obvody jsou obdobou klasických logických obvodů, s tím rozdílem, že logická hradla jsou nahrazena jejich kvantovými analogiemi. Informace se obvykle přenáší pomocí qubitů, obecněji qupitů, což jsou p-hladinové systémy. Qubit je kvantová analogie klasického bitu pomocí vektoru v dvourozměrném Hilbertově prostoru. Je-li systém složen z více qubitů, potom je jejich stavový prostor dán tenzorovým součinem jednotlivých dvourozměrných prostorů. Báze takového prostoru tvořená tenzorovými součiny vektorů $|0\rangle, |1\rangle$. Budeme je označovat zkráceným zápisem

$$|j_1 \dots j_n\rangle := |j_1\rangle \dots |j_n\rangle \quad j_i \in \{0, 1\}.$$

Příkladem fyzikální realizace qubitů je třeba částice se dvěma dobře definovanými hladinami nebo dvě polarizace fotonu.

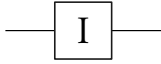
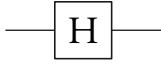
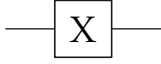
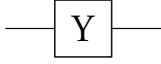
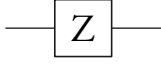
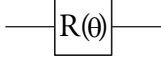
Kvantová hradla představují základní stavební prvky kvantových obvodů a jsou reprezentována pomocí unitárních operátorů působících na stavovém prostoru systému. Kvantové obvody budeme zakreslovat podobně jako klasické logické obvody, stavový systém n qubitů budeme znázorňovat jako n cest jdoucích zleva doprava. Podobně, počet vstupů do hradla bude odpovídat tomu na kolik qubitů hradlo působí. Pro definici N -qubitového hradla stačí zadat, jak působí na báze vektory nebo ekvivalentně pomocí matice v 2^N -rozměrném prostoru.

Nejjednodušší hradla jsou jednoqubitová. V tabulce (3.1) jsou uvedena ta nejběžnější hradla, spolu s unitárním operátorem pomocí kterého působí.

Příkladem více qubitových hradel jsou taková kvantová hradla, kde je vykonání daného unitárního operátoru na druhém qubitů kontrolováno stavem prvního qubitů. Označení a univerzální matice těchto hradel je v tabulce (3.2).

V dalších kapitolách se budeme hlouběji zabývat hradlem kontrolovaného fázového posunu.

Nyní zavedeme pojem *kvantové sítě*. Tak budeme nazývat n qubitů a množinu hradel působících na tomto systému. Analogicky ke klasické síti z teorie grafů, budou qubity

Jednotkové		$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Hadamardovo		$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
Pauliho X		$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Pauliho Y		$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
Pauliho Z		$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Fázové		$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$

Tabulka 3.1: Základní jednoqubitová hradla



$$W_{CU} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{U} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tabulka 3.2: Příklad dvou qubitového hradla, kontrolované hradlo U

představovat vrcholy sítě a dvouqubitová hradla tvoří hrany. Více qubitová hradla získáme složením jedno a dvou qubitových hradel [11]. Podobně zavedeme *náhodnou unitární síť*, která lze reprezentovat váženým grafem, kde váha každé hrany odpovídá pravděpodobnosti, se kterou daná unitární operace může nastat.

Vlastnosti sítě budou ovlivněny jak hradly, které použijeme, tak i jejich uspořádáním. Jedno z možných uspořádání je *maximálně propojená síť*, kde je každý uzel spojen s každým.

3.2 Dynamické matice

Před tím, než se pustíme do zkoumání vlastností kvantových sítí, musíme odvodit několik podstatných tvrzení. Některé důkazy a základní vlastnosti dynamických matic, které zde byly použity, jsou uvedeny v publikacích [2, 6, 15].

Každý operátor $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_p)$ na konečně rozměrném Hilbertově prostoru lze v dané bázi zapsat jako matici, tedy prvek prostoru $\mathbb{C}^{p,p}$. Tento prostor je izomorfní s prostorem \mathbb{C}^{p^2} [17], proto můžeme každou matici interpretovat jako p^2 -rozměrný vektor. Označíme-li složku operátoru $\rho \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_p)$ v bázi $\{e_i\}_{i=1}^p$ jako $\rho_{m\mu}$, potom danému

operátoru odpovídá vektor

$$\rho = (\rho_{11}, \rho_{12}, \dots, \rho_{21}, \dots, \rho_{pp}). \quad (3.1)$$

Pokud to bude výhodné, budeme nazývat prvky $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_p)$ vektory a budeme s nimi i tak zacházet. Každé lineární zobrazení na $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_p)$ lze reprezentovat maticí v \mathbb{C}^{p^2} , například zobrazení $\Phi : \mathfrak{B}(\mathcal{H}_p) \mapsto \mathfrak{B}(\mathcal{H}_p)$ lze zapsat jako matici a její prvky označit Φ_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, p^2\}$, ale jak dále ukážeme, je praktičtější využít indexace pomocí čtyř indexů. Zobrazení Φ z prostoru operátorů do prostoru operátorů budeme nazývat *superoperátor*. Využijeme toho, že zobrazení Φ může představovat jak operátor v \mathcal{H}_{p^2} , tak i operátor na tenzorovém součinu $\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_p$. Zvolíme-li na prvním prostoru bázi $\{a_i\}_{i=1}^p$ a na druhém $\{b_j\}_{j=1}^p$, potom je možné Φ zapsat jako

$$\Phi_{n\nu}^{m\mu} = \langle a_m | \langle b_\mu | \Phi | a_n \rangle | b_\nu \rangle, \quad (3.2)$$

kde $m, n, \mu, \nu \in \{1, \dots, p\}$. Kroneckerův součin matic $A, B \in \mathbb{C}^{p,p}$, $C = A \otimes B$, uvedený v 1. kapitole vzorec (1.9), lze rozepsat po prvcích

$$C_{n\nu}^{m\mu} = A_{mn} B_{\mu\nu}.$$

Následující vzorec nám umožní zapsat některá zobrazení na $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_p)$ jako lineární zobrazení na \mathcal{H}_{p^2}

$$ABC = \Phi \mathbf{B}, \quad (3.3)$$

kde zobrazení $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{p^2})$ je definováno jako $\Phi = A \otimes C^T$ a matice ABC je vektor z \mathbb{C}^{p^2} přerovnaný podle vzorce (3.1). Důkaz tohoto vztahu je snadný,

$$(\Phi \mathbf{B})_{m\mu} = \sum_{n,\nu=1}^p \Phi_{n\nu}^{m\mu} B_{n\nu} = \sum_{n,\nu=1}^p A_{mn} C_{\nu\mu} B_{n\nu} = \sum_{\nu=1}^p \left(\sum_{n=1}^p A_{mn} B_{n\nu} \right) C_{\nu\mu} = (ABC)_{m\mu}.$$

Tento vztah umožňuje přepsat dynamické zobrazení dané v Krausově tvaru [10]

$$\Phi(X) = \sum_i A_i X A_i^\dagger.$$

Položíme-li ve vzorci (3.3) $A = A_i$, $C = A_i^\dagger$, tak získáme předpis pro Φ

$$\Phi = \sum_i A_i \otimes \overline{A_i},$$

kde $\overline{A_i}$ znamená komplexní sdružení.

Přerovnaním prvků matice $\Phi_{n\nu}^{m\mu}$ dostaneme *dynamickou matici* $D(\Phi)$ definovanou vztahem

$$D(\Phi)_{\mu\nu}^{mn} \equiv \Phi_{n\nu}^{m\mu}.$$

Dynamické matice mají mnoho zajímavých vlastností. Jejich nejdůležitější vlastností je, že zobrazení Φ je úplně pozitivní právě tehdy, když $D(\Phi)$ je pozitivní. Je to

důsledek Choiho věty [7]. Také platí, že obrazem hermitovské matice při zobrazení Φ je opět hermitovská matice právě tehdy, když je $D(\Phi)$ hermitovská matice. Další dvě důležité vlastnosti jsou

- Φ zachovává stopu právě tehdy, když $\text{Tr}_A D(\Phi) = I$
- $\Phi(I) = I$ právě tehdy, když $\text{Tr}_B D(\Phi) = I$

Nechť Φ je zobrazení z $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_p$ a Tr_A resp. Tr_B znamená částečnou stopu přes subsystém A , resp. B . Nejdříve dokážeme tvrzení, že Φ zachovává stopu, potom

$$\text{Tr}(\Phi(T)) = \text{Tr} \left(\sum_i A_i T A_i^\dagger \right) = \text{Tr} \left(T \sum_i A_i^\dagger A_i \right) = \text{Tr}(T).$$

Tato rovnost platí pro všechny matice $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}^p)$. Pokud budeme stopu interpretovat jako Hilbert-Schmidtův skalární součin, potom odtud plyne, že Φ zachovává stopu právě tehdy, když $\sum_i A_i^\dagger A_i = I$.

$$\text{Tr}_A D(\Phi) = \sum_m D(\Phi)_{m\nu}^{mn} = \sum_m \Phi_{n\nu}^{mm} = \sum_m \sum_i A_{mn}^i \bar{A}_{m\nu}^i.$$

Zapíšeme-li rovnost $\sum_i A_i^\dagger A_i = I$, získáme hledaný vztah

$$\delta_{\nu n} = \sum_i \sum_m A_{\nu m}^i A_{mn}^i = \sum_m \sum_i A_{mn}^i \bar{A}_{m\nu}^i.$$

Podobně se dokáže, že je-li Φ unitární ($\Phi(I) = I$), platí vztahy $\sum_i A_i A_i^\dagger = I$ a $\text{Tr}_B D(\Phi) = I$

3.3 Náhodné unitární operátory

Nyní si zdefinujeme a prozkoumáme základní vlastnosti náhodných unitárních operátorů, protože jejich vlastnosti jsou klíčové k určení dynamiky náhodných unitárních sítí. Budou nás zajímat především asymptotické vlastnosti operátorů, stav systému do kterého dostane po dostatečném množství interakcí, ale také jak rychle se do toho asymptotického stavu dostane.

Náhodný unitární operátor je speciální případ obecného vývoje otevřeného systému reprezentovaného dynamickými zobrazeními. V knize [9] je uveden předpis Markovovy ústřední rovnice (2.2) pro konečněrozměrné systémy, jejichž vývoj je dán klasickými stochastickými procesy

$$\mathcal{K}(\rho) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_i ([A_i, \rho A_i] + [A_i \rho, A_i]) + \sum_j p_j (U_j \rho U_j^\dagger - \rho), \quad (3.4)$$

kde A_i jsou hermitovské operátory, U_i unitární, $p_i > 0$ a H je hamiltonián zkoumaného systému. Je to speciální případ vzorce (2.5). Budeme se zajímat jen o třídu

generátorů \mathcal{K} , kde jsou A_i nulové. Stavový prostor systému je dán jako tenzorový součin prostoru N částic (například $L_2(\mathbb{R}^{3N}, d^{3N}x)$) s prostorem vnitřních stavů volnosti qubitů¹ \mathbb{C}^{2^N} . Navíc budeme předpokládat, že hamiltonián H působí jen na $L_2(\mathbb{R}^{3N}, d^{3N}x)$ a operátor U_i jen \mathbb{C}^{2^N} .

Dále budeme uvažovat jen část zobrazení Φ působící na \mathbb{C}^{2^n} . Budeme potřebovat získat předpis pro diskrétní časový vývoj systému. Spíše než důkaz zde uvedme motivaci, jak toho lze dosáhnout. Položíme-li $t = 1$ ve vzorci (2.2), dostaneme z předpisu pro generátor (3.4)

$$\Phi_1(\rho) = \sum_j p_j U_j \rho U_j^\dagger. \quad (3.5)$$

Tento operátor budeme nazývat *náhodná unitární operace*. Diskrétní časový vývoj Φ_n bude dán opakovanou aplikací Φ_1

$$\Phi_n = (\Phi_1)^n,$$

z podmínky, aby zobrazení Φ_1 zachovávalo stopu pro libovolnou matici ρ plyne podmínka duální zobrazení Ψ na $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ (1.4) a na p_i ve vzorci (3.5)

$$\text{Tr}(\rho) = \text{Tr}(\Phi_1(\rho)) = \text{Tr}(\Psi(I)\rho) \Rightarrow \text{Tr}((\Psi(I) - I)\rho) = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{W}.$$

Takže Ψ je unitální, $\Psi(I) = I$. Navíc Ψ má tvar

$$\Psi(X) = \sum_j p_j U_j^\dagger X U_j,$$

stejný tvar má i duální zobrazení v konečně rozměrném prostoru vzhledem k Hilbert-Schmidtovu skalárnímu součinu. Z podmínky $\Psi(I) = I$ plyne, že $\sum_i p_i = 1$, navíc p_i byly kladné, proto je můžeme interpretovat jako pravděpodobnosti se kterou daná operace U_i může nastat.

Prozkoumejme asymptotické chování Φ^n . Pro normu Φ_1 platí

$$\|\Phi_1\| = \sup_{\rho \in \mathcal{W}} \|\Phi(\rho)\|_1 = \sup_{\rho \in \mathcal{W}} \text{Tr} \left(\left| \sum_i p_i U_i \rho U_i^\dagger \right| \right) \leq \sup_{\rho \in \mathcal{W}} \text{Tr} \left(\sum_i p_i U_i |\rho| U_i^\dagger \right) = \sup_{\rho \in \mathcal{W}} \|\rho\|_1 = 1,$$

kde $\|\cdot\|_1$ je norma v Banachově prostoru jaderných operátorů. Navíc Φ_1 nechává maximálně smíšený stav invariantní (je-li $\dim \mathcal{H} = d < \infty$)

$$\|\Phi_1(I/d)\|_1 = \|I/d\|_1 = 1.$$

Z toho plyne, že vlastní čísla Φ_1 jsou menší nebo rovna jedné. Nyní předpokládejme, že Φ_1 je normální tedy je i diagonalizovatelný. Nalezneme ortonormální bázi $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$

¹Mohli bychom uvažovat qupity (p-hladinové systémy), ale abychom si zjednodušili odvozování, omezíme se jen na qubity.

tvořenou vlastními vektory operátoru Φ_1 a označíme je X_i . Libovolný stav ρ lze rozepsat v této bázi

$$\rho = \sum_i \langle X_i, \rho \rangle_{HS} X_i = \sum_i \text{Tr}(X_i^\dagger \rho) X_i$$

a můžeme snadno spočítat stav ρ_n po n interakcích

$$\rho_n = \Phi^n(\rho) = \sum_i \lambda_i^n \text{Tr}(X_i^\dagger \rho) X_i. \quad (3.6)$$

Množinu vlastních čísel o velikosti jedna označíme $\sigma_{|1|}$. Všechny prvky spektra σ mimo $\sigma_{|1|}$ ve vzorci (3.6) půjdou limitně k nule, zůstanou pouze vlastní čísla z $\sigma_{|1|}$. Násobnost vlastního čísla λ označíme d_λ , vektory příslušející k vlastnímu číslu λ označíme X_λ^i a asymptotický stav, který označíme ρ_∞ má následující tvar

$$\rho_\infty(n) = \sum_{\lambda \in \sigma_{|1|}, i=1}^{d_\lambda} \lambda^n \text{Tr}(X_\lambda^{i\dagger} \rho) X_\lambda^i, \quad (3.7)$$

pro který platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_\infty(n) - \rho_n\| = 0$. Tento asymptotický stav je zvláštní v tom, že není statický, může se v čase měnit. Dokonce, pokud není fáze všech $\lambda \in \sigma_{|1|}$ racionální, nemusí být ani periodický.

Ze vzorce (3.7) je vidět, že ρ_∞ bude vždy v této množině

$$\bigcup_{\lambda \in \sigma_{|1|}} \text{Ker}(\Phi_1 - \lambda I),$$

budeme ji nazývat atraktorový prostor a značit $\text{Atr}(\Phi_1)$. Ve článku [16] je dokázáno, že atraktorový prostor je jednorozměrný právě tehdy, když množina operátorů U_i je ireducibilní a neexistuje operátor P splňující podmínky

- $\exists n \in \mathbb{N} \quad U_h^n P (U_h^n)^\dagger = P \neq 0$
- $U_g^i P (U_g^i)^\dagger = U_h^i P (U_h^i)^\dagger \quad \forall i, g, h \in \mathbb{N}$

Zavedeme asymptotický tvar Φ_1 , označme ho Φ_{asy}

$$\Phi_{asy}(\cdot) = \sum_{\lambda \in \sigma_{|1|}, i=1}^{d_\lambda} \lambda \text{Tr}(X_\lambda^{i\dagger}(\cdot)) X_\lambda^i, \quad (3.8)$$

dosazením ρ a n -násobným složením získáme ρ_∞

$$\rho_\infty(n) = \Phi_{asy}^n(\rho),$$

takže Φ^n se pro velké n blíží k Φ_{asy}^n , $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi^n - \Phi_{asy}^n\| = 0$.

Stejně tvrzení platí i pro superoperátor Φ_1 , který není diagonalizovatelný. Stačí dokázat, že vlastním číslům z $\sigma_{|1|}$ přísluší vždy jednorozměrné Jordanovy bloky. Pro Φ^n se v limitě vynulují všechny Jordanovy bloky odpovídající zbylým vlastním číslům a získáme tak diagonalizovatelný operátor Φ_{asy} ve tvaru (3.8). Důkaz jednorozměrnosti bloků pro $\lambda \in \sigma_{|1|}$ je uveden v [15].

3.3.1 Vlastní vektory superoperátoru

Cílem této kapitoly je nalézt vlastní vektory superoperátoru příslušející vlastním číslům jejichž absolutní hodnota je rovna jedné. Pomocí nich dokážeme zjistit tvar atraktorového prostoru $\text{Atr}(\Phi)$ a také určit asymptotický stav ρ_∞ nebo asymptotický operátor Φ_{asy} . Předpokládáme, že vzájemné interakce mezi jednotlivými qubity budou zprostředkované operátorem kontrolovaného fázového posunu, definovaným v kapitole 3.1. Protože v této práci žádné jiné kvantové operace používat nebudeme, označíme operátor fázového posunu U . Tento operátor má dvě podstatné vlastnosti, které teď využijeme. Nejdůležitější vlastnost je diagonálnost ve výpočetní bázi, což velmi zjednodušuje všechny výpočty. Pokud by diagonální nebyl, tak by bylo potřeba použít k hledání vlastních vektorů a vlastních čísel operátoru obecnějších postupů z článku [15]. Druhá důležitá vlastnost je, že tato operace je neorientovaná, oba dva qubity v ní vystupují rovnocenně.

Nejdříve prozkoumáme obecné vlastnosti spektra a vlastních vektorů. Náhodnou unitární operaci lze zapsat jako (3.5)

$$\Phi(X) = \sum_i p_i U_i X U_i^\dagger, \quad (3.9)$$

kde p_i jsou pravděpodobnosti, že nastane daná operace, tudíž $p_i > 0$ a $\sum p_i = 1$ a U_i jsou libovolné unitární operátory, například již zmíněný operátor fázového posunu. V našem případě budou všechny U_i diagonální. Potom pro libovolný vlastní vektor operátoru Φ platí

$$\Phi(X) = \sum_i p_i U_i X U_i^\dagger = \lambda(X)X,$$

$\lambda(X)$ značí vlastní číslo příslušející k $X \in \mathcal{H}(\mathfrak{B})$. Aplikací hermitovského sdružení získáme následující vztah

$$\Phi(X)^\dagger = \sum_i p_i U_i X^\dagger U_i^\dagger = \bar{\lambda}(X)X^\dagger.$$

Odtud je vidět, že pokud je λ ve spektru, tak tam je i $\bar{\lambda}$ s vlastním vektorem hermitovsky sdruženým. Pokud nalezneme vlastní číslo $\lambda \in \sigma_{|1|}$ a k němu příslušející vlastní vektor, tak bude existovat i komplexně sdružené vlastní číslo s hermitovsky sdruženým vlastním vektorem. Tento závěr pro $\lambda \in \sigma_{|1|}$ platí obecně pro všechny náhodné unitární transformace [15].

Pro hledání vlastních čísel z množiny $\sigma_{|1|}$ je velmi důležité následující tvrzení. Vektor X je vlastním vektorem Φ příslušejícím k vlastnímu číslu $\lambda \in \sigma_{|1|}$ právě tehdy, když operátory U_i tvořící rozklad Φ (3.9) splňující tento vztah

$$U_i X U_i^\dagger = \lambda X \quad \forall i. \quad (3.10)$$

Pro naše účely postačí provést důkaz jen pro operátory U_i , které spolu komutují, obecný důkaz je v [15]. Důkaz implikace zprava doleva je triviální. Opačný směr je obtížnější. Protože U_i vzájemně komutují, můžeme nalézt ortonormální bázi, ve

kteře mají všechny diagonální tvar. Následující výpočty budeme provádět v této bázi. Protože jsou U_i unitární diagonální operátory, tak prvky na diagonále budou komplexní čísla o velikosti jedna. Pokud využijeme vzorce (3.3) odvozeného v předchozí kapitole, tak můžeme $\Phi(X)$ spočítat takto

$$\Phi = \sum_i p_i U_i \otimes \bar{U}_i, \quad (3.11)$$

protože jsou operátory $U_i \otimes \bar{U}_i$ opět diagonální s prvky o velikosti jedna na diagonále, budeme vlastní vektory Φ hledat jako prvky indukované báze v prostoru $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_n)$. Vybereme báze zobecněný vektor X_{baz} příslušný k vlastnímu číslu $\lambda \in \sigma_{|1|}$. Protože jsou U_i v dané bázi diagonální, vektor X_{baz} je také vlastním vektorem zobrazení $U_i \bullet U_i^\dagger$ s vlastním číslem λ_i o velikosti jedna. Dosazením X_{baz} do Φ vyjde

$$\Phi(X_{baz}) = \sum_i p_i U_i X_{baz} U_i^\dagger = \sum_i p_i \lambda_i X_{baz} = \lambda X_{baz}. \quad (3.12)$$

K důkazu tvrzení věty, vzorce (3.10) stačí ověřit, že $\lambda_i = \lambda$. Podle vzorce (3.12) to znamená, že konvexní kombinace komplexních čísel o velikosti jedna má velikost rovnu jedné právě tehdy, když jsou všechna čísla, která tvoří konvexní kombinaci, stejná. Zvolíme si čísla p_i , tak aby $\sum p_i = 1$ a ověříme přímým výpočtem

$$\begin{aligned} \left| \sum p_j e^{i\theta_j} \right|^2 &= \left(\sum p_j \cos \theta_j \right)^2 + \left(\sum p_j \sin \theta_j \right)^2 \\ &= \sum_i \sum_j p_i p_j \cos \theta_i \cos \theta_j + \sum_i \sum_j p_i p_j \sin \theta_i \sin \theta_j \\ &= \sum_i \sum_j p_i p_j (\cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j) = \sum_i \sum_j p_i p_j \cos(\theta_i - \theta_j), \end{aligned}$$

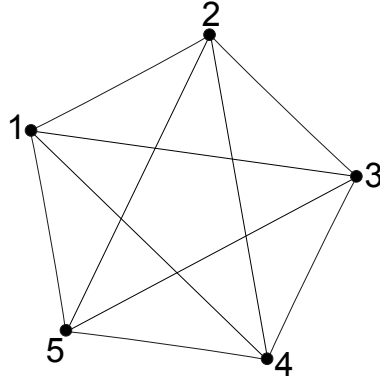
což je rovno jedné pouze pokud pro všechna i, j platí $\theta_i = \theta_j$.

Na závěr poslední užitečná vlastnost, jsou-li X_λ, X_μ vlastní vektory zobrazení Φ příslušející vlastním číslům λ, μ potom $X_\lambda X_\mu$ je vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu $\lambda\mu$ nebo je to nulové zobrazení. Důkaz tohoto tvrzení jednoduchý, z předchozího tvrzení plyne platnost vztahu $U_i X_a = a X_a U_i$ a nyní stačí přímo dosadit $X_\lambda X_\mu$ do definice Φ .

$$\Phi(X_\lambda X_\mu) = \sum_i p_i U_i X_\lambda X_\mu U_i^\dagger = \lambda\mu X_\lambda X_\mu.$$

3.4 Maximálně propojená síť

Předtím, než se pustíme do řešení jiných typů sítí, prozkoumáme *maximálně propojenou síť*, tedy síť, kde je každý qubit spojen s každým pomocí kontrolovaného fázového posunu (obr 3.1). Je to ekvivalent váženého úplného grafu z klasické teorie. Na vlastní vektory je kladeno nejvíce podmínek (3.10) a proto předpokládáme, že atraktorový prostor takové sítě bude podprostorem jakékoli jiné sítě kde jsou hrany tvořeny hradly kontrolovaného fázového posunu.



Obrázek 3.1: Příklad pěti qubitové maximálně propojené sítě

Maximálně propojená síť n qubitů má $\binom{n}{2}$ hran, a proto tam bude působit právě tolik různých operátorů fázového posunu. Náhodný unitární operátor kontrolovaného fázového posunu má tvar

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} p_i U_i X U_i^\dagger$$

a pomocí formalismu zavedeného v podkapitole (3.2) lze $\Phi\mathbf{X}$ zapsat jako

$$\Phi\mathbf{X} = \sum_i p_i U_i \otimes \bar{U}_i \mathbf{X}.$$

Navíc protože U je diagonální, tak mají jednotlivé prvky tento tvar

$$\Phi_{n\nu}^{m\mu} = \sum_i p_i \delta_{mn} U_{mn}^i \delta_{\mu\nu} \bar{U}_{\mu\nu}^i = \sum_i p_i \delta_{mn} U_{mm}^i \delta_{\mu\nu} \bar{U}_{\mu\mu}^i,$$

z tohoto důvodu je rovněž Φ diagonální ve výpočetní bázi. Bázi prostoru $\text{Atr}(\Phi)$ budeme hledat jako prvky výpočetní báze příslušející k vlastním číslům o velikosti jedna.

Jeden ze způsobů, jak můžeme zapsat operátor fázového posunu působící mezi uzly a, b , je napsat přímo předpis, jak operátor působí na prvek výpočetní báze

$$U^{(a,b)} |j_1, \dots, j_n\rangle = e^{i\varphi j_a j_b} |j_1, \dots, j_n\rangle$$

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$ je $j_k \in \{0, 1\}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Pro praktické účely nyní zapíšeme tento operátor jako matici. Pro obecný zápis matice fázového posunu definujeme

$$m[i] \equiv ((m-1) \gg (i-1)) \& 1, \quad (3.13)$$

tj. i -tý bit čísla $m-1$, \gg označuje bitový posun a $\&$ bitový součin. Je to definováno tak, aby se mohly číslovat prvky matic a čísla bitů normálně od jedné.

Potom diagonální matice fázového posunu mezi i -tým a j -tým uzlem lze zapsat jako

$$U_l^{(i,j)} = (1 - l[i] l[j]) \cdot 1 + l[i] l[j] \cdot e^{i\varphi} = \left(1 + l[i] l[j] (e^{i\varphi} - 1)\right), \quad (3.14)$$

kde $l \in \{1, \dots, 2^n\}$. Vzorec (3.14) nám umožňuje zapsat matici superoperátoru Φ takto

$$\begin{aligned} \Phi_{m\mu}^{m\mu} &= \sum_{k=1}^{\binom{n}{2}} p_k U_{mm}^k \bar{U}_{\mu\mu}^k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij} U_{mm}^{(i,j)} \bar{U}_{\mu\mu}^{(i,j)} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij} \left(1 + m[i] m[j] (e^{i\varphi} - 1)\right) \left(1 + \mu[i] \mu[j] (e^{-i\varphi} - 1)\right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Komplexní číslo na diagonále označíme písmenem z

$$z(m, \mu, i, j) := \left(1 + m[i] m[j] (e^{i\varphi} - 1)\right) \left(1 + \mu[i] \mu[j] (e^{-i\varphi} - 1)\right), \quad (3.16)$$

má absolutní hodnotu rovnu jedné, protože může v závislosti na m, μ, i, j nabývat pouze hodnot $1, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$.

Potřebujeme nalézt všechna m, μ tak, aby $z(m, \mu, i, j)$ bylo pro všechny $i, j, i \neq j$ stejné, potom podle tvrzení (3.10) bude $z(m, \mu, i, j)$ vlastní číslo a dvojice m, μ umožňují nalézt vlastní vektory tvořící bázi atraktorového prostoru.

To nastane podle vzorce (3.16) pokud

1. $(m[i] = 0 \vee m[j] = 0) \wedge (\mu[i] = 0 \vee \mu[j] = 0) \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$,
potom je vlastní číslo $z(m, \mu, i, j) = 1$. Existují dva druhy řešení

(a) číslo $m = 1$ a také $\mu = 1$

(b) $m = 2^{i-1} + 1, \mu = 2^{j-1} + 1, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$,

kombinací (a), (b) se získá celkem tedy $(n+1)^2$ vlastních čísel

2. $(m[i] = 1) \wedge (\mu[i] = 0 \vee \mu[j] = 0) \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$,
potom je vlastní číslo $z(m, \mu, i, j) = e^{i\varphi}$.

To nastane v případě $m = 2^n$ a $\mu = 2^{i-1} + 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$, a nebo $\mu = 1$, celkem $n+1$ vlastních čísel

3. $(m[i] = 0 \vee m[j] = 0) \wedge (\mu[i] = 1) \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$,
potom je vlastní číslo $z(m, \mu, i, j) = e^{-i\varphi}$

symetricky k předchozímu případu dalších $n+1$ vlastních čísel

4. $m[i] = \mu[i] = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$,

potom je vlastní číslo $z(m, \mu, i, j) = 1$

jediná možnost je, že $m = \mu = 2^n$, tedy jediné vlastní číslo.

5. $m = \mu$ pak je $z(m, \mu, i, j) = 1$

tomuto případu odpovídá 2^n vlastních čísel, ale $n+2$ z nich už bylo zahrnuto do předchozích případů.

K zapsání výsledků použijeme *decimálního zápisu výpočetní báze*, například na ketvektor $|0110\rangle$, který je tenzorovým součinem jednotlivých vektorů v dvou rozměrných Hilbertových prostorech, může pohlížet jako na binární zápis decimálního čísla a tím zpřehlednit notaci. Potom například platí $|0110\rangle \equiv |6\rangle$. Vlastní vektory připadající k vlastním číslům o velikosti jedna lze zapsat následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
&|0\rangle\langle 2^i - 1| \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
&|2^i - 1\rangle\langle 0| \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
&|2^i - 1\rangle\langle 2^j - 1| \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \\
&|2^n - 1\rangle\langle 2^i - 1| \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \\
&|2^i - 1\rangle\langle 2^n - 1| \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \\
&|p\rangle\langle p| \quad \forall p \in \{0, \dots, 2^n - 1\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Celkem je tedy $2^n + n^2 + 3n + 2$ ortonormálních vektorů udávajících bázi atraktorového prostoru maximálně propojené sítě. Odstraněním libovolné hrany v této síti se tento prostor zvětší. Například při odstranění hrany $(1, 2)$ přibudou v bodu 4 předchozího seznamu další tři vlastní vektory, podobně i v libovolných jiných případech.

3.4.1 Odhad rychlosti konvergence

V podkapitole 3.3 jsme dokázali, že tvar $\text{Atr}(\Phi)$ nezávisí na hodnotách p_i . Co ale na těchto hodnotách závisí, je rychlost, s jakou systém dosáhne svého asymptotického tvaru. Pro malá n můžeme na počítači nalézt všechna vlastní čísla (diagonální prvky matice Φ) a určit jejich velikost. My zvolíme jiný postup, pokusíme se o odhad toho největšího vlastního čísla menšího než 1 pro libovolně velkou síť a prozkoumáme, jaký mají vliv hodnoty p_i na jeho velikost.

Zkusme udělat odhad největšího vlastního čísla λ_{max} z množiny $\sigma \setminus \sigma_{|1|}$. Protože vlastní čísla $\Phi_{m\mu}^{m\mu}$ jsou prvky na diagonále, můžeme vzorec (3.15) přepsat takto

$$\Phi_{m\mu}^{m\mu} = \lambda_{max} = P_A \cdot e^{i\varphi} + P_B \cdot e^{-i\varphi} + P_C \cdot 1,$$

pro neznámé hodnoty m a μ , kde P_I , $I \in \{A, B, C\}$ je součet čísel p_j příslušejících k danému komplexnímu číslu $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$ nebo 1. Tato čísla budou mít stejné vlastnosti jako p_i , tzn. $P_I \in \mathbb{R}^+$ a $P_A + P_B + P_C = 1$. Pokud je nějaké $P_I = 1$, pak $|\lambda_{max}| = 1$, jinak je menší.

Nejprve se vyšetří případ, kdy se $P_I = 1 - a$. Nakonec se odhadne a .

- Necht $P_C = 1 - a$, potom $P_A + P_B = a$ a platí

$$\begin{aligned}
|\lambda_{max}|^2 &= ((P_A + P_B) \cos \varphi + P_C)^2 + ((P_A - P_B) \sin \varphi)^2 = \\
&= (a \cos \varphi + 1 - a)^2 + (a - 2P_B)^2 \sin^2 \varphi.
\end{aligned}$$

Protože $|\lambda_{max}|^2$ tvoří vzhledem k P_B konvexní parabolu, tak bude nabývat maxima v krajním bodě intervalu $\langle 0, a \rangle$. Dosazením za $P_B = 0$ a potom $P_B = a$

zjistíme, že vychází totožná hodnota $|\lambda_{max}|^2$. Odhadneme-li maximum této funkce jedním těchto krajních bodů, vyjde

$$|\lambda_{max}|^2 \leq 1 - 2(1 - \cos \varphi)a(1 - a). \quad (3.18)$$

- Pokud platí $P_A = 1 - a$ a $P_B + P_C = a$, získáme odhad

$$\begin{aligned} |\lambda_{max}|^2 &= ((1 - P_C) \cos \varphi + P_C)^2 + ((1 + P_C - 2a) \sin \varphi)^2 \leq \\ &\leq \max_{P_C \in (0, a)} [((1 - P_C) \cos \varphi + P_C)^2 + ((1 - P_C - 2a) \sin \varphi)^2]. \end{aligned}$$

To je opět stejně jako v předchozím případě parabola, dosazením krajních bodů vyjde, že maxima nabývá pro $P_C = a$. A platí opět odhad (3.18). Velikost vlastního čísla je invariantní vůči záměně P_A a P_B , takže pro každé vlastní číslo platí odhad (3.18), ale velikost čísla a se může měnit podle m a μ .

Poslední problém je určení a . Musí se určit tak, aby platilo pro všechna vlastní čísla s absolutní hodnotou menší než 1. Pro libovolné P_I platí

$$a = \sum_{\text{nepřislující k } P_I} p_{ij} \geq \min_{\text{nepřislující k } P_I} p_{ij} \geq \min_{\forall i, j, j < i} p_{ij}.$$

Z definice Φ je $p_i > 0$. Na první pohled je to hrubý odhad, ale nejhorší případ může snadno nastat. Například pokud je $p_{kl} = \min_{i, j} p_{ij}$, pak pro $m' = 2^{k-1} + 2^{l-1} + 1$ a $\mu' = 1$ platí

$$|\Phi_{m'\mu'}^{m'\mu'}|^2 = 1 - 2(1 - \cos \varphi)p_{kl}(1 - p_{kl}).$$

Na závěr tedy výsledný vztah

$$\|\Phi^k - \Phi_{asy}^k\|_2 \leq \sqrt{2^{2n} \max_{\forall m, \mu, |\Phi_{m\mu}^{m\mu}| < 1} |\Phi_{m\mu}^{m\mu}|^{2k}} = 2^n \left(1 - 4a(1 - a) \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)\right)^{\frac{k}{2}}, \quad (3.19)$$

kde $a := \min_{i, j, j < i} p_{ij}$ a Φ_{asy} je asymptotický tvar operátoru Φ (3.8) a je použita norma generovaná Hilbert-Schmidtovým skalárním součinem.

Nejrychlejší konvergence bude dosaženo, pokud budou všechny pravděpodobnosti stejné, takže $p_{max} = 1/\binom{n}{2}$. Ale odebere-li se některá hrana v maximálně propojené síti, potom se p_{max} zvětší a systém se do asymptotického stavu může dostat ještě rychleji.

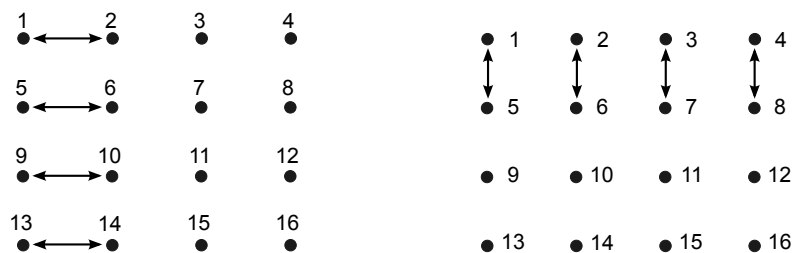
Kapitola 4

Atomové procesory

V této kapitole se budeme zabývat speciálním typem kvantové sítě, ve které jsou qubity umístěné do mřížky a můžeme mezi nimi provádět jen některé typy operací. Takový systém zkoumáme, protože se o jeho realizaci již experimentátoři pokouší viz články [4, 3, 12]. Pomocí pole mikroskopických čoček dokázali vytvořit laserem pole magnetických pastí, ve kterých zachytili atomy rubidia. Mezi největší výhody tohoto řešení atomového procesoru patří téměř neomezené možnosti zvětšování. Také navrhli postup pro čtení, nastavování hodnot jednotlivých qubitů a manipulaci s qubity. Na druhou stranu musí překonat ještě mnoho problémů, například v každé pasti se místo jediného qubitu reprezentovaného atomem rubidia nachází asi 200 atomů [12].

4.1 Superoperátor na atomovém procesoru

Budeme uvažovat speciální typ sítě, kde jsou jednotlivé uzly umístěny do mřížky a mezi uzly lze provádět pouze určité druhy operací. Interagovat mohou vždy pouze vedlejší řady a sloupce a všechny jejich prvky interagují pouze s protějšími prvky (viz schéma 4.1). Takové uskupení qubitů budeme nazývat *atomový procesor*.



Obrázek 4.1: Vlevo je jedna horizontální operace a vpravo vertikální operace na atomovém procesoru

Vzájemnou operací mezi uzly bude fázový posun. Hilbertův prostor soustavy s n qubity bude opět představovat tenzorový součin n dvoudimenzionálních prostorů.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n.$$

V případě horizontálních operací lze celou operaci zapsat pomocí tenzorových součinů. Operace mezi qubity i a $i + 1$ má tvar

$$U^{(i,i+1)} = I_1 \otimes \dots \otimes I_{i-1} \otimes U \otimes I_{i+2} \otimes \dots \otimes I_n.$$

Kvantovou operaci provádějící interakci mezi j -tým a $j + 1$ -ním sloupcem můžeme zapsat jako složení jednotlivých dílčích interakcí.

$$U_{H_j} = \prod_{k=0}^{b-1} U^{(ka+j,ka+j+1)} \quad (4.1)$$

$j \in \{1, \dots, a - 1\}$, a je počet sloupců, b je počet řádků procesoru. Operace mezi řádky už tak jednoduše do tenzorového součinu zapsat nelze. Ale lze přímo zapsat, jak operace působí na jednotlivé prvky výpočetní báze. Operaci mezi řádky lze zapsat následujícím způsobem

$$U_{V_k} |j_1, \dots, j_{a-b}\rangle = \exp\left(i\varphi \sum_{l=1}^a j_{(k-1)a+l} j_{ka+l}\right) |j_1, \dots, j_{a-b}\rangle, \quad (4.2)$$

kde $k \in \{1, \dots, b - 1\}$. Obdobně lze zapsat operaci mezi sloupci

$$U_{H_k} |j_1, \dots, j_{a-b}\rangle = \exp\left(i\varphi \sum_{l=1}^b j_{(l-1)a+k} j_{(l-1)a+k+1}\right) |j_1, \dots, j_{a-b}\rangle, \quad (4.3)$$

kde $k \in \{1, \dots, a - 1\}$. Případně lze podobně jako v (3.14) zapsat přímo matici operátoru U_{V_j} pomocí bitových operací (3.13)

$$(U_{V_j})_{pq} = \delta_{pq} \prod_{k=0}^{a-1} \left(1 + p[(j-1)a + k + 1] q[ja + k + 1] (e^{i\varphi} - 1)\right).$$

Když takto přepíšeme i operátor horizontální interakce (4.1), získáme předpis pro superoperátor Φ ve tvaru

$$\Phi(X) = \sum_{k=1}^{a-1} p_k^H U_{H_k} X U_{H_k}^\dagger + \sum_{k=1}^{b-1} p_k^V U_{V_k} X U_{V_k}^\dagger \quad (4.4)$$

$$\Phi_{m\mu}^{m\mu} = \sum_{j=1}^{a-1} p_j^H \prod_{k=0}^{b-1} z(m, \mu, ka+j, ka+j+1) + \sum_{j=1}^{b-1} p_j^V \prod_{k=0}^{a-1} z(m, \mu, (j-1)a+k+1, ja+k+1), \quad (4.5)$$

kde komplexní číslo z bylo definováno ve vzorci (3.16). Požadavek unitality Φ implikuje pro p_j^H a p_j^V podmínku

$$\sum_{j=1}^{a-1} p_j^H + \sum_{j=1}^{b-1} p_j^V = 1.$$

K hledání vlastních vektorů lze přistupovat podobně jako u maximálně propojené sítě. Protože Φ je opět diagonální ve výpočetní bázi, platí o jeho vlastních vektorech všechna již dokázaná tvrzení. Stručně je zde zopakujeme, hledáme vlastní vektory ve tvaru $|a\rangle\langle b|$, kde $|a\rangle$ a $\langle b|$ jsou prvky výpočetní báze prostoru \mathcal{H} . Navíc X je vlastním vektorem Φ s vlastním číslem o velikosti jedna právě tehdy, když pro všechny operátory U_i tvořící konvexní rozklad Φ platí (3.10). Dále pokud je X vlastní vektor, tak je i X^\dagger vlastní vektor se sdruženým vlastním číslem. A poslední důležité tvrzení, které použijeme k hledání vlastních vektorů je, že součin dvou vlastních vektorů s vlastními čísly z a \bar{z} je opět vlastní vektor s vlastním číslem $z\bar{z}$ nebo nulový operátor.

Na závěr jedna užitečná vlastnost. Pokud jsou $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$ vlastní vektory operátorů U_i s vlastními čísly λ a μ , potom $|a\rangle\langle b|$ je vlastní vektor Φ s vlastním číslem $\lambda\bar{\mu}$

$$\Phi(|a\rangle\langle b|) = \sum_i p_i U_i |a\rangle\langle b| U_i^\dagger = \lambda\bar{\mu} |a\rangle\langle b|, \quad (4.6)$$

a také je-li $|c\rangle$ zcela libovolný báze vektor, potom $|c\rangle\langle c|$ je vlastní vektor s vlastním číslem rovným jedné.

$$\Phi(|c\rangle\langle c|) = \sum_i p_i U_i |c\rangle\langle c| U_i^\dagger = \sum_i \lambda_i \bar{\lambda}_i |c\rangle\langle c| = |c\rangle\langle c|, \quad (4.7)$$

λ_i jsou komplexní čísla o velikosti jedna.

4.1.1 Vztah mezi maximálně propojenou sítí a atomovým procesorem

Nyní prozkoumáme několik dalších zajímavých vlastností operátorů U_{H_i} a U_{V_j} které nám umožní nalézt a popsat vlastnosti atraktorového prostoru. Nalezneme vztah mezi atraktorovým prostorem maximálně propojené sítě a atomového procesoru. Nejprve uvažujme atomový procesor, kde jsou interakce dány operátory

$$A_H^i = U^{(i,i+1)}; \quad i \neq ka; \quad k \in \mathbb{N}; \quad i \in \{1, \dots, ab\}, \quad (4.8)$$

$$A_V^i = U^{(i,i+a)}; \quad i \in \{1, \dots, a(b-1)\}.$$

kde $U^{(i,i+1)}$ je kontrolovaný fázový posun mezi i -tým a $i+1$ -ním qubitem. Zvolme libovolný vlastní vektor X tohoto systému s vlastním číslem o velikosti jedna. Pro něj musí podle tvrzení (3.10) platit

$$A_H^i X A_H^{i\dagger} = A_V^i X A_V^{i\dagger} = \lambda X.$$

Operace U_{H_i} a U_{V_j} jsou pouze složením operací (4.8). Budeme-li uvažovat čtvercový atomový procesor o hraně n , potom platí

$$U_{H_i} X U_{H_i}^\dagger = U_{V_i} X U_{V_i}^\dagger = \lambda^n X.$$

Takže atraktorový prostor zjednodušeného systému (4.8) je podprostorem atraktorového prostoru čtvercového atomového procesoru. Navíc systém operací (4.8) vznikl

vypuštěním některých hran v maximálně propojené síti takže atraktorový prostor (3.17) je podprostorem zjednodušeného systému (4.8) a ten je podprostorem čtvercového atomového procesoru.

4.2 Symetrie a invariance

Budeme se zabývat některými dalšími zajímavými vlastnostmi operátorů U_{H_i} a U_{V_j} , které nám umožní nalézt a popsat vlastnosti atraktorového prostoru.

4.2.1 Symetrie super-operátoru

Operátor A nazveme invariantní vůči operátoru B pokud $AB = B$ nebo ekvivalentně $\text{Ran}A \subset \text{Ker}(B - I)$. Nejjednodušší invariance operátorů U_{H_j} je vůči permutaci π řádků procesoru. Tato skutečnost plyne z komutativity součtu ve vzorci (4.3). Operátor permutace řádků označíme jako $U_{\pi(1)\dots\pi(b)}^R$ a invariance implikuje

$$U_{\pi(1)\dots\pi(b)}^R U_{H_j} = U_{H_j},$$

pro všechna j a pro všechny permutace π . Dále je operátor U_{H_k} invariantní i vůči transpozici sloupců, kromě záměn týkajících se k -tého a $k+1$ -ního, ty se mohou zaměnit pouze mezi sebou. Invariance plyne z komutativity součinu ve vzorci (4.3) a z toho, že se ve vzorci (4.3) žádné jiné prvky než prvky z k -tého a $k+1$ -ního sloupce nevyskytují.

Operátor permutace sloupců budeme značit analogicky k operátoru permutace řádků jako $U_{\pi(1)\dots\pi(a)}^C$, což umožňuje zapsat invarianci

$$U_{1\dots k+1, k, \dots a}^C U_{H_k} = U_{H_k}.$$

Mezi základní vlastnosti operátoru patří symetrie, protože platí

$$U_{1\dots k+1, k, \dots a}^C U_{1\dots k+1, k, \dots a}^C = I = U_{1\dots k+1, k, \dots a}^C U_{1\dots k+1, k, \dots a}^{C\dagger}.$$

Analogickými argumenty se odvodí invariance U_{V_j} vůči permutaci sloupců a prohození některých řádků.

Nyní jeden příklad, jak toho lze využít. Uvažujme atomový procesor o velikosti 3×3 a vlastní vektor X_λ s vlastním číslem $\lambda \in \sigma_{|1|}$ splňující podmínku

$$U_{H_2}(U_{213}X_\lambda U_{213})U_{H_2}^\dagger = \lambda U_{213}X_\lambda U_{213}, \quad (4.9)$$

splnění této jediné podmínky už zaručuje, že $X' := U_{213}X_\lambda U_{213}$ je také vlastní vektor se stejným vlastním číslem λ . Zajímavé jsou samozřejmě jen případy, kdy $X_\lambda \neq U_{213}X_\lambda U_{213}$. Stejně tvrzení platí, je-li splněná analogická podmínka pro jakékoli U_{H_j} či U_{V_j} . V případě větších atomových procesorů už musí být splněno podobných podmínek víc.

Pro zjednodušení následujících úvah budeme uvažovat pouze procesory o stejném počtu sloupců a řádků, který označíme n . Potom lze využít další podstatné vlastnosti operátorů U_i , což je symetrie vůči dihedrální grupě [18] transformací D_4 , tzv. grupě symetrií čtverce. Mezi základní vlastnosti grupy D_4 patří, že není abelovská, tedy její prvky nekomutují a dále její generátory tvoří rotace kolem středu o $\pi/2$ a osová symetrie kolem libovolné osy čtverce. Grupa má celkem 8 prvků. Prvky označíme

Označení		
normální	alternativní	symetrie
f_h	S_0	otočení kolem horizontální osy
f_d	S_1	otočení kolem osy 1. a 3. kvadrantu
f_v	S_2	otočení kolem vertikální osy
f_c	S_3	otočení kolem osy 2. a 4. kvadrantu
id	R_0	identické zobrazení
R_1	R_1	rotace o $\pi/2$ po směru hodinových ručiček
R_2	R_2	rotace o π (středová symetrie)
R_3	R_3	rotace o $3/2 \pi$

Alternativní označení je zavedeno, aby platili tyto vzorce pro skládání symetrií

$$R_i \circ R_j = R_{i+j} \quad R_i \circ S_j = S_{i+j} \quad S_i \circ R_j = S_{i-j} \quad S_i \circ S_j = R_{i-j}, \quad (4.10)$$

sčítání a odčítání je se uvažuje ve smyslu modulární aritmetiky s modulo 4. Složení jednotlivých operátorů je potom vypsáno v tabulce (4.1). Například složením otočení kolem vertikální osy S_2 složené s rotací R_1 získáme otočení kolem osy 1. a 3. kvadrantu S_1 . Složení znamená, že se napřed aplikuje operace vpravo a až potom vlevo.

Ze vzorců (4.10) je vidět, že lze opravdu všechny symetrie získat z generátorů R_1 a S_0 .

	R₀	R₁	R₂	R₃	S₀	S₁	S₂	S₃
R₀	R_0	R_1	R_2	R_3	S_0	S_1	S_2	S_3
R₁	R_1	R_2	R_3	R_0	S_1	S_2	S_3	S_0
R₂	R_2	R_3	R_0	R_1	S_2	S_3	S_0	S_1
R₃	R_3	R_0	R_1	R_2	S_3	S_0	S_1	S_2
S₀	S_0	S_3	S_2	S_1	R_0	R_2	R_1	R_3
S₁	S_1	S_0	S_3	S_2	R_2	R_0	R_3	R_1
S₂	S_2	S_1	S_0	S_3	R_3	R_1	R_0	R_2
S₃	S_3	S_2	S_1	S_0	R_1	R_3	R_2	R_0

Tabulka 4.1: Skládání prvků grupy D_4

Nyní zkusíme prozkoumat, jaký tvar mají operátory U_{V_j} a U_{H_j} pokud se složí s prvky grupy D_4 . Nejdříve je třeba U_{V_j} , U_{H_j} přeznačit. Je-li n liché, potom tyto operace můžeme rozdělit do skupin po čtyřech členech

$$U_0^{(i)} := U_{V_i} \quad U_1^{(i)} := U_{H_i} \quad U_2^{(i)} := U_{V_{n-i}} \quad U_3^{(i)} := U_{V_{n-i}}, \quad (4.11)$$

kde $i \in \{1, \dots, (n-1)/2\}$. Pro n sudé a $i \in \{1, \dots, n/2 - 1\}$ použijeme přeznačení jako ve vzorci (4.11) a zbylé dva operátory označíme

$$U_0^{\frac{n}{2}} := U_{V_{\frac{n}{2}}} \quad U_1^{\frac{n}{2}} := U_{H_{\frac{n}{2}}}. \quad (4.12)$$

Jak pro lichá tak i pro sudá n proto bude index i z množiny $\{1, \dots, [n/2]\}$

Pokud budeme reprezentovat grupu D_4 pomocí unitárních operátorů na \mathcal{H} , potom je možné přímým výpočtem ověřit vztahy v tabulce (4.2). S_i a R_2 jsou symetrické operátory, protože $S_i S_i = R_2 R_2 = R_0 = I$.

	\mathbf{U}_0	\mathbf{U}_1		\mathbf{U}_0	\mathbf{U}_1	\mathbf{U}_2	\mathbf{U}_3
$S_0 \bullet S_0$	U_0	U_1	$S_0 \bullet S_0$	U_0	U_3	U_2	U_1
$S_1 \bullet S_1$	U_1	U_0	$S_1 \bullet S_1$	U_3	U_2	U_1	U_0
$S_2 \bullet S_2$	U_0	U_1	$S_2 \bullet S_2$	U_2	U_1	U_0	U_3
$S_3 \bullet S_3$	U_1	U_0	$S_3 \bullet S_3$	U_1	U_0	U_3	U_2
$R_0 \bullet R_0$	U_0	U_1	$R_0 \bullet R_0$	U_0	U_1	U_2	U_3
$R_1 \bullet R_1^\dagger$	U_1	U_0	$R_1 \bullet R_1^\dagger$	U_3	U_0	U_1	U_2
$R_2 \bullet R_2$	U_0	U_1	$R_2 \bullet R_2$	U_2	U_3	U_0	U_1
$R_3 \bullet R_3^\dagger$	U_1	U_0	$R_3 \bullet R_3^\dagger$	U_1	U_2	U_3	U_0

Tabulka 4.2: Skládání grupy D_4 s operacemi na procesoru pro $n = 2$ a $n = 3$

Takže například platí $S_3 U_2 S_3 = U_3$. Obecně platí následující vzorce, pro operátory rozdělené do skupin podle (4.11, 4.12)

$$S_i U_j^{(k)} S_i = U_{-i-j}^{(k)} \quad R_i U_j^{(k)} R_i^\dagger = U_{j-i}^{(k)}, \quad (4.13)$$

kde $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$. Sčítání je opět bráno ve smyslu modulární aritmetiky. Z těchto vztahů je vidět, že skupiny (4.11, 4.12) jsou uzavřené vůči působení grupy D_4 a místo $2(n-1)$ operací U_{H_i} a U_{V_j} na atomovém procesoru stačí používat pouze $[n/2]$ a ostatní získat pomocí symetrií kolem os nebo pomocí rotací.

Poslední význačná vlastnost je, že libovolný prvek grupy $S \in D_4$ působí na prvky výpočetní báze následujícím způsobem

$$S|j_1, \dots, j_{n^2}\rangle = |j_{\pi_S(1)}, \dots, j_{\pi_S(n^2)}\rangle, \quad (4.14)$$

π_S je permutace $\{1, \dots, n\}$, příslušející k S , $j_i \in \{0, 1\}$. To mimo jiné znamená, že obrazem prvku výpočetní báze při zobrazení A je opět prvek báze.

4.2.2 Symetrie atraktorového prostoru

Pomocí vlastností grupy D_4 , odvozených v předchozí kapitole, nalezneme některé podstatné vlastnosti množiny vlastních vektorů $\text{Ker}(\Phi - \lambda I)$ pro $\lambda \in \sigma_{|1|}$. Nejdříve je třeba zadefinovat, čemu budeme říkat symetrie množiny.

Definice: Necht B je libovolná množina, $A \subset B$, $S : B \rightarrow B$

1. Zobrazení S se nazývá *symetrií* A , pokud $S(A) = A$.
2. Zobrazení S se nazývá *slabá symetrie* A , jestliže $S(A) \subset A$

Nejprve dokážeme, že libovolný prvek grupy D_4 je symetrií $\text{Ker}(\Phi - \lambda I)$ pro $\lambda \in \sigma_{|1|}$. Toto tvrzení stačí dokázat pro generátory grupy, ostatní prvky se získají skládáním. Nejdříve pro rotaci R_1 , n liché, $X \in \text{Ker}(\Phi - \lambda I)$ a $\lambda \in \sigma_{|1|}$

$$\begin{aligned} \Phi(R_1 X R_1^\dagger) &= \sum_{k=1}^{a-1} p_k^H U_{H_k} R_1 X R_1^\dagger U_{H_k}^\dagger + \sum_{k=1}^{b-1} p_k^V U_{V_k} R_1 X R_1^\dagger U_{V_k}^\dagger = \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{i=0}^3 p_i^{(k)} U_i^{(k)} R_1 X R_1^\dagger U_i^{(k)\dagger} = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{i=0}^3 p_i^{(k)} R_1 R_1^\dagger U_i^{(k)} R_1 X R_1^\dagger U_i^{(k)\dagger} R_1 R_1^\dagger = \\ &= R_1 \left(\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{i=0}^3 p_i^{(k)} U_{i-3}^{(k)} X U_{i-3}^{(k)\dagger} \right) R_1^\dagger = R_1 \left(\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{i=0}^3 p_i^{(k)} \lambda X \right) R_1^\dagger = \lambda R_1 X R_1^\dagger \end{aligned}$$

při výpočtu jsme operátory přerovnali, přeznačili podle (4.11), využili toho, že $X \in \text{Ker}(\Phi - \lambda I)$ a $\lambda \in \sigma_{|1|}$. Pro n sudé je důkaz analogický.

Dále pro n liché a otočení kolem horizontální osy S_0

$$\Phi(S_0 X S_0) = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{i=0}^3 p_i^{(k)} U_i^{(k)} S_0 X S_0 U_i^{(k)\dagger} = S_0 \left(\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{i=0}^3 p_i^{(k)} U_{-i}^{(k)} X U_{-i}^{(k)\dagger} \right) S_0 = \lambda S_0 X S_0.$$

Protože R_1 a S_0 jsou izomorfizmy, získáme konečný výsledek, pro $\lambda \in \sigma_{|1|}$ platí

$$S_0 \text{Ker}(\Phi - \lambda I) S_0 = R_1 \text{Ker}(\Phi - \lambda I) R_1^\dagger = \text{Ker}(\Phi - \lambda I). \quad (4.15)$$

Kdybychom v předchozí odvození předpokládali, že všechny p_i jsou stejné, potom by pro libovolný prvek A grupy D_4 a libovolné $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ platilo

$$\Phi(A X A^\dagger) = A \Phi(X) A^\dagger$$

tato vlastnost se nazývá *kovariance* Φ vzhledem k D_4 , zmínky o této problematice jsou v [9].

Symetrie platí i pro společné vlastní vektory konvexního rozkladu Φ . Pro libovolný vlastní vektor

$$|a\rangle \in \bigcap_i (U_i^{(k)} - \lambda I) \quad \forall k \in \{0, \dots, 3\}$$

a libovolný prvek grupy $T \in D_4$ platí podle vzorců (4.13)

$$U_i^{(k)} T |a\rangle = T (T^\dagger U_i^{(k)} T) |a\rangle = \lambda T |a\rangle, \quad (4.16)$$

takže prvky grupy D_4 jsou symetriemi množiny $\bigcap_i (U_i^{(k)} - \lambda I)$, stejným postupem vyjde, že je i symetriemi množiny $\bigcap_{i,k} (U_i^{(k)} - \lambda I)$.

Dále dokážeme vztah pro operátor asymptotického vývoje Φ_{asy} (3.3).

$$\Phi_{asy}(\cdot) = \sum_{\lambda \in \sigma_{|1|}, i=1}^{d_\lambda} \lambda \operatorname{Tr} \left(X_{\lambda,i}^\dagger(\cdot) \right) X_{\lambda,i},$$

kde d_λ násobnost vlastního čísla λ . Pro libovolný prvek $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ a libovolnou symetrii $A \in D_4$ platí

$$\Phi_{asy}(AXA^\dagger) = A\Phi_{asy}(X)A^\dagger.$$

Důkaz tohoto tvrzení není složitý, stačí využít toho, že A je symetrie $\operatorname{Ker}(\Phi - \lambda I)$

$$\begin{aligned} \Phi_{asy}(AXA^\dagger) &= \sum_{\lambda \in \sigma_{|1|}, i=1}^{d_\lambda} \lambda \operatorname{Tr} \left(X_{\lambda,i}^\dagger AXA^\dagger \right) X_{\lambda,i} = \\ &= A \sum_{\lambda \in \sigma_{|1|}, i=1}^{d_\lambda} \lambda \operatorname{Tr} \left(\left(A^\dagger X_{\lambda,i} A \right)^\dagger X \right) \left(A^\dagger X_{\lambda,i} A \right) A^\dagger, \end{aligned}$$

protože $A^\dagger X_{\lambda,i} A$ tvoří opět ortonormální množinu, tak se nic nezmění, když je použijí jako bázi $\operatorname{Ker}(\Phi - \lambda I)$ místo $X_{\lambda,i}$. Celkově tedy vyjde

$$\Phi_{asy}(AXA^\dagger) = A\Phi_{asy}(X)A^\dagger.$$

Na závěr poslední tvrzení, označme jako \mathcal{E}_λ bázi $\operatorname{Ker}(\Phi - \lambda I)$ tvořenou zobrazeními tvaru $|a\rangle\langle b|, |a\rangle$ a $|b\rangle$ jsou prvky výpočetní báze. Potom z unitarity prvků D_4 , symetrie $\operatorname{Ker}(\Phi - \lambda I)$ pro $\lambda \in \sigma_{|1|}$ vůči prvkům grupy D_4 a z tvrzení (4.14) plyne, že libovolný prvek $A \in D_4$ zobrazuje bázi \mathcal{E}_λ samu na sebe

$$A\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda. \quad (4.17)$$

4.3 Atomové procesory 2×2 a 3×3

Nejprve nalezneme bázi atraktorového prostoru pro 4 a 9 qubitový procesor. Přitom tvrzení odvozená ve 4. kapitole například, že vlastní vektory lze hledat jako prvky výpočetní báze. Problém s hledáním těchto vlastních vektorů je především v jejich počtu. Pokud vezmeme jako minimální odhad pro jejich počet výsledek získaný pro maximálně propojenou síť (4.1.1) a maximální odhad jako dimenzi celého \mathcal{H} , potom v případě procesoru 2×2 bude dimenze atraktorového prostoru mezi 46 a 256 a v případě 3×3 bude dimenze mezi 622 a 262144. Navíc, kromě speciálních případů, neumožňují doposud nalezená tvrzení získat všechny vlastní vektory. Ale pokud některé známe můžeme pomocí nich získat další.

Začneme 4-qubitovým procesorem. Vlastní vektory s $\lambda \in \sigma_{|1|}$ lze rozdělit do tří skupin, první jsou tvaru (4.7), druhou skupinu tvoří vlastní vektory tvaru $|b\rangle\langle c|$, pro

$|b\rangle$ a $|c\rangle$ platí

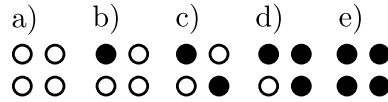
$$U_{H_i}|b\rangle = U_{V_i}|b\rangle = \lambda|b\rangle \quad U_{H_i}|c\rangle = U_{V_i}|c\rangle = \mu|c\rangle \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (4.18)$$

$$U_{H_i}|b\rangle\langle c|U_{H_i}^\dagger = U_{V_i}|b\rangle\langle c|U_{V_i}^\dagger = \lambda\bar{\mu}|b\rangle\langle c|$$

a do poslední skupiny zařadíme zbylé vlastní vektory, pro které neplatí (4.7) ani (4.18). Při konečném určování dimenze se musí uvažovat, že tyto skupiny nejsou disjunktní. První skupina obsahuje přesně 2^4 vektorů.

Nejnázornější způsob prezentace vektorů odpovídajících některému z bazových stavů je pomocí jednoduchého schématu (obr. 4.2) kde jsou qubity uspořádané jako na schématu (obr. 4.1) s tím, že plná kolečka odpovídají stavu jedna a kroužky stavu nula.

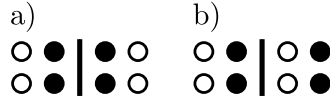
Konkrétně jsou na nákresu (4.2) znázorněny některé společné vlastní vektory operátorů U_{H_i} a U_{V_i} . Aplikací grupy symetrií, (tvrzení (4.16)) z nich získáme všechny



Obrázek 4.2: Schematický nákres bazového vektoru procesoru 2×2

společné vlastní vektory operátorů U_{H_i} a U_{V_i} , kterých je 12. Po vytvoření všech možných kombinací a odečtení těch, které již byli započteny do první skupiny získáme $11 \cdot 12 = 132$ vlastních vektorů operátoru Φ .

Třetí skupina se získá pomocí složením prvků grupy D_4 s těmito vektory:



Takto získáme 8 vlastních vektorů, ale 4 patří do první skupiny. Celkem vychází 152 různých vlastních vektorů operátoru Φ .

Pro případ procesoru 3×3 , je problém s velkým počtem vektorů ještě výraznější. Opět budeme hledat vlastní vektory ve tvaru složení dvou prvků výpočetní báze \mathcal{H} (4.6) a opět se tam objeví některé projektorů (4.7). Pokud využijeme dekadického zápisu bazových vektorů, potom jsou to projektorů

$$|m\rangle\langle m| \quad \forall m \in \{0, \dots, 2^9 - 1\}.$$

Označme množinu těchto projektorů \mathcal{E} .

Nalezneme co nejmenší množinu vektorů z \mathcal{H} , ze které po rozšíření pomocí některé množiny operací získáme všechny zbylé vektory.

- Vezmeme-li libovolný výpočetní báze $|A\rangle \in \mathcal{H}$, potom lze nalézt množinu bazových vektorů z \mathcal{H} , takových, že jejich složení s $|A\rangle$ je atraktor. Je-li

tato množina prázdná, zvolíme jiný báze vektor. Množinu vektorů, které při složení s vektorem $|A\rangle$ dají atraktor, označíme M_A . Tato množina tedy splňuje tuto podmínku

$$|A\rangle\langle b| \in \text{Atr}(\Phi) \quad \forall |b\rangle \in M_A.$$

- Atraktorem je i transpozice a také součin těchto vektorů (operátorů), pokud nevznikne nulový operátor. Tímto získáme podstatně větší množinu atraktorů

$$|b\rangle\langle c| \in \text{Atr}(\Phi) \quad \forall |b\rangle, |c\rangle \in M_A.$$

Tuto množinu je možné rozšířit podle vzorce (4.17) pomocí grupy symetrií D_4 a dosáhnout tak jejího maximálního rozšíření, to označíme M_{max} . Množina atraktorů M_{max} je tedy jednoznačně určena libovolným svým prvkem.

- Pokud jsou některé prvky D_4 symetriemi M_A , potom lze s jejich pomocí množinu M_A zredukovat na nezbytné minimum M_{min} tak, že rozšířením pomocí těchto symetrií dostaneme znovu celou množinu M_A .

Celý tento postup můžeme provést pro všechny prvky výpočetní báze \mathcal{H} a získat stejným postupem jako M_{max} několik disjunktních skupin, které jsou po sjednocení s množinou \mathcal{E} ortonormální bázi prostoru $\text{Atr}(\Phi)$. Jediná rozumná cesta, jak tyto skupiny nalézt, je pomocí počítače. Výsledky jsou v tabulce (4.3). Existuje tedy právě 13 skupin vektorů. Největší skupina odpovídá vlastním vektorům operátorů U_{H_j} a U_{V_j} . Nejmenší možný počet vektorů, kterými je možné všechny tyto množiny zapsat je 102 (suma čtvrtého sloupce tabulky 4.3) a tyto množiny vektorů se následně rozšíří pomocí symetrií ve třetím sloupci. Pokud je třeba určit dimenzi atraktorového prostoru, stačí sečíst počet prvků v těchto 13-ti množinách po maximálním rozšíření a bez započtení prvků, co patří do \mathcal{E} (pátý sloupec), a nakonec přičíst počet prvků v $\dim \mathcal{E} = 2^9 = 512$. Celkově vychází dimenze prostoru $\text{Atr}(\Phi)$ rovna 18366.

4.3.1 Rychlost konvergence

Odhadněme, jak rychle se bude stav systému blížit k asymptotickému stavu. Podobně jako u maximálně propojené sítě odhadneme velikosti největšího vlastního čísla v závislosti na hodnotách p_i .

Pro odhad konvergence je nutné si uvědomit, že vzorec (4.5) nabývá hodnoty v komplexní rovině s vrcholy na jednotkové kružnici

$$e^{ik\varphi} \quad k \in \{-n, \dots, n\},$$

kde $n \equiv \max\{a, b\}$, a a b je počet sloupců a řádků procesoru. Hodnotu libovolného vlastního čísla λ operátoru Φ je možné zapsat jako konvexní kombinaci vrcholů

$$\lambda = \sum_{k=-n}^n p_k e^{ik\varphi}, \quad (4.19)$$

největší prvek	počet prvků M	uzavřené vůči symetrie	počet prvků M_{min}	počet prvků M_{max} bez projektorů \mathcal{E}
$ 398\rangle$	2	f_v, id	2	8
$ 433\rangle$	2	f_c, id	2	8
$ 454\rangle$	2	R_2, id	1	8
$ 455\rangle$	1	f_v, f_h, R_2, id	1	0
$ 483\rangle$	1	id	1	0
$ 493\rangle$	16	f_v, f_h, R_2, id	8	480
$ 497\rangle$	3	id	3	48
$ 499\rangle$	21	f_h, id	12	1680
$ 504\rangle$	1	f_h, id	1	0
$ 508\rangle$	6	f_h, id	5	120
$ 509\rangle$	26	f_h, id	15	2600
$ 510\rangle$	26	f_c, id	19	2600
$ 511\rangle$	102	D_4	32	10302

Tabulka 4.3: Skupiny vektorů umožňující získat ON bázi $\text{Atr}(\Phi)$,

kde $\sum_k p_k = 1$ a $p_k \geq 0$. Vrcholy mnohostěnu odpovídají hodnotám $|\lambda| = 1$. Navíc vždy je možné vybrat tři vrcholy tak, aby λ leželo uvnitř simplexu, který je jimi generován. Jinak řečeno, existují vzájemně různá $l_A, l_B, l_C \in \{-n, \dots, n\}$ a kladná čísla $P_A, P_B, P_C, P_A + P_B + P_C = 1$ taková, že

$$\lambda = P_A e^{il_A \varphi} + P_B e^{il_B \varphi} + P_C e^{il_C \varphi} = \sum_{k=-n}^n p_k e^{ik\varphi}, \quad (4.20)$$

nyní se podobným postupem a stejnými odhady jako v minulé kapitole dostaneme ke vztahu

$$|\lambda|^2 \leq 1 - 4a(1-a) \min \left\{ \sin^2 \frac{\varphi}{2} (l_A - l_B), \sin^2 \frac{\varphi}{2} (l_A - l_C) \right\}, \quad (4.21)$$

a je rovno nejmenšímu nenulovému $P_I; I \in \{A, B, C\}$, takže $a \in (0; 1/3)$, takové P_I musí existovat, jinak by λ mělo velikost rovnu jedné. Nyní zbývá poslední problém, jak odhadnout a a určit minimum ve vzorci (4.21).

Ze způsobu konstrukce čísel P_I ve vzorci (4.19) a (4.20) a z nenulovosti a můžeme udělat jednoduchý odhad

$$a = P_I \geq p_{l_I} \geq p_{min} := \min \{p_i^H, p_j^V \mid i \in \{1, \dots, a-1\}, j \in \{1, \dots, b-1\}\} > 0.$$

Takže a se dá, podobně jako u maximálně propojené sítě, odhadnout hodnotou p_i u nejméně pravděpodobné interakce.

Další problém je s odhadnutím druhé části vzorce (4.21). Pokud je φ dostatečně malé aby platilo $(2n+1)|\varphi| \leq 2\pi$ potom je možné udělat následující odhad nezávisle na hodnotách l_A, l_B, l_C

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} (l_A - l_B) \geq \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Pro λ tak vychází úplně stejný odhad (3.18) jako u maximálně propojených sítí. Je-li $(2n+1)|\varphi| > 2\pi$ potom se musí fáze $\varphi(l_A - l_C)$ ve vzorci (4.21) odhadnou nejhorším možným případem

$$\varphi_{min} = \min_{l \in \{1, \dots, 2n\}, k \in \mathbb{Z}} \{|l\varphi - 2k\pi| \neq 0\}.$$

V konkrétních případech je možné udělat ještě přesnější odhad. Projdou-li se všechny vlastní vektory, potom například pro atomový procesor o velikosti 2×2 a 3×3 stačí hledat minimum přes menší množinu.

$$\varphi_{min} = \min_{l \in \{1, \dots, 2n-2\}, k \in \mathbb{Z}} \{|l\varphi - 2k\pi| \neq 0\}. \quad (4.22)$$

Dosazením za φ_{min} získá nerovnost (4.21) jednodušší tvar

$$|\lambda| \leq \sqrt{1 - 4a(1-a) \sin^2 \frac{\varphi_{min}}{2}}. \quad (4.23)$$

Pokud by se nám podaří nalézt vlastní vektory, ve kterých v v nerovnosti (4.23) nastává rovnost, dokážeme tím, že lepší odhad už udělat nelze.

Platí-li $(2n+1)|\varphi| \leq 2\pi$, potom můžeme vektor s touto vlastností, podobně jako u maximálně propojené sítě, vždy nalézt. Dokonce můžeme nalézt konkrétní příklady. Je-li například p_j^H nejmenší z pravděpodobností uskutečnění interakce, potom rovnost ve vzorci (4.23) nastane například pro vektor, který má v decimálním zápisu tvar (obr. 4.3a)

$$\tilde{X}_j^H := |(1+2)2^{j-1}\rangle\langle 0|, \quad (4.24)$$

a je-li nejmenší p_j^V , potom v případě čtvercového procesoru stačí vzít vektor $R_2 \tilde{X}_j^H R_2$, obecněji pro procesor o a sloupcích a b řádcích lze zvolit

$$\tilde{X}_j^V := |2^{(j-1)a} + 2^{ja}\rangle\langle 0|. \quad (4.25)$$

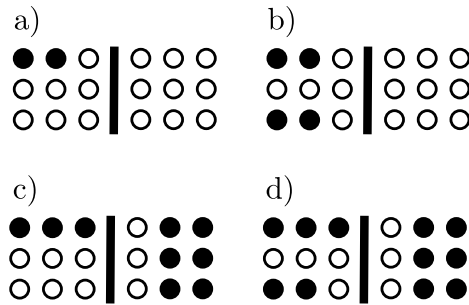
Pro $(2n+1)|\varphi| > 2\pi$ je složité nalézt vektory splňující rovnost ve vzorci v (4.23) a proto se omezíme jen na procesory rozměru 2×2 a 3×3 . Pro menší procesor 2×2 může nastat rovnost buď pro $\tilde{X}_1^H = |3\rangle\langle 0|$ nebo $|3\rangle\langle 5|$, v závislosti na velikosti φ . Pokud vzorec (4.22) nabývá minima pro $l = 1$, pak rovnost platí pro \tilde{X}_1^H , a je-li minimum pro $l = 2$, potom nastává rovnost pro $|3\rangle\langle 5|$.

Rozeberme nyní situaci pro větší procesor 3×3 a případ, kdy nejmenší pravděpodobnost je například p_1^H . Potom v závislosti na φ nastane rovnost v (4.23) pro jeden z vektorů (ale i mnoho dalších) ve schématu (obr.4.3). Pokud je ve vzorci (4.22) minimum v $l = 1$ nastane rovnost pro (obr. 4.3a), je-li $l = 2$, potom pro vektor (obr. 4.3b) atd. až pro $l = 4$. Pokud je nejmenší pravděpodobnost jiná než p_1^H , stačí na již zmíněné vektory aplikovat rotace R_1 , R_2 nebo R_3 .

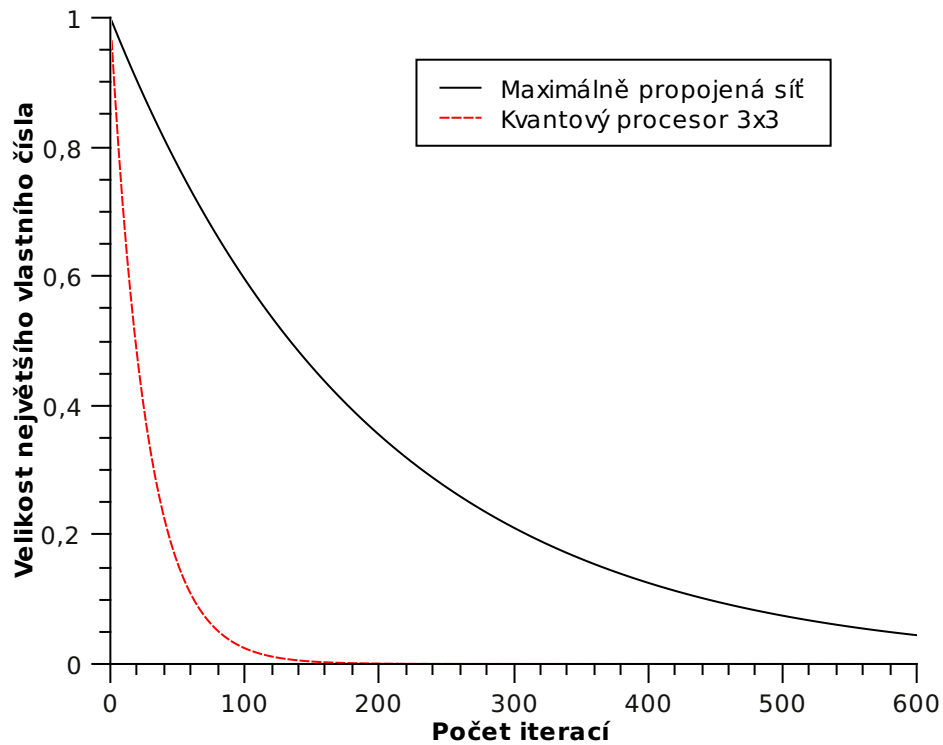
Zkusme nyní porovnat rychlost konvergence čtvercového atomového procesoru a maximálně propojené sítě. Pro zjednodušení budeme uvažovat $(2n+1)|\varphi| \leq 2\pi$. Na první pohled se mohou vzorce pro rychlost konvergence (3.18) a (4.23) zdát stejné, ale rozdíl je v tom, jakých hodnot může a v těchto vzorcích nabývat. V maximálně

propojené síť o n^2 qubitech je $\binom{n^2}{2}$ interakcí, takže a_{sit} leží v intervalu $(0, 1/\binom{n^2}{2})$ a ve atomovém procesoru o hraně n (n^2 qubitech) je $2(n-1)$ interakcí, tudíž $a_{proc} \in (0, 1/(2n-2))$. Jsou-li všechny interakce stejně pravděpodobné, potom je $a_{proc}/a_{sit} = n^2(n+1)$ a rychlost konvergence procesoru je výrazně rychlejší než v maximálně propojené síti. Srovnání rychlosti konvergence do asymptotického stavu atomového procesoru a maximálně propojené sítě je na grafu (4.4).

Naopak volbou dostatečně malé pravděpodobnosti p_i lze konvergenci některých vlastních čísel udělat libovolně pomalou.



Obrázek 4.3: Speciální případy rozložení qubitů v atomových procesorech.



Obrázek 4.4: Rychlost konvergence vektoru $|3\rangle\langle 0|$ v atomovém procesoru 3×3 a maximálně propojené síti, jsou-li všechny operace stejně pravděpodobné a $\varphi = \pi/5$

Závěr

V rámci této bakalářské práce jsem vyšetřoval vlastnosti atomových procesorů. Nalezl jsem zákonitosti, které splňují prvky atraktorového prostoru, ale kromě speciálních případů neumožňují nalezení jeho konkrétního tvaru. Proto jsem alespoň zkráceně zapsal tvar atraktorového prostoru procesoru o velikosti 2×2 a 3×3 qubitů.

V další části práce jsem prozkoumal vliv jednotlivých pravděpodobností vykonání unitárních operací na atomovém procesoru, na rychlost konvergence systému. Provedl jsem odhad nejhoršího případu konvergence a dokázal jsem, že závisí pouze na velikosti té nejmenší pravděpodobnosti interakce. Navíc jsem ověřil pro maximálně provázanou síť a atomový procesor velikosti 2×2 a 3×3 , že tento nejhorší případ může nastat. Na závěr jsem porovnal rychlost konvergence procesoru a maximálně provázané sítě.

Na tuto bakalářskou práci lze navázat vyšetřením vlastností atomových procesorů i pro další základní typy hradel. Navíc existuje teoretická možnost experimentálních ověření závěrů této práce.

Seznam použitých zdrojů

- [1] ALICKI, R.; LENDI, K.: *Quantum dynamical semigroups and applications*. LNP0717, Springer-Verlag Berlin, 2007.
- [2] BENGTTSSON, I.; ŻYCZKOWSKI, K.: *Geometry of Quantum States*. Cambridge University Press, 2006, ISBN 978-0-521-81451-0.
- [3] BIRKL, G.; DUMKE, R.; VOLK, M.; et al.: Microoptical Realization of Arrays of Selectively Addressable Dipole Traps: A Scalable Configuration for Quantum Computation with Atomic Qubits. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, no. 097903, 2002.
- [4] BIRKL, G.; LENGWENUS, A.; KRUSE, J.; et al.: Coherent manipulation of atomic qubits in optical micropotentials. *Applied Physics B: Lasers and Optic*, vol. 86, 2007: p. 377–383.
- [5] BLANK, J.; EXNER, P.; HAVLÍČEK, M.: *Lineární operátory v kvantové fyzice*. Karolinum, Praha 1993, ISBN 80-7066-586-6.
- [6] BRUZDA, W.; CAPPELLINI, V.; ŻYCZKOWSKI, K.; et al.: Random Quantum Operations. *Physics Letters A*, vol. 373, 2009: p. 320–324.
- [7] CHOI, M.: Completely Positive Linear Maps on Complex matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 10, 1975: p. 285–290.
- [8] FORMÁNEK, J.: *Úvod do kvantové teorie I. a II.* Akademia, Praha 2004, ISBN 80-200-1176-5.
- [9] HOLEVO, A. S.: *Statistical Structure of Quantum Theory*. Springer Verlag, 2001, ISBN 978-3-540-42082-8.
- [10] KRAUS, K.: General state changes in quantum theory. *Annals of Physics*, vol. 64, 1971: p. 311–335.
- [11] LAMBROPOULOS, P.; PETROSYAN, D.: *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*. Springer-Verlag N.Y., 2007, ISBN 978-3-540-34571-8.
- [12] LENGWENUS, A.; KRUSE, J.; BIRKL, G.: Coherent Transport of Atomic Quantum States in a Scalable Shift Register. *preprint arXiv:0901.1496*, 2009.
- [13] LINDBLAD, G.: On the generators of quantum dynamical semigroups. *Commun. Math. Phys.*, vol. 48, 1976: p. 119–130.

- [14] MOTL, L.; ZAHRADNÍK, M.: *Pěstujeme lineární algebru*. 1994, [online], [cit. 5.5.2010].
URL <<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~mohl/mzahrad/milos.ps>>
- [15] NOVOTNÝ, J.; ALBER, G.; JEX, I.: Random Unitary Dynamics of Quantum Networks. *J. Phys. A: Math. Teor.*, vol. 42 282003, 2009, arXiv:0904.0107.
- [16] NOVOTNÝ, J.; ALBER, G.; JEX, I.: Asymptotic Evolution of Random Unitary Operations. *C. European J. Phys.*, 2010, arXiv:0908.4534v1.
- [17] PYTLÍČEK, J.: *Lineární algebra a geometrie*. ČVUT v Praze, 2005, ISBN 978-80-01-04063-8.
- [18] WEISSTEIN, E. W.: *Dihedral Group D_4* . From MathWorld—A Wolfram Web Resource, [cit. 5.5.2010].
URL <<http://mathworld.wolfram.com/DihedralGroupD4.html>>