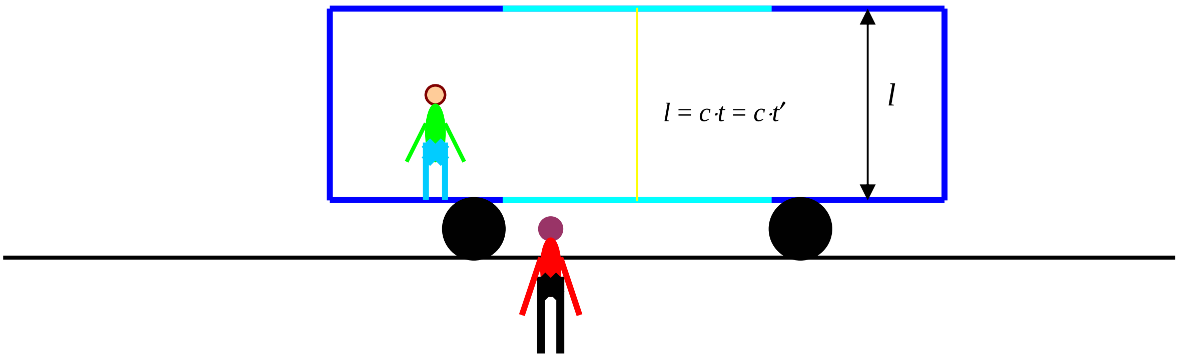
Nekvantový pohled na fyzikální pole

Albert Einstein (1879 – 1955)

Uvažujme nyní myšlenkový experiment, v němž uvnitř vlakového vagónu kmitá foton mezi dvěma planparalelními zrcadly, vzájemně vzdálenými *l*, z nichž jedno je umístěno např. na stropě vagónu a druhé na podlaze, viz obr. 2.1.

Obr. 2.1

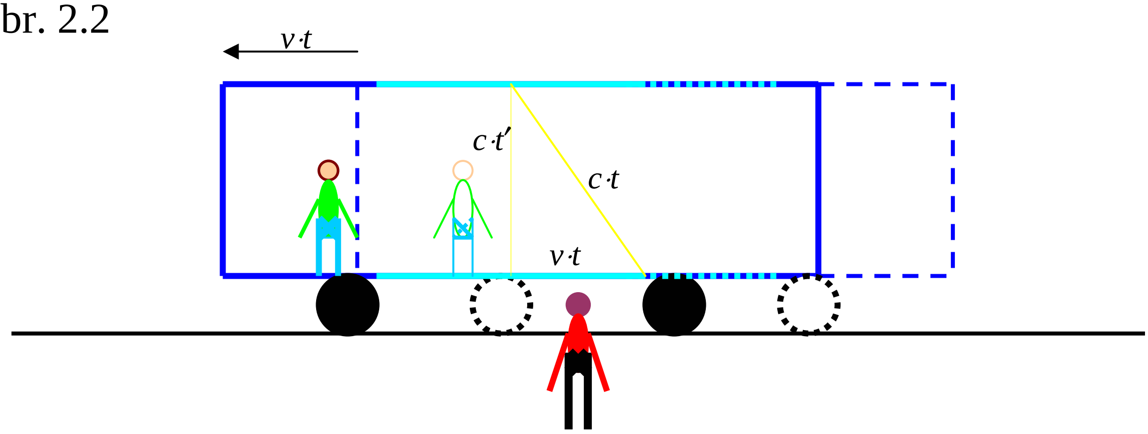


Bude-li vagón v klidu, bude pozorovatel uvnitř vagónu pozorovat totéž, co pozorovatel stojící venku na peróně.
Trajektorie paprsku je v tomto případě pro každého z pozorovatelů svislou úsečkou, která se tudíž jeví oběma pozorovatelům stejně dlouhá a proto ji světlo překoná z hlediska každého z pozorovatelů za stejný čas

$$t = \frac{l}{c} \; . \qquad (2.1)$$

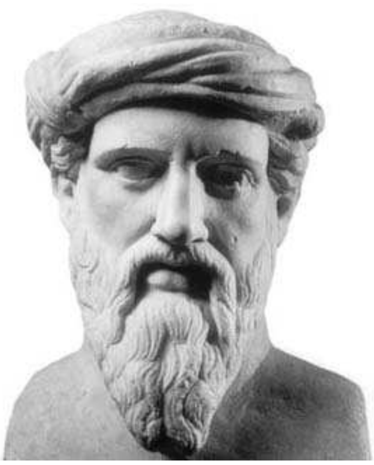
Jakmile se dá vagón do rovnoměrného přímočarého pohybu, celá situace se radikálně změní viz obr. 2.2.

Obr. 2.2



Trajektorie paprsku bude i nyní vzhledem k pozorovateli uvnitř vagónu svislou úsečkou délky *l*, neboť pohyb vagónu nemůže mít žádný vliv na fyzikální procesy v inerciální soustavě s ním spojené. Vůči pozorovateli stojícímu na peróně se však paprsek již nebude pohybovat svisle.
Označíme-li jednotlivé trajektorie dle obr. 2.2, potom doba kterou fotonu potrvá pohyb po delší trajektorii bude dána dle Pythagorovy věty vztahem

$$c^2 \cdot t'^2 = c^2 \cdot t^2 - v^2 \cdot t^2 \ . \qquad (2.2)$$



Pythagoras ze Samu (570 – 490 př. n. l)

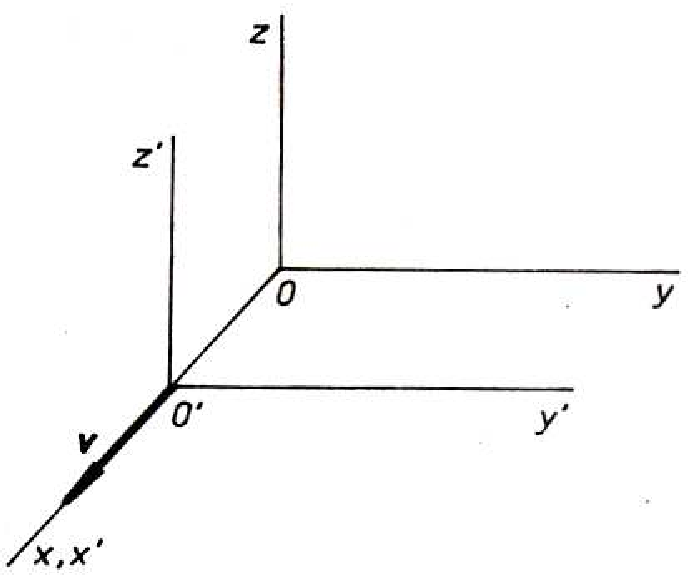
Odtud plyne

$$t' = t\sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ . \qquad (2.3)$$

Pro zobecnění tohoto výsledku uvažujme dvojici inerciálních soustav Σ, Σ' podle obr. 2.3.
Nechť v počátku soustavy Σ je umístěn zdroj schopný vysílat světelný signál všemi směry.
Signál vyslaný v okamžiku t = 0, kdy počátky obou soustav splývají, urazí za dobu t v libovolném směru vzdálenost

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = ct \, . \qquad (2.4)$$

Obr. 2.3



Vzájemný pohyb dvou inerciálních kartézských soustav souřadnic

V okamžiku t může být tento signál zachycen ve všech bodech kulové plochy poloměru r.
Einsteinův princip relativity žádá, aby i v čárkované soustavě se signál šířil izotropně rychlostí c.
Pro vzdálenost r' musí tedy platit

$$r' = \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2} = ct'. \qquad (2.5)$$

Princip relativity tedy žádá, aby vztahy (2.4) a (2.5) byly invariantní vůči transformaci prostorových i časových souřadnic mezi oběmi soustavami, tj. aby platilo

$$c^2t^2 - r^2 = c^2t'^2 - r'^2. \qquad (2.6)$$

Uvedenému požadavku vyhovuje Lorentzova transformace, kterou pro případ soustavy na obr. 2.3 můžeme zapsat ve tvaru

$$x' = \gamma(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}\cdot x\right), \qquad (2.7)$$

kde

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}. \qquad (2.8)$$

Zavedeme-li polohové vektory $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ určující polohu libovolného bodu v příslušné soustavě, můžeme Lorentzovu transformaci (2.7) zapsat ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}\left[\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma t\right] \quad ; \qquad t' = \gamma\left[t - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right], \qquad (2.9)$$

kde $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$.
Inverzní transformaci vyjadřující souřadnice v soustavě Σ pomocí souřadnic v soustavě Σ' získáme vzájemnou záměnou čárkovaných a nečárkovaných veličin, přičemž pokládáme $v' = -v$.
Vektorový tvar (2.9) Lorentzovy transformace zůstane v platnosti i v obecnějším případě, kdy se dvě soustavy Σ, Σ' s vzájemně rovnoběžnými stejnojmennými osami pohybují vůči sobě libovolně orientovanou rychlostí $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$.

Při malých rychlostech, kdy můžeme zanedbat veličiny druhého řádu β^2 ve srovnání s jednotkou, můžeme klást $\gamma = 1$ a Lorentzovy transformace:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v} \cdot t \quad ; \qquad t' = t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} . \tag{2.10}$$

Připomeňme si některé základní důsledky plynoucí z Lorentzovy transformace.
Mějmež dvě události, z nichž jedna probíhá v okamžiku t_1 v bodě (x_1, y_1, z_1), druhá v okamžiku t_2 v bodě (x_2, y_2, z_2) (vzhledem k soustavě Σ).
Označme postupně

$$\Delta x = x_2 - x_1 \; ; \quad \Delta y = y_2 - y_1 \; ; \quad \Delta z = z_2 - z_1 \; ; \quad \Delta t = t_2 - t_1 . \tag{2.11}$$

Přejdeme-li nyní k soustavě Σ', najdeme z Lorentzovy transformace

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \cdot \Delta t) ; \quad \Delta y' = \Delta y \; ; \quad \Delta z' = \Delta z \; ; \quad \Delta t = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta}{c} \Delta x \right) . \tag{2.12}$$

Pro prostorovou vzdálenost dostaneme s použitím (2.12)

$$\begin{aligned} \Delta l' &= \left[(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[(\Delta l)^2 + (\Delta x)^2 \left(\gamma^2 - 1 \right) - 2v\gamma \cdot \Delta x \cdot \Delta t + \gamma^2 v^2 (\Delta t)^2 \right]^{1/2} . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ze vztahů (2.12), (2.13) je zřejmé, že bude-li časový interval $\Delta t = 0$, tj. uvažované události budou v soustavě Σ současné, bude interval $\Delta t'$ obecně různý od nuly v závislosti na prostorovém intervalu Δx.
Podobně bude-li např. $\Delta l = 0$, tj. obě události budou v soustavě Σ soumístné, nemusí tomu tak být v soustavě Σ', neboť obecně $\Delta l' \neq 0$.
Předpokládejme, že uvažované události se týkají jedné částice a spojme počátek soustavy Σ' s touto částicí.
Soustava Σ' se pak nazývá vlastní (klidovou) soustavou této částice.

Aby soustava Σ' zůstala inerciální soustavě Σ rovnoměrně a přímočaře rychlostí v ve směru osy x.
Potom $\Delta l' = 0$, $\Delta x' = 0$, $\Delta x = v \cdot \Delta t$ a z (2.12) plyne

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}. \qquad (2.14)$$

Veličinu t' nazveme vlastní čas částice a označíme τ.
Položíme-li v okamžiku splynutí obou počátků $\tau = t = 0$, můžeme psát

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = t \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}. \qquad (2.15)$$

Vlastní čas částice tedy plyne pomaleji, než čas v laboratorní soustavě Σ.
Tento výsledek můžeme zobecnit i na nerovnoměrný pohyb částice rychlostí $\mathbf{v}(t)$.
V každém nekonečně malém časovém intervalu můžeme totiž předpokládat, že rychlost částice je konstantní, a spojit s částicí okamžitou klidovou inerciální soustavu souřadnic.
Potom platí

$$d\tau = dt \cdot \left[1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.16)$$

a pro konečný časový interval

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \left[1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}} dt \qquad (2.17)$$

Uvažujme nyní těleso konečného objemu a spojme soustavu Σ' s tímto tělesem.

Budeme srovnávat podélný rozměr tělesa v obou soustavách:

$$l = x_2 - x_1 \quad ; \qquad l_0 = l' = x_2' - x_1' . \qquad (2.18)$$

Veličinu l_0 nazveme vlastní délkou tělesa.
Problém vzniká pouze s určením vzdálenosti l koncových bodů pohybujícího se tělesa.
Souřadnice těchto bodů musíme totiž určovat současně.
Musí tedy být $\Delta t = 0$ a podle (2.12) $\Delta x' = \gamma \cdot \Delta x$,

$$l_0 = \gamma \cdot l = l \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} , \qquad (2.19)$$

nebo, pro obecný nerovnoměrný pohyb tělesa

$$dl = \left[1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot v(t)\, dt \qquad (2.20)$$

$$\Delta l = \int_{t_1}^{t_2} \left[1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot v(t)\, dt . \qquad (2.21)$$

Rozměr ve směru pohybu tělesa je tedy kratší než jeho vlastní délka.
Protože příčné rozměry tělesa zůstávají beze změny, mění se povrch a objem tělesa pouze v závislosti na podélném rozměru.
Z Lorentzovy transformace plynou důležité vztahy pro skládání rychlostí částic.
Protože rychlost částice v soustavě Σ resp. Σ' lze vyjádřit jako

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad ; \qquad \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} , \qquad (2.22)$$

dostaneme přímým výpočtem z (2.19)

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \right]}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)} , \qquad (2.23)$$

nebo ve složkách

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad ; \qquad u_y' = \frac{u_y}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \quad ; \qquad u_z' = \frac{u_z}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} . \qquad (2.24)$$

v případě pomalé Lorentzovy transformace můžeme psát

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} . \qquad (2.25)$$

V klasické dynamice je definována hybnost **p** částice jako součin její hmotnosti m_0 a rychlosti **u** dané inerciální soustavě Σ:

$$\mathbf{p} = m_0 \cdot \mathbf{u} . \qquad (2.26)$$

První věta impulsová je vyjádřena vztahem

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} . \qquad (2.27)$$

Hmotnost m_0 je přitom považována za invariant.
Aby mohl být vztah (2.27) zachován i v relativistické dynamice, je třeba zobecnit definici pojmu hybnosti **p** vztahem

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m \cdot \mathbf{u} . \qquad (2.28)$$

Veličina m_0 je zde opět invariantní vůči Lorentzově transformaci a nazývá se vlastní či klidovou hmotností.
Veličina

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad (2.29)$$

je relativistická hmotnost částice.
S využitím (2.28) lze vyjádřit kinetickou energii částice jakožto míru práce vykonané silou **F** ve směru *d*s po dráze **s**, vztahem:

$$T = \int_0^s \mathbf{F}\, d\mathbf{s} = \int_0^s \frac{d\mathbf{p}}{dt}\, d\mathbf{s} = \int_0^{m \cdot u} \mathbf{u}\, d\mathbf{p} = \int_0^{m \cdot u} \mathbf{u}\, d\frac{m_0 \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} =$$

$$= \int_0^u \mathbf{u} \cdot \frac{d}{du} \frac{m_0 \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\, du = \frac{m_0 \cdot u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \int_0^u \frac{m_0 \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{u}}{du}\, du =$$

$$= \frac{m_0 \cdot u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 \cdot \int_0^u \frac{\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \cdot u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - m_0 c^2 =$$

$$= m_0 \left(\frac{u^2 c}{\sqrt{c^2 - u^2}} + c\sqrt{c^2 - u^2} \right) - m_0 c^2 =$$

$$= m_0 c^2 \left[\frac{u^2 + \left(c^2 - u^2\right)}{\sqrt{c^2 - u^2}} \right] - m_0 c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2 .$$

(2.30)

Rovnici (2.30) přepíšeme do tvaru

$$E = mc^2 = T + m_0c^2 = T + E_0 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0u^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{u^4}{c^2} + \dots ,$$
(2.31)

kde E_0 je tzv. klidová energie tělesa.
Pomocí (2.28) a (2.31) zapíšeme rozdíl

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^2 \cdot \frac{c^2 - u^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = m_0^2c^4 . \qquad (2.32)$$

Vidíme, že tento výraz je relativistický invariant.
Přejdeme-li tedy do soustavy Σ', musí platit

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2 . \qquad (2.33)$$

Porovnáme nyní výraz (2.33) s obdobným vztahem (2.6) pro kinetický invariant $c^2t^2 - r^2$.
Vidíme, že pro složky vektoru **p** a energii E musí platit rovněž Lorentzova transformace jako pro složky polohového vektoru **r** a čas t.
Přiřadíme $\mathbf{r} \to \mathbf{p}$, $\mathbf{r}' \to \mathbf{p}'$, $\mathbf{t} \to \frac{E}{c^2}$, $t' \to \frac{E}{c^2}$, a analogicky (2.9) zapíšeme Lorentzovu transformaci pro hybnost ve vektorovém tvaru jako

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma \frac{E}{c^2} \right] . \qquad (2.34)$$

Odtud již snadno najdeme transformační vztahy pro sílu **F** při přechodu mezi soustavami Σ a Σ'.
Uvážíme-li, že

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}, \quad \frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt} = \gamma\frac{d}{dt}, \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = \frac{dE}{dt}, \tag{2.35}$$

dostaneme

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{v}\left[\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \frac{\gamma}{c^2}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})\right]}{\gamma\left(1 - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)}. \tag{2.36}$$

Pro případ pomalé Lorentzovy transformace se výraz (2.36) zjednoduší na

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}}. \tag{2.37}$$

Prozkoumáme nyní vzájemné silové působení dvou bodových nábojů v situaci, kdy se oba pohybují různým způsobem vůči inerciální pozorovací soustavě Σ.
Omezíme se na rovnoměrný přímočarý pohyb jednoho z nábojů Q_1, a to nejprve rychlostí $u << c$, kdy můžeme použít pomalé Lorentzovy transformace.
Zkušební náboj Q_2 nechť se pohybuje libovolným způsobem okamžitou rychlostí **v**.
Přejdeme nyní k jiné inerciální soustavě souřadnic Σ', jejíž stejnojmenné osy jsou rovnoběžné s osami soustavy Σ a která se pohybuje vůči soustavě Σ rychlostí **u**.
V soustavě Σ' je tedy náboj Q_1 nehybný a vytváří elektrostatické pole v souladu s Coulombovým zákonem.
Na náboj Q_2 pohybující se v této soustavě rychlostí **v** působí Coulombova síla

$$\mathbf{F}' = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{\left|\mathbf{r}'_{Q_2} - \mathbf{r}'_{Q_1}\right|^3} \left(\mathbf{r}'_{Q_2} - \mathbf{r}'_{Q_1}\right) , \qquad (\ 2.38\ )$$

kde $\mathbf{r}'_{Q_2}$ a $\mathbf{r}'_{Q_1}$ jsou polohové vektory nábojů Q_2 a Q_1 v soustavě Σ'.

Charles-Augustin de Coulomb (1736 – 1806)

Abychom nyní vyjádřili sílu působící ze strany náboje Q_1 na náboj Q_2 v původní, laboratorní soustavě Σ, použijeme pomalé transformace síly (2.37) a podle zavedeného označení zde nahradíme $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$.

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F} - \dfrac{1}{c^2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}}{1 - \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \ . \qquad (\ 2.39\ )$$

Pro zpětnou transformaci dostáváme

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}' - \dfrac{1}{c^2}(\mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}') \cdot \mathbf{u}'}{1 - \dfrac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'}{c^2}} \ , \qquad (\ 2.40\ )$$

kde ovšem $\mathbf{u}' = -\mathbf{u}$.

Abychom přešli na pravé straně (2.40) k rychlostem částic **u** a **v** uvnitř laboratorní soustavy, použijeme pomalé transformace rychlostí (2.25), opět se záměnou $\mathbf{v} \to \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$, $\mathbf{u}' \to \mathbf{v}'$:

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \ . \qquad (2.41)$$

Po dosazení do (2.40), zanedbání veličin řádu $\frac{u^2}{c^2}$ a úpravě najdeme

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{F}' + \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{F}' \cdot \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \right) \cdot \mathbf{u} \right] \cdot \left[1 + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{v} - \mathbf{u})}{c^2 \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)} \right]^{-1} =$$

$$= \mathbf{F}' \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}' + \frac{1}{c^2} \left[\mathbf{u}(\mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{F}'(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \right] = \qquad (2.42)$$

$$= \mathbf{F}' + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{F}').$$

Dosadíme nyní za $\mathbf{F}'$ Coulombovu sílu (2.38).
Rozdíl polohových vektorů upravíme pomocí pomalých Lorentzových transformací (2.10).
Při tom předpokládáme, že v soustavě Σ', kde náboj Q_1 vytváří statické pole, určujeme polohu obou nábojů současně $\left(t'_{Q_1} = t'_{Q_2} \right)$.

S přesností na veličiny řádu $\frac{u^2}{c^2}$ tedy máme

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r}'_{Q_2} - \mathbf{r}'_{Q_1} = \mathbf{r}_{Q_2} - \mathbf{r}_{Q_1} - \mathbf{u}\left(t_{Q_2} - t_{Q_1} \right) = \mathbf{R} - \frac{u^2}{c^2} \mathbf{R}' = \mathbf{R} . \qquad (2.43)$$

Konečný výsledek pro sílu **F** mezi dvěma bodovými pohybujícími se náboji dostáváme tedy ve tvaru

$$\mathbf{F} = Q_2\left[\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{R})\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R^3}\right]. \qquad (2.44)$$

Všimněme si nejdříve prvního členu na pravé straně (2.44), který vyjadřuje tu část síly **F**, jež nezávisí na rychlosti **v** náboje Q_2.
Tento člen určuje rovněž i sílu působící na náboj Q_2, je-li jeho rychlost **v** vůči laboratorní soustavě nulová, jakožto výsledek působení elektrického pole vytvářeného pohybujícím se nábojem Q_1.
Pro jeho intenzitu podle (2.44) dostáváme

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_{Q_2}) = \frac{\mathbf{F}}{Q_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{R^3}\ . \qquad (2.45)$$

Podle $\mathbf{E}_0$ nelze ztotožňovat se statickým Coulombovým polem, neboť v časové závislosti polohového vektoru **R** je implicitně obsažena i časová závislost $\mathbf{E}_0$.
Z tvaru (2.45) je zřejmé, že pro pole $\mathbf{E}_0$ platí v každém okamžiku Gaussův zákon.
Tedy pro každou uzavřenou plochu S klidovou vůči soustavě Σ, obklopující v daném okamžiku náboj Q, platí

$$\oint_S \mathbf{E}_0\, d\mathbf{S} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}\ . \qquad (2.46)$$

V případech, kdy lze zavést objemovou hustotu náboje, platí rovněž diferenciální tvar

$$div\, \mathbf{E}_0 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\ . \qquad (2.47)$$

Z tvaru (2.45) rovněž vyplívá, že pole E_0 je v každém okamžiku potenciálové, tj. v každém bodě platí

$$rot\, \mathbf{E}_0 = 0\,. \qquad (2.48)$$

Na druhé straně z jeho časové závislosti plyne, že nabitá částice, která v něm vykoná pohyb po uzavřené dráze konečnou rychlostí, může obecně vykonat nenulovou práci.
Použitím označení podle (2.45) lze vztah (2.44) přepsat do přehlednějšího tvaru

$$\mathbf{F} = Q_2\left[\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c^2}\cdot\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{E}_0)\right] . \qquad (2.49)$$

Druhý člen napravo reprezentuje nový typ silového působení mezi pohybujícími se náboji, které závisí na rychlosti **v** zkušebního náboje Q_2.
Zavedeme-li nový typ vektorového pole

$$\mathbf{B}_0\left(\mathbf{r}_{Q_2}\right) = \frac{1}{c^2}(\mathbf{u}\times\mathbf{E}_0) , \qquad (2.50)$$

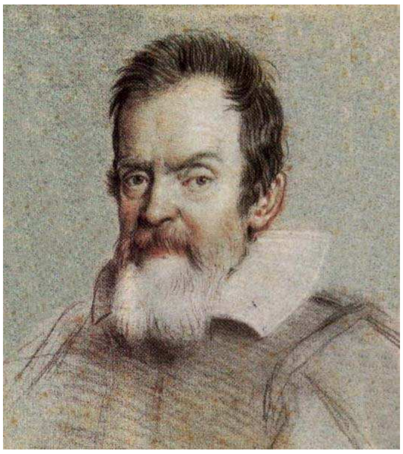
Dostaneme namísto (2.49) tvar

$$\mathbf{F} = Q_2(\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_0) , \qquad (2.51)$$

známý jako **Lorentzova síla**.
Veličina $\mathbf{B}_0$ Charakterizuje tzv. magnetické pole a nazývá se magnetickou indukcí.
Podobně jako pole elektrické, můžeme i magnetické pole charakterizovat indukčními čarami, které mají tu vlastnost, že vektor magnetické indukce v daném bodě leží ve směru tečny k indukční čáře jdoucí tímto bodem a jeho orientace souhlasí se směrem orientace indukční čáry.
Hustotu toku indukčních čar je možno normovat tak, aby se rovnala velikosti vektoru magnetické indukce.
Vypočteme-li $div\ \mathbf{B}_0$ z (2.50) dostaneme vzhledem k (2.48)

$$div\ \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c^2} div\ (\mathbf{u}\times\mathbf{E}_0) = \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}_0\cdot rot\ \mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot rot\ \mathbf{E}_0) = 0 . \qquad (2.52)$$

Znamená to, že magnetické indukční čáry nemají zdroje a musí se buď uzavírat samy do sebe, nebo začínat a končit v nekonečnu.
Takové pole nazýváme solenoidálním.
Jak ukázal P. A. M. Dirac, relativistická kvantová mechanika připouští možnost existence tzv. magnetických monopólů, tj. magnetických nábojů které jsou zdrojem indukčních čar.
Jejich existence však nebyla dosud experimentálně potvrzena.
Aplikujeme-li operaci rotace na definiční vztah (2.50), zjistíme s ohledem na (2.47), že *rot* $\mathbf{B}_0$ je obecně různá od nuly, tj. magnetické pole není potenciální.
Při celkovém hodnocení získaných výsledků tedy vidíme, že při malé rychlosti, kdy můžeme zanedbat faktor $\frac{u^2}{c^2}$ proti jedničce, vede použití Lorentzovy transformace v případě elektrického pole ke stejnému výsledku, jako použití klasické Galileiho transformace, podle níž $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$.



Galileo Galilei (1564 – 1642)

Na druhé straně však i při těchto malých rychlostech má použití Lorentzovy transformace za následek objevení se nového členu reprezentujícího působení magnetického pole, ve výrazu (2.51) pro sílu.
Uvažujme nyní případ, kdy se náboj Q_1 pohybuje libovolnou rychlostí $u < c$.
Zabývejme se nejprve pouze elektrostatickou interakcí, tj. působením pohybujícího se náboje Q_1 na nehybný zkušební náboj Q_2.

K tomuto účelu použijeme jednoduchý myšlenkový experiment využívající efektu relativistické kontrakce délek.
Mějme pro určitost dvě inerciální souřadné soustavy Σ a Σ', přičemž Σ' se vůči laboratorní soustavě Σ pohybuje rychlostí v ve směru osy x (viz obr. 2.3).
Mějme nyní rozlehlý deskový kondenzátor nehybný v soustavě Σ' s rovinami desek rovnoběžnými s rovinou x', y'.
V soustavě Σ' bude mezi deskami kondenzátoru existovat homogenní elektrické pole ve směru osy z' o velikosti

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}, \qquad (2.53)$$

kde σ' je plošná hustota náboje na deskách kondenzátoru.
Přejdeme-li nyní do soustavy Σ, bude se zde kondenzátor pohybovat rychlostí v a jeho rozměry ve směru osy x se zkrátí faktorem γ^{-1}.
V témže poměru se tedy zmenší plocha desek kondenzátoru, a protože celkový náboj na deskách kondenzátoru zůstává neměnný, vzroste hustota náboje z σ' na

$$\sigma = \sigma' \cdot \gamma. \qquad (2.54)$$

Vzniká samozřejmě otázka, zda i v laboratorní soustavě souřadnic zůstane zachován směr siločar pole rovnoběžný s osou z.
Symetrie pohybu připouští eventuální vznik podélné složky pole ve směru osy x.
Avšak vzhledem k tomu, že pole uvnitř kondenzátoru je superpozicí polí dvou opačně nabitých rovinných desek, lze očekávat, že by se takové případné podélné složky pole vzájemně vykompenzovaly.
Tedy i v soustavě Σ budeme mít homogenní pole ve směru osy z o velikosti $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.
Díky lorentzovské kontrakci desek tedy siločáry pole zhoustnou a máme

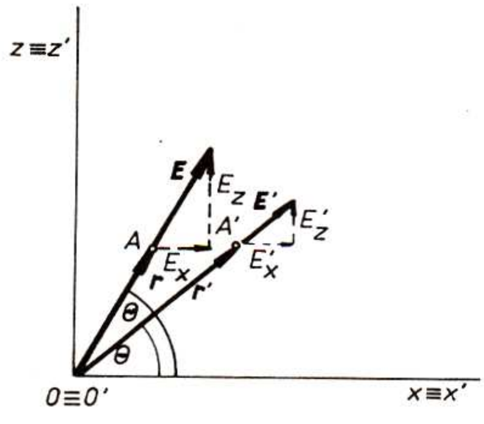
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' \cdot \gamma. \qquad (2.55)$$

Budeme-li nyní orientovat desky kondenzátoru rovnoběžně s rovinou x', z' uvidíme, že tatáž změna nastane i s vektorem intenzity pole orientován ve směru osy y'.
Naproti tomu, budou-li desky kondenzátoru orientovány rovnoběžně s rovinou y', z', projeví se v laboratorní soustavě Σ zkrácení délek jako sblížení desek kondenzátoru a tato změna nemá vliv na hustotu siločar pole, a tedy ani na vektor jeho intenzity ve směru osy x.
Tímto názorným způsobem jsme dospěli k závěru, že mezi složkami elektrostatického pole a složkami elektrického pole nábojů pohybujících se ve směru osy x rovnoměrně libovolnou rychlostí v platí transformační vztahy

$$E_x = E'_x \quad ; \qquad E_y = \gamma \cdot E'_y \quad ; \qquad E_z = \gamma \cdot E'_z \ . \tag{2.56}$$

Mějme nyní bodový náboj Q pohybující se rovnoměrně rychlostí **u**.
S tímto nábojem spojíme počátek inerciální soustavy souřadnic pohybující se podle obr. 2.3 a osu x namíříme ve směru **u** = **v**.
Protože elektrické pole tohoto náboje bude zřejmě osově symetrické vzhledem k ose x, budeme vyšetřovat pouze jeho složky v rovině x, z.
Vzhledem k rovnoměrnému pohybu náboje Q je lhostejné, ve kterém okamžiku budeme pole vyšetřovat.
Můžeme proto s výhodou zvolit okamžik $t = t' = 0$, kdy počátky obou soustav Σ a Σ' vzájemně splývají (viz obr. 2.4).

Obr. 2.4



K výpočtu intenzity elektrického pole bodového náboje pohybujícího se rovnoměrně libovolnou rychlostí

Přitom můžeme použít zjednodušené Lorentzovy transformace (2.7), kde položíme t = 0, kdy nám počátky obou soustav splývají.
V soustavě Σ' vytváří náboj statické Coulombovo pole o složkách

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\Theta'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\cdot x}{r'^3}\,,$$
$$E'_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\Theta'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{r'^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r'^3}\,. \tag{2.57}$$

Pro složky E_x, E_z pak podle (2.56) a (2.57) platí

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\cdot x}{r'^3}\,,$$
$$E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\cdot z}{r'^3}\,, \tag{2.58}$$

čili

$$\frac{E_z}{E_x} = \frac{z}{x}\;. \tag{2.59}$$

Získáme tak důležitý poznatek, že elektrické pole přímočaře se pohybujícího bodového náboje zůstává radiální a že jeho siločáry leží v přímkách procházejících tímto nábojem.
Zbývá určit rozložení hustoty těchto siločar v prostoru neboli velikost vektoru **E**.

Po jednoduché matematické úpravě a substituci $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \to k$ dostáváme

$$E^2 = k^2\gamma^2 \frac{x^2+z^2}{r'^6} = k^2\gamma^2 \frac{x^2+z^2}{\left[(\gamma\cdot x)^2+z^2\right]^3} = \frac{k^2}{\gamma^4}\frac{x^2+z^2}{\left(x^2+z^2-\beta^2\cdot z^2\right)^3} =$$
$$= k^2 \frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(x^2+z^2\right)^2\left(1-\frac{\beta^2\cdot z^2}{x^2+z^2}\right)^3} = k^2 \frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{r^4\left(1-\beta^2\cdot\sin^2\Theta\right)^3}\,. \qquad (2.60)$$

Směr siločar je přitom vyjádřen úhlem Θ pro nějž platí

$$tg\Theta = \frac{z}{x} = \gamma\frac{z'}{x'} = \gamma\cdot tg\Theta'\,. \qquad (2.61)$$

siločáry se tedy v prostoru natáčejí jako pevné tyčky.
Vektor intenzity elektrického pole **E** můžeme tedy podle (2.60) napsat jako

$$\mathbf{E} = \frac{1-\beta}{\left(1-\beta^2\cdot\sin^2\Theta\right)^{3/2}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \qquad (2.62)$$

anebo v případě obecné polohy náboje *Q* jako

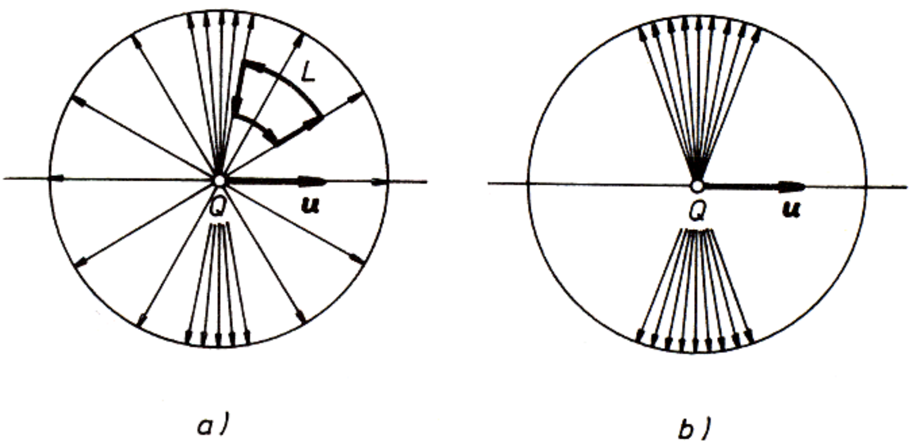
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_q) = \frac{1-\beta}{\left(1-\beta^2\cdot\sin^2\Theta\right)^{3/2}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{R^3}\ , \qquad (2.63)$$

kde vektor průvodiče $\mathbf{R} = \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q$, $\mathbf{r}_Q$ je polohový vektor bodu, v němž elektrické pole určujeme pomocí zkušebního náboje *q*.
Náboj, který se pohybuje libovolnou relativistickou rychlostí vytváří tedy elektrické pole, které se liší od pole $\mathbf{E}_0$ daného (2.45) faktorem

$$\Gamma = \frac{1-\beta}{\left(1-\beta^2 \cdot \sin^2\Theta\right)^{3/2}} = \frac{1-\beta^2}{\left[1-\left(\frac{\mathbf{u}\times\frac{\mathbf{R}}{R}}{c}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad , \qquad (2.64)$$

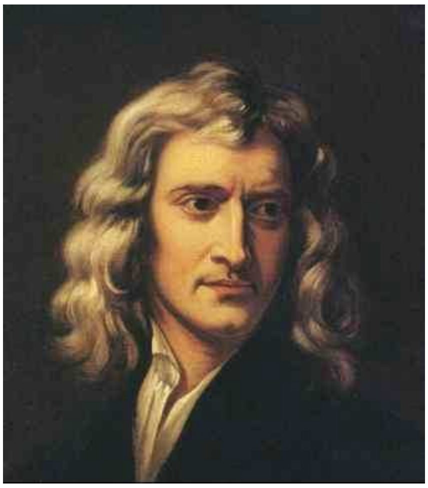
zvaným **Heavisideův faktor**.
Pole $\mathbf{E} = \Gamma\cdot\mathbf{E}_0$ narozdíl od pole $\mathbf{E}_0$ pomalu se pohybujícího náboje již tedy není sféricky symetrické ale závisí kromě vzdálenosti též na úhlu, jejž svírá průvodič se směrem pohybu náboje, viz obr. 2.5

Obr. 2.5



Siločáry elektrického pole bodového relativistického a) a ultrarelativistického b) náboje

Čím více se blíží rychlost nabité částice rychlosti světla, tím více se siločáry zhušťují ve směru kolmém ke směru pohybu.
Porovnáme-li nyní výše diskutované případy působení nehybného náboje na pohyblivý a naopak, zjistíme, že zde není splněn třetí Newtonův zákon.



Isaac Newton (1643 – 1727)

Nehybný náboj totiž působí na pohyblivý silou **F** = **E**(**r**)·q, kde pole **E**(**r**) je Coulombovo, zatímco pohybující se náboj působí na nehybný náboj silou téhož tvaru, v němž však obecně vystupuje pole (2.63).
Jen při malých rychlostech přechází toto pole na tvar (2.45).
Porušení Newtonova třetího zákona je důsledkem relativity současnosti měření obou sil v soustavách jež se vůči sobě navzájem pohybují.
Přestože elektrické pole pohybujícího se náboje nemá již siločáry rozloženy středově symetricky a nemá tedy coulombovský tvar, měl by v důsledku invariance velikosti náboje vůči pohybu, zůstat nadále v platnosti Gaussův zákon (2.46).
Přesvědčme se o tom.
Budeme nejprve uvažovat Gaussovu plochu ve tvaru kulové plochy S_k poloměru r_0 nehybné v soustavě Σ, v okamžiku, kdy se náboj Q nachází v jejím středu C.
Vektor **E** má v tomto případě stále směr normály ke kulové ploše, takže pro celkový tok intenzity platí

$$\phi = \oint_{S_k} \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \oint_{S_k} E\, dS\,, \qquad (2.65)$$

kam za **E** musíme dosadit (2.62).
Pro výpočet integrálu zavedeme sférické souřadnice r, Θ, φ vztažené ke středu koule.

Souřadnice *r* představuje vzdálenost od středu *C*, úhel Θ je úhlem který svírá průvodič se směrem pohybu náboje (osou *x*) a úhel φ je polární úhel v rovině kolmé ke směru pohybu a procházející středem *C*.
Vzhledem k osové symetrii úlohy intenzita pole na úhlu φ nezávisí a je funkcí pouze souřadnic *r* a Θ.
Máme tedy

$$\begin{aligned}
\phi &= \oint_{S_k} \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \int_{S_k} \Gamma \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^{\,2}} r_0^{\,2} \sin\Theta \, d\Theta d\varphi = \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\left(1-\beta^2\right)\sin\Theta}{\left(1-\beta^2 \sin^2\Theta\right)^{3/2}} \, d\Theta = \\
&= \frac{Q}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \Gamma \sin\Theta \, d\Theta \underset{\cos\Theta \mapsto t}{=} \frac{Q}{2\varepsilon_0} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\beta^2+\beta^2 t^2\right)^{3/2}} \, dt = \\
&= \frac{Q}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\beta} \left[\frac{\beta^2 t}{1-\beta^2\left(1-t^2\right)} \right]_{-1}^{1} = \frac{Q}{\varepsilon_0} .
\end{aligned} \qquad (\ 2.66\ )$$

Uvažujme nyní případ, kdy se pohybuje jak náboj *Q*, tak i zkušební náboj *q*, různými konstantními rychlostmi.
Použijeme-li namísto pomalých Lorentzových transformací (2.37), (2.25) přesné transformace (2.23) a (2.23), dostaneme jako výsledek opět sílu tvaru (2.49) resp. (2.51), tedy Lorentzovu sílu.

$$\mathbf{F} = q\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \cdot \mathbf{v} \times \left(\mathbf{u} \times \mathbf{E} \right) \right] = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) . \qquad (\ 2.67\ )$$

Na místě elektrického pole zde však již nevystupuje pole Coulombova typu (2.45) nýbrž elektrické pole náboje *Q* pohybujícího se libovolnou konstantní rychlostí **u** (2.63).

$$\mathbf{E} = \Gamma \mathbf{E}_0 = \Gamma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} \mathbf{R} . \qquad (\ 2.68\ )$$

Vztah mezi elektrickým a magnetickým polem typu (2.50) se přitom ukazuje být obecně platným, a platí tedy

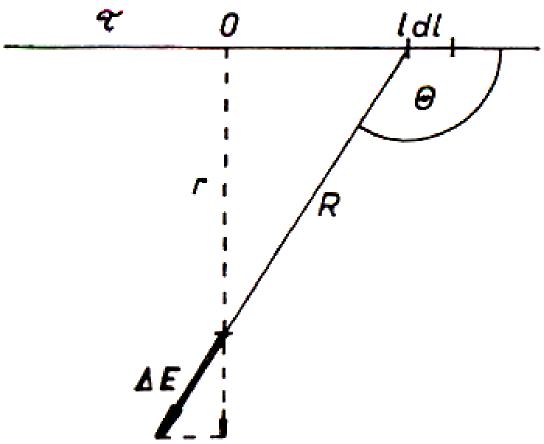
$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{u} \times \mathbf{E}\right) . \qquad (2.69)$$

Vztahů (2.68), (2.69) použijeme k výpočtu elektrického a magnetického pole nekonečně dlouhého homogenního paprsku nábojů pohybujících se rychlostí u.
Zavedeme-li lineární hustotu náboje τ v tomto paprsku, můžeme použít vztahu (2.68) pro vyjádření příspěvku $\Delta\mathbf{E}$ k celkovému poli v daném bodě, který vzbudí krátký úsek paprsku nesoucí náboj $\Delta Q = \tau \cdot \Delta l$:

$$\Delta\mathbf{E} = \Gamma \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \Delta l . \qquad (2.70)$$

Celkovou intenzitu **E** pak dostaneme integrací přes celou délku paprsku. Přitom opět stačí uvažovat pouze projekce do směru kolmého k paprsku.

Obr. 2.6



K odvození intenzity elektrického pole přímého nábojového paprsku

Podle obr. 2.6 máme

$$l = -r \cdot \operatorname{cotg} \Theta , \qquad dl = \frac{r}{\sin^2 \Theta} d\Theta , \qquad R = \frac{r}{\sin \Theta} , \qquad (\ 2.71\ )$$

a tedy s použitím (2.66)

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma \cdot \sin \Theta}{R^2} dl = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \Gamma \cdot \sin \Theta \, d\Theta = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} . \qquad (\ 2.72\ )$$

Obdobným způsobem bychom mohli vypočíst i magnetickou indukci. Uvážíme-li však, že rychlost jednotlivých elementů **u** je vždy rovna intenzitě **E**, můžeme použít vztahu (2.69), a tak získat přímo

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{u\tau}{r} . \qquad (\ 2.73\ )$$

Nábojový paprsek vytváří tedy stacionární elektrické a magnetické pole. Intenzita elektrického pole je totožná s intenzitou elektrostatického pole nabité přímky při téže lineární hustotě náboje. Magnetické pole má směr kolmý k rovině paprsku a průvodiče do daného bodu.
Uvažujme nyní dvojici nekonečně dlouhých rovnoběžných nábojových paprsků o vzájemné vzdálenosti r, s lineárními nábojovými hustotami τ_1, τ_2 a rychlostmi $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$.
Na nábojový element $\tau_2 \cdot \Delta l$ druhého paprsku bude působit elektrická síla $\mathbf{E} \cdot \tau_2 \cdot \Delta l$, kde **E** je intenzita elektrického pole podle (2.72).
Na jednotku délky druhého paprsku bude tedy působit elektrická síla f_e :

$$f_e = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0 r} . \qquad (\ 2.74\ )$$

Podobně lze spočítat podle (2.67) i magnetickou sílu, použijeme-li pro magnetickou indukci v místě druhého paprsku výsledek (2.73).
Jelikož vektor **B** je kolmý na společnou rovinu obou paprsků, bude mít magnetická síla f_m působící na jednotku délky druhého paprsku velikost

$$f_m = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{|\tau_1 u_1|\cdot|\tau_2 u_2|}{r} \qquad (2.75)$$

a oba paprsky se budou přitahovat nebo odpuzovat touto silou v závislosti na souhlasnosti znaménka součinů $\tau_1 u_1$, $\tau_2 u_2$.
Například budou-li mít oba paprsky souhlasná znamení nábojů i souhlasnou orientaci rychlosti $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, bude elektrická síla paprsky odpuzovat a magnetická síla je bude přitahovat.
Velikost obou typů sil je v poměru

$$\frac{f_m}{f_e} = \frac{u_1 u_2}{c^2} . \qquad (2.76)$$

není bez zajímavosti, že výraz pro celkovou sílu působící mezi dvěma paprsky lze získat bez zavádění pojmu magnetického pole, pouze jako důsledek relativistického efektu kontrakce délek.
Mějme pro určitost opět souhlasné znaménko τ_1, τ_2 a souhlasný směr rychlostí $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ a zvolme směr odpudivé síly jako kladný.
Přejděme do soustavy Σ' pohybující se spolu s náboji druhého paprsku rychlostí $\mathbf{u}_2$.
V této soustavě působí na druhý paprsek zřejmě pouze elektrické síly a platí

$$f_e' = \frac{\tau_1' \tau_2'}{2\pi\varepsilon_0 r} \ , \qquad (2.77)$$

kde τ_1', τ_2' jsou lineární hustoty nábojů v soustavě Σ'.
Přejdeme nyní zpět do laboratorní soustavy. Pro příčnou složku síly připadající na jednotku délky v podélném směru přitom platí $f = f'$.
Zbývá přetransformovat lineární hustoty náboje τ_1', τ_2' do laboratorní soustavy.
Můžeme k tomu použít vztahů analogických (2.54), který však platí pouze pro přechod mezi laboratorní soustavou Σ a klidovou soustavou Σ'.
Podle tohoto vztahu $\tau_2' = \tau_2 / \gamma_2$.

Náboje prvního paprsku se obecně pohybují v obou soustavách a to rychlostmi $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_1'$.
Musíme proto přejít nejprve od klidové soustavy prvního paprsku $\Sigma''\left(\tau_1'' = \tau_1 / \gamma_1\right)$ a odtud do soustavy Σ', kde $\tau_1' = \tau_1''\gamma_1' = \tau_1\gamma_1' / \gamma_1$.
Výsledná síla na jednotku délky druhého paprsku v laboratorní soustavě je tedy

$$f = f_e' = \frac{\tau_1'\tau_2'}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\gamma_1'}{\gamma_1\gamma_2}. \qquad (2.78)$$

Dosadíme-li

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \gamma_2 = \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \gamma_1' = \left(1 - \frac{u_1'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (2.79)$$

dostaneme po úpravě

$$f = \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{u_1 u_1}{c^2}\right). \qquad (2.80)$$

První člen zde odpovídá elektrické síle (2.74), druhý magnetické síle (2.75).
Z (2.76) je zřejmé, že magnetické síly mezi nábojovými paprsky v případě pomalu se pohybujících nábojů $u_1 \ll c$, $u_2 \ll c$ představují jen malou relativistickou opravu k silám elektrickým.
Můžeme si však představit složitější struktury, v nichž budou převládat síly magnetické.
Uvažujme například kladné a záporné náboje téže velikosti s lineární hustotou τ rovnoměrně rozložené na přímce.
Jsou-li oba druhy náboje v klidu, bude tato přímka elektricky neutrální.
Představme si nyní, že náboje jednoho znaménka, např. záporné, se začnou pohybovat rychlostí $\mathbf{u}$.
Podle zákona o kontrakci délek vzroste lineární hustota záporných nábojů na $-\gamma\tau$ a přímka se stane nabitou s hustotou $\tau(1 - \gamma)$.

Máme-li nyní dvě takové, pro jednoduchost identické rovnoběžné přímky ve vzdálenosti r, budou na sebe působit elektrickou silou

$$f_e = \frac{\tau^2 (1-\gamma)^2}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{2.81}$$

Abychom určili celkovou sílu působící na jednotku délky druhé přímky, musíme určit zvlášť sílu působící na kladné a záporné náboje.
Na kladné náboje působí zřejmě síla

$$f = \frac{\tau^2 (1-\gamma)}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{2.82}$$

Přejdeme-li do klidové soustavy záporných nábojů druhé přímky, zjistíme, že na ně působí ze strany první přímky táž síla.
Výsledná celková síla na jednotku délky druhé přímky bude, jak víme, táž i v laboratorní soustavě, takže dostáváme

$$f = 2\frac{\tau^2 (1-\gamma)}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{2.83}$$

Srovnáním (2.82) a (2.83) zjistíme, že celková přitažlivá síla (2.83) je mnohem větší než nepatrná odpudivá síla elektrická (2.82).
V prvním přiblížení je celková síla f silou magnetickou:

$$f = \frac{\tau^2}{\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \approx -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{u^2\tau^2}{r} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}. \tag{2.84}$$

Mějme nyní rovinu nabitou s plošnou hustotou náboje σ, přičemž všechny náboje se pohybují touž konstantní rychlostí **u**.
Rovinu lze rozdělit na úzké přímé proužky šířky Δl rovnoběžné se směrem pohybu nábojů.

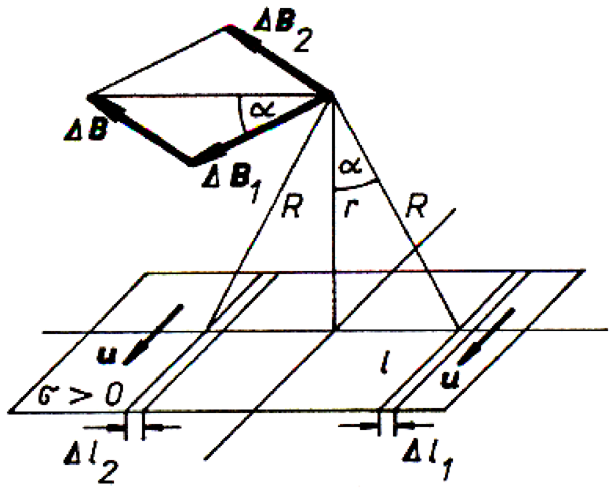
André-Marie Ampère (1775 – 1836)

Každý takový proužek můžeme považovat za přímý nábojový paprsek o lineární hustotě $\tau = \sigma \Delta l$ a pole jím vytvořené popsat coby pole nábojového paprsku, dle předchozích příkladů.
Superpozicí elektrického pole těchto nábojových paprsků zjistíme, že elektrické pole této roviny je konstantní, kolmé k rovině a rovnou

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (2.85)$$

Určíme nyní magnetické pole této roviny. Můžeme například uvažovat vždy dvojice proužků symetricky umístěných vůči patě kolmice spuštěné z daného bodu mimo rovinu a zjistíme, že příspěvek k magnetickému poli od takové dvojice je rovnoběžný s rovinou (viz obr. 2.7).

Obr. 2.7



K odvození magnetické indukce plošného rovinného proudu

Z téhož obrázku najdeme vztahy

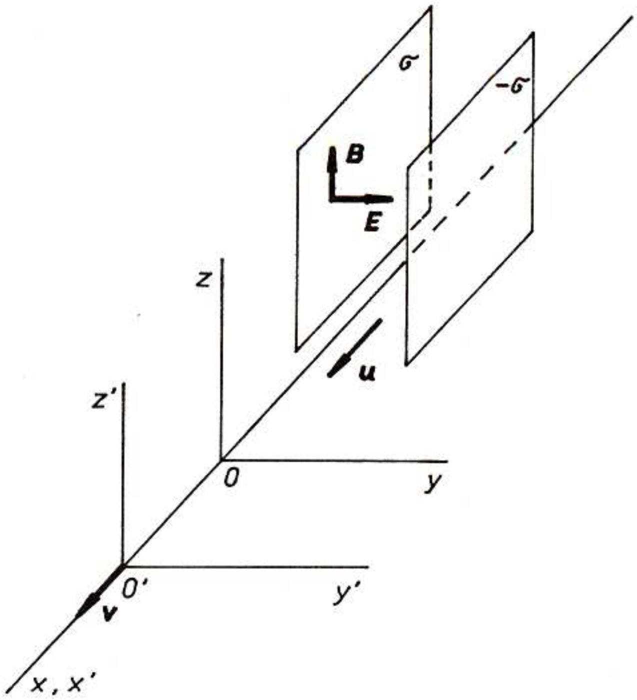
$$
\begin{aligned}
l &= r \cdot \tan\alpha, \\
dl &= \frac{r \cdot d\alpha}{\cos^2\alpha}, \\
R &= \frac{r}{\cos\alpha}, \\
\Delta B &= 2\cos\alpha \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\sigma u}{R}\Delta l\,.
\end{aligned}
\qquad (\ 2.86\ )
$$

Integrováním pak zjistíme výsledné magnetické pole:

$$B\frac{\mu_0 \sigma u}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\alpha = \frac{\mu_0 \sigma u}{\pi}\,. \qquad (\ 2.87\ )$$

Podívejme se nyní, jak se transformují složky elektrického a magnetického pole při přechodu od jedné inerciální soustavy ke druhé. Použijme opět naši představu pohyblivého kondenzátoru z jedné z předchozích úloh, znázorněnou na obr. 2.8.

Obr. 2.8



K odvození transformačních vztahů pro složky intenzity elektrického pole a magnetické indukce

Předpokládejme, že kondenzátor se pohybuje ve směru osy x konstantní rychlostí **u** v soustavě Σ, resp. **u′** v soustavě Σ'.
Můžeme jej tedy považovat za soustavu dvou rovin tvořených nábojovými paprsky s opačným znaménkem náboje.
Budeme-li v soustavě Σ superponovat elektrická pole (2.78) a magnetická pole (2.87) těchto dvou rovin, zjistíme, že vektor intenzity elektrického pole **E** je orientován ve směru osy *y* a má velikost

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad (2.88)$$

vektor magnetické indukce **B** je orientován ve směru osy *z* a má velikost

$$B = \mu_0 \sigma u. \qquad (2.89)$$

Stejný obraz ovšem budeme pozorovat i v soustavě Σ', pouze s tím rozdílem, že musíme dosadit čárkované hodnoty σ', u'.
Podle relativistického zákona skládání rychlostí (2.24) dostaneme

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \qquad \beta'_u = \frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta_u \beta}, \tag{2.90}$$

kde $\beta = \frac{v}{c}$, $\beta_u = \frac{u}{c}$, $\beta'_u = \frac{u'}{c}$.
Abychom určili σ', musíme nejprve přejít ze soustavy Σ do klidové soustavy kondenzátoru Σ'' (pohybující se vůči laboratorní soustavě rychlostí u) a najít zde $\sigma'' = \frac{\sigma}{\gamma_u}$.
Z této soustavy pak přejdeme do soustavy Σ', kde bude

$$\sigma' = \frac{\gamma'_u \cdot \sigma}{\gamma_u} = \frac{\sigma}{\gamma_u} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_u'^2}} = \frac{\sigma}{\gamma_u} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta_u \beta} \right)^2}} = $$
$$= \frac{\sigma}{\gamma_u} \frac{1 - \beta_u \beta}{\sqrt{\left(1 - \beta^2\right)\left(1 - \beta_u^2\right)}} = \sigma\gamma\left(1 - \beta_u \beta\right). \tag{2.91}$$

Potom

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{\beta_u \beta \sigma}{\varepsilon_0} \right) = \gamma \left(E_y - \beta c \frac{\mu_0 \sigma u}{c^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) = \gamma \left(E_y - \beta c B_z \right). \tag{2.92}$$

a

$$B_z' = \mu_0 \sigma' u' = \mu_0 \sigma \gamma c \left(\beta_u - \beta \right) = \gamma \left(\mu_0 \sigma u - \mu_0 \sigma v \right) =$$
$$= \gamma \left(B_z - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{\beta}{c} \right) = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right). \qquad (2.93)$$

kdybychom nyní orientovali myšlený kondenzátor rovnoběžně s rovinou *x*, *y*, nalezli bychom vztahy mezi *z*-ovými složkami elektrického pole a *y*-ovými složkami magnetického pole.
Podobně bychom z tohoto myšlenkového experimentu mohli usoudit, že složky E_x a B_x se při transformaci nemění.
Dostáváme tedy následující obecné transformační rovnice pro složky elektrického a magnetického pole:

$$E_x' = E_x\,, \qquad E_y' = \gamma \left(E_y - \beta c B_z \right), \qquad E_z' = \gamma \left(E_z + \beta c B_y \right),$$
$$B_x' = B_x\,, \qquad B_y' = \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right), \qquad B_z' = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right), \qquad (2.94)$$

které, jak si později ukážeme, jsou složkami jediného antisymetrického čtyřtenzoru $\mathbf{F}_{ik}$, zvaného **tenzor elektromagnetického pole**.
Vidíme, že složky elektrického a magnetického pole jsou zde nerozlučně spjaty transformačními vztahy.
Předpokládáme-li, že v soustavě Σ′ jsou náboje v klidu, bude **B**′ = 0 a z (2.94) nám vyplynou transformace (2.56) jako zvláštní případ.
Z transformačních vztahů (2.94) dále plyne, že je-li v soustavě Σ pole čistě elektrické (2.**B** = 0), objeví se v soustavě Σ′ magnetické pole o složkách

$$B_x' = 0\,, \qquad B_y' = \frac{\beta}{c} E_z'\,, \qquad B_z' = -\frac{\beta}{c} E_y'\,, \qquad (2.95)$$

neboli, psáno vektorově

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{c^2} \mathbf{v}' \times \mathbf{E}'\,. \qquad (2.96)$$

Analogicky, je-li v soustavě Σ pole čistě magnetické (2.**E** = 0), bude v soustavě Σ′

$$E'_x = 0\,, \qquad E'_y = -\beta c B'_z\,, \qquad E'_z = \beta c B'_y\,, \tag{2.97}$$

čili

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'. \tag{2.98}$$

Pro malé rychlosti $v \ll c$ můžeme položit γ= 1 a transformační vztahy (2.94) zjednodušit na

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\,, \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}\,. \tag{2.99}$$

Pomocí obecných transformací (2.94) se lze přesvědčit, že existují určité kombinace vektorů **E**(**r**) a **B**(**r**), které se při transformaci mezi dvěmi inerciálními soustavami nemění.
Takové veličiny nazýváme invarianty elektromagnetického pole.
Jsou to

$$\Pi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}\,, \tag{2.100}$$

$$\Sigma = B^2 - \frac{1}{c^2}E^2\,. \tag{2.101}$$

Ze vztahu (2.100) zejména plyne, že jsou-li vektory **E** a **B** v nějaké inerciální soustavě navzájem kolmé, zachovají si tuto vlastnost ve všech inerciálních soustavách.
Vyšetříme nyní obecné vlastnosti elektrického a magnetického pole jako jsou jejich rotace a divergence.
Dospějeme tak k úplnému systému rovnic popisujících vlastnosti tzv. elektromagnetického pole, tj. sjednoceného elektrického a magnetického pole.
Pro elektrické pole náboje pohybujícího se libovolnou, tedy i ultrarelativistickou rychlostí jsme si ověřili platnost Gaussova zákona.

Pokud lze zavést objemovou hustotu náboje ρ, můžeme tento zákon vyjádřit opět i v diferenciálním tvaru

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (2.102)$$

Přesně vzato, pro divergenci pole **E** bychom měli psát

$$div\mathbf{E} = div\left(\Gamma\mathbf{E}_0\right) = \mathbf{E}_0 \cdot grad\Gamma + \Gamma \cdot div\mathbf{E}_0. \qquad (2.103)$$

Snadno se však přesvědčíme, že $\mathbf{E}_0 \cdot grad\Gamma = 0$ a objemové hustoty náboje zavedené (2.47) a (2.102) se liší normovacím koeficientem Γ:

$$\rho = \Gamma\rho_0 \ . \qquad (2.104)$$

Otázkou je, zda pole **E** zůstává potenciální, tj. zda pro ně platí vztah (2.48).
Již pouhým pohledem na rozložení siločar na obr 2.5a snadno usoudíme, že toto pole potenciální není.
Bude-li se totiž nabitá částice pohybovat v tomto poli po uzavřené dráze *l*, vyznačené na obrázku, bude přitom vykonána nenulová práce, neboť k práci budou přispívat pouze radiální úseky této dráhy, neboť k práci budou přispívat pouze radiální úseky této dráhy, přičemž hustota siločar a tedy i intenzita pole je na obou těchto úsecích různá.
Přímým výpočtem dostáváme

$$rot\mathbf{E} = rot\left(\Gamma\mathbf{E}_0\right) = grad\Gamma\times\mathbf{E}_0 + \Gamma\cdot rot\mathbf{E}_0 = grad\Gamma\times\mathbf{E}_0. \qquad (2.105)$$

Vypočteme

$$grad\Gamma = \frac{d\Gamma}{d\Theta}grad\Theta = \frac{d\Gamma}{d\Theta}\frac{\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}\right)\mathbf{R} - R^2\mathbf{u}}{R^3u\cdot\sin\Theta}, \qquad (2.106)$$

neboť

$$\cos\Theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}}{uR}, \qquad grad\left(\cos\Theta\right) = -\sin\Theta \cdot grad\Theta . \qquad (2.107)$$

Potom

$$rot\mathbf{E} = \frac{d\Gamma}{d\Theta}\frac{\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}\right)\mathbf{R} - R^2\mathbf{u}}{R^2 u\cdot\sin\Theta}\times\mathbf{E}_0 = -\frac{d\Gamma}{d\Theta}\frac{c^2}{R\cdot u\cdot\sin\Theta}\mathbf{B}_0, \qquad (2.108)$$

viz (2.67).
Vidíme, že vektor $rot\mathbf{E}$ je obecně nulový a rovnoběžný s vektorem magnetické indukce $\mathbf{B} = \Gamma\mathbf{B}_0$.
Výraz na pravé straně (2.108) lze vyjádřit jako parciální časovou derivaci magnetického pole $-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$.
Dokažme si to: elektrické a magnetické pole pohybujícího se náboje určujeme v bodě o polohovém vektoru $\mathbf{r}_q$.
Budeme-li tento bod fixovat v prostoru, potom časová závislost pole v tomto bodě bude dána časovou závislostí vektoru

$$\mathbf{R}(t): \quad f\left[\mathbf{R}(t)\right] = f\left[\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q(t)\right]. \qquad (2.\ 109)$$

Parciální časovou derivaci pole pak můžeme vyjádřit jako

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} grad\right) f = -\left(\frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} grad\right) f = -\left(\mathbf{u}\cdot grad\right) f \qquad (2.110)$$

Použijeme-li tento výsledek, můžeme psát

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\left(\mathbf{u}\cdot grad\right)\mathbf{B} = -\mathbf{B}_0\left(\mathbf{u}\cdot grad\ \Gamma\right) - \left(\mathbf{u}\cdot grad\right)\mathbf{B}_0 \qquad (2.111)$$

První člen na pravé straně upravíme podle (2.106) na

$$-\mathbf{B}_0\left(\mathbf{u}\cdot grad\ \Gamma\right)=-\mathbf{B}_0\frac{d\Gamma}{d\Theta}\frac{u^2R^2\cos^2\Theta-u^2R^2}{R^3u\cdot\sin\Theta}=\mathbf{B}_0\frac{d\Gamma}{d\Theta}\frac{u}{R}\sin\Theta\,. \tag{2.112}$$

K úpravě druhého členu (2.111) použijeme vztahu

$$\left(\mathbf{a}\cdot grad\right)\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)=\mathbf{b}\times\left(\mathbf{a}\cdot grad\right)\mathbf{c}-\mathbf{c}\times\left(\mathbf{a}\cdot grad\right)\mathbf{b}\,. \tag{2.113}$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}-\Gamma\left(\mathbf{u}\cdot grad\right)\mathbf{B}_0 &=-\frac{\Gamma}{c^2}\left(\mathbf{u}\cdot grad\right)\left(\mathbf{u}\times\mathbf{E}_0\right)=-\frac{\Gamma}{c^2}\mathbf{u}\times\left(\mathbf{u}\cdot grad\right)\mathbf{E}_0 = \\ &=\frac{\Gamma}{c^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{u}\times\left(\mathbf{u}\cdot grad\right)\frac{\mathbf{R}}{R^3}= \\ &=-\frac{\Gamma}{c^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{u}\times\left(\frac{\mathbf{u}}{R^3}-\frac{3\mathbf{R}\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}\right)}{R^5}\right)= \\ &=\frac{\Gamma}{c^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3u\cdot\cos\Theta}{R^4}\left(\mathbf{u}\times\mathbf{R}\right)=\mathbf{B}_0\frac{3\Gamma u}{R}\cos\Theta.\end{aligned} \tag{2.114}$$

Snadno spočteme

$$\frac{d\Gamma}{d\Theta}=3\Gamma\frac{\beta^2\sin\Theta\cos\Theta}{1-\beta^2\sin^2\Theta} \tag{2.115}$$

a spojením výsledků (2.112) a (2.114) s (2.111) najdeme

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt}=\frac{u}{R}\left(\frac{d\Gamma}{d\Theta}\sin\Theta+3\Gamma\cos\Theta\right)\mathbf{B}_0=\frac{d\Gamma}{d\Theta}\frac{c^2}{R\cdot u\cdot\sin\Theta}\mathbf{B}_0\,. \tag{2.116}$$

Porovnáním (2.116) s (2.108) získáme Faradayův zákon elektromagnetické indukce:

$$rot\ \mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,. \tag{2.117}$$

Všimněme si nyní vlastností magnetického pole **B**.

Michael Faraday (1791 – 1867)

Pro jeho divergenci dostáváme

$$\begin{aligned} c^2 div\,\mathbf{B} &= div(\mathbf{u}\times\mathbf{E}) = \mathbf{E}\,rot\,\mathbf{u} - \mathbf{u}\,rot\,\mathbf{E} = \\ &= -\mathbf{u}\,rot\,\mathbf{E} = \mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) = 0\,, \end{aligned} \qquad (2.118)$$

neboť vektory **u** a **B** jsou vždy kolmé.
Konečně se budeme zajímat o rotaci **B**.
Dostáváme

$$\begin{aligned} rot\,\mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} rot(\mathbf{u}\times\mathbf{E}) = \\ &= \frac{1}{c^2}\left[\mathbf{u}\,div\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,div\,\mathbf{u} + (\mathbf{E}\,grad)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\,grad)\mathbf{E}\right] = \\ &= \frac{1}{c^2\varepsilon_0}\rho\mathbf{u} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\rho\mathbf{u} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,. \end{aligned} \qquad (2.119)$$

kde konstanta $\mu_0 = \dfrac{1}{c^2\varepsilon_0}$ je permeabilita vakua.

Představme si nyní soustavu nábojů, které se pohybují v soustavě Σ rovnoměrnými a přímočarými pohyby libovolnými rychlostmi.

Pole vytvářené touto soustavou nábojů můžeme vyjádřit coby superpozici polí jednotlivých bodových nábojů.
Podle výše získaných výsledků vyhovují výsledná vektorová pole systému rovnic

$$rot\,\mathbf{B} = \mu_0 \rho \mathbf{u} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (\ 2.120\ )$$

$$div\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (\ 2.121\ )$$

$$rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (\ 2.122\ )$$

$$div\,\mathbf{B} = 0\ , \qquad (\ 2.123\ )$$

popisujících obecné vlastnosti tzv. elektromagnetického pole.
Jak ukázali M. Faraday a J. C. Maxwell, platí tyto rovnice i pro případ nábojů pohybujících se zcela obecně, tj. též se zrychlením.
Vyjádříme-li nyní soustavu (2.120) – (2.123) tzv. **Maxwellových rovnic** v **Gaussově soustavě jednotek**, mnohé výpočty se nám tím poněkud zjednoduší:

$$rot\,\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j} \qquad (\ 2.124\ )$$

$$div\,\mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad (\ 2.125\ )$$

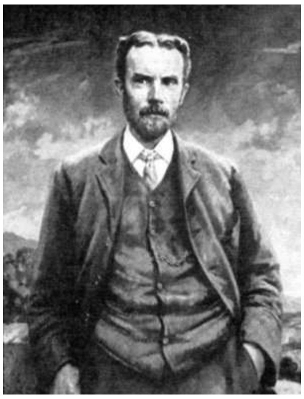
$$rot\,\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad (\ 2.126\ )$$

$$div\,\mathbf{B} = 0\ . \qquad (\ 2.127\ )$$

První dvojice Maxwellových rovnic popisuje generaci elektrického a magnetického pole svými zdroji, tj. hustotou elektrického náboje ρ a proudu **j** vystupujícími na pravé straně.
Druhá dvojice vyjadřuje další vnitřní vlastnosti pole.

Z rovnic (2.124) a (2.126) je vidět, že elektrické a magnetické pole mohou svou časovou proměnností vzájemně generovat jedno druhé.

Tvůrci klasické elektrodynamiky



J.C. Maxwell (1831-1879) **O. Heaviside (1850-1925)** **H. Hertz (1857-1894)**

Provedeme-li divergenci první Maxwellovy rovnice a časovou derivaci druhé Maxwellovy rovnice, pak sečtením obou takto upravených rovnic obdržíme rovnici kontinuity

$$div\ \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\ . \qquad (\ 2.128\ )$$

Aby byly Maxwellovy rovnice splnitelné, musí být vyhověno rovnici kontinuity.
Jinými slovy, elektrické náboje kolem sebe budí elektrické a magnetické pole tak, aby se samy zachovávaly.
Rovnice (2.125), (2.127) neobsahují časové derivace a mají proto charakter okrajových podmínek.
Zbývající dvě rovnice (2.124), (2.126), které lze divergováním převést na tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(div\ \mathbf{E} - \mathbf{4}\pi\rho\right) = -4\pi\left(div\ \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0 \qquad (\ 2.129\ )$$

$$\frac{\partial}{\partial t} div\ \mathbf{B} = -c \cdot div\ rot\ \mathbf{E} \equiv 0\ , \qquad (\ 2.130\ )$$

Pak zaručují, že jsou-li počáteční podmínky (2.125), (2.127) splněny v nějakém čase t = 0, zůstávají splněny neustále ve všech časech.
V teorii pole je výhodné kromě vektorů intenzit daného pole zavést též potenciály pole, což jsou veličiny jejichž diferenciální formy udávají příslušné intenzity.
V elektrostatice lze intenzitu elektrického pole **E** vyjádřit jako
E = - *grad* φ, čímž je identicky splněna Maxwellova rovnice *rot* **E** = 0.
V magnetismu platí rovnice *div* **B** = 0, takže musí existovat vektorové pole **A** takové, že **B** = *rot* **A**.
Z druhé dvojice Maxwellových rovnic tedy plyne, že pro obecné elektromagnetické pole lze psát

$$\mathbf{E} = -grad\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad (2.131)$$

$$\mathbf{B} = rot\ \mathbf{A}, \qquad (2.132)$$

čímž jsou obě poslední Maxwellovy rovnice splněny identicky.
Protože intenzity polí závisejí pouze na derivacích potenciálů, nejsou tyto potenciály určeny jednoznačně.
Daným polím **E** a **B** mohou odpovídat různé hodnoty potenciálů k **A** lze přičíst libovolný konstantní vektor a k φ libovolný skalár aniž se změní hodnoty intenzit **E** a **B**.
Obecně, magnetické pole **B** = *rot* **A** se nezmění jestliže k **A** přičteme gradient libovolné funkce f (*rot grad* $f \equiv 0$).
Aby se přitom nezměnilo ani pole **E** je zároveň třeba k potenciálu φ přidat člen $-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$.
Provedeme-li tedy kalibrační transformaci potenciálů

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\ \ f, \qquad (2.133)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad (2.134)$$

kde $f\,(r,\,t)$ je libovolná skalární funkce místa a času, příslušné elektromagnetické pole se nezmění.
Tato určitá svoboda ve volbě potenciálů umožňuje provést jejich kalibraci tak, aby to bylo co nejvýhodnější pro řešení daného problému.
Maxwellovy rovnice (2.124), (2.125) vyjádřené dosazením z (2.133), (2.134) mají obecně značně složitý tvar:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\cdot \mathbf{j} + grad\left(grad\ \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right), \qquad (\ 2.135\ )$$

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} grad\ \mathbf{A}. \qquad (\ 2.136\ )$$

Tyto rovnice se značně zjednoduší, předepíše-li se pro potenciály tzv. Lorenzova kalibrační podmínka

$$grad\ \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0\ . \qquad (\ 2.137\ )$$

Tato podmínka může být splněna funkcí f vyhovující rovnici

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = div\ \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\ . \qquad (\ 2.138\ )$$

Při této kalibraci nabývají Maxwellovy rovnice vyjádřené pomocí potenciálů separovaný a symetrický tvar D´Alembertových rovnic

$$\square\, \mathbf{A} \equiv \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\ , \qquad (\ 2.139\ )$$

$$\square\, \varphi \equiv \Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho\ . \qquad (\ 2.140\ )$$

Obecné řešení těchto rovnic je tvaru tzv. retardovaných potenciálů:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\int \frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'+\varphi_0 \ , \qquad (\ 2.141\ )$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\int \frac{j\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'+\mathbf{A}_0 \ , \qquad (\ 2.142\ )$$

kde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor bodu v němž stanovujeme potenciály, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ je polohový vektor objemového elementu $dV' = dx'dy'dz'$ při integraci hustoty náboje a proudu.
φ_0 a $\mathbf{A}_0$ popisují vnější pole působící na soustavu.
Vztahy (2.141) a (2.142) ukazují, že v daném místě **r** a v daném čase t je pole určeno nikoliv okamžitým rozložením náboje a proudu v prostoru, nýbrž rozložením retardovaným vždy o čas $t=\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$, který je potřeba k překonání vzdálenosti $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ rychlostí c.
Napíšeme-li Maxwellovy rovnice (2.124), (2.126) pro prostorovou oblast, kde $\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$, pak jejich parciální derivací podle času a dosazením ze zbývajících dvou Maxwellových rovnic získáme D´Alembertovy rovnice

$$\Delta\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0 \ ,$$

$$(\ 2.143\ )$$

$$\Delta\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0 ,$$

analogické rovnicím (2.139), (2.140) pro potenciály, pouze tentokrát bez přítomnosti elektrických nábojů.

Jelikož tyto rovnice mají nenulová řešení, může elektromagnetické pole existovat i samostatně, bez přímé vazby na elektromagnetické náboje a jejich proudy.
Budeme-li hledat partikulární řešení závislá pouze na jedné souřadnici x a na čase t, zjednoduší se rovnice (2.143) na

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \qquad (2.144)$$

Řešením je každá funkce tvaru

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}\left(x, t - \frac{x}{c} \right),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}\left(x, t - \frac{x}{c} \right). \qquad (2.145)$$

Stejná hodnota pole **E** a **B** jaká je v bodě o souřadnici x_0 v čase t_0 bude ve všech bodech, jejichž souřadnice a čas splňují rovnici
$x - x_0 = c \cdot (2.t - t_0)$.
Jedná se tedy o vlnění šířící se ve směru osy x fázovou rychlostí c.
Z Maxwellových rovnic tak plyne existence elektromagnetických vln šířících se prostorem rychlostí světla.
Tento poznatek přivedl Maxwella k názoru, že světlo je zřejmě elektromagnetické vlnění o velmi krátké vlnové délce.
Tím se Maxwellovi podařilo sjednotit do ucelené teorie nejen jevy elektrické a magnetické, ale zahrnout sem i jevy optické.
V rovinné vlně šířící se ve směru osy x jsou všechny veličiny funkcemi pouze $t - \frac{x}{c}$.

Je-li $\mathbf{E} = \mathbf{E}\left(t - \frac{x}{c}\right)$, pak z Maxwellových rovnic (2.124) a (2.126) pro $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, plyne

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -rot\ \mathbf{E} = \frac{\mathbf{n}_0}{c} \times \frac{d\mathbf{E}}{d\left(t - \frac{x}{c}\right)} = \mathbf{n}_0 \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad (2.146)$$

takže vztah mezi elektrickým a magnetickým polem
v elektromagnetické vlně je

$$\mathbf{B} = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}\ , \qquad (2.147)$$

kde $\mathbf{n}_0$ je jednotkový vektor ve směru šíření vlny.
Vektory elektrického a magnetického pole jsou tedy neustále kolmé jak navzájem, tak i ke směru šíření vln – elektromagnetické vlny jsou příčné.
Protože **B =** *rot* **A**, stačí pro popis rovinné vlny pouze vektorový potenciál **A**, pomocí něhož se pole **E** a **B** stanoví vztahy

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathbf{n}_0\right), \qquad (2.148)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathbf{n}_0\right) \times \mathbf{n}_0\right]. \qquad (2.149)$$

Nejjednodušší případ elektromagnetické vlny je vlna monochromatická, v níž je pole v každém bodě jednoduchou harmonickou funkcí času.

$$\mathbf{A}(t)_{r=konst.} = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \cdot \cos\left(\omega t + \alpha(\mathbf{r})\right)\ . \qquad (2.150)$$

V rovinné monochromatické vlně bude pole harmonickou funkcí argumentu $t - \frac{x}{c}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right) , \qquad (2.151)$$

kde $\mathbf{A}_0$ a α nezávisí na t ani na x.
Zavedením vlnového vektoru

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \cdot \mathbf{n}_0 \qquad (2.152)$$

lze rovinnou vlnu vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{A}(r, t) = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) \qquad (2.153)$$

platném pro libovolný směr šíření vlny.
V komplexním tvaru má vztah (2.153) podobu

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\left[\widehat{\mathbf{A}}_0 \cdot e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}\right], \qquad (2.154)$$

kde $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_0 \cdot e^{i\alpha}$.
Při pootočení souřadnicové soustavy o úhel ς kolem $\mathbf{n}_0$ se pole v rovinné elektromagnetické vlně bude transformovat podle zákona

$$\widehat{\mathbf{A}} \rightarrow \widehat{\mathbf{A}}' = e^{i\varsigma} \cdot \widehat{\mathbf{A}} \ . \qquad (2.155)$$

elektromagnetická vlna je tedy invariantní vzhledem k pootočení o úhel $\varsigma_0 = 2\pi$.
Tomu odpovídá hodnota spinu elektromagnetického pole

$$s = \frac{2\pi}{\varsigma_0} = 1. \qquad (2.156)$$

Jednoduchými úvahami o práci potřebné k rozmístění nábojů do požadované konfigurace lze ukázat, že elektrostatickou energii soustavy *N* nabitých těles

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} q_a \varphi_a = \frac{1}{2}\int \rho\varphi \, dV = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}^2 \, dV \qquad (2.157)$$

lze vyjádřit pomocí integrálu intenzity jejich společného pole, takže elektrickému poli lze přisoudit energii rozloženou s hustotou

$$W_e = \frac{1}{8\pi}\mathbf{E}^2 \qquad (2.158)$$

v prostoru.
Podobně, úvahy o práci potřebné k indukování elektrických proudů v soustavě elektrických obvodů ukazují, že energie takovéto soustavy vodičů

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} I_a \phi_a = \frac{1}{2}\int \mathbf{A}\cdot\mathbf{j} \, dV = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{B}^2 \, dV \qquad (2.159)$$

je dána objemovým integrálem vektoru indukce **B** buzeného magnetického pole a můžeme ji považovat za energii tohoto magnetického pole rozloženou v prostoru s hustotou

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\mathbf{B}^2. \qquad (2.160)$$

Hustota energie v elektromagnetickém poli se pak rovná součtu hustot odpovídajících elektrické a magnetické složce:

$$W_{em} = W_e + W_m = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right). \qquad (2.161)$$

Elektromagnetické pole samotné musí tedy obsahovat energii a hybnost, která může proudit i prázdným prostorem a konat práci na elektrických nábojích, tj. měnit se na jiné formy energie.
Elektromagnetické pole není tedy jen prostor v němž působí elektrické a magnetické síly, ale je samostatnou fyzikální entitou – specifickou formou hmoty.
Skalárním vynásobením rovnice (2.124) polem **E** a rovnice (2.126) polem **B** a jejich sečtením získáme po úpravě rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2}{8}\right)=-div\frac{c}{4\pi}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)-\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}. \qquad (2.162)$$

Integrace přes nějakou zvolenou prostorovou oblast *V* pak po aplikaci Gaussovy věty dává

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2}{8}\,dV=\int_V \rho\mathbf{v}\mathbf{E}\,dV+\oint_S \frac{c}{4\pi}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)d\mathbf{S}. \qquad (2.163)$$

Rovnice (2.163) vyjadřuje zákon zachování energie v elektromagnetickém poli: Elektromagnetická energie obsažená v prostorové oblasti *V* se zmenšuje jednak o mechanickou práci vykonanou elektrickými silami na nábojích uvnitř oblasti *V*, a jednak o energii vyzářenou polem ven z oblasti *V* skrze ohraničující plochu $S = \partial V$.
Rovnici (2.163) je rovněž možno zapsat ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_{elmag}+\varepsilon_{kin}\right)_V=-\oint_S \frac{c}{4\pi}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)d\mathbf{S}=-\oint_S \mathbf{P}\,d\mathbf{S} \qquad (2.164)$$

z něhož vidíme, že úbytek celkové energie elektromagnetického pole a nabitých částic v objemu *V* za jednotku času je roven celkovému toku tzv. **Poyntingova vektoru P** plochou *S* obklopující oblast *V*.

John Henry Poynting (1852 – 1914)

Rovnice (2.164) vyjadřuje zákon zachování součtu celkové energie elektromagnetického pole a kinetické energie všech nábojů.
Podobně lze ukázat, že elektromagnetické pole má hybnost danou integrálem

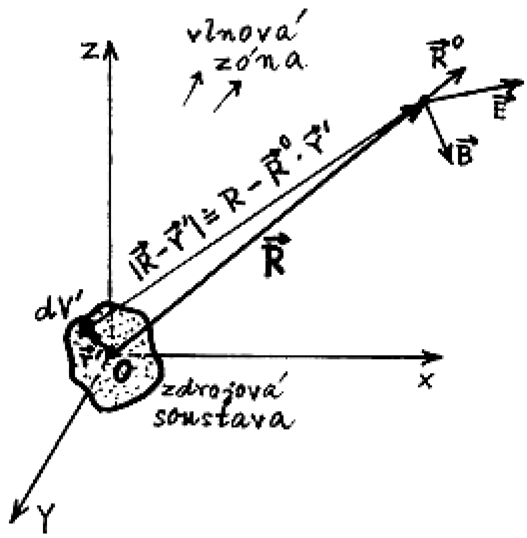
$$\mathbf{p} = \frac{1}{c}\int_V \mathbf{P}\, dV \,. \qquad (2.165)$$

Proud energie v rovinné elektromagnetické vlně je vzhledem k (2.147) a (2.161) roven

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} E^2 \cdot \mathbf{n}_0 \equiv \frac{c}{4\pi} B^2 \cdot \mathbf{n}_0 = c \cdot W_{em} \cdot \mathbf{n}_0 \,, \qquad (2.166)$$

z čehož je rovněž patrno, že se pole ve vlně šíří rychlostí světla.
Mějme soustavu pohybujících se elektrických nábojů soustředěnou v nějaké omezené prostorové oblasti (viz obr. 2.9)

Obr. 2.9



Pole buzené soustavou pohybujících se elektrických nábojů je dáno nikoliv okamžitým, ale retardovaným rozložením a pohybem nábojů.

Umístíme-li počátek souřadnic kamsi do nitra této soustavy nábojů, pak při studiu pole ve velkých vzdálenostech $R \gg L$, kde L je charakteristický rozměr soustavy, budou všechna místa zdrojové soustavy přibližně ve stejné vzdálenosti R jako je počátek souřadnic. Vzdálenost $|R - r'|$ jednotlivých míst r' zdroje od vyšetřovaného vzdáleného bodu R jsou přibližně stejné a rovny

$$|R - r'| \approx R - R_0 \cdot r', \qquad (2.167)$$

kde R_0 je jednotkový vektor směřující od počátku σ do vyšetřovaného bodu, takže retardované potenciály lze pro velké vzdálenosti od zdroje psát ve tvaru

$$\varphi(R,t) = \frac{1}{R} \int \rho\left(r', t - \frac{R}{c} + \frac{R_0 \cdot r'}{c} \right) dV', \qquad (2.168)$$

$$\mathbf{A}(R,t) = \frac{1}{c \cdot R} \int \mathbf{j}\left(r', t - \frac{R}{c} + \frac{R_0 \cdot r'}{c} \right) dV'. \qquad (2.169)$$

Retardační čas se tedy skládá ze dvou různých částí.
První část $\frac{R}{c}$ určuje vnější retardaci, tj. dobu potřebnou k tomu, aby změny v elektromagnetickém poli překonaly vzdálenost od počátku souřadnic (tj. od zdrojové soustavy), do vzdáleného pozorovacího bodu.
Druhá část rovná $-\frac{R_0 \cdot r'}{c}$ charakterizuje vnitřní retardaci, tj. dobu šíření rozruchu v poli v rámci zdrojové soustavy.
V případě, že rozložení náboje v soustavě se mění dostatečně pomalu, lze vnitřní retardaci zanedbat.
K tomu stačí, aby charakteristická doba T za kterou se rozložení náboje znatelně změní, splňovala podmínku $T \gg \frac{L}{c}$.
Jelikož $c \cdot T = \lambda$ je vlnová délka elektromagnetické vlny vyzařované soustavou, lze podmínku zanedbatelnosti vnitřní retardace napsat též ve tvaru $L \ll \lambda$ tj. rozměry soustavy musejí být malé ve srovnání s délkou vyzařovaných vln.
Charakteristická doba změny rozložení nábojů souvisí s průměrnou rychlostí nábojů vztahem

$$T \approx \frac{L}{v}, \tag{2.170}$$

takže k zanedbání retardace je třeba, aby byla splněna podmínka $v \ll c$.
Při zanedbání vnitřní retardace jsou potenciály ve velkých vzdálenostech od zdrojové soustavy rovny

$$\varphi(R,t) = \frac{1}{R}\int \rho\left(r', t - \frac{R}{c}\right) dV', \tag{2.171}$$

$$\mathbf{A}(R,t) = \frac{1}{R \cdot c}\int \mathbf{j}\left(r', t - \frac{R}{c}\right) dV'. \tag{2.172}$$

Ve vlnové zóně, tj. ve vzdálenostech velkých jak ve srovnání s rozměry zdrojové soustavy, tak s délkou vyzařovaných vln je možno v rámci malých oblastí prostoru považovat proměnnou složku pole za rovinnou vlnu.
Stačí zde tedy stanovit vektorový potenciál

$$\mathbf{A} = \frac{1}{R \cdot c} \int \rho v \, dV' = \frac{1}{R \cdot c} \sum_{i=1}^{N} q_i v_i = \frac{1}{R \cdot c} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} q_i r_i' = \\ = \frac{1}{R \cdot c} \dot{\mathbf{d}} \left(t - \frac{R}{c} \right), \tag{2.173}$$

kde $\mathbf{d} \equiv \sum q_i r_i$ je dipólový moment soustavy v čase $t - \frac{R}{c}$.
Elektrické a magnetické pole je pak podle (2.147) rovno

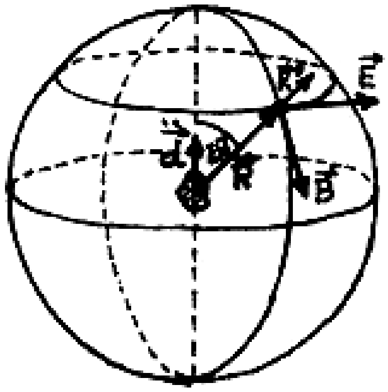
$$\mathbf{E}(R,t) = \frac{1}{c^2 R} \left[\left(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{R}_0 \right) \times \mathbf{R}_0 \right], \tag{2.174}$$

$$\mathbf{B}(R,t) = \frac{1}{c^2 R} \left(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{R}_0 \right), \tag{2.175}$$

kde dipólový moment $\mathbf{d}$ se opět bere v okamžiku $t - \frac{R}{c}$.
Tok elektromagnetické energie ve vlnové zóně, tj. intenzita elektromagnetického záření, je vyjádřena Poyntingovým vektorem podle (2.166).
Použijeme-li polárních souřadnic podle obr. 2.10, můžeme jej přepsat ve tvaru

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) = \frac{1}{4\pi c^3 R^2} \left(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{R}_0 \right)^2 = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3 R^2} \mathbf{R}_0 \sin^2 \vartheta. \tag{2.176}$$

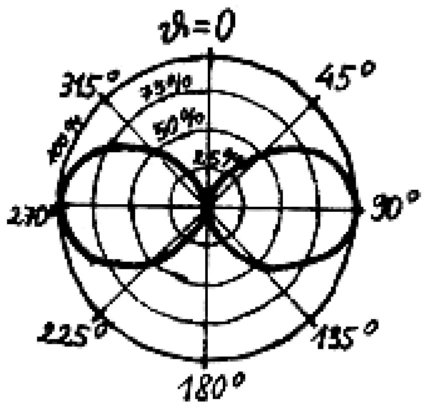
Obr. 2.10



Ve velké vzdálenosti od zdrojové soustavy (ve vlnové zóně) je proměnná složka pole dána druhou časovou derivací dipólového momentu soustavy $\ddot{\mathbf{d}}$ a má charakter elektromagnetických vln odnášejících pohybovou energii zdroje do prostoru.

Úhlové rozdělení intenzity záření elektrického dipólu je dáno koeficientem $\sin^2 \vartheta$, viz směrový diagram na obr. 2.11.

Obr. 2.11



Směrový diagram vyzařování elektrického dipólu.

Celkový výkon vyzařovaný soustavou je pak dán tokem energie přes celou sférickou plochu R = konst.:

$$I = \oint_{R=konst.} \mathbf{P}\, d\mathbf{S} = \int_0^{\pi} \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2 \sin^2 \vartheta}{4\pi c^3 R^2} 2\pi R^2 \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} \, . \qquad (2.177)$$

V případě, že zdrojová soustava sestává pouze z jednoho zrychleně se pohybujícího náboje q, je

$$\ddot{\mathbf{d}} = q \cdot \ddot{\mathbf{r}} = q \cdot \boldsymbol{a}, \qquad (2.178)$$

a vyzařovaný výkon je roven

$$I = \frac{2q^2}{3c^3} a^2 . \qquad (2.179)$$

Vztahy (2.173) až (2.177) pro pole záření ostrovní soustavy elektrických nábojů ve vlnové zóně byly získány v aproximaci prvního řádu v poměru $\frac{L}{\lambda}$ (členy vyšších řádů byly zanedbány), což vedlo k uplatnění pouze dipólového momentu soustavy.
V obecném případě je však třeba vzít v úvahu i další členy v rozvoji potenciálu podle mocnin $\frac{L}{\lambda}$, což vede k tomu, že celková intenzita elektromagnetického záření soustavy pohybujících se nábojů je dána časovými derivacemi jednotlivých multipólových momentů rozložení náboje.
Kromě dipólového momentu se na záření obvykle nejvíce podílí kvadrupólový moment

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta} = \int \rho \cdot \left(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2\right) dV \qquad (2.180)$$

a popř. magnetický dipólový moment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \rho \left(\mathbf{r} \times \mathbf{v}\right) dV , \qquad (2.181)$$

které k záření přispívají podle vztahu

$$\mathbf{I} = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{\mathbf{K}}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{m}}^2 . \qquad (2.182)$$

jestliže vlastnosti zdrojové soustavy jsou takové, že $\ddot{\mathbf{d}} = 0$, jako je tomu např. v soustavě tvořené tělesy se stejným specifickým nábojem $\frac{q}{m}$, dipólové záření nevzniká a uplatní se pouze záření vyšších multipólů způsobené členy vyššího řádu v rozvoji potenciálu podle mocnin $\frac{L}{\lambda}$.
Elektrodynamika tak dospívá k obecnému závěru, že při každém nerovnoměrném pohybu elektrických nábojů dochází k vyzařování elektromagnetických vln, které odnášejí část jejich kinetické energie do prostoru.
Analýza elektromagnetického pole v malých vzdálenostech od zdrojové soustavy ukázala, že uvnitř a v blízkosti zdrojové soustavy se vytváří určitá malá proměnná složka elektrického pole s fází odlišnou od hlavní proměnné složky.
V aproximaci třetího řádu je tento člen roven

$$\mathbf{E}_{re} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}} . \qquad (2.183)$$

Ve zdrojové soustavě bude na každý náboj q působit určitá dodatečná reaktivní síla

$$\mathbf{F}_{re} = q \cdot \mathbf{E}_{re} \qquad (2.184)$$

konající za jednotku času práci $\mathbf{F}_{re} \cdot \mathbf{v}$, takže celková práce vykonaná tímto polem na všechny náboje soustavy vychází

$$A_{re} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{v}_i = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}} \cdot \dot{\mathbf{d}} , \qquad (2.185)$$

což při zprůměrňování podle času dává

$$A_{re} = -\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 . \qquad (2.186)$$

Je vidět, že tato přídavná složka pole způsobuje příslušné brždění pohybů ve zdroji zpětnou reakcí vyzařovaných vln, a to v plné energetické shodě se vztahem (2.177) získaným analýzou pole ve vzdálené vlnové zóně.
Pohybovou rovnici nabité částice v elektromagnetickém poli pod vlivem Lorentzovy síly (2.67) je tudíž třeba doplnit o brzdící účinek elektromagnetického vyzařování:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \frac{2q}{3c^3}\cdot\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\right). \qquad (2.187)$$

Kromě rychlosti šíření a vlnové povahy elektromagnetického záření plyne z D´Alembertových rovnic (2.139), (2.140), že co do transformačních vlastností se veličina φ chová jako časová a veličina $A^\mu = (\mathbf{A})$ jako prostorové složky čtyřvektoru

$$A^k = (\varphi, \mathbf{A}), \qquad (2.188)$$

který se nazývá čtyřpotenciál a umožňuje přepsat D´Alembertovy rovnice do čtyřrozměrného tvaru a sloučit je tak do jediné prostoročasové rovnice

$$\Box A^k \equiv \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^m \partial x_m} = -\frac{4\pi}{c} j^k \qquad (2.189)$$

kde

$$j^k = \rho\frac{dx^k}{dt} \equiv (c\cdot\rho, \mathbf{j}), \qquad (2.190)$$

neboť $x^0 = c \cdot t$) je tzv. čtyřproud.

S jeho pomocí lze rovnici kontinuity (2.128) přepsat do čtyřrozměrného tvaru:

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0 \equiv j^k{}_{,k} = 0 . \qquad (2.191)$$

Lorenzova kalibrační podmínka ve čtyřrozměrném tvaru zní

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} \equiv A^k{}_{,k} = 0, \qquad (2.192)$$

tj. čtyřpotenciál je volen tak, aby jeho čtyřdivergence byla rovny nule.
Ze vztahů (2.131), (2.132) vidíme, že složky vektorů **E** a **B** lze interpretovat coby komponenty antisymetrického čtyřtenzoru

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.193)$$

nazývaného tenzor elektromagnetického pole.
Elektromagnetické pole ve čtyřrozměrném prostoročase je tímto tenzorem úplně popsáno.
Lorenzovy pohybové rovnice nabité hmotné částice v elektromagnetickém poli (2.67) lze interpretovat jako prostorové složky čtyřrozměrné rovnice pohybu nabité částice

$$m\frac{dv^i}{dt} = \frac{q}{c}F^{ik}v_k \ , \qquad (2.194)$$

jejíž časová komponenta popisuje změny energie částice v důsledku práce vykonané elektromagnetickými silami.
První dvojici Maxwellových rovnic lze pomocí F_{ik} sjednotit do jediné čtyřrozměrné rovnice

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \equiv F^{ik}{}_{,k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \qquad (\ 2.195\ )$$

popisující buzení elektromagnetického pole čtyřproudem j^i.
Podobně druhou dvojici Maxwellových rovnic lze zapsat jako jedinou rovnici pro složky tenzoru elektromagnetického pole:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^m} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{mi}}{\partial x^k} = 0 . \qquad (\ 2.196\ )$$

Vztahy vyjadřující v klasické elektrodynamice hustotu proudu energie a hybnosti v elektromagnetickém poli lze shrnout pomocí tenzoru energie – hybnosti elektromagnetického pole

$$T^{ik}_{elmag.} = -\frac{1}{4\pi} F^i_m F^{km} + \frac{1}{16\pi} F_{lm} F^{lm} . \qquad (\ 2.197\ )$$

Po dosazení hodnot F^{ik} z (2.193) je zřejmé, že $T^{00}_{elmag.}$ je roven hustotě energie elektromagnetického pole (2.161), a komponenty $T^{0\alpha}$ jsou rovny složkám Poyntingova vektoru (2.166).
Prostorové složky tenzoru energie – hybnosti elektromagnetického pole:

$$T^{\alpha\beta}_{elmag.} = \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right)\delta_{\alpha\beta} - E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta \right] , \qquad (\ 2.198\ )$$

kde $\delta_{\alpha\beta}$ je Kroneckerův tenzor, tvoří trojrozměrný, tzv. Maxwellův tenzor napětí.
Tenzor energie – hybnosti, který úplně popisuje rozložení a pohyb energie a hybnosti v dané fyzikální soustavě, má obecně následující strukturu:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} Hustota\ energie & Hustota\ proudu\ energie \\ Hustota\ proudu\ energie & hustota\ proudu\ hybnosti \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E}{\partial t} & \dfrac{hustota\ hybnosti}{c} \\ \dfrac{hustota\ hybnosti}{c} & Tenzor\ napětí \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E}{\partial t} & \dfrac{\mathbf{v}}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t} \\ \dfrac{\mathbf{v}}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t} & \sigma_{ik} \end{pmatrix}.$$

(2.199)

Označíme-li hustotu energie W, je lokální zákon zachování energie vyjádřen rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial W}{\partial t} + div\left(\mathbf{v} \cdot W\right) = 0. \qquad (2.200)$$

Díky univerzálnímu vztahu (2.32) mezi energií, hmotností a hybností, je hustota rozložení hybnosti $\mathbf{P} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dV}$ dána hustotou proudu energie $\mathbf{v} \cdot W$

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{v} \cdot W}{c}. \qquad (2.201)$$

Pro nekoherentní prach platí

$$\mathbf{P} = \mathbf{v} \cdot \rho. \qquad (2.202)$$

Lokální zákon zachování hybnosti pak může být napsán ve tvaru

$$\frac{\partial P^{\alpha}}{\partial t} + div\left(v \cdot P^{\alpha}\right) = 0. \qquad (2.203)$$

Ve čtyřrozměrném prostoročase je pohyb částice reprezentován její světočárou, jíž lze popsat parametrickou rovnicí

$$x^i = x^i(\lambda) \qquad (2.204)$$

kde λ je vhodný parametr, za nějž nejčastěji dosazujeme invariantní veličiny jako je vlastní čas τ nebo přímo délka světočáry daná prostoročasovým intervalem s.
Minkowského metriku v diferenciálním tvaru můžeme zapsat jako

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 . \qquad (\ 2.205\ )$$

Zavedeme-li označení $x^0 \equiv c \cdot t$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$, nabyde Minkowského metrika tvar

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 + \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 , \qquad (\ 2.206\ )$$

který je speciálním případem obecné kvadratické formy

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \eta_{ik} dx^i dx^k , \qquad (\ 2.207\ )$$

v níž má metrický tenzor g_{ik} speciální tvar

$$g_{ik} = \eta_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad (\ 2.208\ )$$

Tenzor η_{ik} je tzv. Minkowského metrický tenzor.

Herman Minkowski (1864 – 1909)

Přechod od inerciální soustavy Σ se souřadnicemi x^i k soustavě Σ' se souřadnicemi x'^i musí být lineární transformací prostorových souřadnic

$$x'^i = \sum_{k=0}^{3} a_k^i x^k + b^i = a_k^i x^k + b^i \,, \qquad (2.209)$$

kde $a_k^i ; b^i$ jsou konstanty nezávislé na *x*.
Jedině tak může být splněn speciální princip relativity zajišťující rovnoprávnost všech inerciálních soustav.
Aby byl splněn princip stálé rychlosti světla, musí tato transformace dále vyhovovat podmínce

$$s^2 = \eta_{ik} x^i x^k = \eta_{ik} x'^i x'^k = s'^2 \qquad (2.210)$$

invariance intervalu.
Transformace (2.209) vyhovující podmínce (2.210) jsou čtyřrozměrným vyjádřením obecných Lorenzových transformací mezi inerciálními soustavami Σ a Σ'.
Měříme-li souřadnice a čas takovým způsobem, že při $t = t' = 0$ počátky kartézských souřadnic v obou soustavách Σ a Σ' splývají, potom jsou $b^i = 0$.
Tehdy hovoříme o tzv. homogenních Lorenzových transformacích

$$x'^i = a_k^i x^k \,. \qquad (2.211)$$

Transformační vztah (2.209) obsahuje celkem 4 · 4 = 16 zdánlivě nezávislých koeficientů a_k^i.
Dosazením transformačního vztahu (2.211) a (2.210) však dostaneme podmínku

$$\eta_{ik} = \eta_{lm} a_i^l a_k^m \,, \qquad (2.212)$$

Která tyto koeficienty svazuje deseti rovnicemi, vzhledem k symetrii v indexech *i, k.*

Zůstává tak pouze 6 nezávislých transformačních koeficientů, které odpovídají třem parametrům udávajícím směr os x', y', z' a třem komponentám vektoru rychlosti pohybu soustavy Σ' vůči Σ.
Množina všech homogenních Lorenzových transformací (2.211) tvoří spojitou šestiparametrickou Lorenzovu grupu.
Množina všech Nehomogenních Lorenzových transformací (2.209), které vzniknou z homogenních transformací přidáním čtyř transformací posuvu počátku prostoročasových souřadnic $x'^i \mapsto x'^i + b^i$, tvoří 6 + 4 = 10 – ti parametrickou Poincarého grupu.
V případě speciální Lorentzovy transformace přejde vztah (2.211) v (2.7) potažmo (2.12), takže koeficienty a^i_k mají hodnoty

$$a^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \qquad (2.213)$$

Souřadnice $x^i \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ dané události jsou komponentami polohového čtyřvektoru příslušného světobodu v prostoročase.
Čtverec délky tohoto čtyřvektoru, tj. interval mezi počátkem (0, 0, 0, 0) a daným světobodem (x^0, x^1, x^2, x^3):

$$x^2 = \left(-x^0\right)^2 + \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 = \eta_{ik} x^i x^k , \qquad (2.214)$$

je veličina invariantní vůči Lorenzovým transformacím.
Vektory rychlosti $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$ a zrychlení $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ hrají důležitou úlohu v klasické mechanice, takže je užitečné zavést jejich čtyřrozměrné analogie v mechanice relativistické.
Přímým zobecněním vzniká veličina $\dfrac{dx^i}{dt}$ se nehodí, neboť to není čtyřvektor (*dt* není relativistický invariant).

Invariantní mírou času je vlastní čas τ, takže jako čtyřrychlost je přirozené definovat čtyřvektor

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = c\frac{dx^i}{ds}. \qquad (2.215)$$

Vzhledem ke vztahu (2.16) mezi $d\tau$ a dt lze složky čtyřrychlosti vyjádřit pomocí obyčejné rychlosti **v** ve tvaru

$$u^i = \left(c\cdot\gamma, \mathbf{v}\cdot\gamma\right). \qquad (2.216)$$

Při rychlosti $v \ll c$, přechází prostorová část čtyřrychlosti v obyčejnou rychlost.
Ze vztahu $dx^i dx_i = c^2\, d\tau^2$ snadno plyne

$$u^i u_i = c^2. \qquad (2.217)$$

Z geometrického hlediska je čtyřvektor $c\cdot u^i$ jednotlivým tečným vektorem ke světočáře dané částice.
Čtyřzrychlení částice se definuje jako

$$a^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = c^2\frac{d^2x^i}{ds^2}. \qquad (2.218)$$

Z derivace vztahu (2.217) podle τ dostaneme

$$a^i\cdot u_i = 0, \qquad (2.219)$$

Takže čtyřvektor rychlosti a zrychlení v prostoročase jsou navzájem ortogonální.
Rovnoměrný a přímočarý pohyb volné částice, je ve čtyřrozměrném tvaru vyjádřen rovnicí

$$a^i \equiv \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = 0 \qquad (\ 2.220\ )$$

popisující přímkovou světočáru.
Čtyřrozměrným zobecněním hybnosti klasické mechaniky, je čtyřvektor

$$p^i = m_0 \cdot u^i \qquad (\ 2.221\ )$$

zvaný čtyřhybnost.
Dosazením složek u^i z (2.216) dostaneme

$$p^0 = m_0 \cdot c \cdot \gamma = p^\mu \qquad (\mu = 1, 2, 3). \qquad (\ 2.222\ )$$

Prostorová část je tedy rovna relativistické hybnosti

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m_0 \cdot \mathbf{v} \cdot \gamma, \qquad (\ 2.223\ )$$

zatímco časová komponenta je

$$p^0 = \frac{E}{c}.$$

Komponenty čtyřhybnosti lze proto zapsat jako

$$p^i = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right). \qquad (\ 2.224\ )$$

z prostoročasového hlediska jsou tedy energie a hybnost částice složkami jediného čtyřvektoru energie – hybnosti, jednoznačně charakterizujícího pohybový stav částice.
Čtverec čtyřhybnosti

$$p^i p_i = \left(m_o u^i \right)\left(m_0 u^i \right) = m_0^2 c^2 \qquad (\ 2.225\ )$$

je podle (2.221) roven

$$p^i p_i = \frac{E^2}{c^2} - p^2, \qquad (2.226)$$

což vede ke vztahu (2.32).
Čtyřvektor síly, čili čtyřdíly, se definuje jako časová změna čtyřhybnosti částice

$$F^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dp^i}{d\tau} = m_0 \frac{du^i}{d\tau}. \qquad (2.227)$$

S obyčejným trojrozměrným vektorem síly $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ souvisí komponenty čtyřsíly vztahem

$$F^i = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \gamma, \mathbf{F} \cdot \gamma \right). \qquad (2.228)$$

Mezi čtyřsílou a čtyřhybností platí vztah

$$f^i \cdot u^i = 0, \qquad (2.229)$$

tj. čtyřsíla je v prostoročase kolmá k čtyřrychlosti.
Newtonova pohybová rovnice $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ má ve čtyřrozměrném zobecnění tvar

$$F^i = \frac{dp^i}{d\tau}. \qquad (2.230)$$

Prostorová část této rovnice popisuje změnu hybnosti a časová komponenta změnu energie částice pod vlivem působící síly.
Stejně, jako jsme výše sjednotili energii a hybnost do jediného čtyřvektoru energie – hybnosti, můžeme nyní rovnice zachování

(2.200), (2.203) sloučit do jediné tenzorové rovnice

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} \equiv T^{ik}{}_{,k} = 0\,, \qquad (2.231)$$

kde tenzor energie – hybnosti bude mít tvar

$$T^{ik} = W \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{v^1}{c} & \frac{v^2}{c} & \frac{v^3}{c} \\ \frac{v^1}{c} & \frac{v^1 v^1}{c^2} & \frac{v^2 v^1}{c^2} & \frac{v^3 v^1}{c^2} \\ \frac{v^2}{c} & \frac{v^1 v^2}{c^2} & \frac{v^2 v^2}{c^2} & \frac{v^3 v^2}{c^2} \\ \frac{v^3}{c} & \frac{v^1 v^3}{c^2} & \frac{v^2 v^3}{c^2} & \frac{v^3 v^3}{c^2} \end{pmatrix}. \qquad (2.232)$$

Fyzikální význam jednotlivých komponent tenzoru energie – hybnosti je tedy následující:
T^{00} = hustota energie (2.~ hmotnosti)
$T^{\alpha 0}$ = α-složka proudu energie, tj. α-složka hustoty hybnosti
$T^{\alpha\beta}$ = α-složka hustoty β-složky hybnosti, tj. α-složka síly působící na daný objemový element přes jednotkovou plošku s normálovým vektorem $\mathbf{n}_\beta$.
Rozepsáním tenzorového zákona zachování (2.231) ve složkách a separací prostorových a časových derivací dostaneme rovnice

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0 \ ; \quad \frac{1}{c}\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \ . \qquad (2.233)$$

Jejich integrací přes libovolnou prostorovou oblast V

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{00}\, dV + \int_V \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha}\, dV = 0 \ ; \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{\alpha 0}\, dV + \int_V \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}\, dV = 0$$

(2.234)

a po úpravě pomocí Gaussovy věty, obdržíme rovnice

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{00}\, dV = c\cdot\oint_S T^{0\alpha}\, dS \;\; ; \quad -\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{\alpha 0}\, dV = c\cdot\oint_S T^{\alpha\beta}\, dS \;\; ,$$

(2.235)

kde integrály na pravé straně se berou přes uzavřenou plochu $S = \partial V$ obklopující objem V.
Podle první z těchto rovnic je rychlost změny energie obsažené v objemu V rovna toku energie přes uzavřenou plochu S ohraničující tento objem.
Podobně druhá rovnice říká, že změna hybnosti v objemu V za jednotku času je rovna proudu hybnosti přes ohraničující plochu S.
Rovnice (2.235) tedy vyjadřují zákon zachování energie a hybnosti v integrálním tvaru.
Obecně, celková čtyřhybnost p^{i} je pomocí tenzoru energie – hybnosti vyjádřena integrálem

$$p^i = \frac{1}{c}\int T^{ik}\, dS_k \qquad (2.236)$$

přes uzavřenou plochu zahrnující celý trojrozměrný prostor.
Rovnice (2.231) je pak ekvivalentní tvrzení, že tato čtyřhybnost se zachovává.
Trojrozměrný vektor momentu hybnosti **B** klasické mechaniky definovaný jako

$$\mathbf{B} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}\, , \qquad (2.237)$$

se v STR nahrazuje obecnějším čtyřtenzorem momentu hybnosti

$$B^{ik} = x^i p^k - x^k p^i\, . \qquad (2.238)$$

Je to antisymetrický tenzor, jehož prostorové složky jsou rovny složkám trojrozměrného vektoru **B**.

Pro kontinuum je

$$B^{ik} = \int \left(x^i \ dp^k - x^k \ dp^i \right) = \frac{1}{c} \int \left(x^i T^{km} - x^k T^{im} \right) dS_m \, . \qquad (2.239)$$

Aby byl splněn zákon zachování momentu hybnosti $B^{ik}{}_{,k} = 0$, musí být

$$\left(x^i T^{km} - x^k T^{im} \right)_{,m} = 0 \, . \qquad (2.240)$$

Kromě zákona (2.231) je k tomu zapotřebí aby tenzor energie – hybnosti byl symetrický, tj.

$$T^{ik} = T^{ki} . \qquad (2.241)$$

Nejjednodušším typem kontinua je soubor vzájemně neinteragujících částic označovaný jako koherentní prach.
Hustota čtyřhybnosti částic v takové soustavě činí $\rho \cdot u^i$, takže

$$T^{0\alpha} = \rho \cdot c^2 \cdot u^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \qquad (2.242)$$

Hustota energie je

$$T^{00} = \rho \cdot c^2 \qquad (2.243)$$

a hustota proudu hybnosti

$$T^{\alpha\beta} = \rho \cdot c \frac{dx}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} . \qquad (2.244)$$

Tenzor energie – hybnosti koherentního prachu tedy je

$$T^{ik} = \rho \cdot u^i \cdot u^k . \qquad (2.245)$$

Použijeme-li při sledování ideální kapaliny vztažnou soustavu v níž se uvažovaný objemový element nepohybuje, bude platit Pascallův zákon, podle něhož je tlak *P* stejný ve všech směrech.
V takové vztažné soustavě bude tenzor napětí roven

$$\sigma^{\alpha\beta} = P \cdot \delta^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}. \qquad (2.246)$$

Hustota hybnosti je zde $T^{0\alpha} = 0$, takže tenzor energie – hybnosti v klidové vztažné soustavě má tvar

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \rho \cdot c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \qquad (2.247)$$


Blaise Pascal (1623 – 1662)

Po transformaci do obecné vztažné soustavy, v níž se daný objemový element pohybuje čtyřrychlostí u^i, bude tenzor energie – hybnosti ideální kapaliny dán vztahem

$$T^{ik} = (P + W)u^i u^k + P \cdot \eta^{ik} \qquad (2.248)$$

resp.

$$T^{ik} = (P + W)u^i u_k + P \cdot \delta^i_k. \qquad (2.249)$$

Koncepci tenzoru energie – hybnosti je výhodné zachovat i v případě, kdy se nejedná o skutečné kontinuum.
Sestává-li vyšetřovaná soustava z N bodových částic o hmotnostech m_a (a = 1, 2, … , N), které se pohybují čtyřrychlostmi u_a^i, pak tenzor energie – hybnosti můžeme definovat jako

$$T^{ik}\left(t,x^{\alpha}\right)=\sum_{a=1}^{N}m_a\frac{dx_a^i}{d\tau}\frac{dx_a^k}{dt}\delta^3\left(x-x_a\left(t\right)\right)=\sum_{a=1}^{N}p_a^k\frac{dx_a^k}{dt}\delta^3\left(x-x_a\right),$$

(2.250)

kde $\delta^3(x)$ je trojrozměrná Diracova delta – funkce.
Z hlediska inerciální vztažné soustavy STR se jeví prostor třírozměrný a má eukleidovskou geometrii.
Avšak v Minkowského pseudoeukleidovském prostoročase STR se v neinerciálních vztažných soustavách stává geometrie trojrozměrného prostoru obecně neeukleidovskou.
Snadno to lze demonstrovat na příkladu rotující vztažné soustavy diskutovaném v 10. kapitole.
V rovinném Minkowského prostoročase STR je pole fiktivních setrvačných sil vznikajících v neinerciálních vztažných soustavách popsáno metrickým tenzorem g_{ik}, který pak vystupuje v obecně invariantních fyzikálních zákonech.
Rozdíl mezi polem zdánlivých setrvačných sil a skutečným gravitačním polem je jen v tom, že v prvním případě je prostoročas plochý a vhodnou transformací se lze vždy vrátit ke globální inerciální soustavě, zatímco v druhém případě nikoliv.
To je však rozdíl pouze globální, lokálně žádný rozdíl neexistuje.
A protože fyzikální zákony mají lokální charakter, lze soudit, že i skutečné gravitační pole je v libovolné vztažné soustavě plně určeno metrickým tenzorem prostoročasu g_{ik} .
Pomocí principu ekvivalence lze zobecnit všechny fyzikální zákony STR na zakřivený prostoročas OTR.
To ovšem vyžaduje rozdělit prostoročas na dostatečně malé oblasti, v rámci nichž lze gravitační pole považovat za homogenní.

Pro každou takovou oblast zavést lokálně inerciální vztažnou soustavu a podle principu ekvivalence v ní použít zákony STR.
Vhodnou transformací prostoročasových souřadnic pak v těchto zákonech přejít k příslušné neinerciální vztažné soustavě, v níž vzniklé fiktivní síly budou lokálně totožné se skutečnými gravitačními silami v daném místě a spojit takto získané lokální informace v globální celek.
Problém stanovení vlivu gravitace na fyzikální děje se nám tak rozloží na řadu lokálních problémů, které lze na základě principu ekvivalence řešit v rámci STR.
Tento obecný postup si nyní můžeme demonstrovat na jednoduchých příkladech.
Mějme testovací částici hmotnosti m pohybující se v daném gravitačním poli, která se v okamžiku τ nachází ve světobodě P.
Zavedeme-li v tomto bodě lokálně inerciální vztažnou soustavu $\tilde{S}$ s kartézskými prostoročasovými souřadnicemi $\tilde{x}^i$ souvisejícími s vlastním časem τ testovací částice vztahem

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2}\eta_{ik} d\tilde{x}^k , \qquad (2.251)$$

bude v této soustavě v okamžiku τ v okolí testovací částice stav beztíže a lokálně zde tedy bude platit STR.
Rovnice pohybu testovací částice v této lokálně inerciální soustavě proto budou

$$\frac{d^2\tilde{x}^i(\tau)}{d\tau^2} = 0 . \qquad (2.252)$$

Přejdeme-li od soustavy $\tilde{S}$ k obecné neinerciální vztažné soustavě S s prostoročasovými souřadnicemi x^i souvisejícími s vlastním časem vztahem

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{ik} dx^i dx^k ; \qquad g_{ik}\left(x^j\right) = \eta_{lm} \frac{d\tilde{x}^l}{dx^i}\frac{d\tilde{x}^m}{dx^k} . \qquad (2.253)$$

Pohybová rovnice (2.252) se přetransformuje na tvar

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2}+\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}=0\,, \qquad (\ 2.254\ )$$

kde

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mx}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \qquad (\ 2.255\ )$$

Stejnou proceduru můžeme udělat v každém bodě světočáry testovací částice a vždy obdržíme rovnici tvaru (2.255).
Rovnice (2.255) je tedy obecnou rovnicí pohybu testovací částice v zakřiveném prostoročase, která je kovariantní vzhledem k libovolné transformaci prostoročasových souřadnic.
Jako druhý příklad si vezměme diferenciální zákon zachování energie a hybnosti, který má ve STR tvar

$$T^{ik}{}_{,k}\equiv\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}=0\,. \qquad (\ 2.256\ )$$

Stejný tvar bude mít i v každé lokálně inerciální vztažné soustavě $\tilde{S}$ v gravitačním poli:

$$\frac{\partial T^{ik}\left(\tilde{x}\right)}{\partial\tilde{x}^k}=0\,. \qquad (\ 2.257\ )$$

Po transformaci do obecné (neinerciální) vztažné soustavy S tento zákon nabude kovariantní tvar

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}+\Gamma^i_{mk}T^{mk}+\Gamma^k_{mk}T^{im}=0\,, \qquad (\ 2.258\ )$$

který představuje formulaci zákona zachování energie a hybnosti v zakřiveném prostoročase.

Z těchto dvou příkladů již můžeme vyvodit obecné zákonitosti.
Podle principu ekvivalence jsou fyzikální zákony v gravitačním poli lokálně identické, jako fyzikální zákony v neinerciálních vztažných soustavách bez gravitace.
Neinerciální vztažná soustava je pak po matematické stránce ekvivalentní křivočaré soustavě prostoročasových souřadnic.
Zobecnění fyzikálních zákonů na přítomnost zakřiveného prostoročasu bude tedy spočívat v jejich přepsání do obecných křivočarých souřadnic.
Rozdíl oproti rovinnému prostoročasu STR je pak jen v tom, že plochý prostoročas dovoluje vrátit se vhodnou transformací vždy zpět k zákonům STR v kartézských souřadnicích globální inerciální soustavy, zatímco pro zakřivený prostoročas to možné není.
Globální inerciální soustavy zde neexistují, existují pouze křivočaré souřadnice.
Zobecnění fyzikálních zákonů STR na zakřivený prostoročas spočívá v tom, že obyčejné parciální derivace podle souřadnic jsou nahrazeny derivacemi kovariantními, což se zkráceně formuluje jako pravidlo „čárky změnit na středníky“.
Krom toho Minkowského tenzor η_{ik} přechází v obecný metrický tenzor g_{ik} .
Uvažujme částici s nulovou klidovou hmotností, pohybující se rychlostí c.
Její pohyb bude v lokální inerciální soustavě dán rovnicemi

$$\frac{d^2\tilde{x}^i}{d\lambda^2} = 0 \, , \qquad ds^2 = c^2 d\tau^2 = \eta_{ik} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^k = 0 \, , \tag{2.259}$$

kde λ je afinní parametr nahrazující vlastní čas τ, jenž zde není použitelný, neboť je roven nule.
V obecném zakřiveném prostoročase má rovnice šíření světla tvar

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2}+\Gamma^i_{kl}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}=0\,,$$
$$\frac{ds^2}{d\lambda}=g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}=0\,, \qquad (\ 2.260\ )$$
$$ds^2=g_{ik}dx^i dx^k=0\,.$$

Světočáry, po kterých se volně pohybují fotony se v OTR nazývají izotropními, čili nulovými geodetikami, neboť vlastní čas $d\tau'$ a čtyřvzdálenost ds jsou podél nich rovny nule.
Tenzor elektromagnetického pole (2.193) bude mít v zakřiveném prostoročase tvar

$$F_{ik}=A_{k\,;i}-A_{i\,;k}\,. \qquad (\ 2.261\ )$$

Snadno lze však ukázat, že platí

$$A_{k\,;i}-A_{i\,;k}=A_{k\,,i}-A_{i\,,k}\,. \qquad (\ 2.262\ )$$

Podobně i první dvojice Maxwellových rovnic si zachovává svůj původní tvar:

$$F_{ik,l}+F_{li,k}+F_{kl,i}=F_{ik;l}+F_{li;k}+F_{kl;i}=0\,. \qquad (\ 2.263\ )$$

Nahradíme-li v Lorentzově rovnici pohybu nabité testovací částice v elektromagnetickém poli

$$mc\frac{du^i}{d\tau}=\frac{q}{c}F^{ik}u_k \qquad (\ 2.264\ )$$

derivaci $\dfrac{du^i}{d\tau}$ absolutní derivací, dostaneme rovnici pohybu testovací částice v elektromagnetickém a gravitačním poli ve tvaru

$$mc\left(\frac{du^i}{ds}+\Gamma^i_{kl}u^k u^l\right)\equiv mc\frac{Du^i}{ds}=\frac{q}{c}F^{ik}u_k\,. \qquad (2.265)$$

Rovnice kontinuity $j^i{}_{,i} = 0$ bude mít v zakřiveném prostoročase obecný tvar

$$j^i{}_{;i}=0\,, \qquad (2.266)$$

a druhá část Maxwellových rovnic $F^{ik}{}_{,k}=-\frac{4\pi}{c}j^i$ se v gravitačním poli zobecní na tvar

$$F^{ik}{}_{;k}=-\frac{4\pi}{c}j^i. \qquad (2.267)$$

Čtyřvektor proudové hustoty je ve STR definován jako

$$j^i=\rho\frac{dx^i}{dt}\,, \qquad (2.268)$$

kde $\rho=\frac{dQ}{dV}$ je hustota rozložení náboje v prostoru.
Po transformaci do křivočarých souřadnic přechází element objemu dV v $\sqrt{\gamma\cdot dV}$, kde γ je determinant prostorového metrického tenzoru $\gamma_{\alpha\beta}$ a $dV = dx^1 + dx^2 + dx^3$.
Čtyřproud v obecných rovnicích (2.266) a (2.267) bude dán výrazem

$$j^i=\frac{\rho\cdot c}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dx^i}{dx^0}\,. \qquad (2.269)$$

Pro ujasnění vlivu gravitace na elektromagnetické jevy je zajímavé rozepsat rovnice (2.263) a (2.267) v trojrozměrném tvaru.
Zavedeme-li veličiny

$$E_\alpha \equiv F_{0\alpha}\ , \quad D^\alpha \equiv \sqrt{g_{00}} \cdot F^{0\alpha}\ , \quad B_{\alpha\beta} \equiv F_{\alpha\beta}\ , \quad H^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{g_{00}} \cdot F^{\alpha\beta}\ , \qquad (\ 2.270\ )$$

Budou v nich mít rovnice (2.263) a (2.267) po separaci prostorových a časových složek tvar

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial B_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0\ , \\ &\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^0} + \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial E_\beta}{\partial x^\alpha} = 0\ ; \end{aligned} \qquad (\ 2.271\ )$$

$$\begin{aligned} &\gamma^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\gamma^{1/2} \cdot D^\alpha\right) = 4\pi\rho\ , \\ &\gamma^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\gamma^{1/2} \cdot H^{\alpha}\right) + \gamma^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\gamma^{1/2} \cdot D^\alpha\right) = -4\pi\rho \frac{dx^\alpha}{dx^0}\ . \end{aligned} \qquad (\ 2.272\ )$$

Jestliže je gravitační pole statické, dají se tyto rovnice přepsat v běžné trojrozměrné vektorové symbolice

$$\begin{aligned} &\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{g_{00}^{1/2}} \quad ; \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{g_{00}^{1/2}} \\ &div\ \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad rot\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &div \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad ; \quad rot\ \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\ , \end{aligned} \qquad (\ 2.273\ )$$

kde vektor intenzity magnetického pole **H** má složky

$$H_\alpha = -\frac{1}{2}\gamma^{1/2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}H^{\beta\gamma}, \qquad (\ 2.274\ )$$

a vektor magnetické indukce **B** má složky

$$B^{\alpha}=-\frac{1}{2}\gamma^{-1/2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}B_{\beta\gamma}\,. \tag{2.275}$$

Pohlédneme-li na rovnice (2.273) z hlediska negravitační fyziky, ihned shledáme, že mají tvar Maxwellových rovnic elektromagnetického pole v látkovém prostředí s permitivitou a permeabilitou

$$\varepsilon=\mu=\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}=\frac{1}{\left(1+\frac{2\varphi}{c}\right)^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{2.276}$$

Zakřivený prostoročas má tedy na elektromagnetické pole podobný vliv jako elektricky a magneticky měkké látkové prostředí. Elektromagnetické vlnění, které je řešením Maxwellových rovnic, se tedy bude v nehomogenním gravitačním poli šířit nerovnoměrně a křivočaře, stejně jako je tomu i v případě rovnice nulové geodetiky (2.260) popisující pro změnu pohyb fotonů hmotnosti

$$m=\frac{\hbar\omega}{c^{2}}\ . \tag{2.277}$$

Díky univerzálnosti gravitační interakce zde neexistuje žádná disperze. V silných nehomogenních gravitačních polích lze tudíž očekávat zajímavé optické jevy (jako např. gravitační čočky), podobné těm, které vznikají v opticky nehomogenních látkových prostředích.

Zbývá ještě vyjasnit vztahy mezi prostoročasovými intervaly událostí v prostoročase a jejich souřadnicemi x^i v obecné vztažné soustavě S. Vyjdeme z výrazu pro invariantní prostoročasový interval

$$ds^{2}=-c^{2}d\tau^{2}=g_{ik}dx^{i}dx^{x} \tag{2.278}$$

a zavedeme inerciální vztažnou soustavu $\tilde{S}$ takovou, že je momentálně v klidu vůči vztažné soustavě S v daném bodě.

Potom jak délky infinitesimálních měřících tyčí, tak i časové intervaly budou stejné v soustavě S i $\widetilde{S}$.
V lokálně inerciální soustavě $\widetilde{S}$ se souřadnicemi

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = \eta_{ik} dx^i dx^k = -\left(dx^0\right)^2 + d\widetilde{x}^\alpha d\widetilde{x}_\alpha . \qquad (2.279)$$

Vztah mezi časovou souřadnicí x^0 a vlastním časem τ' snadno určíme, vezmeme-li dvě události, které z hlediska referenční soustavy S nastaly krátce po sobě v tomtéž místě.
Interval mezi těmito událostmi je pak (2.278), a protože $dx^\alpha = 0$, je

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 , \qquad (2.280)$$

tj.

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\; dx^0 , \qquad (2.281)$$

což můžeme pro slabá gravitační pole přepsat ve tvaru

$$d\tau = \frac{dx^0}{c}\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) dt . \qquad (2.282)$$

Pro získání vztahu mezi skutečnými délkami a prostorovými souřadnicemi x^α (α = 1, 2, 3), musíme výraz pro délku elementární měřící tyče v klidové lokálně inerciální soustavě $\widetilde{S}$

$$dl^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}\left(dx^\alpha\right)^2 = d\widetilde{x}^\alpha d\widetilde{x}_\alpha \qquad (2.283)$$

přetransformovat do obecné (neinerciální) soustavy S.
Pro vlastní délku nekonečně krátké měřící tyče pak dostáváme vztah

$$dl^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \,, \tag{2.284}$$

kde

$$g_{ik} = \eta_{lm} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}_\alpha}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^k} \tag{2.285}$$

a

$$\begin{aligned} g_{00} &= \left(\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial \tilde{x}^0} \right)^2 \,, \\ g_{0\alpha} &= \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^0} \frac{\partial \tilde{x}_\gamma}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^\alpha} \,, \\ g_{\alpha\beta} &= \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^\beta} \,. \end{aligned} \tag{2.286}$$

Pro interval vlastního času pak dostáváme

$$\begin{aligned} d\tilde{x}^0 &= \frac{\partial x^0}{\partial x^k} dx^k \,, \\ d\tilde{x}^\alpha &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta \,, \\ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^0} &= 0 \,, \end{aligned} \tag{2.287}$$

tj.

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} g_{00} \left(dx^0 \right)^2 , \tag{2.288}$$

ve shodě s (2.281).

Výraz $\left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \right)$ tedy udává metriku neinerciální vztažné soustavy v třírozměrném prostoru, tj. trojrozměrnou metriku $\gamma_{\alpha\beta}$ indukovanou metrikou prostoročasu g_{ik} .
Oddělením prostorových členů v identitě $g_{ik}\, g^{ik} = 0$ lze odvodit vztahy mezi metrikou prostoru a prostoročasu:

$$\begin{aligned} &\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \ , \\ &g_{00}\gamma = -g \ , \end{aligned} \qquad (2.289)$$

kde g je determinant sestavený z g_{ik} a γ je determinant ze složek $\gamma_{\alpha\beta}$.
Aby byla vztažná soustava odpovídající metrickému tenzoru g_{ik} fyzikálně realizovatelná, musí být trojrozměrná metrická forma (2.284) pozitivně definitní, a podle (2.281) musí též platit $g_{00} < 0$.
Tyto, tzv. Hilbertovy podmínky vyjadřujeme pomocí determinantů a subdeterminantů metrického tenzoru takto:

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0 \quad , \qquad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad , \qquad g < 0 \ . \qquad (2.290)$$

Existuje-li vztažná soustava, v níž složky metrického tenzoru g_{ik} nezávisí na časové souřadnici x^0, nazývá se příslušné gravitační pole stacionární.
Pokud ve stacionárním poli navíc existuje vztažná soustava v níž všechny smíšené komponenty metrického tenzoru $g_{0\alpha}$ jsou rovny nule, jedná se o statické gravitační pole, ve kterém jsou oba toky času ekvivalentní.
Z gravitačního zákona plyne, že statická gravitační pole jsou buzena statickým rozložením hmoty, avšak gravitační pole sféricky symetrického tělesa ve vakuu je statické i tehdy, když toto těleso radiálně pulzuje, jak si ukážeme později.
Stacionární gravitační pole může být v praxi buzeno pouze kompaktním izolovaným tělesem, neboť v soustavě několika volných těles způsobí

jejich gravitační interakce vzájemné pohyby, takže výsledné gravitační pole bude proměnné.
Příkladem stacionárního pole je gravitační pole okolo axiálně symetrického tělesa, rovnoměrně rotujícího kolem své osy.
Toto pole však není statické, neboť oba směry toku času zde nejsou ekvivalentní.
Při obrácení šipky času se mění znaménko úhlové rychlosti rotace tělesa.
Uveďme si ještě jeden významný důsledek vztahu mezi intervalovým a vlastním souřadnicovým časem, kterým je již gravitační rudý posuv.
Dle vztahu (2.281) budou ve dvou místech s různým gravitačním potenciálem témuž intervalu souřadnicového času odpovídat různé intervaly vlastního času.
Nechť ve stacionárním gravitačním poli se v bodě P_1 nachází zdroj světla, který vyšle dva světelné impulsy oddělené intervalem $\Delta\tau(P_1)$ vlastního času.
Souřadnicový časový interval mezi těmito událostmi pak bude

$$\Delta t\left(P_1\right)=\frac{1}{c}\cdot\Delta x^0\left(P_1\right)=\frac{\Delta\tau\left(P_1\right)}{\sqrt{-g_{00}\left(P_1\right)}}. \qquad (\ 2.291\ )$$

Tyto světelné signály se šíří prostorem a budou zachyceny pozorovatelem v bodě P_2 .
Protože ve stacionárním gravitačním poli složky metrického tenzoru nezávisí na časové souřadnici, bude interval souřadnicového času $\Delta t\ (P_2)$ mezi okamžiky přijetí obou impulsů pozorovatelem P_2 stejný, jako v bodě vyslání P_1, tj.

$$\Delta t\left(P_2\right)=\Delta t\left(P_1\right). \qquad (\ 2.292\ )$$

Protože

$$\Delta\tau\left(P_2\right)=\Delta t\left(P_2\right)\sqrt{-g_{00}\left(P_2\right)}\,, \qquad (\ 2.293\ )$$

bude

$$\frac{\Delta\tau(P_2)}{\Delta\tau(P_1)} = \left[\frac{g_{00}(P_2)}{g_{00}(P_1)}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (\ 2.294\ )$$

Stejně tak, bude-li v bodě P_1 probíhat periodický proces vyzařování světelných vln, pak počet těchto kmitů za jednotku souřadnicového času bude stejný ve všech bodech trajektorie šířícího se záření a poměr mezi periodami $T(P_1)$ a $T(P_2)$ záření v místech P_1 a P_2 bude dán opět vztahem (2.294).
Poměr frekvencí proto bude

$$\frac{\omega(P_2)}{\omega(P_1)} = \left[\frac{g_{00}(P_1)}{g_{00}(P_2)}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (\ 2.295\ )$$

Ve slabém gravitačním poli je

$$g_{00}(P) \approx -\left(1 + \frac{2\varphi(P)}{c^2}\right), \qquad (\ 2.296\ )$$

takže platí

$$\frac{\omega(P_2)}{\omega(P_1)} = \left[\frac{1 + \frac{2\varphi(P_1)}{c^2}}{1 + \frac{2\varphi(P_2)}{c^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{c^2}\left[\varphi(P_2) - \varphi(P_1)\right], \qquad (\ 2.297\ )$$

neboli

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega(P_2) - \omega(P_1)}{\omega(P_1)} \approx \frac{\varphi(P_2) - \varphi(P_1)}{c^2} = \frac{\Delta\varphi}{c^2}. \qquad (\ 2.298\ )$$

Gravitační pole je projevem geometrie prostoročasu ovlivňované univerzálně veškerou hmotou ~ energií.
Bude tedy přirozené jej popsat obecnou rovnicí tvaru

$$\boxed{\textit{Objekt popisující geometrii prostoročasu}} = \boxed{\textit{Objekt popisující distribuci energie} \sim \textit{hmoty.}}\,, \tag{2.299}$$

přičemž pro slabá gravitační pole musí dávat správnou newtonovskou limitu, tj. Poissonovu rovnici

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho G \tag{2.300}$$

s potenciálem φ souvisejícím s metrickým tenzorem vztahem

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \tag{2.301}$$

kde

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} - \frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{2.302}$$

a

$$h_{00} = -\frac{2\varphi}{c^2}. \tag{2.303}$$

V tomto případě tenzor g_{ik} nezávisí na x_0 , $g_{0\alpha} = 1$ ($\alpha = 1, 2, 3$) a existuje vztažná soustava, v níž může být metrický tenzor rozložen na

$$g_{ik}(x) = \eta + h_{ik}(x) \quad , \qquad |h_{ik}| \ll 1. \tag{2.304}$$

Objektem, který vyčerpávajícím způsobem a nezávisle na konkrétní struktuře popisuje distribuci a pohyb hmoty a energie ve fyzikální soustavě je tenzor energie-hybnosti T_{ik} .
Označíme-li levou stranu (2.299) popisující geometrii prostoročasu jako G_{ik} , dostaneme rovnice gravitačního pole ve tvaru

$$G_{ik} = K \cdot T_{ik}, \qquad (2.305)$$

kde K je nějaká konstanta, kterou je třeba určit.
K tomu je třeba přesněji specifikovat veličinu G_{ik} tím, že na ni budeme klást několik rozumných fyzikálních požadavků:

1) G_{ik} musí být symetrický tenzor 2. řádu, aby byl konzistentní s T_{ik} .
2) G_{ik} je objekt popisující gravitační pole a tedy geometrii prostoročasu. Měl by být proto sestaven z metrického tenzoru g_{ik} a tenzoru křivosti $R^i{}_{klm}$.
3) Z důvodu lokálního zachování energie a hybnosti zdroje musí být kovariantní čtyřdivergence $G^{ik}{}_{;k} = 0$.
4) V rovinném prostoročase musí být $G_{ik} \rightarrow 0$.
5) G_{ik} je lineární funkcí tenzoru křivosti, takže obsahuje derivace metrického tenzoru g_{ik} jen do druhého řádu, přičemž tyto druhé derivace jsou obsaženy lineárně (tj. aby G_{ik} byl lineární v $\dfrac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^i \partial x^k}$ s koeficienty které jsou funkcemi pouze g_{ik} , nikoliv jeho prvních derivací).

Podmínky 1 – 5 umožňují jednoznačné nalezení veličiny G_{ik} .
Z diferenciální geometrie plyne, že veličina vyhovující podmínkám 1, 2 a 5 musí mít tvar

$$G_{ik} = A \cdot R_{ik} + B \cdot g_{ik} R + C \cdot g_{ik}, \qquad (2.306)$$

kde A, B, C, jsou konstanty.

Dle požadavku 4, musí být $C \rightarrow 0$, přesněji

$$C = \Lambda \approx 2 \cdot 10^{-57}\,\mathrm{cm}^{-2}, \qquad (\ 2.307\ )$$

což je tzv. kosmologická konstanta.
Vzhledem k její nepatrné hodnotě ji prozatím můžeme pro zjednodušení položit rovnu nule, později se k ní však ještě vrátíme.
Z požadavku 3 vzhledem k Bianchiho identitám (1.63), (1.65) plyne

$$B = -\frac{A}{2}, \qquad (\ 2.308\ )$$

čili

$$A \cdot \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) = K \cdot T_{ik}\,. \qquad (\ 2.309\ )$$

Konstantu *A* je možno zahrnout do konstanty *K*, položíme-li

$$k \equiv \frac{K}{A}. \qquad (\ 2.310\ )$$

Tím dostáváme G_{ik} , čili tzv. **Einsteinův tenzor** ve tvaru

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = k \cdot T_{ik}\,. \qquad (\ 2.311\ )$$

Konstantu *k* snadno určíme z požadavku aby pro slabá pole přešly obecné rovnice v Newtonův gravitační zákon.
Nejprve provedeme v rovnicích (2.311) limitní přechod k nerelativistické mechanice tím, že budeme uvažovat gravitační pole slabé, s čímž souvisí též nízké rychlosti objektů v tomto poli.
Jako zdroj gravitačního pole použijeme nejjednodušší klasický model nestrukturované hmoty – nekoherentní prach popsaný tenzorem energie – hybnosti

$$T^{ik} = \rho \cdot c^2 \cdot V^i V^k . \tag{2.312}$$

Za předpokladu malých rychlostí můžeme položit V^i = (1, 0, 0, 0), takže nenulová komponenta T^{ik} bude pouze

$$T^{00} = \rho \cdot c^2 . \tag{2.313}$$

Jednoduchou algebraickou úpravou rovnic (2.311) dostaneme tvar

$$R^{ik} = k \cdot \left(T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T \right), \tag{2.314}$$

který se nám v případě (2.313) redukuje na jedinou rovnici

$$R^{00} = \frac{1}{2} k \cdot \rho \cdot c^2 , \tag{2.315}$$

neboť ostatní rovnice jsou v naší aproximaci rovny nule.
R^{00} vypočítáme ze vztahu (1.55), přičemž s ohledem na slabost pole členy druhého řádu vypustíme.
Dostaneme tak

$$R^{00} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{00}}{\partial x^{\alpha}} , \tag{2.316}$$

což použitím vztahu (2.296) platného pro slabá pole dává

$$R^{00} \approx \frac{1}{c^2} \Delta \varphi . \tag{2.317}$$

Položíme-li pak

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} , \tag{2.318}$$

získáme Poissonovu rovnici pole (2.300) ve tvaru

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}k\cdot\rho\cdot c^4 = 4\pi G\rho\,. \qquad (\,2.319\,)$$

Jejím řešením bude

$$\varphi = -G\int\frac{\rho\cdot dV}{R}\,, \qquad (\,2.320\,)$$

což je Newtonův zákon jako speciální případ Einsteinových gravitačních rovnic pro velmi slabá gravitační pole.
Nyní již nám nic nebrání zapsat hledané rovnice gravitačního pole:

$$\boxed{G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}}\,. \qquad (\,2.321\,)$$

Kontrakcí metrickým tenzorem g_{ik} dostaneme

$$R - 2R = T\frac{8\pi G}{c^4}\,, \qquad (\,2.322\,)$$

čímž rovnice gravitačního pole obdržíme též v ekvivalentním tvaru

$$\boxed{R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right)}\,, \qquad (\,2.323\,)$$

kde $T \equiv T_i^i$.
Tato soustava nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu pro složky metrického tenzoru g_{ik} plně určuje prostoročasovou distribuci metrického tenzoru, tj. prostorové rozložení a časovou evoluci gravitačního pole buzeného soustavou zdrojů popsanou tenzorem energie – hybnosti T_{ik}.
Kovariantní čtyřdivergence levé strany G_{ik} je identicky rovna nule.

Je to důsledek Bianchiho identit (1.63), (1.65), pro tenzor křivosti, tj. projevem geometricko – topologického principu „hranice hranice je rovna nule“.
V našem případě se jedná o orientovanou dvojrozměrnou hranici trojrozměrné hranice čtyřrozměrné oblasti prostoročasu.
Z gravitačních rovnic (2.321) tedy přirozeně plyne lokální zákon zachování energie a hybnosti zdroje ve tvaru

$$T^{ik}{}_{;k} = 0, \qquad (2.324)$$

jakožto důsledek obecné komplementarity mezi zdrojem a jím buzeným polem jež má takové vlastnosti, z nichž automaticky plynou zákony zachování tohoto zdroje.
Zdroj kolem sebe vytváří pole právě tak, aby se sám zachovával.
Tento zákon zachování vede k rovnicím pohybu zdrojové soustavy popsané příslušným tenzorem energie – hybnosti.
Gravitační rovnice tedy určují nejen gravitační pole pro dané rozložení hmoty, ale určují i pohyb hmotných zdrojů. Na rozdíl od všech ostatních teorií pole není v OTR nutno zvlášť zvenčí postulovat pohybové rovnice zkušebních částic v daném gravitačním poli.
Tyto rovnice pohybu se dají získat jako důsledek rovnic pole.
Např. pro elektromagnetické pole z Maxwellových rovnic $F^{ik}{}_{;k} = \dfrac{4\pi j^i}{c}$
identicky plyne díky antisymetrii tenzoru elektromagnetického pole F_{ik} vztah $j^i{}_{;i} = 0$, což je rovnice kontinuity proudu, čili zákon zachování elektrického náboje.
Maxwellovy rovnice tak omezují svobodu zdrojů pouze po stránce elektrické, zatímco Einsteinovy rovnice postihují všechny formy pohybu zdrojů.
Gravitace a mechanika jsou zde vzájemně sjednoceny na rozdíl od Newtonovy teorie, kde jsou zcela nezávislé.
Podobně, máme-li volné elektromagnetické pole ve vakuu, pak z Einsteinových rovnic na jejichž pravé straně bude vystupovat tenzor energie – hybnosti elektromagnetického pole:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 2 F_{il} F_k^{\ l} - \frac{1}{2} g_{ik} F_{lm} F^{lm} \tag{2.325}$$

plynou i Maxwellovy rovnice tohoto volného elektromagnetického pole $F^{ik}_{\ \ ;k} = 0$. Přitom $R = 0$ a $R^m R^k = \delta_i^k \left(\frac{1}{4} R_{lm} R^{lm} \right)$.

Einsteinovy a Maxwellovy rovnice se tak dají sloučit do jediné soustavy rovnic 4. řádu (Misnerovy – Wheelerovy rovnice), která v geometrickém tvaru obsahuje jak Maxwellovu elektrodynamiku (bez nábojů) v zakřiveném prostoročase, tak i Einsteinovy rovnice udávající zakřivení prostoročasu tímto elektromagnetickým polem.
Elektromagnetické pole zanechává na geometrii prostoročasu charakteristické stopy, z nichž jej lze poznat a jejichž chováním je určeno.

Charles W. Misner (1932)

Elektromagnetické pole, které je určeno výrazem obsahujícím odmocniny Ricciho tenzoru křivosti R_{ik} lze tedy plně popsat pomocí pouze gravitačních veličin – složek metrického tenzoru.
Maxwellovy rovnice jsou pak dány vztahem mezi Ricciho křivostí a rychlostí, s jakou se mění.
Zákony elektrodynamiky tak nabývají čistě geometrický charakter.
Dostáváme tak velice zajímavý popis, v němž elektromagnetické pole je projevem prázdného zakřivovaného prostoročasu.
Naneštěstí však, jak později ukázal Witten, při integraci Misnerových – Wheelerových rovnic mohou příslušné Cauchyovy okrajové podmínky odpovídat současně více než jednomu Maxwellovskému poli. Uvedená

metoda geometrického popisu elektrodynamiky se tím stává nejednoznačnou.

Baron Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857)

Uvažujme nyní dvě částice, z nichž jedna je umístěna v bodě x^i (tu budeme považovat za vztažnou) a druhá v blízkém bodě $x^i + \varepsilon^i$ kde ε^i je čtyřvektor prostoročasové odlehlosti těchto dvou testovacích částic. Jestliže nyní tyto částice necháme spolu volně padat v gravitačním poli, budou se pohybovat po světočárách $x^i(\lambda)$, $x^i(\lambda)+ \varepsilon^i(\lambda)$, kde čtyřvektor $\varepsilon^i(\lambda)$ spojuje body obou trajektorií se stejným λ.
Kovariantní derivaci jejich odchylky, tj. deviaci obou geodetik snadno odvodíme s použitím vztahu (1.48) pro kovariantní derivaci vektoru podél křivky.
Hledaná rovnice deviace geodetik pak bude

$$\frac{D^2\varepsilon^i}{d\lambda^2} - R^i_{klm}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^m}{d\lambda}\varepsilon^l = 0 . \qquad (2.326)$$

Vidíme, že geodetiky dvou těles padajících vedle sebe v nehomogenním gravitačním poli se budou vůči sobě obecně odchylovat, přičemž vzájemné zrychlení obou částic $\frac{D^2\varepsilon^i}{d\lambda^2}$ je úměrné tenzoru křivosti $R^i{}_{klm}$.
Složky tenzoru křivosti tedy popisují gradienty gravitačních sil – slapové síly.

V rovinném prostoročase jsou všechny složky tenzoru křivosti nulové, takže k deviaci geodetik nedochází.
Abychom nyní získali úplnější obraz o vlivu gravitace na pohyb hmoty, přejdeme od dvou geodetik k celé soustavě takových geodetik, zaplňujících jistou oblast prostoročasu.
Do každého bodu prostoru v této oblasti dosadíme hmotnou částici a necháme ji volně padat zakřiveným prostoročasem, přičemž zaznamenáváme její světočáru.
Každým bodem prostoročasu v uvažované oblasti bude potom procházet některá z těchto geodetik.
Stanovíme-li pro každou geodetiku v každém jejím bodě jednotkový tečný vektor V^i, dostáváme pro kongruenci geodetik celé pole tečných vektorů $V^i(x^k)$.
Divergence, respektive konvergence C geodetik v dané oblasti je dána kovariantní čtyřdivergence vektorového pole V^i:

$$C = V^i{}_{;i} \ . \qquad (2.327)$$

Konvergence kongruence geodetik časového typu se řídí důležitou Raychaudhuriho diferenciální rovnicí

$$\frac{d}{ds}C = R_{ik}V^iV^k + 2\sigma^2 + \frac{1}{3}C^2 , \qquad (2.328)$$

kde δ popisuje vzájemný „skluz“ geodetik.

Amal Kumar Raychaudhuri (1923 – 2005)

V případě, že by kongruence geodetik rotovala, bude na pravé straně (2.328) ještě člen -2ω^2.
Pro konvergenci izotropních geodetik platí analogická rovnice

$$\frac{d}{d\lambda}C = R_{ik}V^iV^k + 2\sigma^2 + \frac{1}{2}C^2, \qquad (2.329)$$

Kde V^i jsou izotropní tečné vektory.
Poslední dva členy na pravých stranách rovnic (2.328), (2.329) jsou nezáporné, takže o výsledném znaménku změn konvergence rozhoduje člen $R^{ik}V^iV^k$.
Aby i tento člen byl nezáporný, musí být dle Einsteinových rovnic (2.323) gravitační pole buzeno tenzorem energie – hybnosti splňujícím nerovnost

$$\left(T_{ik} - \frac{1}{2}T\cdot g_{ik}\right)V^iV^k \geq 0 \qquad (2.330)$$

pro všechny V^i časového typu, resp. nerovnost

$$T_{ik}V^iV^k \geq 0 \qquad (2.331)$$

pro izotropní vektory V^i (pro něž je $g_{ik}V^iV^k = 0$).
Pro T^{ik} ideální kapaliny je to splněno tehdy, jestliže hustota a tlak splňují relace

$$\rho \geq 0 \quad ; \qquad \rho + p_\alpha \geq 0 \qquad (2.332)$$

resp.

$$\rho \geq 0 \quad ; \qquad \rho + \sum_\alpha p_\alpha \geq 0\,. \qquad (2.333)$$

ukazuje se, že energetická podmínka (2.330) je splněna pro všechny dosud známé formy hmoty, neboť hustota energie je nezáporná a

k narušení energetické podmínky by bylo třeba velkého záporného tlaku p.
V reálném vesmíru je však zřejmě splněna ještě o něco silnější podmínka tzv. **energodominance**.
Pro každý vektor V_i časového typu je

$$T^{ik}V_iV_k \geq 0 \tag{2.334}$$

a vektor $T^{ik}V_k$ je časového nebo izotropního typu, takže lokální hustota energie je vždy nezáporná a navíc lokální proud energie se realizuje pouze na plášti nebo uvnitř světelného kuželu.
Energie tedy dominuje nad všemi ostatními složkami tenzoru energie – hybnosti, tj. platí

$$T^{00} \geq \left|T^{ik}\right|. \tag{2.335}$$

Pro T^{ik} ideální kapaliny je to splněno tehdy, když

$$\rho \geq 0 \quad ; \qquad -\rho \leq p_\alpha \leq \rho \quad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{2.336}$$

tj. když tlak nepřevyšuje hustotu energie (rychlost zvuku nepřevyšuje rychlost světla).
Člen $R_{ik}V^iV^k$ v rovnicích (2.328), (2.329) je tedy při splnění rozumných energetických podmínek (2.330) rovněž nezáporný, takže pro rychlost změny konvergence geodetik platí nerovnost

$$\frac{d}{ds}C \geq \frac{1}{3}C^2 \geq 0. \tag{2.337}$$

Podle níž konvergence monotónně roste podél kongruence geodetik.
Pokud jsou tedy splněny energetické podmínky pro tenzor energie – hybnosti takové, aby podle Einsteinových rovnic bylo

$$R_{ik}V^iV^k \geq 0 \tag{2.338}$$

pro každý vektor V^i časového resp. izotropního typu, má gravitace přitažlivý charakter a na geodetiky časového resp. izotropního typu fokusující účinek.

Einsteinovy rovnice gravitačního pole byly do značné míry zkonstruovány podle vzoru Maxwellových rovnic elektrodynamiky. Při sledování analogií mezi gravitací a elektrodynamikou se vynoří základní otázky: Jakou rychlostí se šíří gravitační interakce? Existuje gravitační analogie elektromagnetických vln? Jakým způsobem gravitace zprostředkovává přenos energie?

Mějme izolovanou hmotnou soustavu popsanou tenzorem energie - hybnosti T^{ik} v asymptoticky rovinném prostoročase.
Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby ve velikých vzdálenostech od hmotného zdroje spojitě přecházela v asymptotickou inerciální (Lorenzovu) soustavu.
Složky metrického tenzoru budeme vyšetřovat ve tvaru

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} \qquad (2.339)$$

kde

$$\eta_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.340)$$

je Minkowského metrika a

$$h_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} g_{ik} - \eta_{ik} \qquad (2.341)$$

jsou odchylky od této metriky.
Definujeme-li si veličiny

$$h_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} h_i^i = h_{ik}\eta^{ik} \;, \qquad \psi_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} h_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik} h \tag{2.342}$$

a souřadnice zvolíme tak, aby ψ_{ik} všude vyhovovalo kalibračním podmínkám $\psi^k_{i\,;\,k} = 0$, můžeme Einsteinovy rovnice vyjádřit pomocí ψ^{ik}

$$\psi^{ik}{}_{,\,lm}\,\eta^{lm} = -16\pi\left(T^{ik} + t^{ik}\right), \tag{2.343}$$

kde t^{ik} jsou veličiny druhého a vyššího řádu v ψ^{ik}.
Řešení takto linearizovaných Einsteinových rovnic lze vyjádřit podobně jako v elektrodynamice, formou retardovaných integrálů

$$\psi^{ik}\left(t, x^{\alpha}\right) = \frac{4G}{c^4}\iiint \frac{\left[T^{ik} + t^{ik}\right]_{\left(t-\frac{R}{c},\, x'^{\alpha}\right)}}{R}\, d^3x'^{\alpha}, \tag{2.344}$$

kde

$$R = \sqrt{\sum_{t^{ik}}\left(x^{\alpha} - x'^{\alpha}\right)^2}\,. \tag{2.345}$$

Pokud je $t^{ik} \neq 0$, je vztah (2.344) vlastně integrální rovnicí, neboť t^{ik} je funkcí ψ^{ik}.
Pro slabá pole však v aproximaci linearizované teorie není pseudotenzor t^{ik} přítomen.
Vztah (2.344) ukazuje, že výsledné gravitační pole není určeno okamžitým rozložením hmoty ~ energie, neboť změny v gravitačním poli se šíří rychlostí c, což se dalo očekávat již při odvozování OTR z STR, v níž hraje rychlost světla rozhodující úlohu pro strukturu prostoročasu.
V dostatečně velikých vzdálenostech od zdrojové soustavy bude gravitační pole již značně slabé, takže ve vztahu (2.339) bude $\left|h_{ik}\right| \ll 1$.
Předpokládejme nyní, že prostoročas je takřka rovinný a Minkowského metrikou, jen slabě deformovanou gravitačním polem vyjádřeným veličinami h_{ik} .

Tehdy budou všechny nelineární efekty zpětného vlivu pole na metriku zanedbatelně malé.
Takovéto gravitační pole pak můžeme vyšetřovat coby nezávislé pole, na pozadí Minkowského prostoročasu podobně, jako např. pole elektromagnetické.
Při vhodných kalibračních podmínkách platí pro slabá pole linearizované Einsteinovy rovnice (2.343).
Pro vakuum je pak

$$\Box \psi_{ik} = 0 \qquad (2.346)$$

což je rovnice popisující gravitační vlny šířící se rychlostí světla.
Nejjednodušší řešení linearizovaných gravitačních rovnic ve vakuu

$$\psi_{lm} = \mathrm{Re}\left(A_{lm} \cdot e^{i \cdot k_r \cdot x^r} \right) \qquad (2.347)$$

popisuje rovinnou monochromatickou vlnu s amplitudou A_{lm} a vlnovým vektorem k_r .
Z rovnice (2.343) plynou vztahy

$$k_r k^r = 0 \quad , \qquad A_{lm} k^m = 0 , \qquad (2.348)$$

podle nichž **k** je izotropní vektor kolmý k **A**.
Z toho tedy plyne, že gravitační vlny jsou příčné vlny s frekvencí

$$\omega = k^0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} , \qquad (2.349)$$

šířící se rychlostí světla ve směru **k**.
Harmonická řešení (2.347) tvoří úplnou bázi funkcí ψ a libovolné řešení vlnových rovnic může být složeno jako superpozice těchto řešení.
Lorentzovy podmínky snižují počet veličin ψ_{ik} z deseti na šest nezávislých komponent.
Lorentzovy podmínky jsou invariantní vůči transformaci

$$\psi_{ik} \rightarrow \psi_{ik} + f_{i,k} + f_{k,i} \ , \qquad (\ 2.350\ )$$

kde f_i jsou čtyři libovolné funkce splňující podmínky

$$f_{i,l}{}^{l} = 0 \quad , \qquad |\psi_{ik}| \ll 1. \qquad (\ 2.351\ )$$

Vhodnou volbou f_i pak mohou být veličiny ψ_{ik} redukovány na pouhé dvě nezávislé složky odpovídající dvěma stavům polarizace.

Pro monochromatickou rovinnou vlnu (2.347) lze vybrat kalibrační funkce f_i tak, aby bylo

$$\psi_{i0} = 0 \quad , \qquad \psi_{\alpha\alpha} = 0\,. \qquad (\ 2.352\ )$$

Potom bude

$$h_{ik} = \psi_{ik} \quad , \qquad h_{i0} = 0 \quad , \qquad h_{\alpha\alpha} = 0\,. \qquad (\ 2.353\ )$$

Tato velmi výhodná kalibrace se nazývá **příčná s nulovou stopou** a označujeme ji zkratkou TT (Transversal Traceless).
V TT-kalibraci mají složky tenzoru křivosti s komponentami h_{ik} velmi jednoduchou souvislost:

$$R_{\alpha 0 \beta 0} = R_{\alpha 0 0 \beta} = -R_{\alpha 0 0 \beta} = -R_{0 \alpha \beta 0} = -\frac{1}{2} h_{\alpha\beta,00} = -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial t^2}\,. \qquad (\ 2.354\ )$$

Pakliže se rovinná vlna šíří ve směru osy x, je popsána tenzorem

$$h_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{yy} & h_{zz} \\ 0 & 0 & h_{yz} & -h_{yy} \end{pmatrix}. \qquad (\ 2.355\ )$$

Nenulové jsou zde tedy jen 2 složky h_{ik} :

$$h_{yy} = -h_{zz} = \mathrm{Re}\left(A_+ \cdot e^{-i\omega(t-x)}\right) \quad , \qquad h_{yz} = -h_{zy} = \mathrm{Re}\left(A_\times \cdot e^{-i\omega(t-x)}\right).$$
(2.356)

Při přechodu k novému souřadnému systému S' pootočenému kolem osy šíření gravitačních vln z o úhel ϑ, tj. při transformaci

$$t' = t\,, \quad x' = x \cdot \cos\vartheta + y \cdot \sin\vartheta\,, \quad y' = y \cdot \cos\vartheta - x \cdot \sin\vartheta\,, \quad z' = z\,,$$
(2.357)

se jednotlivé vektory polarizace gravitační vlny transformují podle vztahu

$$\mathbf{e}'_+ = \mathbf{e}_+ \cdot \cos(2\vartheta) + \mathbf{e}_\times \cdot \sin(2\vartheta)\,, \quad \mathbf{e}'_\times = -\mathbf{e}_+ \cdot \sin(2\vartheta) + \mathbf{e}_\times \cdot \cos(2\vartheta)\,.$$
(2.358)

jestliže se rovinná vlna ψ při pootočení o úhel ϑ kolem směru šíření transformuje podle zákona

$$\psi' = \psi \cdot e^{i \cdot s \cdot \psi}\,, \qquad (2.359)$$

tj. zůstává-li invariantní při pootočení o úhel $\vartheta = \dfrac{2\pi}{s}$ kolem osy šíření, pak s je spin kvanta přiřazeného této vlně.
Pro gravitační vlny vychází tento úhel invariance $\vartheta = \pi$, čemuž odpovídá spin $s = 2$.
To je spin nesený hypotetickým gravitačním kvantem – **gravitonem**.
Gravitační vlny přenášejí hmotnost ~ energii a proto jsou jednak ovlivňovány gravitačním polem jímž procházejí, a jednak spolupůsobí jako zdroj gravitace, tj. přispívají k celkové křivosti prostoročasu.
Říkáme, že gravitační vlny nejsou gravitačně neutrální.
Podobně, ani elektromagnetické vlny nejsou gravitačně neutrální, avšak jsou elektromagneticky neutrální – nenabité, tj. neovlivnitelné elektrickým a magnetickým polem, ani jiným elektromagnetickým polem.
Lokálně lze gravitační vlny považovat za rozruch v geometrii prostoročasu šířící se rychlostí c, vyvolaný nějakým nerovnoměrným pohybem hmoty, a šířící se rovinným prostoročasem, aniž je třeba brát

zřetel na interakci s celkovým zakřivením prostoročasu na jehož pozadí se vlny šíří a na nelineární interakce mezi nimi navzájem.
Globálně však zakřivení prostoročasu způsobené rozložením ostatní hmoty bude způsobovat frekvenční posuv gravitačních vln a měnit směr jejich šíření.
K tomuto globálnímu zakřivení přitom bude přispívat i energie nesená samotnými gravitačními vlnami.
Při šíření gravitačních vln budou tedy vznikat charakteristické nelineární efekty.
Např. dvě gravitační vlny se budou vzájemně rozptylovat.
Abychom mohli odlišit vlnící se část křivosti prostoročasu od globální křivosti pozadí způsobené přítomností hmotných těles, musí být střední délka gravitačních vln mnohem menší než charakteristický poloměr křivosti prostoročasu na jehož pozadí se vlny šíří

$$\lambda \ll R. \qquad (\ 2.360\ )$$

Místní křivost ve vlně může být přitom podstatně větší, než globální křivost prostoročasu.
Odlišení pozadí od vln je umožněno nikoliv rozdílem v zakřivení, ale rozdílností měřítek, v nichž se zakřivení periodicky mění.
Jak si ukážeme dále, samotné gravitační vlny vyvolávají dle Einsteinových rovnic též globální zakřivení prostoročasu úměrné A/λ.
Proto ke splnění základní podmínky krátkovlnné aproximace (2.360) je nutné, aby též amplituda A gravitačních vln byla malá.
Prostoročas vyhovující podmínce (2.360) lze potom analyzovat jednak z hlediska lokálních měřítek, a jednak z hlediska globálních vlastností prostoročasu.
Příslušná metoda analýzy gravitačních vln v krátkovlnné aproximaci se nazývá Isaacsonův formalismus.
Metrický tenzor pak můžeme rozepsat jako

$$g_{ik} = g_{ik}^{\mathrm{glob}} + h_{ik}, \qquad (\ 2.361\ )$$

kde g_{ik}^{glob} je globální metrika prostoročasu na jehož pozadí se vlny h_{ik} šíří.

Richard A. Isaacson (1937)

Podobně též tenzor křivosti R_{ik} lze rozložit v řadu podle malého bezrozměrného parametru $\lambda / R \ll 1$.

$$R_{ik} = R_{ik}^{glob} + R_{ik}^{(1)} + R_{ik}^{(1)} + F\left(\frac{\lambda}{R}\right)^3 , \qquad (2.362)$$

kde R_{ik}^{glob} je globální křivost pozadí, monotónní v rozsahu většího množství vlnových délek,

$$R_{ik}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(-h_{;ik} - h_{ik;l}{}^{l} + h_{lk;i}{}^{l} + h_{li;k}{}^{l}\right) \qquad (2.363)$$

je vlnící se část křivosti prostoročasu která je lineární v λ/R a

$$\begin{aligned} R_{ik}^{(2)} = \frac{1}{2}\Bigg[& \frac{1}{2} h_{lm;i} h^{lm}{}_{;k} + h^{lm}\left(h_{lm;ik} + h_{ik;lm} - h_{li;km} - h_{lk;im}\right) + \\ & + h_{k}^{l;m}\left(h_{li;m} - h_{mi;l}\right) - \left(h_{;m}^{lm} - h_{;m}^{ml}\right)\Bigg] \end{aligned} \qquad (2.364)$$

je část tenzoru křivosti kvadratická v λ/R.
Spouštění a zvedání indexů, stejně jako kovariantní derivování se zde všude provádí podle metriky g_{ik}^{glob}.
Obecné vakuové rovnice pole $R_{ik} = 0$ mohou pak být rozděleny na části a analyzovány jednak z hlediska lokálního, a jednak z hlediska globálního.

V oblastech srovnatelných s vlnovou délkou λ gravitačních vln, kde se globální zakřivení prostoročasu přímo neuplatňuje, musí být

$$R_{ik}^{(1)} = 0. \qquad (2.365)$$

Pomocí veličin

$$\psi_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} h_{ik} - \frac{1}{2} h \cdot g_{ik}^{\text{glob}}, \qquad (2.366)$$

volbou vhodné kalibrace, v níž je

$$\psi_{i\,;\,k}^{k} = 0 \qquad (2.367)$$

a vynecháním členů vyšších řádů můžeme rovnici přepsat ve tvaru

$$\psi_{ik\,;\,l}{}^{l} + 2R_{likm}^{\text{glob}} \psi^{lm} = 0, \qquad (2.368)$$

což je rovnice šíření gravitačních vln v zakřiveném prostoročase, analogická rovnici šíření elektromagnetických vln v geometrické optice. Rovnice říká, že gravitační vlny se šíří podél izotropních geodetik.

$$k_i k^j = 0 \quad , \qquad k_{i\,;\,j} k^j = 0 \qquad (2.369)$$

jsou křivky kolmé k plochám konstantní fáze, které jsou dány rovnicí izotropních geodetik a představují tzv. **gravitační paprsky**.
Vektor polarizace je kolmý k paprskům a přenáší se podél nich paralelním přenosem.
Amplituda *A* vlny s vlnovým vektorem **k** tvoří **diabatický invariant**

$$\left(A^2 \cdot k^{\alpha}\right)_{;\,\alpha} = 0 \qquad (2.370)$$

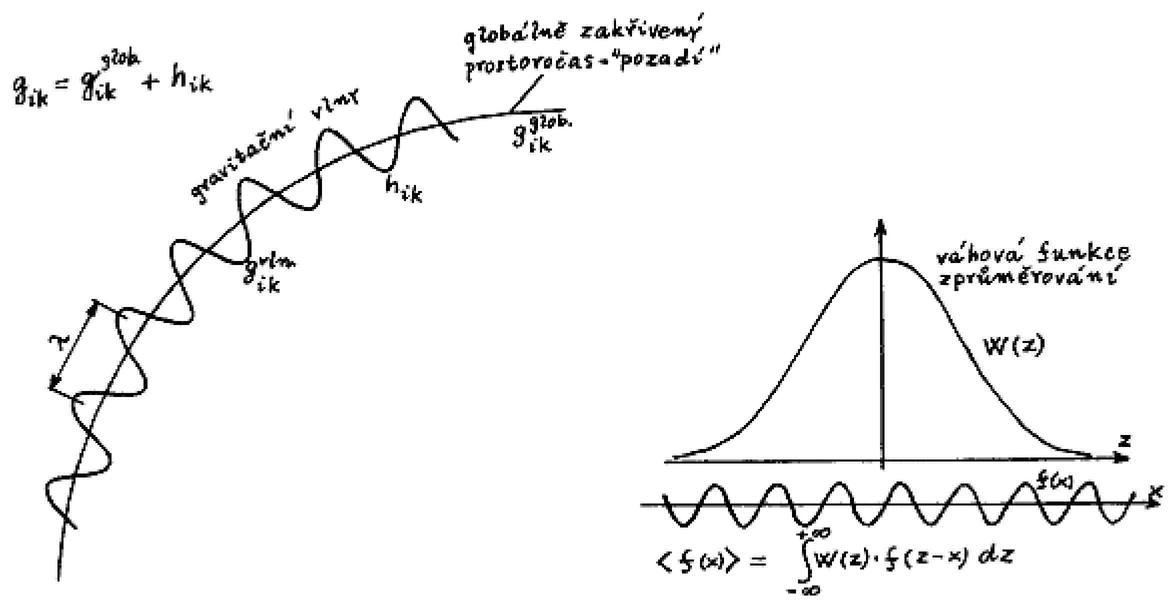
vyjadřující zákon zachování počtu gravitonů při šíření gravitačního záření v prostoročase, jehož globální křivost se mění pomalu ve srovnání s frekvencí vln.
Optické efekty, jako je rudý posuv, či zakřivování paprsků v gravitačním poli tedy platí i pro gravitační vlny.
Při globálním přístupu provádíme zprůměrňování všech veličin přes oblast o rozměrech několikanásobku vlnové délky, abychom oddělili globální křivost prostoročasu od lokálních fluktuací v gravitačních vlnách, které se tím zahladí:

$$\left\langle R_{ik}^{(1)} \right\rangle = 0, \qquad (2.371)$$

zatímco globální křivost prostoročasu se prakticky nezmění

$$\left\langle R_{ik}^{\text{glob}} \right\rangle \approx R_{ik}^{\text{glob}}. \qquad (2.372)$$

Obr. 2.12



V Isaacsonově krátkovlnné aproximaci lze odlišit globální zakřivení prostoročasu ("pozadí") od lokálních fluktuací gravitačních vln, pokud je vlnová délka mnohem menší než charakteristický poloměr křivosti prostoročasu. Tato separace se provádí pomocí zprůměrování přes oblast o několika vlnových délkách za použití vhodné normované váhové funkce W(z) konvergující k nule s rostoucí vzdáleností.

Ke středování použijeme vhodné normované váhové funkce konvergující k nule s rostoucí vzdáleností (s rostoucím počtem vlnových délek), a paralelního přenosu do vyšetřovaného místa podél vhodné geodetiky v metrice g_{ik}^{glob}.

Rovnice pole pak budou

$$R_{ik}^{\mathrm{glob}} + \left\langle R_{ik}^{(2)} \right\rangle = 0\,, \qquad (\ 2.373\ )$$

což lze upravit na tvar Einsteinových rovnic

$$G_{ik}^{\mathrm{glob}} \equiv R_{ik}^{\mathrm{glob}} - \frac{1}{2} R^{\mathrm{glob}} g_{ik}^{\mathrm{glob}} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mathrm{vln}}\,, \qquad (\ 2.374\ )$$

kde zdroj na pravé straně

$$T_{ik}^{\mathrm{vln}} = -\frac{c^4}{8\pi G}\left(\left\langle R_{ik}^{(2)} \right\rangle - \frac{1}{2} g_{ik}^{\mathrm{glob}} \left\langle R^{(2)} \right\rangle \right) \qquad (\ 2.375\ )$$

je tzv. **Isaacsonův tenzor** efektivní rozprostřené energie~hybnosti gravitačních vln.
Rovnice (2.374) popisují, jak gravitační vlny při svém šíření globálně zakřivují prostoročas.
T_{ik}^{vln} tedy můžeme interpretovat jako tenzor energie~hybnosti gravitačních vln šířících se prostoročasem g_{ik}^{glob}, pro který z rovnic (2.374) plynou běžné zákony zachování

$$T_{\mathrm{vln}\,;\,k}^{ik} = 0\,. \qquad (\ 2.376\ )$$

Zbylé členy vyšších řádů v rovnici $R_{ik} = 0$ popisují shora zmíněné nelineární efekty jako jsou interakce vln se sebou samými, apod.
Šíří-li se prostoročasem elektromagnetické či gravitační vlny, budí tedy kolem sebe gravitační pole, tj. zakřivují prostoročas, v němž se šíří, což samozřejmě nezůstává bez zpětného vlivu na jejich pohyb.

Dle OTR mohou velmi mohutné gravitační či elektromagnetické vlny vytvořit ve svém okolí natolik silné gravitační pole, že jím budou nuceny trvale obíhat po uzavřených dráhách.
Vytvoří si tak kolem sebe jakýsi gravitační vlnovod ze zakřivené geometrie prostoročasu, v němž trvale cirkulují.
Takovýto útvar nazýváme elektromagnetický, resp. gravitační **geon**.
Jestliže bude geon celkové hmoty *M* sféricky symetrický, bude vzbuzovat sféricky symetrické gravitační pole a prostoročasová metrika bude mít tvar **warpové bubliny**:

$$ds^2 = -g_{tt} c^2 dt^2 + g_{rr}\, dr^2 + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta\, d\varphi^2 \right), \qquad (2.377)$$

Radiální složka metrického tenzoru má tvar

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \dfrac{2G \cdot m(r)}{r \cdot c^2}}, \qquad (2.378)$$

kde $m(r)$ je hmotnost~energie obsažená uvnitř koule o poloměru r.
Časová složka vně geonu má tvar

$$g_{tt} = 1 - \frac{2GM}{r \cdot c^2}, \qquad (2.379)$$

uvnitř geonu má pak hodnotu

$$g_{tt} = \frac{1}{9}. \qquad (2.380)$$

Čas tedy plyne uvnitř geonu třikrát pomaleji než daleko od geonu.
Pro vzdáleného pozorovatele bude geon vykazovat gravitační účinky jako běžná hmota.
Na oběžnou dráhu okolo geonu lze např. navést družici.
V případě elektromagnetického geonu se nelze vcelku čemu divit, neboť

již z STR plyne, že elektromagnetické vlny přenášejí energii a tedy i hmotu.
Gravitační geon je však tvořen pouze vlněním gravitačního pole, tj. vlněním geometrie prázdného prostoročasu.
Vlnící se křivost prázdného prostoročasu se tedy z dálky může jevit jako hmotný útvar.
Gravitační geon je tedy názorným příkladem hmoty utvořené doslova z prázdného prostoročasu pouhým vlněním jeho křivosti.
Z toho důvodu je geon důležitým útvarem z hlediska unitární teorie pole.
Geon je však jen extrémním případem konstrukce hmotného objektu z geometrie prostoročasu.
Ve skutečnosti je každá gravitační vlna takovouto hmotou bez hmoty složenou z vakua chápaného v obvyklém smyslu.
To, jak se i v prázdném prostoru bez obvyklých hmotných zdrojů objevuje jakási efektivní hmota mající globální gravitační účinky, je podobné situaci, z elektrodynamiky, kdy se i ve vakuu bez nábojů a proudů pro nestacionární elektromagnetické pole objevuje Maxwellův posuvný proud

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (\ 2.381\ )$$

mající magnetické účinky stejné jako skutečný proud elektrických nábojů.
Podle analogie s elektrodynamikou lze očekávat, že gravitační vlny se budou vyzařovat při nerovnoměrném pohybu těles, kdy dochází k časovým změnám buzeného gravitačního pole.
Nejobvyklejším zdrojem radiace v elektrodynamice je záření elektrického dipólu, jehož intenzita (2.177) je dána druhou derivací dipólového momentu

$$\mathbf{d} = \sum_{n=1}^{N} q_n \mathbf{r}_n \qquad (\ 2.382\ )$$

soustavy N elektrických nábojů q_n podle času.

V gravitaci úlohu elektrického dipólového momentu hraje dipólový moment

$$\mathbf{d} = \sum_{n=1}^{N} m_n \mathbf{r}_n \qquad (2.383)$$

rozložení hmoty v soustavě N částic m_n .
První časová derivace tohoto dipólového momentu

$$\dot{\mathbf{d}} = \sum_{n=1}^{N} q_n \dot{\mathbf{r}}_n \equiv \mathbf{p} \qquad (2.384)$$

je rovna celkové hybnosti soustavy, takže jeho druhá derivace bude rovna nule díky zákonu zachování hybnosti.
Ukazuje se tedy, že dipólové gravitační záření nemůže existovat.
Gravitační záření musí mít nejméně kvadrupólový charakter.
Souvisí to s teorémem nauky o spinu záření, podle něhož je multipolarita záření jež se může vyzařovat

$$m \geq 2s, \qquad (2.385)$$

kde s je spin daného pole.
Pro elektromagnetické pole se spinem s = 1 je záření nejméně dipólové, pro gravitační pole se spinem s = 2 je nejméně kvadrupólové.
Za zdroj gravitačních vln můžeme tudíž považovat obecně každou fyzikální soustavu s časově proměnnou distribucí hmoty $\rho(t, x^\alpha)$.
Je-li pohyb hmoty ve zdroji pomalý, vzhledem k rychlosti světla, je-li dále zdroj malý ve srovnání s délkou vyzařovaných vln a pole v něm je slabé, pak celkové množství energie gravitačně vyzářené soustavou za jednotku času bude dáno známou kvadrupólovou formulí

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{45c^5} \dddot{K}_{\alpha\beta}^2, \qquad (2.386)$$

kde tečky značí derivaci podle času t a

$$K_{\alpha\beta}(t) = \int \rho(t, x)\left(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} x_\gamma x^\gamma\right) dV \qquad (2.387)$$

je tenzor kvadrupólového momentu rozložení hmoty ve zdroji.
Intenzita záření ve směru jednotkového vektoru **n** de elementu prostorového úhlu $d\Omega$ je dána vztahem

$$dL = \frac{G}{36\pi c^5}\left[\frac{1}{4}\left(\dddot{K}_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\dddot{K}_{\alpha\beta}^2 - \dddot{K}_{\alpha\beta}\dddot{K}_{\alpha\gamma} n^\beta n^\gamma\right)\right] d\Omega. \qquad (2.388)$$

Pro vyzařování gravitačních vln je tedy důležitý pouze kvadrupólový moment zdroje, jenž se musí měnit s časem, zatímco monopólový a dipólový moment k vyzařování nepřispívají.
Nejjednodušším laboratorním zdrojem gravitačních vln je tyč rotující kolem kolmé osy úhlovou rychlostí ω.
Dle vztahu (2.386) bude takováto rotující tyč gravitačně vyzařovat energii

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32G}{5c^5} I^2 \omega^6. \qquad (2.389)$$

Takřka polovina všech hvězd je součástí binárních nebo vícenásobných hvězdných systémů.
Máme-li dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 , která na sebe vzájemně působí gravitačními silami a obíhají po kruhových drahách poloměru r okolo společného těžiště úhlovou rychlostí ω, bude tato soustava dle vztahu (2.386) monochromatickým gravitačním zářičem o výkonu

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32G}{5c^5}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 r^4 \omega^6 \qquad (2.390)$$

Při obíhání po eliptické dráze s hlavní poloosou a a excentricitě e je gravitačně vyzařovaný výkon dán obecnějším vztahem

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32G}{5c^5} \frac{m_1^2 m_2^2}{m_1 + m_2} a^{-5} f(e) \qquad (2.391)$$

kde funkce

$$f(e) = \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)\left(1 - e^2\right)^{-\frac{7}{2}} \qquad (2.392)$$

zachycuje rostoucí vliv výstřednosti na intenzitu záření.
Při eliptickém pohybu obsahují vyzařované gravitační vlny nejen druhou harmonickou frekvence oběžného pohybu, jak je tomu při kruhovém obíhání, ale i vyšší harmonické.
Přitom intenzita vyzařování je nejvyšší v perihéliu, kde jsou si obě tělesa nejblíže a zrychlení zde dosahuje svého maxima.
To vede k postupnému zmenšování excentricity a eliptický pohyb se postupně mění v pohyb po kružnici.
Účinnost gravitačního vyzařování energie si můžeme demonstrovat na příkladu ocelové tyče o průměru 1 m a délce 20 m, tj. s celkovou hmotností takřka 500 tun, která rotuje okolo svého těžiště rychlostí cca 4 otáček za sekundu limitovanou pevností materiálu.
Takto extrémně silný umělý gravitační zářič, který je na samé hranici technických možností lidstva, by měl dle vztahu (2.389) gravitační zářivý výkon pouhých $W = 2 \cdot 10^{-29}$ W.
Existují však astrofyzikální jevy, při nichž dochází k vyzařování daleko mohutnějších gravitačních výkonů.
Soustava dvou černých děr o hmotnostech řádově srovnatelných s hmotností Slunce, obíhajících okolo společného těžiště v těsné blízkosti, by dokonce gravitačně vyzařovala výkon téměř 10^{47} W.
Kinetická energie obou objektů by se tímto velmi rychle vyzářila, což by vedlo ke kvaziperiodickému pohybu s postupným hroucením objektů do společného těžiště a následným splynutím v jediný celek.
Dle principu ekvivalence lokální působení gravitačních vln na jedinou izolovanou bodovou částici neexistuje.
Proto opět vezmeme dvě blízké testovací částice *A* a *B* a budeme sledovat periodické změny vzdálenosti mezi nimi způsobené kmitající křivostí prostoročasu.

Částici A budeme považovat za vztažnou a spojíme s ní referenční soustavu, která bude lokálně inerciální podél celé světočáry částice A. Vektor ε^i z rovnice derivace deviace geodetik zde bude odpovídat souřadnici x^i_B částice B, takže

$$\frac{D^2 x_B^i}{d\tau'^2} + R^i_{klm} \frac{dx_A^k}{d\tau'} x_B^l \frac{dx_A^m}{d\tau'} = 0. \tag{2.393}$$

Jelikož pracujeme v lokálně inerciální kartézské soustavě spojené s částicí A budou absolutní derivace přecházet v obyčejné derivace a souřadnicový čas t splývá s vlastním časem τ' s přesností prvního řádu. Vzhledem k (2.354) pak rovnice deviace nabývá jednoduchý tvar

$$\frac{d^2 x_B^\alpha}{dt^2} + R^\alpha_{0\beta 0} x_B^\beta = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 h^\alpha_\beta}{\partial t^2} x_B^\beta. \tag{2.394}$$

Jestliže v čase $t = 0$ bylo $h_{\alpha\beta} = 0$ a částice byly vůči sobě v klidu, můžeme integrací rovnice dospět ke vztahu

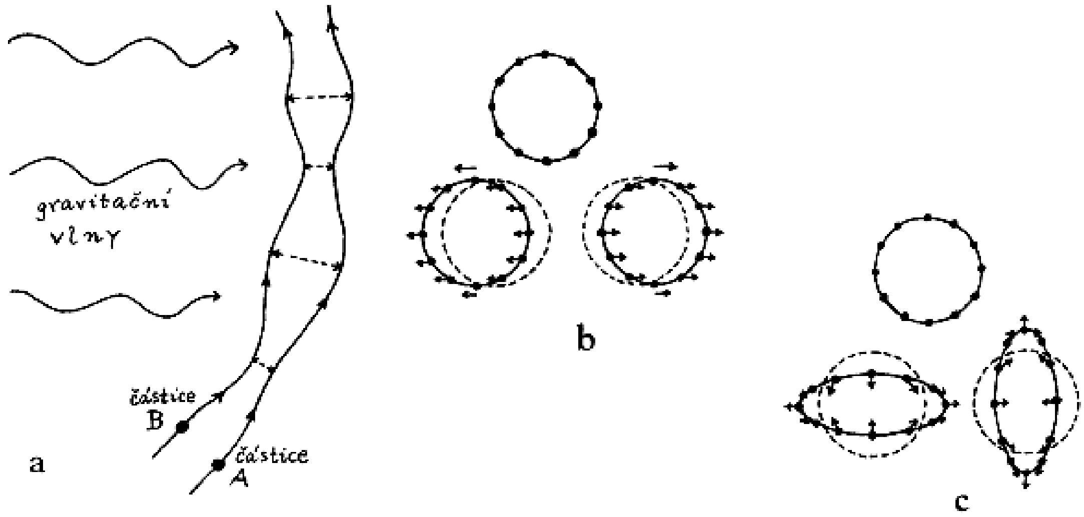
$$x_B^\alpha(t) \approx x_B^\alpha(0)\left[\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta}\left(t, x_A^\gamma = 0\right)\right] \tag{2.395}$$

vyjadřující oscilace polohy částice B vzhledem k částici A působené gravitační vlnou.
Přitom oscilace vykazují pouze ty komponenty $x_B^\alpha(t)$, jež jsou kolmé k vektoru šíření rovinné vlny k^α, což je očekávaný výsledek vzhledem ke (2.347). Jestliže však sledované testovací částice nejsou volné, ale interagují spolu negravitačními silami, je třeba rovnici (2.326) nahradit rovnicí

$$\frac{D^2 \varepsilon^i}{d\tau'^2} + R^i_{klm} \frac{dx^k}{d\tau'} \frac{dx^m}{d\tau'} \varepsilon^l = \frac{1}{m} F^i{}_{;k}\, \varepsilon^k, \tag{2.396}$$

kde F^i je čtyřsíla popisující negravitační (v praxi vždy elektromagnetickou) interakci sledovaných částic.

Obr. 2.13



a) Světočáry dvou volně padajících částic A a B se vlivem gravitačních vln periodicky vzdalují a přibližují.
b) Působení (lineárně polarizované) rovinné elektromagnetické vlny dopadající kolmo k nákresně na soustavu testovacích nabitých částic umístěných na kružnici vede k periodickým posunům celého kruhu testovacích částic ve směru závislém na polarizaci vlny.
c) Působení rovinné gravitační vlny dopadající kolmo na kruhově uspořádanou soustavu hmotných testovacích částic způsobuje periodické deformace tohoto uspořádání do elipsy střídavě ve dvou kolmých směrech daných polarizací vlny.

Rozdíl v chování rovnic (2.326) a (2.396) je oním faktorem, jenž umožňuje získávat z gravitačních vln energii a tím je detekovat.
Nebýt tohoto rozdílu, pak by otázka existence gravitačních vln samotných, byla otázkou spíše filozofickou, než fyzikální.
O existenci gravitační energie tedy není pochyb.
Snahy, o nalezení vyhovujících vztahů pro lokalizaci gravitační energie nevedly zprvu ke kýženým výsledkům, neboť v jakkoli silném gravitačním poli lze v každém bodě použitím lokálně inerciální vztažné soustavy, kde $\Gamma^i_{kl} = 0$, anulovat všechny složky pseudotenzoru energie-hybnosti gravitačního pole t^{ik}.
Je tudíž principiálně nemožné, zavést hustotu energie gravitačního pole, nezávislou na volbě souřadnicové soustavy, a to i v případě, kdy je celková energie definována jednoznačně.
Jestliže jeden hmotný systém působí rozruch v gravitačním poli, který se šíří k druhému systému a předá mu jistou energii, vynoří se otázka, kde

se nalézá energie a hybnost v časovém intervalu mezi jejím vysláním jedním systémem a jejím přijetím systémem druhým.
Zobecněním lokálního diferenciálního zákona zachování energie a hybnosti, známého ze STR, na přítomnost gravitačního pole, dostaneme dle principu ekvivalence tenzorový vztah

$$T^{ik}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\cdot T^{ik}\right)}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} T^{mk} = 0, \qquad (\ 2.397\ )$$

který však již žádný lokální zákon zachování nevyjadřuje, neboť vlivem přítomnosti druhého členu není možný přechod mezi plošnými integrálními toky a objemovými integrály s použití Gaussovy věty, jako je tomu ve STR.
Tam totiž stačí obklopit sledovanou soustavu myšlenou uzavřenou plochou S a přechodem od objemových integrálů k integrálům plošným s použitím Gaussovy věty a diferenciálního zákona zachování, dostaneme zákony zachování energie a hybnosti v integrálním tvaru:

$$\frac{dp^i}{dt} = -\oint_S T^{i\alpha}\, d^2 S_\alpha\,, \qquad (\ 2.398\ )$$

kde d^2S_α jsou složky normálového vektoru elementu plochy.
Pro izolovanou soustavu je na pravé straně (2.398) nula, takže p^i = const.
V zakřiveném prostoročase OTR však, jak vidno, žádné takovéto zákony zachování energie a hybnosti izolovaných hmotných soustav neplatí.
Je to dáno tím, že se musí zachovávat nejen energie a hybnost zdrojů gravitačního pole, ale též energie a hybnost samotného gravitačního pole, které však nejsou zahrnuty do T^{ik}.
Křivost prostoročasu je totiž jistým specifickým příspěvkem k energii a hybnosti celé hmotné soustavy.
Je zřejmé, že přenáší-li gravitační pole energii, hybnost a moment hybnosti, musí mít tytéž charakteristiky hmoty (integrály pohybu) jejichž přenos zprostředkovává, stejně jako je tomu u běžných látkových prostředí.

Jak jsme však viděli, nemá smysl hovořit o lokalizaci energie gravitačního pole v prostoru, tj. o tom, zda v daném bodě je nebo není jisté množství gravitační energie.
Lokalizace gravitační energie není možná.
Energie gravitačního pole je jevem globálním a nikoli lokálním, což je plně v souladu s principem ekvivalence, podle něhož lze v libovolném místě prostoru zavést lokálně inerciální soustavu, tj. lokálně odstranit gravitační pole a s ním i lokální gravitační energii.
Lokální gravitační energie nefiguruje jako zdroj na pravé straně Einsteinových rovnic.
Nezakřivuje tedy prostoročas, nemá váhu a není nijak měřitelná.
Rozumné fyzikální vlastnosti má gravitační energie pouze v nelokálním smyslu.
Zákony zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti jsou důsledkem homogenity času a homogenity a izotropie prostoru.
V tomto smyslu pojmy energie, hybnost a moment hybnosti souvisejí se symetrickou strukturou prostoročasu.
Za přítomnosti gravitačního pole však prostoročas obecně žádné symetrie nemá, takže lze očekávat vážné potíže se zákony zachování.
Zákon zachování energie a hybnosti si ponechává platnost pouze v lokálně inerciální vztažné soustavě, nelokalizovatelnost gravitační energie pak odpovídá nelokálnímu charakteru gravitace jako takové.
Každou úlohu v OTR lze však v principu řešit pomocí Einsteinových rovnic bez nutnosti použití zákonů zachování.
Koncepce gravitační síly a gravitační energie jsou jen způsobem interpretace křivosti prostoročasu prostřednictvím pojmů, na něž jsme zvyklí v rovinném prostoročase negravitační fyziky.
S lokálními symetriemi, a tím i s lokalizací gravitační energie se v OTR musíme rozloučit.
Energie a hybnost jsou však natolik zásadní a pro praxi důležité pojmy, že by jejich úplná ztráta byla dosti nepříjemná.
Naštěstí se vyskytují i případy, kdy existují určité globální symetrie prostoročasu (např. sférická, axiální, rovinná, apod.), jež nám umožňují zachovat alespoň pojem celkové energie.
Má-li prostoročas některé z těchto symetrií, vyjádřených příslušnými Killingovými vektory ξ_k , pak lze sestrojit vektor

$$p^i = T^{ik}\xi_k , \qquad (2.399)$$

pro který díky Killingovým rovnicím platí vztah

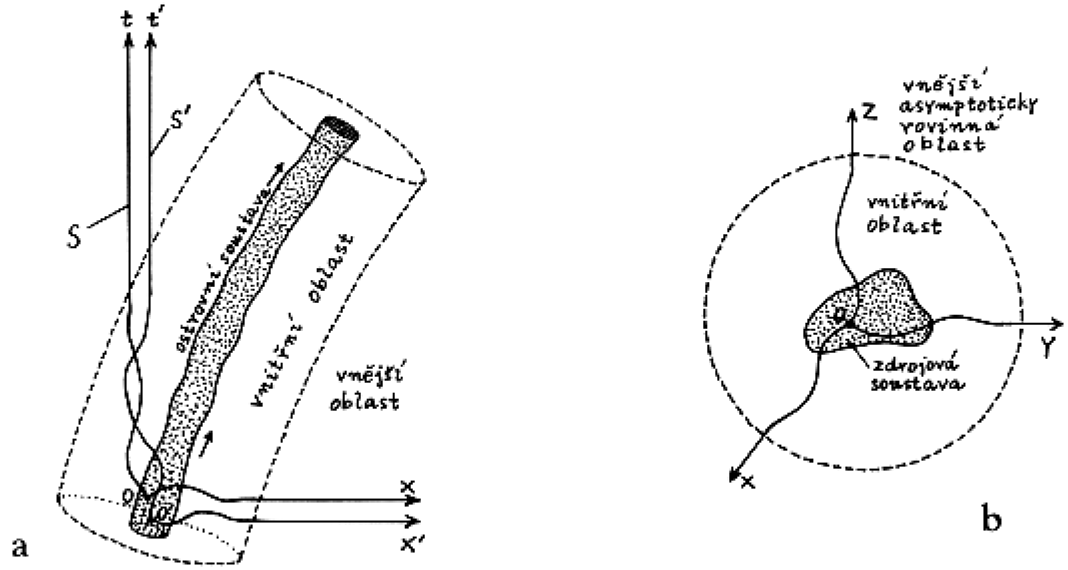
$$p^i{}_{;i} = T^{ik}\xi_{k;i} = \frac{1}{2}T^{ik}\left(\xi_{k;i} + \xi_{i;k}\right) = 0 \qquad (2.400)$$

vyjadřující zákon zachování p^i.

Wilhelm Karl Joseph Killing (1847 – 1923)

V závislosti na tom, je-li Killingův vektor ξ_k časového, resp. prostorového typu, vyjadřuje vztah (2.400) zákon zachování energie, resp. hybnosti.
Zásadní význam však mají i situace, kdy vyšetřovaná soustava je prostorově omezená a v dostatečně veliké vzdálenosti od ní se prostoročas stává rovinným.
Jedná se o tzv. **asymptotické symetrie** kdy je možno celkovou energii a hybnost soustavy dát do souvislosti s invariancí vůči časovým a prostorovým posuvům vzhledem k pozorovateli v nekonečnu.
V asymptoticky plochém prostoru můžeme kolem ostrovní zdrojové soustavy vymezit natolik velkou prostorovou oblast, aby vně ní bylo gravitační pole zanedbatelné.

Obr. 2.14



Prostoročas (**a**) a prostor (**b**) kolem ostrovní fyzikální soustavy si můžeme rozdělit na tři části:
l. Oblast vlastního zdroje (tečkovaně), kde kromě silných gravitačních polí je $T^{ik} \neq 0$.
2. Blízká (ale vakuová) "vnitřní" oblast, kde gravitační pole a zakřivení prostoročasu může být ještě silné.
3. Vzdálená asymptoticky rovinná vnější oblast, kde gravitační pole je velmi slabé (prostoročas téměř plochý) a kde lze zavést asymptoticky inerciální vztažnou soustavu.
Použijeme-li v ostrovní soustavě asymptoticky Galileovské vztažné soustavy, dostaneme jednoznačný výraz pro celkovou energii-hybnost P^i soustavy, který se zachovává, je nezávislý na volbě souřadnicové soustavy ve vnitřní oblasti a chová se jako čtyřvektor vzhledem k asymptoticky Lorentzovým transformacím.

Pro výpočet energie a hybnosti pole je pak třeba vzít souřadnou soustavu s počátkem v blízkosti zdroje, která by ve vnější asymptoticky rovinné oblasti prostoročasu přecházela v galileiovskou soustavu, v níž

$$\lim_{r\to\infty} g_{ik}(r) \to \eta_{ik} + \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (2.401)$$

tj.

$$g_{ik}(\infty) = \eta_{ik} \ . \qquad (2.402)$$

Ve vnitřní oblasti může být souřadná soustava zvolena libovolně, aniž to ovlivní p^i.

Celková energie a hybnost je invariantní vůči takovým transformacím souřadnic

$$x^i \to x'^i = x^i + \varepsilon^i(x), \qquad (2.403)$$

jež jsou asymptoticky identické, tj.

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon^i(x) = 0, \qquad (2.404)$$

což přímo plyne ze zákona zachování pro p^i.
Vezměme nyní dvě souřadné soustavy Σ a Σ′ rozdílné ve vnitřní oblasti, avšak přecházející asymptoticky v tutéž Galileiho soustavu Σ.
Pro porovnání hodnot p^i a p'^i v těchto dvou soustavách v časových okamžicích t a t' je nutno zavést další pomocnou souřadnicovou soustavu Σ″, která ve vnitřní oblasti v okamžiku t splývá se souřadnou soustavou S a v okamžiku t' splývá se soustavou Σ′.
Ve vnější oblasti se Σ″ nemění a splývá stále s toutéž soustavou Σ.
Díky zákonu zachování (2.400) jsou veličiny p^i v každé vztažné soustavě konstantní a časově nezávislé, bude $p^i(t) = p''^i(t) = p''^i(t') = p'^i(t')$, což přímo plyne i ze známého Einsteinova integrálu pro celkovou energii soustavy uvnitř uzavřené plochy S, aplikovaného na uzavřenou plochu ležící v asymptotické oblasti (neboť žádné transformace měnící souřadnice pouze uvnitř ohraničené prostorové oblasti nemohou ovlivnit globální hodnoty těchto integrálů přes vzdálené plochy):

$$E \equiv p^0 = \frac{c^4}{16\pi G}\left(h_{\alpha\beta,\alpha} - h_{\alpha\alpha,\beta}\right) dS_\beta\ , \qquad (2.405)$$

což vyjádřeno pomocí $g_{ik} = \eta^{ik} + h_S^{ik}$ dává

$$p^0 = \frac{c^4}{16\pi G}\left(g_{\alpha\beta,\alpha} - g_{\alpha\alpha,\beta}\right) dS_\beta\ . \qquad (2.406)$$

Pro stanovení celkové energie, hybnosti a momentu hybnosti každé konečné soustavy tedy stačí znát asymptotické chování metriky ve velkých vzdálenostech.
Celková energie a hybnost ostrovní soustavy se tak nejen zachovává, ale je též nezávislá na volbě souřadné soustavy, pakliže tato asymptoticky přechází v danou galileiovskou soustavu.
Protože se t^{ik} chová vzhledem k lineárním transformacím jako tenzor tvoří složky p^i čtyřvektor vzhledem k lineárním transformacím převádějícím jednu asymptoticky galileiovskou vztažnou soustavu v druhou.
V dostatečně velikých vzdálenostech od statické ostrovní soustavy se vliv detailů v rozložení hmoty na gravitační pole postupně stírá a pole tam lze považovat za sféricky symetrické s přibližně Schwarzschildovskou metrikou, kterou lze pro $r \to \infty$ psát v tzv. **asymptotickém tvaru**

$$ds^2 \approx -c^2\left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right)dt^2+\left(1-\frac{2\varphi}{c^2}\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right). \qquad (2.407)$$

Karl Schwarzschild (1873 – 1916)

Pro statické pole lze navíc zanedbat retardaci a řešení (446) má tvar

$$\psi_{00}=-\frac{4\varphi}{c^4} \quad , \qquad \psi_{0\alpha}=\psi_{0\beta}=0, \qquad (2.408)$$

kde

$$\varphi\left(t, x^{\alpha}\right) = -G \iiint \frac{T_{00}\left(t, x'^{\alpha}\right)}{R}\, dx'dy'dz' \qquad (\ 2.409\ )$$

je obyčejný Newtonův potenciál.
Metrický tenzor tak nabývá jednoduchého tvaru

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} -\left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{2\varphi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{2\varphi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{2\varphi}{c^2} \end{pmatrix}. \qquad (\ 2.410\ )$$

Ve vzdálenostech r podstatně větších, než rozměry zdroje lze přibližně položit $R \approx r$ a metriku (2.407) lze vyjádřit pomocí celkové hmotnosti

$$M = \iiint T_{00}\, d^3x, \qquad (\ 2.411\ )$$

zdrojové soustavy

$$ds^2 \approx -c^2\left(1+\frac{2GM}{rc^2}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right). \qquad (\ 2.412\ )$$

Dosazením příslušných komponent metrického tenzoru (2.410) do vztahu (2.406) a integrací přes sféru poloměru r dostaneme výsledek

$$p^0 = Mc^2. \qquad (\ 2.413\ )$$

Abychom si ukázali reálnou existenci energie gravitačního pole a zároveň hlouběji pronikli do specifické povahy gravitační energie, vraťme se ještě k otázce vyzařování a přenosu energie gravitačními vlnami.
V gravitační vlně nelze lokalizovat energii a hybnost do oblasti menší než délka vlny.
Nelze tedy určit, jak velká energie je obsažena v různých oblastech gravitační vlny.
Jak ovšem plyne z Isaacsonova formalismu, v oblasti několika vlnových délek lze již velmi přesně určit množství přenášené energie – hybnosti.
Zakřivování prostoročasu účinkem energie nesené gravitačními vlnami popisují rovnice (2.374).
Pokud se nenacházíme ve vakuu, a kromě gravitačních vln jsou přítomna hmotná tělesa a negravitační pole popsaná sumárním tenzorem energie – hybnosti T_{H}^{ik}, budou mít rovnice (2.374) tvar

$$G_{\mathrm{glob}}^{ik} \equiv R_{\mathrm{glob}}^{ik} - \frac{1}{2} R_{\mathrm{glob}} g_{\mathrm{glob}}^{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mathrm{H}}^{ik} + T_{\mathrm{vln}}^{ik}\right). \qquad (2.414)$$

Pro stanovení energie gravitačních vln lze též poněkud oslabit základní požadavek asymptotické eukleidovosti metriky, neboť stačí vyšetřovat konečný objem podstatně převyšující délku vln.
Zdroj gravitačního záření pochopitelně ztrácí kinetickou energii přesně s toutéž rychlostí, s jakou je energie odnášena vyzařovanou gravitací.
Analýza zpětné reakce vyzařovaných gravitačních vln na zdrojovou soustavu ukázala, že uvnitř a v blízkosti zdroje se vytváří určitá malá proměnná složka prostoročasové křivosti s fází odlišnou od hlavní proměnné složky.
Tento přídavný člen způsobuje ve zdroji brzdící síly.
Výpočty ukazují, že hlavní část této přídavné složky lze při vhodné kalibraci vyjádřit ve tvaru

$$h_{00}^{\mathrm{re}} = -\frac{2G}{15c^5}\frac{d^5 K_{\alpha\beta}}{dt^5} x^{\alpha} x^{\beta}. \qquad (2.415)$$

Příslušné brždění zpětnou reakcí vyzařovaných gravitačních vln lze tedy v hlavních rysech popsat pomocí vhodné modifikace Newtonova potenciálu φ^{new}

$$\varphi = \varphi^{\text{new}} + \varphi^{\text{re}}, \tag{2.416}$$

kde

$$\varphi^{\text{re}} \equiv -\frac{1}{2} h_{00}^{\text{re}} = \frac{G}{15c^5} \frac{d^5 K_{\alpha\beta}}{dt^5} x^\alpha x^\beta \tag{2.417}$$

je potenciál brzdné síly způsobené reakcí záření.
Zrychlení každé částice v potenciálu φ bude

$$a_\alpha = \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = -\varphi_{,\alpha} = -\varphi_{,\alpha}^{\text{new}} - \varphi_{,\alpha}^{\text{re}} \tag{2.418}$$

a brzdná síla působící na částici hmotnosti m bude

$$F_\alpha = \varphi_{,\alpha}^{\text{new}} \cdot m. \tag{2.419}$$

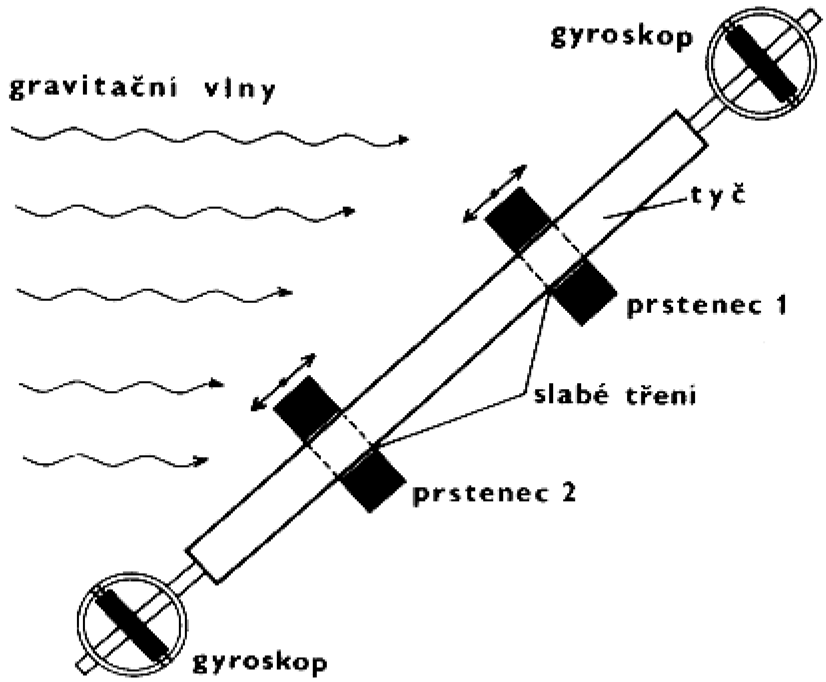
Tato brzdná síla povede uvnitř zdroje ke ztrátě energie

$$\frac{dE}{dt} = \int \rho \cdot a_\alpha v_\alpha \; dV = -\int \rho \cdot \varphi_{,\alpha}^{\text{re}} v_\alpha \; dV, \tag{2.420}$$

kde v_α je rychlost příslušného elementu $\rho \, dV$.
Průměrná rychlost, se kterou se vlivem brždění zpětnou reakcí záření bude zmenšovat energie zdrojové soustavy pak bude

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left\langle -\int \rho \cdot \varphi_{,\alpha}^{\text{re}} v_\alpha \; dV \right\rangle = \frac{G}{45c^5} \left\langle \left(\frac{d^3 K_{\alpha\beta}}{dt^5} \right)^2 \right\rangle = -\frac{G}{45c^5} \dddot{K}_{\alpha\beta}^2 . \tag{2.421}$$

Zdroj tedy ztrácí kinetickou energii skutečně stejnou rychlostí, s jakou je energie odnášena gravitačními vlnami.
Dalším aspektem studia vlastností gravitační energie je zkoumání podmínek, za nichž mohou gravitační síly konat práci a přeměňovat tak gravitační energii v jiné druhy energie.
Jedním z takových gravitačních motorů je např. soustava rotující Země + obíhající Měsíc, která každou sekundu předá prostřednictvím svého gravitačního pole světovému oceánu řádově 10^{11} J své kinetické energie, jež se projevuje mořským přílivem.
Gravitační energie se zde přeměňuje na mechanickou a tepelnou energii oceánských vod, která může být posléze člověkem přeměněna na další druhy energie – např. elektrickou.
Celý proces však probíhá hluboko uvnitř induktivní zóny, soustavy, takže veškeré efekty retardace a konečné rychlosti gravitačního působení se vzhledem k poměrně malé periodě nikterak neprojeví – přenos energie lze popsat i v rámci Newtonovy teorie.
Co se týče gravitačních vln, navrhl již v 50. letech minulého století H. Bondi velmi jednoduchý a názorný myšlenkový experiment, jehož uspořádání vidíme na obr. 2.15.



Obr. 2.15: Jednoduché uspořádání pro přeměnu energie gravitačních vln na teplo.

Na hladké tyči se mohou s minimálním třením pohybovat dva hmotné prstence.
Gyroskopy na koncích tyče zamezují její lokální rotaci.
Celý systém se pohybuje volně v prostoru a gravitační vlny v důsledku deviace geodetik posunují prstence po tyči střídavě k sobě a od sebe.
Vlivem tření prstenců o tyč se takto část energie gravitačních vln přeměňuje na teplo, jež lze z tyče odebírat.

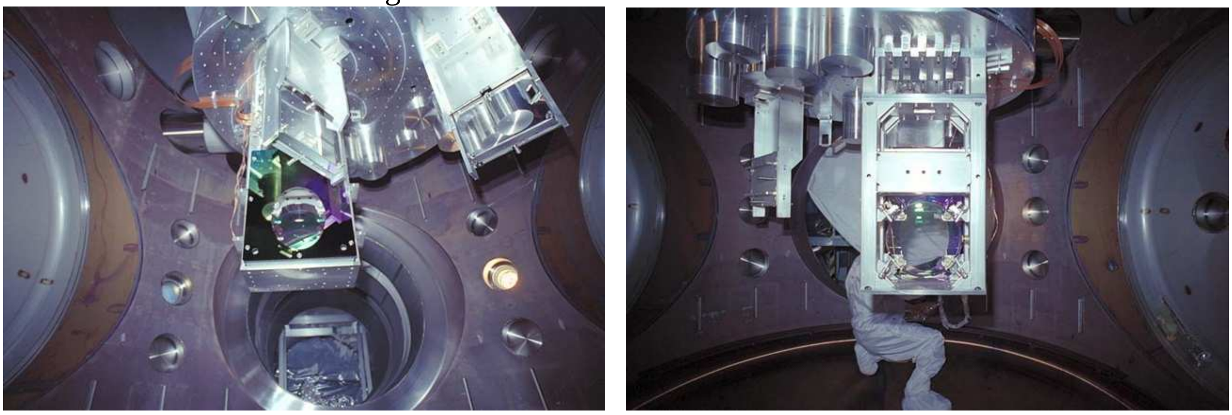
Sir Hermann Bondi (1919 – 2005)

První reálně zkonstruované detektory gravitačních vln využívaly namísto třecích prstenců piezoelektrických snímačů.
Nejmodernější zařízení současnosti LIGO, používá k detekci gravitačních vln soustavu dvou na sebe kolmých obřích laserových interferometrů, každý v délce 4 kilometrů.

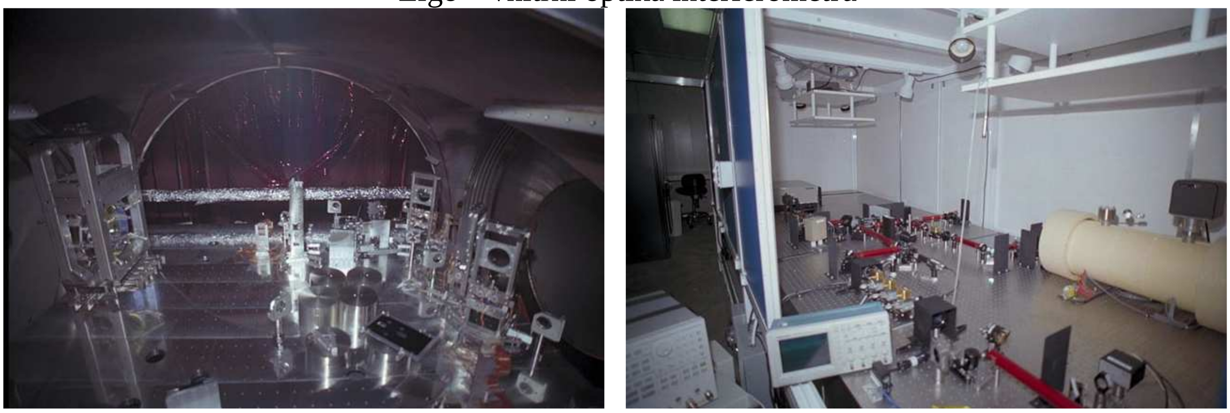
Obr. 2.16:: LIGO - dosud největší gravitační anténa světa

Ligo – detailní pohled na centrální budovu

Ligo – detail centrální části interferometru



Ligo – vnitřní optika interferometru



Ligo – detail detekční aparatury interferometru

Projekt vznikl ve spolupráci univerzit Caltech (California Institute of Technology) a MIT (Massachusetts Institute of Technology). Jde o dvojici zařízení vzdálených 3200 km. První z nich se nachází v Hanfordu ve státě Washington a za jeho provoz je zodpovědná univerzita Caltech. Druhá stavba je v Livingstonu ve státě Luisiana a provoz řídí MIT. Dva interferometry existují proto, aby mohla být detekce gravitačních vln potvrzena koincidencí ze dvou nezávislých zdrojů.

Zvětšovat dále rozměry ramen je však neschůdné, zejména s ohledem na cenu vakuového systému. Zcela principiální omezení klade také všudypřítomná seismická aktivita, která naprosto znemožňuje detekci gravitačních vln frekvencí menších než 1 Hz pozemskými detektory. Nezbývá, než začít uvažovat o stavbě interferometru v kosmickém prostoru. Právě to je cílem velmi ambiciózního projektu **LISA** (Laser Interferometer Space Antenna), jenž se rodí ve spolupráci evropské a americké kosmické agentury ESA a NASA. Projekt předpokládá vytvoření detektoru ve tvaru pomyslného rovnostranného trojúhelníku o stranách kolem 5 milionů kilometrů tvořeného družicemi umístěnými v jeho vrcholech. Vzájemná vzdálenost družic by se neustále interferometricky proměřovala. Celá soustava by obíhala kolem Slunce ve vzdálenosti 1AU, tj. sledovala by dráhu Země, ale tak, aby úhel Země-Slunce-detektor byl zhruba 20°.

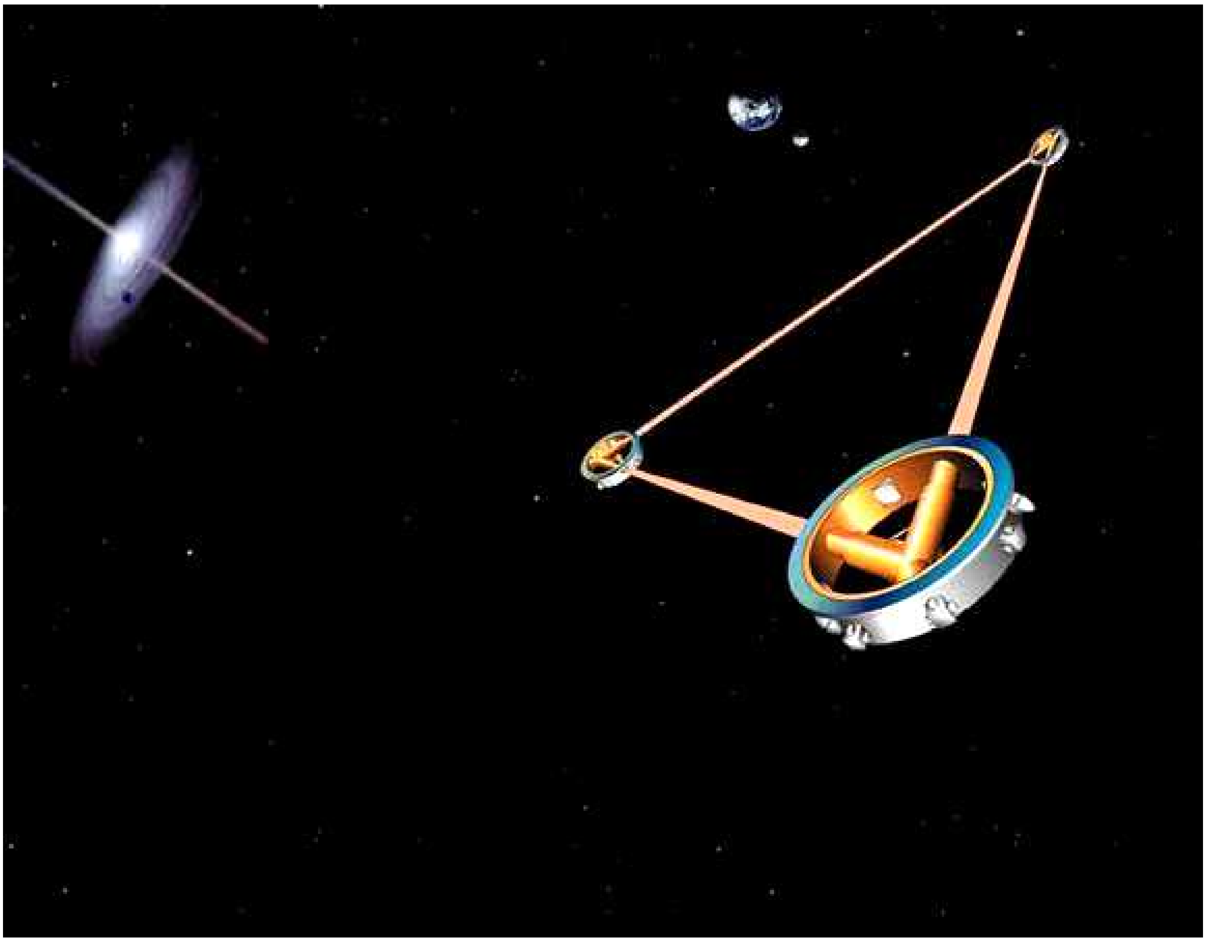
Christian Andreas Doppler (1803 – 1852)

Každá z družic bude obíhat po své specifické dráze s vhodně zvolenou excentricitou, sklonem k ekliptice a uzlovou přímkou, takže trojúhelníková konfigurace zůstane s velkou přesností konstantní a bude svírat s rovinou ekliptiky úhel 60°. Rovina detektoru se přitom bude stáčet (s periodou jednoho roku). S využitím Dopplerova efektu proto bude možné dosti přesně stanovit polohy případných zdrojů na obloze, úhlové rozlišení pro nejsilnější zdroje by mohlo být dokonce lepší než úhlová minuta.

Aby se vyloučily negravitační vlivy, bude použita technika aktivního udržování na "bezsilové trajektorii" známá z geodetických družic.

Uvnitř každé družice se bude nacházet naprosto volně se pohybující testovací těleso, pravděpodobně krychle o stranách 4 cm vyrobená ze speciální slitiny platiny a zlata s nulovou magnetickou susceptibilitou. Vlastní družice bude korigovat svůj pohyb tak, aby poloha krychle vznášející se ve vakuové titanové dutině uvnitř sondy zůstávala konstantní. Zmíněná krychle bude tvořit vlastní srdce družice. Paprsek emitovaný laserem se bude odrážet od zrcadlové stěny testovací krychle a poté bude prostřednictvím Cassegrainova teleskopu (Laurent Cassegrain (1629 – 1693)) o průměru 30 cm vyslán do příslušného ramene. Na jeho konci se odrazí od testovací krychle druhé družice, zesílí jejím laserem beze změny fáze a odešle zpět. Po dalším odrazu na první krychli se smíchá s částí vyslaného světla a interference bude zaznamenána detektorem. Signál bude porovnán s analogickými signály z dalších dvou ramen a předán na Zemi prostřednictvím telemetrie.

Hlavní předností LISA budou především obrovské rozměry interferometru a naprostá nepřítomnost seismického rušení. Díky tomu se LISA stane opravdu robustním detektorem gravitačních vln, který narozdíl od svých pozemských kolegů bude pracovat v režimu, kdy signál bude až o mnoho řádů převyšovat šum. Především se však otevře naprosto nové, nízkofrekvenční gravitační okno do vesmíru. Právě v oblasti 1 Hz až 10^{-4}Hz vydává gravitační záření celá řada extrémně zajímavých astrofyzikálních zdrojů, především kompaktních binárních systémů v naší Galaxii a velmi hmotných černých děr v galaxiích vzdálených. LISA, vybraná jako jedna z budoucích klíčových vědeckých misí Evropské kosmické agentury ESA s plánovanou realizací po roce 2010, nám poodhalí roušku jejich tajemství.



Obr. 2.17:: Kosmická gravitační anténa LISA plánovaná na příští desetiletí

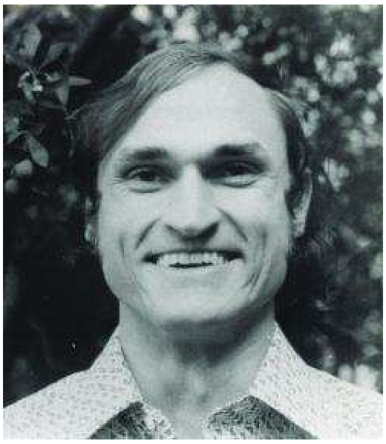
Obr. 2.18:: Detail detekční aparatury interferometru LISA

Specifické vlastnosti gravitační energie

Integrální zákon zachování energie a hybnosti (2.398) přejde po zahrnutí gravitačního záření na tvar

$$\frac{dp_i}{dt} = -\oint_S \left(T^{i\alpha}_{\mathrm{H}} + T^{i\alpha}_{\mathrm{vln}} \right) d^2 S_\alpha \,, \qquad (2.422)$$

kde *S* leží v asymptoticky rovinném prostoročase a tedy ve vlnové zóně soustavy.
Rovnice (2.422) říkají, že rychlost změny energie a hybnosti soustavy je rovna proudu, kterým je přes uzavřenou plochu obklopující zdrojovou soustavu přenášena energie a hybnost látkovým prostředím, negravitačními poli a gravitačním vlněním.
Při analýze chování každé fyzikální soustavy v asymptoticky rovinném prostoročase tedy můžeme s výhodou použít běžných zákonů zachování energie a hybnosti, přičemž ovšem musíme započítat i energii odnášenou, popř. přinášenou gravitačními vlnami.
V průběhu vývoje zůstávala dlouhou dobu otevřená otázka o znaménku gravitační energie a celkové energie fyzikální soustavy vůbec.
O číselné hodnotě a znaménku celkové energie bylo rozhodnuto až na základě analýzy rovnic pole provedené na přelomu sedmdesátých a osmdesátých let minulého století Schoenem, Yauem a Wittenem, kteří dokázali, že celková energie gravitačního pole a zdrojové soustavy s kladným tenzorem energie – hybnosti je kladná, jak to odpovídá základním fyzikálním požadavkům. Ve srovnání s klasickou fyzikou dochází v OTR k jisté degradaci pojmu energie.



Richard Melvin Schoen (1950) **Shing-Tung Yau (1949)** **Edward Witten (1951)**

Byli jsme svědky toho, že hustota energie ztrácí lokální význam, takže klasická představa energie jako určité substance spojitě a jednoznačně rozložené v prostoru, zde ztrácí opodstatnění. Navíc i celková energie může být definována pouze při splnění speciálních geometrických a topologických předpokladů. Pouze v asymptoticky rovinném prostoročase s eukleidovskou topologií mají veličiny globální energie a hybnosti ostrovní fyzikální soustavy jasně definovaný význam. Neexistuje-li asymptoticky plochá oblast prostoročasu, neexistuje ani invariance vzhledem k prostoročasovým translacím, k níž by bylo možno vztáhnout energii a hybnost.

Energie, jež je v klasické fyzice fundamentálním pojmem a základním atributem hmoty, se v OTR stává řadovou veličinou obecně bez názorného fyzikálního významu, která za jistých speciálních podmínek popisuje díky svému zákonu zachování, některé vlastnosti hmoty. Degradace pojmu energie, jak víme, úzce souvisí s revizí pojmů prostoru a času, které OTR svrhla z trůnu absolutnosti a neměnnosti a učinila z nich dynamické prvky těsně související s rozložením a pohybem hmoty.

Existují v zásadě dvě protichůdná stanoviska ke vztahu lokálních a globálních fyzikálních zákonů. První přístup, kterého jsme se až dosud přidržovali, spočívá v tom, že se snažíme globální vlastnosti prostoročasu odvozovat na základě znalosti lokálních fyzikálních zákonů – jejich extrapolací a syntézou.

Druhý přístup naopak vychází z představy, že lokální fyzikální zákony mají svůj původ v globální struktuře okolního vesmíru, nebo jsou alespoň okolní geometrickou strukturou prostoročasu, tj. rozložením hmot v něm ovlivňovány. Tento názor souvisí s **Machovým principem**. Dle Machova principu jsou vlastnosti prostoročasu určené rozložením a pohybem vesmírné hmoty~energie. Rozložení hmoty ve vesmíru určuje lokální inerciální soustavu každého tělesa.

Ernst Mach (1838 – 1916)

Zajímavý přístup k Machovu principu vypracoval J. A. Wheeler, který používá Machova principu k získání okrajových podmínek pro Einsteinovy rovnice jako určitý kosmologický selekční princip.
Ve Wheelerově interpretaci je geometrie prostoročasu určena distribucí hmoty~energie na počáteční hyperploše prostorového typu.
Machův princip v této aplikaci pak vede k požadavku, aby vesmír byl uzavřený – geometrie prostoročasu v minulosti, přítomnosti i budoucnosti, a tím i setrvačné vlastnosti všech částic, jsou pak určeny zadáním trojrozměrné geometrie uzavřeného prostoru ve dvou blízkých časových okamžicích a zadáním hustoty rozložení a proudu energie a hybnosti.