

Matematický úvod do unitární teorie pole

1) Základy topologie

Vlastnosti prostoru můžeme rozdělit na kvantitativní - **metrické** (související s měřením vzdáleností, úhlů, ploch) - a na kvalitativní - **topologické**. Topologie, která se někdy též nazývá "kvalitativní geometrie", je velmi zhruba řečeno to, co zbude z geometrie, když si z ní odmyslíme všechno co má nějakou velikost (a v tomto smyslu i konkrétní tvar). Topologie studuje takové vlastnosti geometrických útvarů, které se při spojitých deformacích (tj. různých roztaženích, stlačeních nebo zprohýbáních za podmínky že nedochází k žádným roztržením nebo spojením různých částí) nemění. Jinak řečeno, topologie systematizuje naše intuitivní představy a zkušenosti o "možném" a "nemožném" v prostoru.

Z hlediska topologie jsou kružnice, elipsa, čtverec nebo trojúhelník stejné, jsou vzájemně **homeomorfní** - použitím topologického zobrazení lze deformovat kružnici na elipsu, čtverec nebo trojúhelník a naopak. Tím spíše jsou si topologicky ekvivalentní kružnice o různých poloměrech nebo čtverce s různými délkami strany. Podobně koule, elipsoid, krychle a jehlan. Takové vzájemně homeomorfní útvary jsou jen různými metrickými variantami téže topologické množiny bodů. Topologie tedy studuje nejzákladnější **globální** vlastnosti prostoru (a geometrických útvarů v něm) jako je souvislost, spojitost, počet rozměrů, omezenost nebo neomezenost a pod. V tomto smyslu je tedy topologie hlubší a obecnější než to, co se běžně pokládá za geometrii. Níže uvidíme příklady prostorů, které mají stejné geometrické (metrické) vlastnosti, avšak zcela odlišné vlastnosti topologické.

Část matematiky zvaná **topologie**, která vznikla při upřesňování intuitivních pojmů "spojitost", "blížkost", "limita", se zabývá jakýmsi "místopisem" bodových množin; studuje kvalitativní pojem "blížkosti" jednotlivých bodů tím, že specifikuje co se rozumí **okolím** každého bodu množiny. Říkáme, že na množině X je dána topologie,

je-li určena soustava \mathcal{U} podmnožin $U \subset X$ taková, že:

- a) Průnik dvou množin z \mathcal{U} patří rovněž do \mathcal{U} ;
- b) Sjednocení libovolné soustavy množin z \mathcal{U} patří rovněž do \mathcal{U} .

Množina X (která je rovněž prvkem \mathcal{U}) spolu s danou topologií se nazývá **topologický prostor** (X, \mathcal{U}) . Okolím bodu $x \in X$ pak rozumíme otevřenou množinu $U \in \mathcal{U}$ která bod x obsahuje.

Ke vzájemnému porovnávání množin slouží operace **zobrazování**: zobrazení $\varphi: X \rightarrow Y$ množiny X do množiny Y znamená, že každému bodu $x \in X$ přiřadíme určitý bod

$$\varphi(x) \equiv y \in Y \quad (7.1)$$

Zobrazení φ topologického prostoru (X, \mathcal{U}) do prostoru (Y, \mathcal{V}) se nazývá **spojité**, jestliže ke každému bodu $x \in X$ a ke každému okolí $V \in \mathcal{V}$ bodu $\varphi(x) \in Y$ existuje okolí U tak, že $\varphi(U) \subset V$. Vzájemně jednoznačné spojité zobrazení φ prostoru (X, \mathcal{U}) na (Y, \mathcal{V}) pro které je i inverzní zobrazení φ^{-1} spojité, se nazývá **homeomorfismus** (je zřejmé, že φ^{-1} je pak rovněž homeomorfní zobrazení prostoru Y na X). Homeomorfní zobrazení je tedy takové vzájemně jednoznačné zobrazení množin X a Y , při kterém se blízké body jedné množiny převádějí na blízké body druhé množiny (otevřené podmnožiny v X a Y tvořící okolí bodů $x \in X$ a $\varphi(x) \in Y$ jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu) - zachovává se při něm okolí bodů. Množiny X a Y , mezi nimiž existuje takový homeomorfismus, se nazývají homeomorfní a považují se z topologického hlediska za **ekvivalentní**.

Homeomorfismus je vyjádřením oněch "spojitých deformací" (stlačení nebo roztažení) zmíněných výše. Topologické pojmy a **topologické vlastnosti** jsou takové pojmy a vlastnosti, které zůstávají zachovány při homeomorfismu.

Například elektrický obvod je pojem topologický, protože pro jeho činnost není podstatné rozmístění jednotlivých součástí, ale jejich vzájemné propojení (neplatí to tak docela pro vysokofrekvenční techniku, kde se pro různá rozmístění součástí mohou různě uplatňovat jevy elektromagnetické indukce či vyzařování vln).

Nejnázornějším příkladem topologického prostoru je množina reálných čísel R^1 s přirozenou topologií danou soustavou podmnožin $A \subset R^1$, které spolu s každým svým bodem obsahují vždy i určitý interval kolem něho: pro každý bod $x \in A$ existují čísla a, b taková, že $a < x < b$ a interval $(a, b) \in A$. Zobecněním je n -rozměrný Eukleidův prostor R^n všech n -tic reálných čísel (x^1, x^2, \dots, x^n) při $-\infty < x^i < +\infty$ s obvyklou topologií. A právě dobře známé vlastnosti eukleidovského prostoru, "odkoukané" od chování makroskopických těles, umožňují (pomocí vhodného zobrazení) na jinak amorfním topologickém prostoru zavést dodatečné struktury a učinit jej tak vhodným nástrojem k **modelování fyzikálních dějů**.

Varieta dimenze n (n - rozměrná varieta) M^n je takový topologický prostor, jehož každý bod má okolí homeomorfní s R^n (s určitým okolím v R^n). Homeomorfní zobrazení φ otevřené (pod)množiny $A \subset M^n$ do R^n přiřazuje každému bodu $x \in A$ n -tici čísel

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in R^n, \quad (7.2)$$

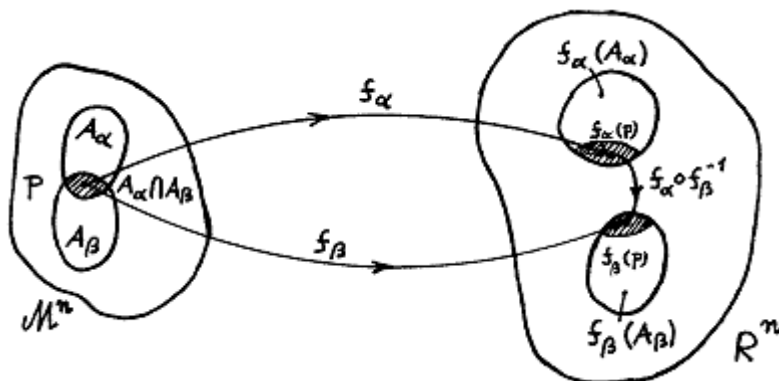
které se nazývají **souřadnice** bodu x . Říkáme, že na množině A je zavedena souřadnicová soustava (systém souřadnic) x^i . Zvolením jiného homeomorfního zobrazení φ' z $A \subset M^n$ do R^n budou jednotlivým bodům $x \in A$ přiřazeny jiné souřadnice

$$(x'^1, x'^2, \dots, x'^n) \in R^n, \quad (7.3)$$

přejdeme k jiné souřadnicové soustavě v podmnožině A .

Zobrazit celé M^n do R^n tímto způsobem však pro mnohé topologické prostory nelze (např. zobrazení S^2 do R^2 zavádějící na kulové ploše S^2 sférické souřadnice ϑ, φ přestává být vzájemně jednoznačné na pólech). Obecně tedy můžeme varietu M^n zobrazit do R^n po částech - vytvářet lokální souřadnicové "mapy" $(A_\alpha, \varphi_\alpha)$ jednotlivých "domén" (souřadnicových okolí) $A_\alpha \subset M$. Soubor map jednotlivých domén $A_\alpha \subset M$, pokrývajících M (tj. $\bigcup_\alpha A_\alpha = M$), tvoří "atlas" variety M .

Pouze variety topologicky ekvivalentní R^n lze celé pokrýt jedinou mapou (M, φ) . Zavedením systému souřadnic ztrácejí body variety M svoji "anonymitu" a varieta může být zkoumána pomocí dobře známých a rozvinutých matematických operací s reálnými čísly.



Obr.7.1.: V diferencovatelné varietě M^n jsou obrazy $f_\alpha(p)$ a $f_\beta(p)$ bodu p z průniku dvou domén A_α a A_β svázány spojitými transformacemi včetně derivací do r -tého řádu.

Varieta M^n se nazývá **diferencovatelná** třídy C^r , jestliže je pro ni dán atlas map $(A_\alpha, \varphi_\alpha)$ jednotlivých domén $A_\alpha \subset M^n$ zobrazovaných vzájemně jednoznačnými zobrazeními φ_α na otevřené množiny v R^n splňující podmínky:

- a) A_α tvoří pokrytí M , tj. $\cup_\alpha A_\alpha = M$;
- b) Mají-li dvě domény A_α a A_β neprázdný průnik, pak bodům $p \in A_\alpha \cap A_\beta$ této překrývající se části bude zobrazením φ_α přiřazena n -tice souřadnic $x^i_\alpha(p) \in R^n$ a zobrazením φ_β zároveň n -tice souřadnic $x^k_\beta(p) \in R^n$ tak, že transformace

$$x^i_\beta(p) = x^i [x^k_\alpha(p)] \quad (7.4)$$

jsou v R^n spojitě funkce se spojitými derivacemi do r -tého řádu (obr. 7.1).

Aplikujeme-li vlastnost **b)** na dvě domény

$$(A, \varphi: x \rightarrow x^i(x)) \quad (7.5)$$

a

$$(A', \varphi' : x \rightarrow x'^i(x)) \quad (7.6)$$

takové, že

$$A' = A = A \cap A' \quad (7.7)$$

ale

$$\varphi' \neq \varphi, \quad (7.8)$$

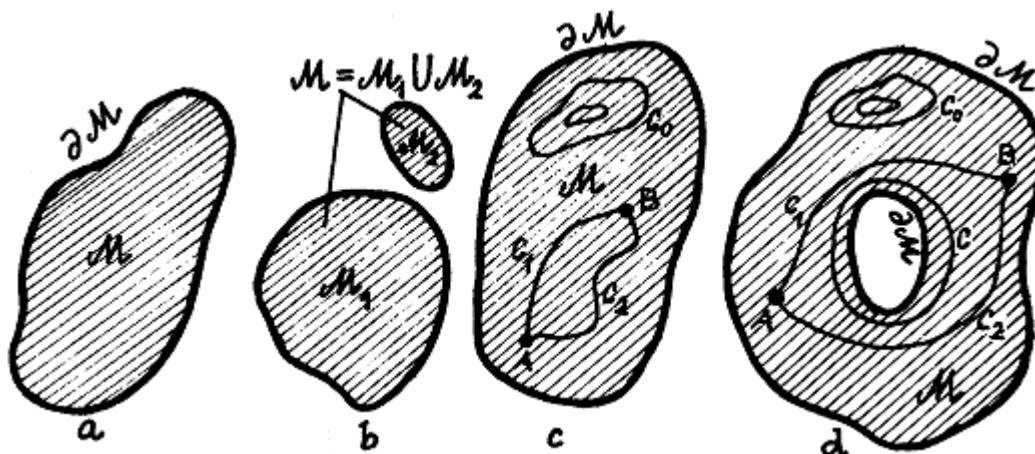
pak přechod od soustavy souřadnic x^i k jiné soustavě souřadnic x'^i bude dán regulární a spojitou transformací

$$x'^i(x) = x'^i[x^k(x)] \quad (7.9)$$

r -krát derivovatelnou. V **diferenciální geometrii** se většinou zabýváme lokálními geometrickými vlastnostmi v rámci jedné lokální mapy, zatímco **globální geometrie** studuje strukturu celé variety.

Aby varieta měla obvyklé lokální vlastnosti (a mohla být použitelná pro klasický popis fyzikálních dějů), kladou se na ni ještě dva dodatečné požadavky: Hausdorffovost a parakompaktnost. Prostor se nazývá **Hausdorffův**, jestliže ke každým dvěma různým bodům existují jejich navzájem disjunktní okolí.

Požadavek **parakompaktnosti** znamená, že ke každému pokrytí variety \mathcal{M} soustavou otevřených podmnožin existuje takové jeho zjemnění, při němž každý bod variety má okolí protínající jen konečný počet podmnožin tohoto zjemněného pokrytí (tj. toto zjemnění je lokálně konečné). Při splnění Hausdorffovosti je parakompaktnost ekvivalentní požadavku, aby \mathcal{M} měla **spočetnou bázi**, tj. aby existovala taková spočetná soustava otevřených množin, jejichž sjednocením je libovolná otevřená množina v \mathcal{M} (prostory, jejichž topologie má spočetnou bázi, se nazývají separabilní). Parakompaktnost umožňuje zavedení **konexe** na \mathcal{M} (viz níže).



Obr.7.2.: Souvislost množin (variet).

- a) Souvislá množina. b) Nesouvislá množina, která je sjednocením dvou disjunktních částí. c) Jednoduše souvislá množina - všechny spojnice mezi dvěma body jsou topologicky ekvivalentní, každá uzavřená křivka je homologická nule. d) Dvojnásobně souvislá množina - existují dvě třídy spojníc mezi body, některé uzavřené křivky (např. C) nelze smrštít do bodu.

Pod **křivkou** (čarou) $\lambda(t)$ na varietě M se rozumí zobrazení určitého úseku $R^1 \rightarrow M$, tj. množina bodů v M , které jsou zobrazením bodů křivky $x^i = x^i(t)$ v R^n parametrizované proměnnou $t \in R^1$. Základní topologickou charakteristikou každé množiny (geometrického útvaru) je **souvislost**. Jako souvislou označujeme takovou varietu, která není tvořena sjednocením několika disjunktních neprázdných částí; potom každé její dva body lze spojit čarou, která je celá součástí této množiny (obr. 7.2a). V opačném případě se jedná o nesouvislou množinu (obr. 7.2b). Souvislá množina se nazývá **jednoduše souvislou**, jestliže pro každé dva body A a B jsou všechny spojnice mezi nimi vzájemně topologicky ekvivalentní (**homologické**); jinak vyjádřeno, každou uzavřenou křivku zde můžeme spojitě "stáhnout" do bodu (každá uzavřená křivka je homologická nule) - obr. 7.2c. Jestliže mezi některými body existuje více druhů spojníc které nejsou vzájemně topologicky ekvivalentní, jedná se o **vícenásobně souvislou** množinu (obr. 7.2d), kde některé uzavřené čáry nelze "stlačit" do vymizení v bodě. Přitom "násobnost" souvislosti je definována jako

$$s = c + 1, \quad (7.10)$$

kde c je počet topologicky nezávislých uzavřených čar, které nelze smrštít do bodu (c je zároveň rovno počtu "rozřezání", po kterých se daná množina stává jednoduše souvislou); veličina s udává, kolika topologicky **různými cestami** se lze dostat z jednoho místa variety do druhého místa.

Zobecněním jednorozměrné křivky ve varietě M^n je **p -rozměrná plocha** C^p ($p \leq n$), která je zobrazením příslušného p -rozměrného podprostoru v R^n . Takovou plochu C^p lze považovat za součet (sjednocení) elementárních p -rozměrných "rovnoběžníků", resp. "krychlí" K^p (které jsou ovšem obecně "křivočaré")

$$0 \leq x^\alpha \leq 1 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p). \quad (7.11)$$

Vhodným způsobem se zde zavádí orientace a sčítání, což umožňuje studovat souvislosti mezi různými plochami C a jejich **hranicemi** ∂C , např. při integrování. Orientovaná p -rozměrná krychle K^p má $(p-1)$ -rozměrnou hranici ∂K tvořenou jednotlivými stěnami. Tato plocha je uzavřená a proto nemá sama již žádnou hranici, takže $(p-2)$ -rozměrná hranice $(p-1)$ -rozměrné hranice p -rozměrné krychle je rovna nule:

$$\partial \partial K = 0. \quad (7.12)$$

Plyne to též z konstrukce hranice krychle pomocí sumy čtverců tvořících hranice jednotlivých stěn krychle, kde každá strana čtverce je započítávána dvakrát s opačnou orientací a proto se zruší.

Obecnou plochu S můžeme rozložit na řadu krychlí (patřičné dimenze) K_i :

$$S = \sum_i a^i K_i. \quad (7.13)$$

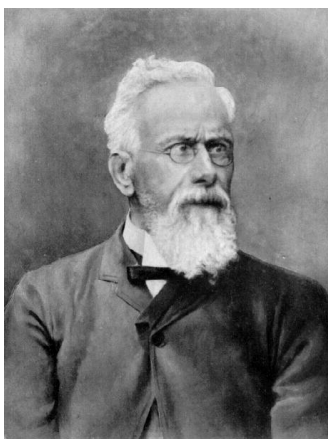
Potom hranici plochy S definujeme jako součet hranic "krychlí" z nichž je složena:

$$\partial S = \sum_i a^i \partial K_i \quad (7.14)$$

(ve skutečnosti se většina těchto příspěvků z vnitřních oblastí zruší, protože jsou započítávány dvakrát s opačnou orientací podobně jako u běžného odvozování Gaussovy nebo Stokesovy věty). Jestliže hranice nějaké p -rozměrné plochy S je rovna nule ($\partial S = 0$), jedná se o **uzavřenou** (kompaktní) plochu. Hranice ∂S každé plochy (nejen uzavřené) je uzavřená plocha, která již nemá svou hranici, takže vždy platí

$$\partial \partial S = 0. \quad (7.15)$$

toto se označuje jako topologický princip "**hranice hranice je rovna nule**", který má velký význam pro zákony zachování v obecné teorii pole.



Enrico Betti (1823 – 1892)

Jestliže dvě uzavřené plochy C^p_1 a C^p_2 tvoří hranici $(p+1)$ -rozměrné oblasti v \mathbf{M} , říkáme, že jsou vzájemně **homologické** (mohou být spojitou deformací převedeny jedna v druhou); pokud uzavřená plocha C^p samotná tvoří hranici ($C^p = \partial A^{p+1}$) oblasti $A \subset \mathbf{M}$, nazývá se **homologická nule** (spojitou deformací může být stažena do jediného bodu). **Homologická třída** $\{C^p_i\}$ sestává ze všech uzavřených p -rozměrných ploch C^p které jsou vzájemně homologické. Počet nezávislých homologických tříd $\{C^p_1\}, \{C^p_2\}, \dots, \{C^p_{B_p}\}$ ploch

dimenze p se nazývá p -tým **Bettiho číslem** variety \mathbf{M} (nezapočítává se zde třída $\{C^p_0\} = \{0\}$ ploch homologických nule). Veličina

$$\chi = \sum_{p=0}^n (-1)^p B_p \quad (7.16)$$

se nazývá **Eulerovou charakteristikou** této variety. V Eukleidově prostoru R^n mohou být všechny p -rozměrné ($p \leq n$) uzavřené plochy stlačeny do bodu, takže všechny jsou homologické nule a patří do nulové homologické třídy $\{C^p_0\} = \{0\}$.

Protože mezi plochami C^p je definováno sčítání, tvoří soubor těchto ploch ve varietě \mathbf{M} **grupu**; množina tříd vzájemně homologických p -rozměrných uzavřených ploch pak tvoří p -rozměrnou grupu homologií daného prostoru. Vztahy mezi množinami a jejich hranicemi tak mohou být studovány algebraickými metodami v tzv. **algebraické topologii**.

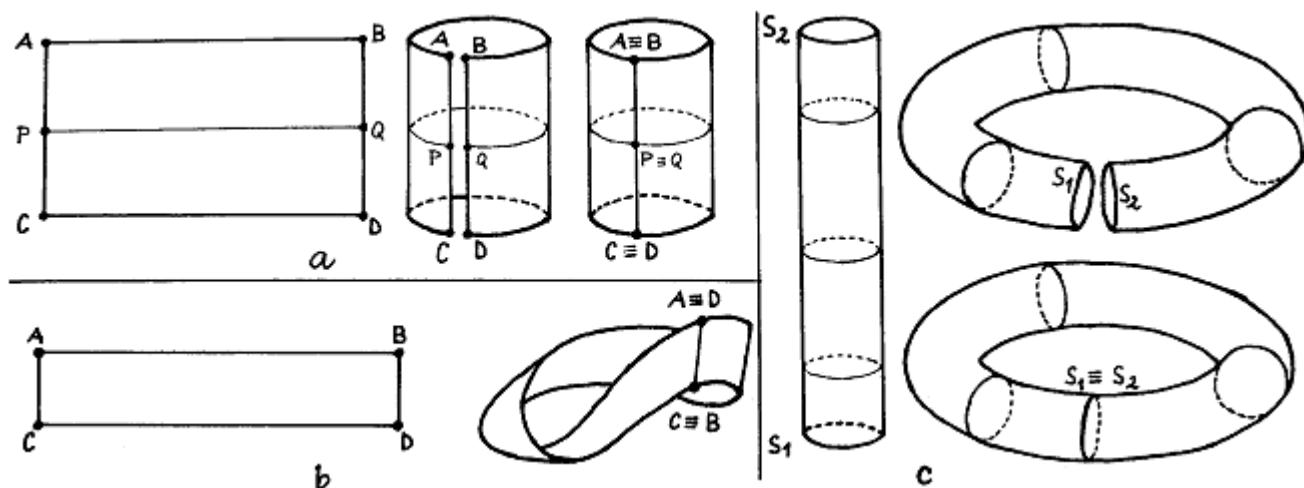
Důvod vícenásobné souvislosti oblasti podle obr. 7.2d je zřejmý: část z \mathbf{M} je "vyříznuta", takže daná oblast má kromě vnější hranice též vnitřní hranici, přes kterou žádná spojnice nesmí jít. Existují však útvary i celé prostory bez hranic, které jsou vícenásobně souvislé, jak si ukážeme na následujících jednoduchých příkladech.

Vezmeme rovný list papíru, který můžeme považovat za část Eukleidovské roviny R^2 (obr. 7.3a). Tento list je jednoduše souvislý a platí zde axiomy Eukleidovy geometrie (proto např. součet úhlů v narýsovaném trojúhelníku bude roven 180°). Stočíme-li tento list papíru a slepíme protější strany, tj. uděláme ztotožnění

$$(x + a, y) \equiv (x, y), \quad (7.17)$$

dostaneme **válcovou plochu**. Eukleidovský charakter geometrie se tím lokálně nezměnil - vzdálenosti mezi jednotlivými body zůstaly stejné, nezměnily se úhly ani plochy. Avšak svými globálními topologickými vlastnostmi je tato válcová plocha zcela jiným dvojrozměrným prostorem než byla původní Eukleidova rovina. Mezi každými dvěma

body existují dvě topologicky odlišné třídy spojníc, uzavřenou kružnici obepínající válec nelze nijak stáhnout do bodu, zatímco jiné uzavřené křivky ano; válcová plocha je **dvojnásobně souvislá** a v jednom směru (rozměru) konečná. Bettiho čísla zde jsou $B_0=1$, $B_1=1$, $B_2=1$.



Obr.7.3: Ke vztahu mezi (geo)metrickými a topologickými vlastnostmi.

- a) List papíru je částí Eukleidovy roviny. Jeho stočením a slepením dostaneme válcovou plochu s lokálně zachovanou Eukleidovou geometrií, ale jinou globální topologií.
b) Jestliže se při stočení provede navíc překroucení o 180° , vznikne Möbiův list (proužek).
c) Stočením a slepením úseku válcové plochy vznikne toroid (anuloid).

Nebo podobně ohnutím, zkroucením o 180° a slepením - tj. ztotožněním

$$(x + a, y) \equiv (x, -y) \quad (7.18)$$

papírové pásky s původně Eukleidovskou geometrií a topologií, dostaneme známý **Möbiův proužek** (obr. 7.3b), jehož lokální geometrie se opět neliší od Eukleidovy, ale topologické vlastnosti má jiné. Jedná se o **jednostrannou plochu** (známý neúspěšný pokus s obarvením "líce" i "rubu" jedním tahem stejnou barvou), na níž nelze zavést orientaci, protože po jednom oběhu "kolem dokola" se to, co bylo vlevo objeví vpravo, směr "nahoru" se změní na "dolů" a naopak.

Uvedené příklady ukazují, že pro úplné určení charakteru prostoru nestačí jeho (lokální) metrické vlastnosti, ale je třeba vzít v úvahu též jeho (globální) vlastnosti topologické. Kromě Eukleidova prostoru R^n ,

na němž je pojem variety založen, tedy existují i obecnější variety s jinými topologickými vlastnostmi. Uveďme si některé další případy.

Jedním z nejdůležitějších typů variety je **kulová plocha**.

Dvojměrná kulová plocha (sféra) S^2 jednotkového poloměru je jak známo plocha v R^3 , jejíž body jsou dány rovnicí

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1. \quad (7.19)$$

Analogicky **n -rozměrná sféra** S^n (jako podprostor v R^{n+1}) je geometrické místo bodů v R^{n+1} splňujících podmínku

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1. \quad (7.20)$$

Sféra S^n je **konečná** (kompaktní) jednoduše souvislá varieta. Pro dvojměrnou kulovou plochu S^2 jsou Bettiho čísla $B_0=1$, $B_1=1$, $B_2=1$ a Eulerova charakteristika $\chi=1$.

Stočíme-li dvojměrnou válcovou plochu (zhotovenou z elastického materiálu) a slepíme protější základny, vznikne **toroid** (anuloid, obr. 7.3c), který má na rozdíl od původní válcové plochy svou vnitřní geometrii zakřivenou. Tento toroid T^2 , který vzniká ztotožněním

$$(x+a, y+b) \equiv (x, y) \quad (7.21)$$

bodů v R^2 , je příkladem **trojnásobně souvislé** plochy. Jsou zde dvě třídy uzavřených křivek - kružnice podél "velkého" a "malého" obvodu toroidu - které nelze smrštít do bodu. Obecně, n -rozměrný toroid T^n je prostor, který vznikne ztotožněním

$$(x^i + a^i) \equiv (x^i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.22)$$

bodů v R^n . Dvojměrný toroid T^2 má Bettiho čísla rovná $B_0=1$ (odpovídá třídě všech bodů - všechny body jsou vzájemně homologické), $B_1=2$ (jsou dvě nezávislé třídy $\{C^1_1\}$ a $\{C^1_2\}$ uzavřených křivek procházejících kolem menšího a většího obvodu

toroidu), $B_2=1$ (odpovídá samotnému toroidu); Eulerova charakteristika $\chi(T^2)=0$.

Z n -rozměrné variety \mathbf{M}^n a m -rozměrné variety \mathbf{M}^m můžeme "kartézským součinem" sestrojít $(n+m)$ -rozměrnou varietu $\mathbf{M}^n \times \mathbf{M}^m$, jejíž body jsou dvojicemi (x, y) , kde x je libovolný bod z \mathbf{M}^n a y libovolný bod z \mathbf{M}^m . Např. Eukleidův prostor R^3 je součinem $R^2 \times R^1$, R^n lze zapsat jako

$$R^n = R^1 \times R^1 \times \dots \times R^1 \quad (7.23)$$

(kartézský součin n -koeficientů). Válcovou plochu C^2 lze považovat za součin kružnice a Eukleidovy přímky, tj.

$$C^2 = S^1 \times R^1. \quad (7.24)$$

Co se týče toroidu, je především zřejmé, že jednorozměrný toroid T^1 a jednorozměrná sféra S^1 (kružnice) jsou vzájemně homeomorfní, tj.

$$T^1 = S^1. \quad (7.25)$$

Proto n -rozměrný toroid T^n je z topologického hlediska kartézským součinem n kružnic:

$$T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1. \quad (7.26)$$

Topologická struktura variety $\mathbf{M}^n \times \mathbf{M}^m$ je přirozeným způsobem dána strukturou \mathbf{M}^n a \mathbf{M}^m : pro libovolné body $x \in \mathbf{M}^n$ a $y \in \mathbf{M}^m$ mající souřadnicová okolí $A \subset \mathbf{M}^n$ a $B \subset \mathbf{M}^m$ je bod $(x, y) \in \mathbf{M}^n \times \mathbf{M}^m$ obsažen v souřadnicovém okolí $A \times B \subset \mathbf{M}^n \times \mathbf{M}^m$ a má tam souřadnice (x^i, y^j) , kde x^i jsou souřadnice bodu x v doméně A a y^j souřadnice bodu y v doméně B .

Funkce f (skalární pole) na varietě \mathbf{M}^n je zobrazení z \mathbf{M}^n do R^1 . Říkáme, že tato funkce je **diferencovatelná** třídy C^r v bodě $p \in \mathbf{M}$, jestliže je definována v otevřeném okolí bodu p a její vyjádření

$$f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (7.27)$$

pomocí souřadnic $x^i \in R^n$ v nějaké lokální souřadnicové soustavě má spojitě derivace do r -tého řádu podle x^i . Z této definice plyne, že v diferencovatelné varietě \mathbf{M} třídy C^s je souřadnice $x^i(x)$ diferencovatelnou funkcí třídy C^s .

Dalšími geometrickými objekty, které přirozeným způsobem souvisejí se strukturou variety, jsou **tenzory** a **tenzorová** (speciálně též vektorová) **pole**. Tenzorem r -tého řádu v bodě " p " n -rozměrné variety \mathbf{M}^n se rozumí souhrn n^r čísel

$$T_{j_1 j_2 \dots j_\beta}^{i_1 i_2 \dots i_\alpha}, i_1, i_2, \dots, i_\alpha, j_1, j_2, \dots, j_\beta = 1, 2, \dots, n \quad (7.28)$$

s $\alpha \leq r$ kontravariantními (horními) a $\beta = r - \alpha$ kovariantními (dolními) indexy, které se při transformaci souřadnic

$$x'^i(p) = x'^i(x^j(p)), \quad (7.29)$$

tj.

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j, \quad (7.30)$$

transformují v kontravariantních indexech jako součiny α -diferenciálů souřadnic a v kovariantních indexech jako součiny β -inverzních diferenciálů v bodě p :

$$T_{j_1, j_2, \dots, j_\beta}^{i_1, i_2, \dots, i_\alpha} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \dots \frac{\partial x'^{i_\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}} \frac{\partial x^{l_2}}{\partial x'^{j_2}} \dots \frac{\partial x^{l_\beta}}{\partial x'^j} T_{l_1, l_2, \dots, l_\beta}^{k_1, k_2, \dots, k_\alpha} \quad (7.31)$$

Tyto transformační vlastnosti zaručují, že tenzorové rovnice jsou **invariantní** (kovariantní) vzhledem k transformacím souřadnic.

Pravidla pro aritmetické operace mezi tenzory jsou stejné jako v eukleidovském prostoru R^n .

Aby bylo možno porovnávat vektory a tenzory zadané v různých bodech variety, zavádí se **konexe**, tj. pravidlo (předpis) pro **paralelní přenos** vektorů a tenzorů mezi různými body; varieta se tím stává **prostorem afinní konexe**. A zde již může přijít ke slovu **diferenciální geometrie** - počítání kovariantních derivací tenzorových polí, kvantifikace zakřivení pomocí tenzoru křivosti, stanovení geodetických čar atd., jak to bylo nastíněno v 1. kapitole. Konečně se do variety zavádí **metrika**, tj. předpis pro stanovení vzdáleností mezi jednotlivými body, čímž vzniká **metrický prostor**. Pomocí souřadnic vyjádřená vzdálenost mezi bodem x^i a nekonečně blízkým bodem $x^i + dx^i$ je dána diferenciální formou

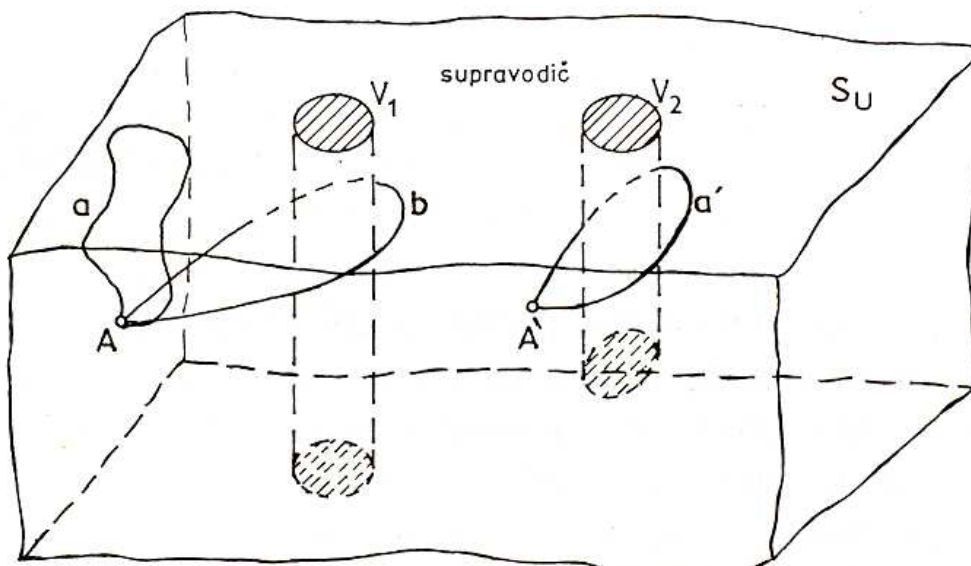
$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.32)$$

kde g_{ik} je **metrický tenzor** vyjadřující vztah mezi souřadnicemi a skutečnými vzdálenostmi. Aby konexe byla slučitelná s metrikou (konexe a metrika jsou obecně nezávislé struktury zaváděné do variety), musí se při paralelním přenosu zachovávat pravidla tenzorové algebry a velikost přenášeného vektoru. Vede to na zákon paralelního přenosu (2.8) a jednoznačný vztah (2.2b) mezi koeficienty konexe a složkami metrického tenzoru. Metrický prostor s konexí (slučitelnou s metrikou) se nazývá **Riemannův prostor**.

Možnost zavedení libovolného tenzorového pole na varietě je obecně podmíněna topologickými vlastnostmi variety. Např. každá nekompaktní varieta připouští existenci konstantního vektorového pole. Pro existenci konstantního vektorového pole na kompaktní varietě je však nutnou a postačující podmínkou, aby se Eulerova charakteristika χ variety rovnala nule. Například válec nebo toroid připouští konstantní vektorové pole, zatímco kulová plocha nikoli (nelze hladce učesat vlasy na tenisovém míčku).

Představme si nyní, že v třírozměrném topologickém prostoru S uděláme dva otvory.

Jeden z nich – V_1 – bude začínat a končit na povrchu tohoto prostoru a druhý – V_2 – bude začínat sice na povrchu, ale končit někde uvnitř prostoru.



Obr. 7.4.: Supravodivá oblast S se dvěma víry V_1 a V_2 . Jádru víru má nesupravodivou válcovou oblast schematicky znázorněnou na obrázku. Vír 1 začíná i končí na povrchu supravodiče. V prostoru supravodiče existují stažitelné i nestažitelné křivky (viz obr. 7.2d). Smyčky typu b nelze na rozdíl od smyček typu a v objemu supravodiče z víru stáhnout. Vír V_2 ovšem končí v objemu supravodiče a křivka se z něj dá stáhnout do bodu A . Vír V_1 má tedy netriviální topologii.

Je zřejmé, že otvor V_1 , bude mít netriviální topologii zvanou **vírové vlákno**.

Uzavřenou křivku b , nemůžeme v prostoru z vírového vlákna stáhnout (dvojnásobně souvislý prostor).

V případě otvoru V_2 můžeme uzavřenou křivku v prostoru S snadno stáhnout do bodu A .

Taková singularita je jednoduše souvislá a vlastně ji nebudeme singularitou vůbec nazývat (jedná se o odstranitelnou singularitu).

Pokud budeme v dalším hovořit o singularitách, budeme mít vždy na mysli singularitu neodstranitelnou, jdoucí napříč celým uvažovaným topologickým prostorem, tj. začínající i končící na jeho povrchu.

Protože **parametr pořádku** kvantové kapaliny definujeme jako komplexní skalár

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = |\Psi| \exp[i\Theta(\mathbf{r}, t)], \quad (7.33)$$

můžeme v komplexní rovině sledovat změnu fáze podél uzavřené křivky Γ .

Při oběhu podél Γ se fáze vlnové funkce může měnit o $2\pi n$, kde $n = 1, 2, \dots$.

Vírem v kvantové kapalině nazýváme cirkulaci vektoru okolo osy zvané **jádro víru**.

Protože u kvantových vírů je rychlost \mathbf{v}_s proudění blízko jádra nepřímo úměrná vzdálenosti r od jádra,

$$|\mathbf{v}_s| \sim r^{-1}, \quad (7.34)$$

je jasné, že v ose víru by měla dosahovat nekonečné velikosti.

V ose víru tedy očekáváme topologickou singularitu.

Integrál rychlosti podél křivky Γ uvnitř víru nazýváme **cirkulace víru**.

Pro daný vír je konstantní, ale obecně to vůbec nemusí být celé číslo.

V případě kvantových kapalin však cirkulace víru je kvantována a je rovna $2\pi n$, kde n je celé číslo, nazývané **topologický náboj víru**, nebo též **navíjecí číslo**.

Např. v supratekutém ${}^4\text{He}$ je supratekutá rychlost rovna gradientu makroskopické fáze Θ parametru pořádku:

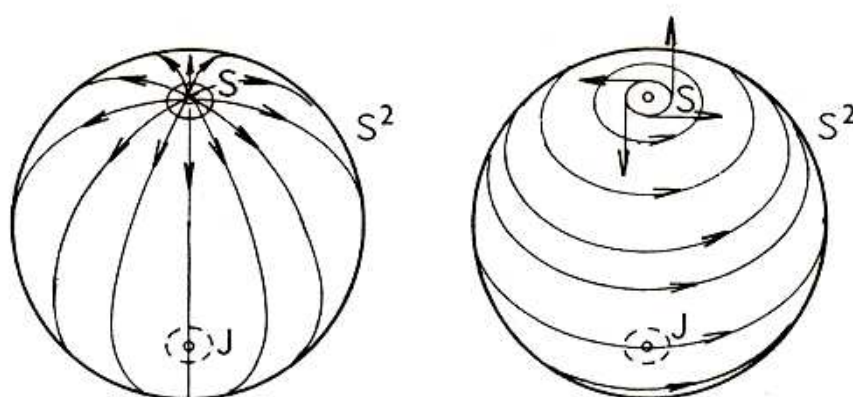
$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar \nabla \Theta}{m} \quad (7.35)$$

a cirkulace

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \oint \nabla \Theta \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \int_{\Gamma} d\Theta = \frac{2\pi n \hbar}{m} = \frac{nh}{m}. \quad (7.36)$$

Ukažme si nyní na jednoduchých příkladech vektorových polí na ploše způsob určení topologického náboje.

Vezměme si rozložení vektorů ležících tangenciálně na povrchu koule.



Obr. 7.5: Rozdělení vektorového pole tangenciálního k povrchu koule S^2 . Existují minimálně 2 singulární body S, J, v nichž vektory směřují do všech stran. Povrch koule s tangenciálním vektorovým polem se nedá „načesat“ bez singularit.

Snadno nahlédneme, že existují 2 způsoby jejich vzájemného uspořádání, které oba obsahují 2 singularity s navíjecím číslem $n = \pm 1$ (vektor daného tangenciálního pole se při plném oběhu po kružnici kolem singularity otočí o úhel $\pm 2\pi$).

Samozřejmě při této klasifikaci topologických defektů a singularit vzniká celá řada otázek.

Jde např. o stabilitu takových objektů, o jejich srážky, rozpad, slučování atd.

Tak např. energie víru s $n = 2$ je větší, než energie dvou vírů s $n = 1$. Víry s $n = 1$ a $n = -1$ mohou při kolizi anihilovat.

Také zákony zachování některých topologických invariantů, jako např. topologického náboje, jsou velice silnými zákony.

V teorii elementárních částic se v současnosti rozvíjí velmi nadějná **teorie strun** (vírových vláken), která si klade za cíl sjednocení všech čtyř interakcí (budeme o ní hovořit v deváté kapitole).

V ní jsou částice považovány nikoliv za bodové objekty, jak tomu bylo dříve, ale za malé víry či struny s určitými náboji na koncích a s určitým topologickým nábojem (navíjecím číslem).

Kromě singularit ve formě jednodimenzionálních linií (strun) existují též singularity bodové (nuladimenzionální), plošné (dvojdimenzionální) a v teorii strun dokonce i vícedimenzionální, tzv. p – brány.

Nejjednodušším případem dvojdimenzionální singularity je membrána typu doménové stěny (např. feromagnetické domény reprezentující oblast mezi dvěma magnetizacemi \mathbf{M} a $-\mathbf{M}$).

Podobné přechodové oblasti nejružnějšího charakteru nazýváme také **solitony**.

Takový soliton se může v prostředí relativně volně pohybovat, procházet přes jiný soliton, aniž by anihiloval atd.

Bodové singularity nazýváme **monopóly**.

Tyto monopóly připomínají osamocené volný magnetický pól, tzv.

Diracův monopól.

Setkáváme se s nimi např. v elektricky neutrální formě, u supratekutého ^3He .

S rozvojem inflační kosmologie se v posledním desetiletí minulého století začalo pátrat po topologických defektech typu kosmologická struna, doménová stěna a magnetický monopol, i v kosmologických měřítkách. Toto pátrání však dosud nebylo úspěšné.

2) Kalibrační teorie

Když jsme v předchozích kapitolách vyjádřili vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} s pomocí skalárního a vektorového potenciálu coby

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (7.37)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

ihned zpočátku bylo jasné, že dané elektromagnetické pole (\mathbf{E} , \mathbf{B}) můžeme získat z různých hodnot skalárního a vektorového potenciálu. To znamená, že potenciály neurčují dané elektromagnetické pole jednoznačně.

Vezměme např. nové potenciály φ' , \mathbf{A}' ve tvaru

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \quad (7.38)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \Theta$$

a dosadíme je do vztahů (7.37):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\text{grad } \varphi + \frac{\partial \text{grad } \Theta}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \text{grad } \Theta}{\partial t} = \\ &= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}' + \text{rot grad } \Theta = \text{rot } \mathbf{A} .$$

Funkce $\Theta(\mathbf{r}, t)$ je libovolná skalární funkce, kterou budeme nazývat fází.

Zavedení skalárního a vektorového potenciálu nám v řadě případů umožnilo snadnější řešení úloh z elektrodynamiky.

Co však s jejich nejednoznačností?

Fyzikální význam se dříve připisoval pouze polím \mathbf{E} , \mathbf{B} a nikoliv potenciálům \mathbf{A} , φ .

A přece moderní fyzika ukázala, že tyto potenciály jsou fundamentálnější charakteristikou elektromagnetického pole než vektory intenzit a indukci, a že mohou mít pozorovatelné důsledky. Tento jejich význam byl dlouhou dobu urputně diskutován, ale byl posléze ještě podtržen novými, tzv. **kalibračními (cejchovacími) teoriemi**, které mají tu moc sjednotit na první pohled různé teorie pole do jedné jediné.

Určitou vybranou formu potenciálů z jejich nekonečného počtu nazýváme **kalibrací** a přechod od jedné kalibrace (\mathbf{A} , φ) k jiné kalibraci (φ' , \mathbf{A}') nazýváme **kalibrační transformací**.

V předchozí kapitole jsme viděli, že kvantová teorie pole používá striktně jen elektromagnetických potenciálů a nikoliv polí.

Všechny pokusy formulovat kvantovou elektrodynamiku s poli \mathbf{E} a \mathbf{B} ztroskotaly na fyzikálních rozporech, k nimž tato formulace vedla.

Ale žádná měřitelná veličina nesmí záviset na výběru té či oné kalibrace, a to ani v klasické, ani v kvantové mechanice.

Říkáme, že klasická i kvantová mechanika jsou **kalibračně invariantní**.

Maxwellovy rovnice jsou samozřejmě invariantní vůči kalibraci (7.38).

H. Weyl v roce 1919 byl první, kdo pochopil význam kalibrační invariance pro fyziku.



Hermann Klaus Hugo Weyl (1885 – 1955)

Zobecněné ideje této invariance jsou dnes ve fyzice zcela dominantní a zdá se, že nám poskytují klíč k jednotnému pochopení sil působících mezi elementárními částicemi.

V této kapitole se proto budeme těmito idejemi zabývat poněkud podrobněji.

Schrödingerovu rovnici volné částice bez vnějších elektromagnetických polí můžeme napsat jako

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla)^2 \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (7.40)$$

Tato rovnice je invariantní vůči transformaci vlnové funkce

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \Psi \exp(i\Theta_0), \quad (7.41)$$

kde Θ_0 je konstanta nezávislá na čase a na souřadnici.

Budeme ji nazývat **globální fází**.

Transformace (7.41) se nazývá **globální kalibrační transformací** a dotvrzuje nám, že globální fáze je neměřitelnou veličinou a vyjadřuje jen jakýsi konstantní posun daných řešení.

Budeme nyní požadovat invarianci Schrödingerovy rovnice vůči lokální kalibrační transformaci $\Theta = \Theta(\mathbf{r}, t)$.

V každém bodu prostoru budeme předpokládat jinou hodnotu fáze $\Theta(\mathbf{r}, t)$.

Transformace (7.41) bude nyní zobecněna na

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \Psi \exp[i\Theta(\mathbf{r}, t)]. \quad (7.42)$$

Jak si čtenář snadno odvodí, dosazením Θ' z (7.42) do (7.40), není už teď Schrödingerova rovnice pro volnou částici invariantní vůči této lokální kalibrační transformaci, protože výrazy $\Delta\Theta(\mathbf{r}, t)$ a $\partial\Theta(\mathbf{r}, t)/\partial t$ nyní nejsou rovny nule.

Ukazuje se, že tato lokální transformace (7.42) vyžaduje přítomnost nových kompenzujících polí, která by vykompenzovala ony přírůstky $\Delta\Theta(\mathbf{r}, t)$ a $\partial\Theta(\mathbf{r}, t)/\partial t$.

Požadavek lokální kalibrační invariance tak vede ke vzniku nových kompenzujících polí, která nazýváme **kalibrační pole**.

Snadno se dá ukázat, že tato invariance nám bude generovat

Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole:

Napíšeme nyní místo (7.40) Schrödingerovu rovnici pro částici v elektromagnetickém poli ve tvaru, který vyžaduje tato lokální fázová kalibrační transformace:

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - e\mathbf{A})^2 \Psi + e\Theta\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (7.43)$$

kde e je elementární náboj.

Snadno se lze přesvědčit, že tato rovnice nezmění tvar při kalibračních transformacích

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{\hbar \nabla \Theta(\mathbf{r}, t)}{e}, \\
\varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\hbar}{e} \frac{\partial \Theta(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \\
\Psi &\rightarrow \Psi'(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, t) e^{i\Theta(\mathbf{r}, t)}.
\end{aligned}
\tag{7.44}$$

Potenciály a vlnová funkce se tedy mění od místa k místu.

To je výsledek neobyčejně krásný.

Požadavek lokální fázové invariance se tak stal jedním ze základních pilířů současné čističové fyziky.

Lokální kalibrační invariance může generovat i další interakce, jako jsou interakce slabé a silné.

Odtud plyne ten ohromný úspěch současných **kalibračních teorií** jež jsou základem všech pokusů o sjednocení fyzikálních sil – elektromagnetických, slabých, silných i gravitačních.

Zatím se úspěšně podařilo sjednotit elektromagnetické a slabé síly do jediné, tzv. **elektroslabé interakce** (EW).

Za teoretické práce v této oblasti obdrželi v roce 1979 Nobelovu cenu A. Salam, S. Weinberg a S. Glashow.

Za fantasticky složité experimentální potvrzení existence intermediálních bosonů W^\pm a Z^0 – prostředníků slabé interakce – obdrželi Van der Meer a C. Rubbia Nobelovu cenu v roce 1984.

Částečně úspěšně se též podařilo sloučit elektroslabou a silnou interakci do jediné síly prostřednictvím tzv. **grandunifikační teorie**, která však stále ještě čeká na své experimentální potvrzení, jež je nesmírně náročné a stalo se velikou výzvou nastupujícím generacím fyziků.

Ke všem těmto zásadním objevům promluvíme ještě podrobněji v následujících kapitolách.

Nyní však sledujme dále linii našich úvah o lokální kalibrační invarianci.

Fázový faktor $\Theta(\mathbf{r}, t)$ je možné psát rovněž jako

$$\hbar \Theta(\mathbf{r}, t) = e \chi(\mathbf{r}, t).
\tag{7.45}$$

Vztahy (7.44) pak můžeme psát v ekvivalentní podobě

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \\ \Psi &\rightarrow \Psi' = \Psi(\mathbf{r},t)\exp\left(\frac{ie\chi}{\hbar}\right),\end{aligned}\tag{ 7.46 }$$

kde χ má rozměr magnetického toku, kdežto Θ bylo bezrozměrné. Smysl této transformace spočívá v tom, že v každém bodě prostoru si můžeme zvolit jinou souřadnicovou soustavu, v níž bychom určili fázový úhel.

Ve druhé kapitole jsme si ukázali, že požadavek mít v každém místě jinou souřadnou soustavu není formální věc, ale v celé řadě případů fyzikální nutnost.

H. Weyl chtěl spojit fáze v různých lokálních souřadnicích, a našel, že tuto transformaci mohou zajistit elektromagnetické potenciály. Ze srovnání rovnic (7.40) či (7.43) vidíme, že jsme v podstatě nahradili prostorovou a časovou derivaci výrazy

$$\begin{aligned}-i\hbar\nabla &\rightarrow (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A}), \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right).\end{aligned}\tag{ 7.47 }$$

Tento nový typ derivace dobře známe již z našeho dřívějšího pojednání o fyzice gravitačního pole – obecné teorii relativity. Není to nic jiného, než naše stará známá kovariantní derivace. Nyní se ukazuje, že tato derivace má zásadní důležitost rovněž v teorii kalibračních polí.

Předpis pro kalibrační teorie pak zní: nahraď obyčejné derivace kovariantními.

V druhé kapitole jsme si ukázali, že kovariantní derivace spojuje geometrii v jednom místě prostoru s geometrií v jiném místě.

Také jsme si ukázali, že v nezakřiveném prostoru se kovariantní derivace rovná běžné derivaci.

Prostor vnitřních stupňů volnosti elektromagnetického pole je tedy zakřiven.

Nabízející se paralela se zakřiveným prostoročasem OTR, jež je východiskem pro genezi gravitační interakce, se nám snaží naznačit, v jakém směru se moderní kalibrační teorie snaží najít společný jazyk. Hmota říká prostoru stavů kterak se má zakřivit a zakřivený prostor stavů zpětně diktuje hmotným částicím, jak se mají pohybovat. Nejedná se tedy o nic jiného, než o další a ještě důslednější geometrizaci fyziky.

Neměřitelná vlnová funkce určitého stavu závisí na kalibraci

$$\Psi' \rightarrow \Psi \exp\left(\frac{ie\chi(\mathbf{r},t)}{\hbar}\right), \quad (7.48)$$

tj. v každém místě prostoru je fázový faktor jiný.

Schrödingerova rovnice je kalibračně invariantní, ale např.

hamiltonián částice v elektromagnetickém poli nikoliv, neboť operátor potenciální energie, na rozdíl od operátoru kinetické energie, kalibračně invariantní není (oba operátory spolu nekomutují).

Proto jsme museli překalibrovat i vlnovou funkci (7.48), abychom získali kalibračně invariantní Schrödingerovu rovnici.

V klasické mechanice a elektrodynamice hraje rozhodující úlohu pojem síly \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (7.49)$$

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

V kvantové mechanice však operujeme s potenciály \mathbf{A} a φ , nikoli s poli $\mathbf{E} = \text{grad } \varphi$, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, které jsou z nich odvozeny derivacemi. Lorentzova síla se v kvantové elektrodynamice nikde neobjevuje.

V kvantové mechanice jsou fyzikálně relevantní pouze potenciály, a to i tehdy, pokud v místě, kde se částice nachází, neexistují žádná pole, jež by na částici působila.

Znalost polí \mathbf{E} a \mathbf{B} je tedy pro kvantovou mechaniku nedostačující, neboť síla sama má v kvantové mechanice velice nepřímý význam, a potenciálům \mathbf{A} , φ je zde vyhrazena nová, zásadnější role.

Tuto roli poprvé důkladněji prozkoumali Y. Aharonov a D. Bohm. Ti ukázali, že smysl potenciálů není vyčerpán tím, že určují pole \mathbf{E} a \mathbf{B} a že za určitých podmínek v mnohonásobně souvislých oblastech jsou integrály potenciálů po uzavřené dráze kalibračně invariantní, tj. nejsou určeny náhodně a mají tedy fyzikální význam.



Yakir Aharonov (1932)



David Joseph Bohm (1917 – 1992)

Jinak řečeno

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{l} &= \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \\ \oint \varphi' dt &= \oint \varphi dt, \end{aligned} \tag{7.50}$$

protože

$$\oint d\chi = 0. \tag{7.51}$$

Samy potenciály jsou nefyzikální, tj. neměřitelné veličiny. Jejich integrály však mají fyzikální důsledky v topologicky netriviálních mnohonásobně souvislých oblastech. Stejně tak i Ψ je nepozorovatelné, ale $|\Psi|^2$ již ano.

Nyní budeme rozebírat pouze případ statického magnetického pole. Mějmež tenký a nekonečně dlouhý solenoid s rotační osou totožnou s osou z , jímž protéká elektrický proud, vytvářející magnetické pole uvnitř solenoidu.

Vně solenoidu bude magnetické pole $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ rovno nule, nikoliv však potenciál \mathbf{A} .

Potenciál \mathbf{A} kolem osy solenoidu má nenulovou jedinou složku, a to azimutální složku A_φ , zatímco radiální a z -tové složky jsou nulové.

Nabitá částice obíhající kolem solenoidu po dráze Γ , se tedy nachází v místech, kde silové působení od solenoidu je rovno nule.

Pohyb částice v elektromagnetickém poli potenciálu \mathbf{A} povede ke změně fáze vlnové funkce o určitý fázový faktor δ :

$$\delta = \frac{e}{\hbar} \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.52)$$

Elektromagnetické kvantové jevy závisejí na dráhových integrálech potenciálů.

Pokud částice oběhne celou uzavřenou dráhu Γ , pak celkový fázový posuv bude

$$\Delta_0 = \frac{e}{\hbar} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.53)$$

Po oběhu křivky Γ se dostaneme do stejného místa, takže vlnová funkce po oběhu musí splňovat požadavek jednoznačnosti

$$\Psi_{\Gamma} = \Psi_0 e^{i\Delta_0} = \Psi_0, \quad (7.54)$$

odkud

$$e^{i\Delta_0} = 1, \quad (7.55)$$

čili

$$\Delta_0 = \frac{e}{\hbar} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.56)$$

Celkový fázový faktor po oběhu křivky Γ tak bude buď roven nule, nebo celistvému násobku 2π .

Poznamenejme, že fázový posuv způsobený potenciálem \mathbf{A} na neuzavřené dráze není kalibračně invariantní $\delta' \neq \delta$, ale celkový posuv na uzavřené dráze již ano, neboť

$$\Delta'_0 = \frac{e}{\hbar} \left(\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} - \oint_{\Gamma} \nabla \chi \, d\mathbf{l} \right) = \frac{e}{\hbar} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = \Delta_0. \quad (7.57)$$

Vztah (7.56) můžeme s použitím Stokesovy věty napsat též jako

$$\Delta_0 = \frac{e}{\hbar} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = \frac{e}{\hbar} \oint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.58)$$

neboli

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = \frac{2\pi n \hbar}{e} = \frac{n \hbar}{e}. \quad (7.59)$$

kde Φ je magnetický indukční tok.

Formule (7.59) vyjadřuje podmínku **kvantování magnetického toku**

a platí pro všechny ekvivalentní křivky Γ , nestažitelné do bodu.

Solenoid nám představuje vzhledem ke křivkám dvojnásobně souvislou oblast.

Kdybychom měli křivku Γ v jednoduše souvislé oblasti, obdrželi bychom výraz

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (7.60)$$

jehož hodnota není kvantována a může se pro $S = 0$ rovnat i nule. V dvojnásobně souvislých oblastech však bude magnetický tok vždy kvantován a pro jeho elementární kvantum Φ_0 (tzv. fluxon) bude platit

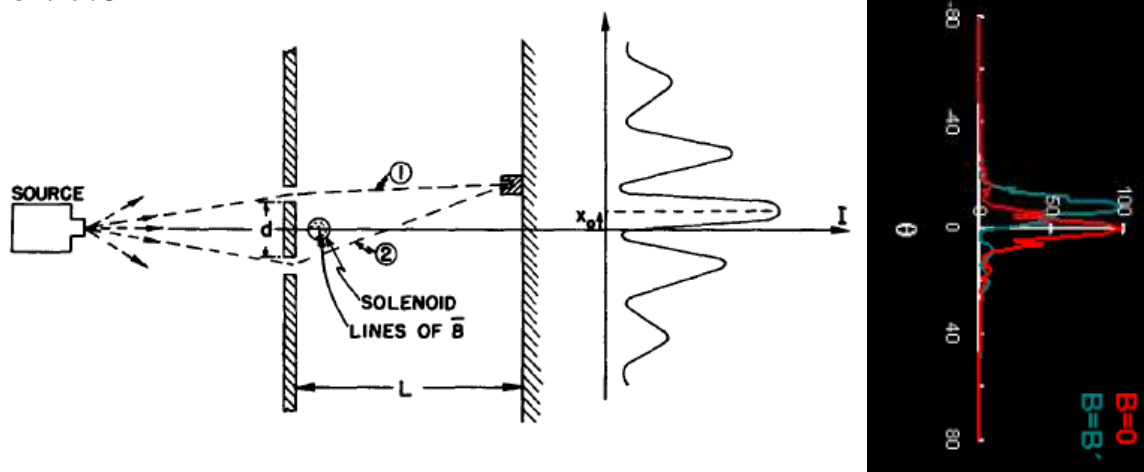
$$\Phi_0 = \frac{\hbar}{e}. \quad (7.61)$$

Aharonovův – Bohmův jev nám tedy ukázal, že v mnohonásobně souvislé oblasti platí vztah pro kvantování magnetického toku, a to i tehdy, pokud na částici nepůsobí žádná silová pole \mathbf{E} a \mathbf{B} .

Tento jev zřetelně ukazuje na kalibrační původ elektromagnetismu. Je to skutečně paradoxní neklasický jev **nesilového a nelokálního působení**, kdy magnetické pole, v našem případě soustředěné v ose solenoidu, ovlivňuje chování elektronů vně solenoidu, aniž by se jich „dotklo“, jak by vyžadovala Lorenzova síla.

My však již víme, že tak činí skrze ovlivňování fáze jejich vlnové funkce.

Obr. 7.6



Všechny doposud známé interakce – gravitační, elektromagnetická, slabá, a silná – jsou v kvantové teorii zprostředkovány výměnou částic bosonového charakteru.

Odpudivé i přitažlivé síly mezi částicemi jsou způsobeny výměnou kvant příslušného pole mezi částicemi.

Tato kvanta jsou vždy virtuální, tj. existují jen po určitou dobu během níž se díky relacím neurčitosti

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \quad (7.62)$$

nezachovává energii.

Neurčitost v energii ΔE může existovat jen po dobu

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E}. \quad (7.63)$$

Za tuto dobu může částice proběhnout maximálně dráhu

$$l = c\Delta t \approx \frac{\hbar c}{\Delta E} = \frac{\hbar}{mc}, \quad (7.64)$$

což je tzv. **Comptonova délka** určující dosah interakce.

Na této dráze může dle poruchové teorie existovat virtuální kvantum o hmotnosti m .

Takové interakce, jako gravitační, či elektromagnetická, které jsou zprostředkovány částicemi, jejichž klidová hmotnost je rovna nule, mají dosah interakce $l \rightarrow \infty$.

Jinak tomu ovšem bude pro případ interakce slabé a silné. Ty jsou zprostředkovány výměnou hmotných kvant.

Objasnění nenulové hmotnosti těchto kvant se stalo jedním z vrcholů kalibračních teorií.

Mechanismus stvoření hmot si ukážeme nejprve na nejjednodušším případě elektromagnetické interakce.

Z Maxwellovy teorie plyne, že vektorový potenciál je určen klasickou vektorovou rovnicí (6.199) s řešením

$$\mathbf{A} \sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \quad (7.65)$$

kde mezi vlnovým vektorem \mathbf{k} a úhlovou frekvencí ω platí vztah

$$\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2 = \frac{c^2 \mathbf{p}^2}{\hbar^2}. \quad (7.66)$$

Pro energii fotonu z (2.32) dostáváme

$$E = cp = \hbar\omega. \quad (7.67)$$

Chceme-li popsat skalární pole φ , které je kvantováno kvanty s nenulovou klidovou hmotností, musíme použít celý vztah (2.32). Relativistické vyjádření vztahu mezi ω a \mathbf{k} pro hmotnou částici je tedy jiný, než de Broglieův vztah (3.6).

Je jím dobře známá Klein – Gordonova relativistická vlnová rovnice (6.197) pro skalární pole φ .

V roce 1933 zjistili W. Meißner a R.Ochsenfeld, že supravodivé materiály vytlačují magnetickou indukci \mathbf{B} ze svého vnitřku.



Walther Meißner (1882 – 1974)



Robert Ochsenfeld (1901 – 1993)

Je poněkud kuriózní, že tento jev byl objeven až tak pozdě.

Důvodem byla topologie použitého vzorku.

Při měření vlastností vodiče při nízkých teplotách se používaly totiž z úsporných důvodů vzorky ve tvaru tenkého prstence, namísto plného válce. Přitom se nějak pozapomnělo na fakt, že se jedná o různou topologii. Při snižování teploty tak nedošlo k vypuzení magnetického

pole z celého objemu válce, ale jen z objemu supravodiče tvořícího stěny válce.

Šlo tedy o malou změnu která byla snadno přehlédnuta.

Toto drobné opomenutí způsobilo, že tento důležitý jev byl odhalen až o desítky let později, když Meissner a Ochsenfeld použili pro svůj experiment monokrystal cínu a olova, tedy topologicky jednoduše souvislou oblast.

V případě, že máme vodivý prsteneček při $T > T_c$ vložený do magnetického pole, pak při poklesu teploty pod T_c dojde k redistribuci magnetického toku v prstenci.

Z oblasti supravodiče bude magnetický tok vytlačen a při odstranění vnějšího pole se v prstenci zachytí magnetický tok

$$\Phi = \mathbf{B} \mathbf{S}, \quad (7.68)$$

kde \mathbf{B} je indukce v díře prstence a \mathbf{S} je plocha, kterou prsteneček obepíná.

Hodnota Φ v prstenci musí být kvantována, jak jsme si již ukázali výše. Platí pro ni

$$\Phi = \mathbf{B} \mathbf{S} = n \Phi_0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.69)$$

kde

$$\Phi_0 = \frac{h}{q} \quad (7.70)$$

je fluxon a q je elementární náboj nosičů tzv. stínícího proudu. Ze standardní kvantové mechaniky víme, že proudová hustota vyvolaná částicí hmoty m s nábojem q je dána v přítomnosti elektromagnetického pole kalibračně invariantním výrazem

$$\mathbf{j} = \frac{q}{2m} \left[\Psi^* (-i\hbar \nabla \Psi) + \Psi (-i\hbar \nabla \Psi^*) \right] - \frac{q^2}{m} |\Psi|^2 \mathbf{A}. \quad (7.71)$$

Tento výraz se dá pro vlnovou funkci (7.33)

kde $\Theta(\mathbf{r}, t)$ je fáze, napsat také jako

$$\mathbf{j} = \frac{q}{2m} |\Psi|^2 (\hbar \nabla \Theta - q \mathbf{A}). \quad (7.72)$$

proudovou hustotu si pak rozložíme na

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_d, \quad (7.73)$$

kde první člen odpovídá transportnímu proudu a je úměrný gradientu makroskopické fáze $\Theta(\mathbf{r}, t)$ kondenzátu supravodivých nosičů

$$\mathbf{j}_s = \frac{q\hbar}{2m} |\Psi|^2 \nabla \Theta, \quad (7.74)$$

jehož časová derivace

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \Theta \sim \mathbf{E} \quad (7.75)$$

je hnací silou transportního proudu.

Vytvoříme-li ve vzorku gradient fáze, poteče v supravodiči proud.

Bude-li $\nabla \Theta = \text{konst.}$ bude \mathbf{j}_s na čase nezávislým proudem.

Druhý člen v (7.72) nám udává stínící diamagnetický proud úměrný potenciálu \mathbf{A}

$$\mathbf{j}_d = -\frac{q^2}{2m} |\Psi|^2 \mathbf{A}. \quad (7.76)$$

Podle Maxwellových rovnic platí, že pro statické magnetické pole

$$\text{rot } \mathbf{B} = \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (7.77)$$

Pro vybranou kalibraci $\text{div } \mathbf{A} = 0$ platí

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (7.78)$$

Srovnáním (7.78) a (7.76), dostaneme pro $\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}_d$ rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\mu_0 q^2}{2m} |\Psi|^2 \mathbf{A} = \lambda_L^2 \mathbf{A} = \frac{\hbar^2}{c^2 M^2} \mathbf{A}. \quad (7.79)$$

kde

$$\lambda_L = \left(\frac{\mu_0 q^2 |\Psi|^2}{2m} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (7.80)$$

je tzv. **Londonova hloubka** vniku magnetického pole do supravodiče, a

$$M = \frac{\hbar}{\lambda_L c} \quad (7.81)$$

bylo interpretováno jako zhmotnění fotonu v prostředí supravodiče.

Hustota supravodivých nosičů náboje $|\Psi|^2 \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

Vidíme, že statické magnetické pole nevnikne do supravodiče, protože foton, mající ve vakuu hmotnost $M = 0$, získá v supravodiči hmotnost $M \neq 0$.

Pro typickou hodnotu $\lambda_L = 10^{-7} \text{ m}$, činí hmotnost fotonu v supravodiči řádově 10^{-36} kg .

Za předpokladu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\nabla^2 (\text{rot } \mathbf{A}) = \text{rot } (\nabla^2 \mathbf{A})$, můžeme rovnici (7.79) přepsat na tvar

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \lambda_L^{-2} \mathbf{B} = \frac{\hbar^2}{c^2 M^2} \mathbf{B}. \quad (7.82)$$

Rovnice (7.82) je slavnou vektorovou rovnicí vniku statického a hmotného magnetického pole do supravodiče.

V jednorozměrném případě lze rovnici (7.82) přepsat jako

$$\frac{d^2 B(x)}{dx^2} = \frac{B(x)}{\lambda_L^2}. \quad (7.83)$$

Řešením bude exponenciála

$$B(x) = B(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right), \quad (7.84)$$

kde $B(0) = B$ je vnější magnetické pole.

Hranice mezi normální fází či vakuem a supravodičem tedy není ostrá, alebrž rozmazaná na vzdálenosti λ_L .

Pokud je však vnější magnetické pole dostatečně silné, začne pronikat do nitra supravodiče ve formě tzv. vírových vláken. Každé toto vlákno má normální nesupravodivé jádro, jímž proniká magnetický tok až zhruba do vzdálenosti λ_L od jádra, tvořícího tak v supravodiči topologickou singularitu.

Tok pole jednotlivým vírem je rovný právě jednomu fluxonu Φ_0 .

Nosiči náboje v supravodiči jsou tzv. **dielektrony**, čili **Cooperovy páry**. Jedná se o bosony tvořené kondenzovaným stavem dvojice elektronů plovoucích volně ve **Fermiho moři**.



Leon Neil Cooper (1930) John Bardeen (1908 – 1991) John Robert Schrieffer (1931)

Tento pár bude mít nejvyšší stabilitu, jestliže vlnové vektory a spiny obou elektronů budou antiparalelní.

Podstatou Cooperova jevu je nestabilita Fermiho moře vzhledem k tvorbě Cooperových párů.

Z kvantové mechaniky víme, že každou interakci si lze znázornit jako výměnu virtuálních bosonů existujících po dobu Δt , která je slučitelná s principem neurčitosti (7.62).

V případě Cooperova párování jsou oněmi bosony kvazičástice zvané **fonony**.

Fonony se pohybují rychlostí zvuku v daném prostředí, s energií $\hbar\omega$ a impulsem $\hbar\mathbf{k}$.

V této teorii chápeme intenzitu vlnového pole $u(\mathbf{r}, t)$, která je závislá na prostorových souřadnicích \mathbf{r} , jako nekonečnou množinu souřadnic spojitě kvantově-mechanické soustavy.

Jestliže zavedeme zobecněné impulsy odpovídající těmto souřadnicím, a požadujeme, aby pro ně platily obvyklé komutační relace kvantové mechaniky, můžeme důsledně vytvořit kvantovou teorii takovýchto polí.

Jedná se tedy o běžné druhé kvantování, jaké jsme použili již na elektromagnetické pole ve 3. kapitole, kdy se souřadnice $u(\mathbf{r}, t)$ stávají opět operátory, neboť nekomutují s příslušnými zobecněnými impulsy.

V $\{ \hat{\mathbf{Q}} \}$ reprezentaci se tak stávají operátory i komplexní normální souřadnice $a_j(\mathbf{k})$.

Jak je naším zvykem z dřívějška, budeme je značit $\hat{\mathbf{a}}_j^-(\mathbf{k})$.

Komplexně sdružené souřadnici $a_j^*(\mathbf{k})$ odpovídá hermitovsky sdružený operátor $\hat{\mathbf{a}}_j^+(\mathbf{k})$.

Snadno ukážeme, že hermitovský oprátor:

$$\hat{\mathbf{a}}_j^+(\mathbf{k})\hat{\mathbf{a}}_j^-(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{N}}_j(\mathbf{k}). \quad (7.85)$$

má všechny vlastnosti operátoru počtu fononů je stavu (j, \mathbf{k}) a má tudíž vlastní hodnotu $n_j(\mathbf{k})$.

Působíme-li operátorem $\hat{\mathbf{a}}_j^-(\mathbf{k})$ na vlastní funkci operátoru $\hat{\mathbf{N}}_j(\mathbf{k})$, dostaneme opět vlastní funkci operátoru $\hat{\mathbf{N}}_j(\mathbf{k})$, ale s vlastní hodnotou $n_j(\mathbf{k}) - 1$.

$\hat{\mathbf{a}}_j^-(\mathbf{k})$ má tedy vlastnosti anihilačního operátoru.

Analogické úvahy nás přivedou k poznání, že $\hat{\mathbf{a}}_j^+(\mathbf{k})$ zvyšují vlastní hodnotu operátoru počtu fononů o 1 a mají tedy všechny atributy kreačního operátoru.

Podstatným rysem každého energetického kvanta je jeho úměrnost frekvenci.

Vysokofrekvenční fonony mohou zvyšovat svoji frekvenci jen po relativně velkých skocích.

Pravděpodobnost, že mód s frekvencí ω bude vůbec vybuzen je dána Boltzmannovým faktorem

$$w = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right). \quad (7.86)$$

A proto módy s $\hbar\omega \gg k_B T$ budou již zanedbatelně přispívat k celkové energii.

Jak teplota stoupne nad absolutní nulu, bude se zvětšovat počet užitečných módů (těch s $\hbar\omega \leq k_B T$).

Počet přispívajících módů pak bude

$$n(T) \approx \frac{V}{6\pi^2 v^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^3, \quad (7.87)$$

odkud obdržíme tzv. Debyeovu teplotu

$$\theta_D = \frac{\hbar\omega}{k_B} = \left(\frac{6\pi^2 n}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{k_B} v = \left(\frac{6\pi^2}{a^3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{k_B} v, \quad (7.88)$$

kde a je mřížková konstanta.



Peter Joseph William Debye (1884 – 1966)

U fononů se tedy jedná se o kolektivní excitace krystalové mřížce, jež mají v mřížce jisté spektrální rozdělení a svůj maximální kmitočet daný vztahem

$$\nu_{\max} = \frac{k_b \theta_D}{h} \quad (7.89)$$

Vyšší frekvence již nemají smysl, neboť by jejich vlnová délka byla menší, než vzdálenost mezi atomy.

Elektrony si tedy mohou vyměňovat s mřížkou fonony o kmitočtu 0 až

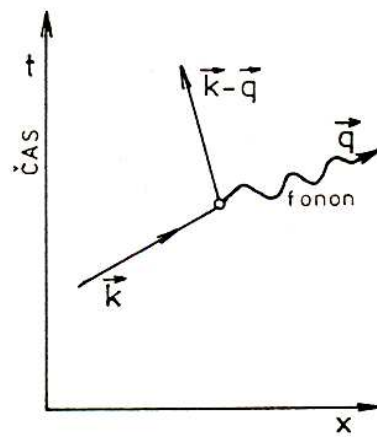
ν_{\max} .

Na obrázku 7.7 je znázorněn Feynmanův diagram tohoto procesu.

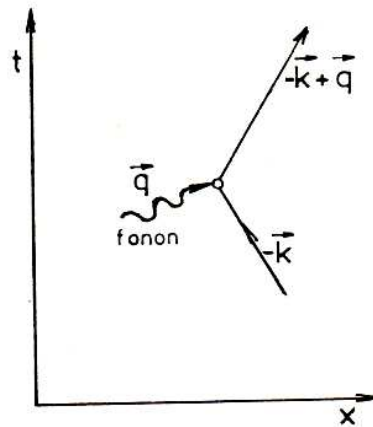
Elektron s vlnovým vektorem \mathbf{k} vyzáří během své dráhy fonon s vlnovým vektorem \mathbf{q} a změní svůj vektor na $\mathbf{k} - \mathbf{q}$.

Při tomto procesu musí platit zákon zachování hybnosti a energie.

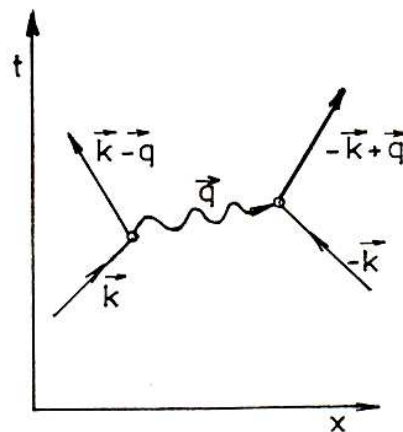
Vyzářený fonon bude poté absorbován dalším elektronem s vlnovým vektorem $-\mathbf{k}$.



a) Emise fononu



b) Absorbce fononu

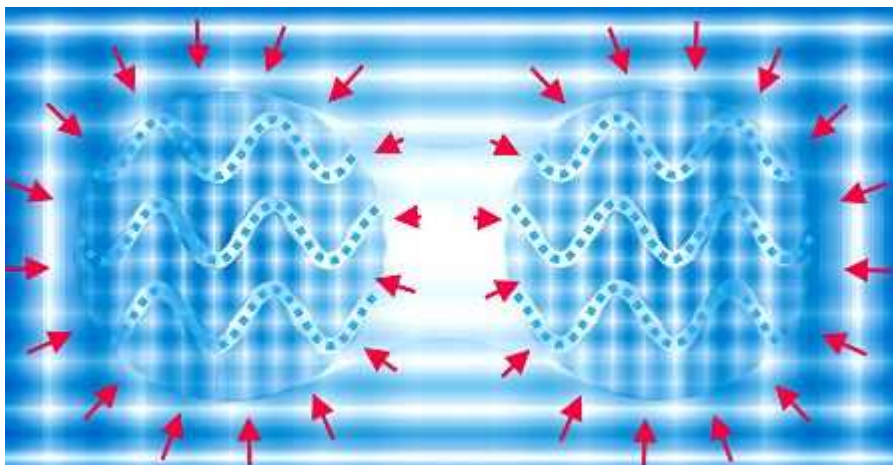
c) Přitažlivá interakce
v supravodiči

Obr. 7.7.: Feynmanovy diagramy pro emisi (a), absorpci (b) a výměnu fononu q mezi dvěma elektrony (c) s vlnovými vektory $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$. Převládne-li tato přitažlivá interakce (c) nad coulombovskou odpuzivou interakcí v kovové mřížce, vznikne supravodivý stav.

Zatímco ve vakuu, kde žádné fonony nejsou, se elektrony pouze elektrostaticky odpuzují, v krystalové mřížce kovu se mohou i přitahovat.

Je to podobná přitažlivá síla, která působí mezi loďkami na rozvlněné hladině. Když se k sobě přiblíží, vznikne mezi loďkami "stín", který omezuje šíření vln kratších vlnových délek, protože ty nedokáží obě lodi tak dobře "obcházet". V konečném důsledku je mezi loděmi hustota vln nižší a energie okolních vln stlačuje obě lodi k sobě. Staré námořnické příručky dokonce obsahovaly zákaz vplouvání více lodí do přístavu za rozbouřeného počasí současně. Přitažlivá síla by totiž mohla vzrůst při přiblížení lodí natolik, že by se navzájem roztříštily.

Obr. 7.8



Náboj supravodivých nosičů (dielektronů) je tedy ve skutečnosti $q = 2e$ a jejich hmotnost $m = 2m_e$.

Hybnost dielektronů je dána výrazem

$$2m_e \mathbf{v}_s = \hbar \nabla \Theta - 2e \mathbf{A}. \quad (7.90)$$

protože

$$|\Psi|^2 = \rho = \frac{n}{2}, \quad (7.91)$$

bude

$$\mathbf{j} = n_s e \mathbf{v}_s = 2e \rho \mathbf{v}_s = \frac{n_s e \hbar \nabla \Theta}{2m_e} - \frac{en_s 2e \mathbf{A}}{2m_e} = \frac{n_s e (\hbar \nabla \Theta - 2e \mathbf{A})}{2m_e}. \quad (7.92)$$

nyní si zvolme v supravodiči nějakou uzavřenou dráhu Γ Obepínající vírové vlákno, jíž protéká magnetický tok $\Phi = BS$, kde B je magnetická indukce v jádře a S plocha vymezená křivkou Γ .

Z rovnice (7.11) plyne,

$$\hbar \nabla \Theta = \left(\frac{2m_e}{n_s e} \right) \mathbf{j} + 2e \mathbf{A}. \quad (7.93)$$

Pak dráhový integrál tohoto kanonického momentu po uzavřené křivce Γ bude

$$\hbar \oint_{\Gamma} \nabla \Theta \, d\mathbf{l} = \hbar \oint_{\Gamma} d\Theta = \oint_{\Gamma} \frac{2m_e}{en_s} \mathbf{j} \, d\mathbf{l} + 2e \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = nh, \quad (7.94)$$

neboli

$$\Psi_c = \frac{\hbar}{2e} \oint_{\Gamma} \nabla \Theta \, d\mathbf{l} = \frac{nh}{2e} = n\Theta_0. \quad (7.95)$$

výraz (7.95) se nazývá fluxoid.

Vidíme, že pro fluxoid zavedený vztahem (7.95) platí:

$$\Theta_0 = \frac{h}{2e}. \quad (7.96)$$

Při oběhu kolem magnetického vírového vlákna se mění fáze vlnové funkce.

Z kvantové mechaniky víme, že fyzikálně pozorovatelné jevy jsou dány pouze bilineární kombinací funkce Ψ a funkce k ní hermitovsky sdružené Ψ^* , tj. kvadrátem normy

$$\Psi\Psi^* = |\Psi|^2. \quad (7.97)$$

Nyní ale vidíme, že i samotná vlnová funkce, určující neklasické vlnové chování, bude mít v netriviální topologii pozorovatelné důsledky ekvivalentní Aharonovovu – Bohmovu jevu.

Kvantování fluxoidu nezávisí na křivce Γ , pokud ji můžeme spojitě deformovat v objemu supravodiče na jinou Γ' .

Víme již, že spojitě transformace (homotopie) nemění topologii. V případě magnetického toku to ovšem neplatí, neboť kdybychom křivku Γ deformovali tak, že by ležela v hloubce λ_L , kde existuje magnetické pole a proudy, pak by $\Phi \neq \Phi_0$ a museli bychom vzít v úvahu i integrál těchto proudů přes křivku Γ , tj. fluxoid.

Přesně se tedy kvantuje fluxoid, nikoliv tok.

Odtud název fluxon pro jeho elementární kvantum, které nyní již můžeme spojit se zhmotnělým fotonem magnetického pole po fázovém přechodu z vodiče na supravodič.

Byli jsme tedy svědky toho, kterak se při poklesu teploty pod jistou kritickou hranici rozpadá elektromagnetická interakce na interakci elektrickou, zprostředkovanou i nadále nehmotným fotonem, a interakci magnetickou, zprostředkovanou nyní již zhmotnělou verzí fotonu – fluxonem.

Stálo by tedy za hřích pokusit se náš postup obrátit a položit si otázku, zda by nemohl vésti naopak ke sjednocení některých ze 4 nám dobře známých interakcí.

Jak jsme již naznačili výše, skutečně se toto sjednocení již podařilo u interakce elektromagnetické a slabé.

Grupy transformací, kalibrační grupy

Pro lepší pochopení některých níže používaných pojmů a označení, typických pro unitární teorie pole, bude užitečné vložit sem krátkou

matematickou vsuvku s nastíněním popisu transformací pomocí teorie grup.

Grupa je taková (neprázdná) množina G , mezi jejímiž prvky je definována **binární operace** " \bullet " přiřazující každým dvěma prvkům $a, b \in G$ nový prvek

$$c = a \bullet b \in G, \quad (7.98)$$

který je rovněž prvkem G . Tato binární transformace je **asociativní**:

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c), \quad (7.99)$$

má **jednotkový prvek**

$$i \in G: a \bullet i = i \bullet a = a \quad (7.100)$$

pro každý prvek $a \in G$, a ke každému prvku $a \in G$ existuje prvek **inverzní**

$$a^{-1} \in G: a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = i. \quad (7.101)$$

Nejobvyklejším příkladem grupy je množina všech kladných racionálních čísel při obvyklé operaci násobení (" \bullet " = "."). Jestliže binární operace " \bullet " je **komutativní**, tj.

$$a \bullet b = b \bullet a \quad (7.102)$$

pro každé prvky $a, b \in G$, nazývá se **G Abelova grupa**. Počet prvků g grupy G se nazývá *řád grupy*. Jestliže je g nekonečné, ale spočetné, nazývá se **G nekonečná diskrétní grupa**.

Pokud prvky grupy tvoří kontinuální množinu, řád grupy již není použitelný. Zato lze do spojitě množiny prvků grupy zavést určité **topologické vlastnosti** definující **varietu** popř. i metriku. Shora zavedenou binární operaci $c = a \bullet b$, definující grupu, lze pak zapsat jako funkční vztah

$$c = f(a, b). \quad (7.103)$$

Jestliže všechny tyto grupové operace (indukující zobrazení grupy G samé na sebe) jsou *spojité*, množina G tvoří *topologickou grupu*.

Topologická grupa, která je varietou, se nazývá **Lieova grupa**.

Typickým příkladem Lieovy grupy je Eukleidův prostor R^n . Rovněž množina spojitých transformací tvoří Lieovu grupu. Právě **grupy transformací**, při nichž se zachovávají určité veličiny, hrají důležitou úlohu ve fyzice polí a částic.

Unitární grupa $U(N)$ je definována jako grupa všech transformací

$$x'^{\alpha} = A^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N), \quad (7.104)$$

která zachovává invarianci unitární délky vektoru

$$|x| = x^{*\alpha} x_{\alpha}, \quad (7.105)$$

tj. pro transformační matici platí vztah

$$A^{*\alpha}_{\beta} A^{\beta}_{\alpha} = 1 \quad (7.106)$$

(hvězdička* značí složku komplexně sdruženou). Platí-li další omezení $\det \mathbf{A} = 1$, jedná se o tzv. **unimodulární podgrupu** $SU(N)$ grupy $U(N)$.

Přehled grup

Mezi obvyklé symboly pro grupy patří:

- S_n , grupa všech permutací n -prvkové množiny (má $n!$ prvků).
- A_n , její normální podgrupa všech sudých permutací (má $\frac{n!}{2}$ prvků pro $n > 1$).
- Δ_n , podgrupa S_n , grupa všech symetrií pravidelného n -úhelníka ($2n$ prvků).
- nám již známé aditivní komutativní grupy Z, Z_n .

To byly grupy **diskrétní** (nespojité) a v prvních třech případech konečné. Další položky budou grupy Lieovy:

GL, SL, O, SO, U, SU ... (7.107)

GL je grupou všech regulárních matic, ***SL*** je podgrupou všech matic s determinantem jedna, ***O*** je grupou všech tzv. ortogonálních matic; pojem ortogonální matice můžeme definovat nejméně čtyřmi ekvivalentními způsoby:

- Matice, jejichž řádky mají normu jednotkovou a jsou vzájemně kolmé.
- Matice, pro které platí vztah $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Jinými slovy, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{1}$ (což je ekvivalentní se vztahem $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{1}$). (Tato vlastnost se nejlépe hodí k důkazu uzavřenosti na kompozici a inversi).
- Matice, které zachovávají skalární součin: $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y})$.
- Matice, které zachovávají velikost vektoru.

Konečně, grupou ***SO*** rozumíme grupu všech ortogonálních matic, jejichž determinant má hodnotu jedna.

Grupy ***U*** a ***SU*** tzv. unitárních matic jsou analogiemi grup ***O*** a ***SO***, užitečnými v komplexních prostorech. Pojem unitární matice lze opět definovat několika ekvivalentními způsoby: unitární matice zachovávají skalární součin v komplexním prostoru a další ekvivalentní podmínky lze formulovat analogicky jako výše.

Cartan ve své disertaci provedl klasifikaci prostých kompaktních spojitých grup a odpovídajících algeber. (Grupě říkáme **kompaktní**, pokud každá posloupnost jejích prvků obsahuje konvergentní podposloupnost; v případě grup matic lze říci, že kompaktní grupy jsou grupy matic, jejichž prvky jsou matice se stejně omezenými složkami a navíc jsou tyto grupy uzavřené jako podmnožiny patřičného vektorového prostoru.



Élie Joseph Cartan (1859 – 1951)

V dalším uvádíme některá základní data o tom, jak mohou obecně vypadat kompaktní grupy matic; uvedené výsledky i (gotická) označení pocházejí od Cartana. Použité indexy označují tzv. **rank** grupy, což je (podobně jako **dimenze** grupy) pojem, který zavedeme podrobněji až v kapitole o Lieových algebrách. Zhruba řečeno, rank grupy udává, kolik vzájemně komutujících a nezávislých kružnic ("kružnicí" rozumíme jednoparametrickou podgrupu) jsme schopni v grupě objevit - zatímco dimenze grupy je číslo, které udává, do kolikadimensionálního euklidovského prostoru jsme schopni danou grupu lokálně vzájemně jednoznačně a hladce zobrazit.

Rank grupy všech otočení v E^3 (tuto grupu dále značíme jako $SO(3)$) je roven jedné, tzn. neexistují dvě různá otočení prostoru podle neidentických os, která by komutovala.

- Algebra \mathfrak{A}_l a jí odpovídající grupa $SU(l+1)$ mají dimenzi $(l+1)^2 - 1$; grupa obsahuje všechny **unitární unimodulární** komplexní matice \mathbf{A} rozměru $(l+1) \times (l+1)$, to jest matice, splňující

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = 1 \quad , \quad \det \mathbf{A} = 1 \quad (7.108)$$

- Algebra \mathfrak{B}_l a jí odpovídající grupa $SO(2l+1, \mathbb{R})$ mají dimenzi $(2l+1)l$; grupa obsahuje reálné matice rozměru $(2l+1) \times (2l+1)$ splňující

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = 1 \quad , \quad \det \mathbf{A} = 1 \quad (7.109)$$

- Algebra \mathfrak{C}_l a jí odpovídající grupa $Sp(2l)$ mají dimenzi $l(2l+1)$; grupa obsahuje komplexní unitární **symplektické** matice rozměru $2l \times 2l$, tj. matice splňující

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = 1 \quad , \quad \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}^T = \mathbf{K} \quad (7.110)$$

kde \mathbf{K} je nějaká regulární antisymetrická matice (antisymetrická matice lichého rozměru je vždy singulární, proto $2l$).

Ani v tomto případě nečiní potíže ukázat, že jde o grupu (konkrétně "unitární grupu nad tělesem kvaternionů"). Na rozdíl od předchozích grup s jasnou geometrickou interpretací jejich prvků, pojem symplektické grupy lze motivovat jen čtenáři s alespoň minimální znalostí analytické mechaniky:

- Algebra \mathfrak{D}_l a odpovídající grupa $SO(2l, \mathbb{R})$ mají dimenzi $(2l-1)l$.
- Další jsou Cartanovy vyňaté grupy, u nichž uvádíme dimenzi a počet rozměrů fundamentální reprezentace E_6 má komplexní fundamentální reprezentaci a k ní sdruženou, ostatní mají jen reálné reprezentace).
- \mathfrak{E}_6 a grupa E_6 , dimenze 78, fund. $27/\overline{27}$.
- \mathfrak{E}_7 a grupa E_7 , dimenze 133, fund. 56.
- \mathfrak{E}_8 a grupa E_8 , dimenze 248, fund. 248. (Fundamentální reprezentace této grupy splývá s přidruženou).
- \mathfrak{F}_4 a grupa F_4 , dimenze 52, fund. 26.
- \mathfrak{G}_2 a grupa G_2 , dimenze 14, fund. 7. (Jde o grupu symetrií **Oktonionů** jakožto algebry nad \mathbb{R} , které dostaneme jako ještě

větší "těleso" (dimenze osm) než jsou kvaterniony, nepožadujeme-li u "tělesa" asociativitu násobení.)



Alfréd Haar (1885 – 1933)

Nejen kompaktními grupami živa je teorie grup. (Ačkoli kompaktní grupy mají nesporné přednosti; mají "konečný objem", tzn. takzvané invariantní integrování po grupě (**Haarova míra**))

$$\int_{g \in G} f(g) d\mu = \int_{g \in G} f(gh) d\mu = \int_{g \in G} f(hg) d\mu \quad (7.111)$$

Lze normovat na jednotkový integrál z jednotkové funkce, o čemž nemůže být řeči u nekompaktních grup a což např. zaručuje, že každá lineární reprezentace kompaktní grupy se dá rozepsat jako přímý součet nerozložitelných podprostorů.)

- $GL(n, \mathbb{R}/\mathbb{C})$ jsou všechny regulární reálné/komplexní matice $n \times n$; zkratka "general linear". Reálná dimenze je n^2 v reálném případě, dvojnásobná v komplexním.
- $SL(n, \mathbb{R}/\mathbb{C})$ je podgrupa těch, které mají determinant roven jedné (tzv. **unimodulárních**); zkratka "special linear". Reálná dimenze je $n^2 - 1$ v reálném a dvojnásobná v komplexním případě.
- $O(n, \mathbb{R}/\mathbb{C})$ je grupa všech **ortogonálních** matic \mathbf{A} (splňujících $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$); zkratka "orthogonal". Dimenze je $n(n-1)/2$ v reálném a dvojnásobná v komplexním.

- $SO(n, \mathbb{R}/\mathbb{C})$ je průnik SL a O ; z toho plyne zkratka. Dimenze je jako u O . Pro těleso \mathbb{R} je grupa kompaktní a zajímavější než v komplexním případě, kde je lepší studovat kompaktní grupy unitární (viz dále); neudáme-li tedy těleso, míníme tím $SO(n, \mathbb{R})$.
- $Spin(n)$, což je grupa téměř izomorfní s $SO(n)$, ale každému prvku grupy $SO(n)$ odpovídají dva prvky grupy $Spin(n)$, např. jednotkovému prvku $SO(n)$ přísluší prvky, které nazveme "rotace o 0° " a "rotace o 360° ". V sekci o spinorech ujasníme, proč rozeznáme rotaci o 2π od rotace o 0° . Příklad: $Spin(3)$ je isomorfní $SU(2)$.
- Grupa $U(n)$ všech komplexních **unitárních** matic A rozměru $n \times n$, splňujících $A^{-1} = A^* \equiv \bar{A}^T$; zkratka "unitary". Dimenze je n^2 .
- Grupa $SU(n)$ všech unitárních unimodulárních matic.
- Grupa $O(m, n)$ (a odpovídající unimodulární $SO(m+n)$) reálných **pseudoortogonálních** matic A rozměru $(m+n) \times (m+n)$, splňujících

$$A G A^T = G \quad (7.112)$$

kde G je matice nulová kromě diagonály, na níž leží m jednotek a n minus jednotek. Vidíme, že $SO(m, 0) \equiv SO(m)$, a také grupa $SO(m, n)$ má touž dimenzi jako $SO(m+n)$. Kupříkladu grupa $O(3, 1)$ neboli $O(1, 3)$ je známá **Lorentzova grupa** otočení relativistického časoprostoru, fixující **Minkowského čtverec normy** vektoru $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ (za c si představte jednotku, jak činí i teoretičtí fyzici). Desetirozměrná Lorentzova grupa obohacená o libovolná posunutí nese jméno dalšího relativistického prince: **grupa Poincaré**.

Mnozí se rádi dovědí, že **konformní grupa** obsahuje všechny (i nelineární) transformace zachovávající úhly. (Ve dvou dimenzích je nekonečněrozměrná, zobrazení odpovídají

holomorfním funkcím komplexní proměnné a právě tato skutečnost povyšuje struny nad vícerozměrné objekty.)

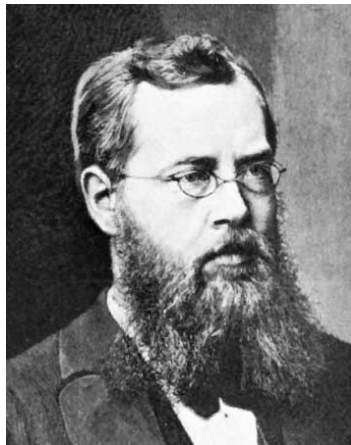
Všimněme si, že i taková grupa $SO(3, 1)$ je nesouvislá; skládá se ze dvou komponent s maticemi s $a^4_4 < 0$ resp. $a^4_4 > 0$ (transformace převracující budoucnost na minulost resp. budoucnost).

Komplexní analogii nemá smysl uvažovat, neboť by vedla ke grupě isomorfní $SO(m + n, \mathbb{C})$: matici \mathbf{A} lze zastoupit podobnou maticí \mathbf{B} dle vztahu $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}$, kde matici \mathbf{C} získáme z \mathbf{G} náhradou -1 za i , takže platí $\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^T = 1$ a dosazením za \mathbf{A} získáme $\mathbf{B}\mathbf{B}^T = 1$.

- Zato má smysl uvažovat o grupě $U(m, n)$ a $SU(m, n)$ komplexních **pseudounitárních** matic

$$\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}^* = \mathbf{G} \quad (7.113)$$

Lieova algebra



Marius Sophus Lie (1842 – 1899)

Místo složitých objektů, jakými jsou grupy $SU(n)$ a další, je možné zkoumat objekty jednodušší, totiž lineární, nezajímáme-li se právě o rozdíly mezi $O(n, \mathbf{R})$ a $SO(n, \mathbf{R})$. Druhá z nich je **souvislá** - lze se

plynule dostat od jednoho jejího prvku ke kterémukoli jinému, první z nich je nesouvislá - skládá se ze dvou oddělených **komponent** (zrcadlící a nezrcadlící transformace).

Definice: Lineární prostor \mathfrak{g} , na němž je definována další bilineární operace $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$, zvaná **komutátor**, splňující vztahy

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -[\mathbf{B}, \mathbf{A}], \quad [\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0 \quad (7.114)$$

(druhému se říká **Jacobiho identita**) nazveme **Lieovou algebrou**.

Např. v Lieově algebře matic s komutátorem definovaným jako $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ je splněna (kromě triviálního vztahu $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -[\mathbf{B}, \mathbf{A}]$) také Jacobiho identita.

Zkoumejme Lieovu algebru, které říkáme \mathfrak{so}_3 , jejíž prvky píšeme jako antisymetrické matice s obvyklým komutátorem

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -f & e \\ f & 0 & -d \\ -e & d & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.115)$$

Ověřme podrobněji, že

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & bd - ae & cd - af \\ ae - bd & 0 & ce - bf \\ af - cd & bf - ce & 0 \end{pmatrix} \quad (7.116)$$

Vzpomeneme-li si nyní na definici vektorového součinu $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, najdeme zajímavý izomorfismus

$$\left\{ (a, b, c) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \right\} : (\mathbb{R}^3, +, \times) \rightarrow (\mathfrak{so}_3, +, [,]). \quad (7.117)$$

Je vidět role dimenze (7.116) na hladký průběh. Lze samozřejmě mluvit i kupř. o šestiřozměrném prostoru antisymetrických matic 4×4 , ale přeci jen již nebude izomorfní \mathbf{R}^4 ($4 \neq 6$). V řeči funkcionální analýzy je možné dát doslovný smysl komutátoru dvou matic i

vektorovému součinu vektoru nabra $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ s vektorem

$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z)$, čemuž říkáme **rotace vektoru**, pouze však s použitím nekonečnědimenzionálních prostorů.

Podívejme se na pár dalších příkladů Lieových algeber a začněme přemýšlet o jejich vazbách na stejnojmenné Lieovy grupy.

- $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}/\mathbf{C})$ = reálné/komplexní matice $n \times n$
- $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}/\mathbf{C}) = \{ \mathbf{A} \in \mathfrak{gl} \mid \text{Tr } \mathbf{A} = 0 \}$
- $\mathfrak{o}(n, \mathbf{R}/\mathbf{C}) = \mathfrak{so}(n, \mathbf{R}/\mathbf{C}) = \{ \mathbf{A} \in \mathfrak{gl} \mid \mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top \}$
- $\mathfrak{u}(n) = \{ \mathbf{A} \in \mathfrak{gl}(\mathbf{C}) \mid \mathbf{A} = -\mathbf{A}^* \}$
- $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \cap \mathfrak{u}(n)$
- $\mathfrak{spin}(n) = \{ \mathbf{A} \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathbf{A}\mathbf{k} = (\mathbf{A}\mathbf{k})^\top \}$ v případě sudého n ; \mathbf{k} je zde nějaká antisymetrická regulární matice $n \times n$
- $\mathfrak{so}(m, n) = \{ \mathbf{A} \in \mathfrak{gl}(m+n, \mathbf{R}) \mid \mathbf{A}\mathbf{G} = -(\mathbf{A}\mathbf{G})^\top \}$, \mathbf{G} je diagonální matice obsahující m jednotek a n minus jednotek

Věta: Uvedené lineární prostory jsou uzavřené na operaci komutování.

Důkaz: přesvědčme se, že platí např. implikace

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top, \quad \mathbf{B} = -\mathbf{B}^\top \Rightarrow [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A} = -[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^\top. \quad (7.118)$$

Pojem: Necht' G je grupa matic. **Infinitesimálním generátorem** grupy G nazveme množinu $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}(G)$ matic \mathbf{A} , pro něž

$$\{ \exp t\mathbf{A} \mid t \in \mathbb{R} \} \subset G. \quad (7.119)$$

Poznámka: V pokročilejších kursech geometrie se \mathfrak{g} obvykle definuje abstraktněji jako tečný prostor ke G v $\mathbf{1}$ v prostoru všech matic: prvky grupy, které mají infinitesimálně blízko k jednotkové matici, se dají napsat jako (\mathfrak{g}_i je báze generátoru)

$$1 + \sum_i g_i \cdot d\lambda^i. \quad (7.120)$$

Infinitesimální generátor grupy matic G je Lieova algebra (a v uváděných případech právě ta stejnojmenná, psaná švabachem) a že lze navíc dobře vyložit roli komutátoru.

Důkaz pro obecnou grupu: Je třeba ukázat dvě zásadní věci: uzavřenost na sčítání a komutování.

- $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{g} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathfrak{g}$ (není triviální!)
- $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{g} \Rightarrow [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \in \mathfrak{g}$

1. Zkoumejme výrazy typu ($N \rightarrow \infty$)

$$\left(\exp \frac{t\mathbf{A}}{N} \cdot \exp \frac{t\mathbf{B}}{N} \right)^N = \left(1 + t \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^N \rightarrow \exp [t(\mathbf{A} + \mathbf{B})] \quad (7.121)$$

a uvědomme si, že $\{ \exp t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mid t \in \mathbb{R} \}$ tedy je podgrupa G , poněvadž pro každé t jde exponenciála aproximovat s libovolnou přesností (pomocí dostatečně velkého N) součinem prvků typu $\exp \frac{t\mathbf{A}}{N}$, které leží (přesně) v G a předpokládáme cosi jako uzavřenost grupy v obvyklé topologii dané např. metrikou $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup_{i,j} |a_j^i - b_j^i|$.

2. Podívejme se na výrazy typu ($N \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} & \left(\exp \frac{\sqrt{t}\mathbf{A}}{N} \cdot \exp \frac{\sqrt{t}\mathbf{B}}{N} \cdot \exp \frac{-\sqrt{t}\mathbf{A}}{N} \cdot \exp \frac{-\sqrt{t}\mathbf{B}}{N} \right)^{N^2} = \\ & = \left(1 + \frac{t}{N^2} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \mathfrak{o} \left(\frac{1}{N^2} \right) \right)^{N^2} \rightarrow \exp(t[\mathbf{A}, \mathbf{B}]). \end{aligned} \quad (7.122)$$

Lze tedy opět $\exp(t[\mathbf{A}, \mathbf{B}])$ vyjádřit s jakoukoliv přesností pomocí součinu prvků z \mathbf{G} ; pokud je $t < 0$, stačí vyměnit písmena \mathbf{A} a \mathbf{B} nalevo.

Ilustrujme si to na příkladě algebry \mathfrak{so}_3 : otočíme-li systém o malý úhel α kolem osy x , poté o malý úhel β kolem osy y a pak zpět, ovšem v tomtéž pořadí (nejprve o $-\alpha$ kolem x a pak o $-\beta$ kolem y), systém se nám otočí o malinký úhel $\alpha\beta$ (až na konvenční znaménko) kolem osy z .

Souvislost algeber se stejnojmennými grupami: Abychom ukázali, v jakém smyslu Lieovy algebry odpovídají grupám stejného jména, předdefinujme infinitesimální generátor grupy matic \mathbf{G} jako množinu všech možných $\dot{\mathbf{A}}(0)$, kde pro $t \in \mathbf{R}$ je $\mathbf{A}(t) \in \mathbf{G}$, tj. $\mathbf{A}(t)$ je diferencovatelná křivka po grupě, a $\mathbf{A}(0) = \mathbf{1}$. Ekvivalence plyne z toho, že za tuto křivku lze vždy zvolit $\mathbf{A}(t) = \exp(t\dot{\mathbf{A}}(0))$.

Tak například, křivka $\mathbf{A}(t)$ po grupě $\mathbf{SO}(n)$ matic splňujících $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(t)^\top = \mathbf{1}$ po zderivování a dosazení $t = 0$ dá

$$\dot{\mathbf{A}}(0)\mathbf{A}^\top(0) + \mathbf{A}(0)\dot{\mathbf{A}}^\top(0) = \dot{\mathbf{A}}(0) + \dot{\mathbf{A}}^\top(0) = \mathbf{0} \quad (7.123)$$

tj. nutnou podmínku antisymetrie $\dot{\mathbf{A}}(0)$, která je zároveň postačující.

$$\mathbf{B} = -\mathbf{B}^\top \Rightarrow \exp \mathbf{B} = \exp(-\mathbf{B}^\top) = \exp(\mathbf{B}^\top)^{-1} = \left[(\exp \mathbf{B})^\top \right]^{-1}. \quad (7.124)$$

Zderivováním kritérií pro členství v dalších Lieových grupách získáme rovnice stejnojmenných Lieových algeber. Připomeňme si kupř. též následující vzorec, s nímž jsme se v pozměněných tvarech již setkali.

$$\frac{d}{dt} \det \mathbf{A} \Big|_{t=0} = \text{Tr } \dot{\mathbf{A}}(0) . \quad (7.125)$$

Mějme lineární prostor $\mathfrak{gl}(n)$ všech matic $n \times n$. Přírozený izomorfismus do \mathbf{E}^{n^2} dává následující předpisy pro skalární součin dvou matic:

$$\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum a^i_j b^i_j , \quad (7.126)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{Tr } \mathbf{A} \mathbf{B}^T .$$

Z tohoto druhého vyjádření pro $\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ vidíme některé význačné vlastnosti takto zavedeného skalárního součinu, např. vztahy

$$\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{b}(\mathbf{O} \mathbf{A}, \mathbf{O} \mathbf{B}) = \mathbf{b}(\mathbf{A} \mathbf{O}, \mathbf{B} \mathbf{O}) , \quad (7.127)$$

pro libovolnou ortogonální matici \mathbf{O} plynoucí z cykličnosti stopy. Tento vztah říká, že metrika

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| , \quad (7.128)$$

kde $\|\mathbf{A}\|^2 = \mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ je invariantní vůči grupě $\mathbf{O}(n)$. Chápeme-li ji jako metriku na grupě $\mathbf{O}(n) \subseteq \mathfrak{gl}(n)$, nazývá se Killingovou metrikou.

A co je Killingova forma na Lieově algebře?

Ta je opět, v konkrétním příkladě $\mathfrak{o}(n)$, dána vztahem

$$\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = -\text{Tr } \mathbf{A} \mathbf{B} . \quad (7.129)$$

Nezapomeňme, že $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ platí pro všechny $\mathbf{A} \in \mathfrak{o}(n)$.

Ukazuje se, že nejde o jen tak ledajaký skalární součin na $\mathfrak{o}(n)$ (máme ho koneckonců stále na celém $\mathfrak{gl}(n)$), neboť tento skalární součin na $\mathfrak{o}(n)$

"respektuje navíc strukturu Lieovy algebry" ve smyslu následujících tvrzení (které jsou ekvivalentní):

Tvrzení 1: Pro všechna $\mathbf{X} \in \mathfrak{o}(n)$ a všechna $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{o}(n)$ platí

$$\mathbf{b}([\mathbf{X}, \mathbf{A}], \mathbf{B}) + \mathbf{b}(\mathbf{A}, [\mathbf{X}, \mathbf{B}]) = 0 . \quad (7.130)$$

Říkáme, že Killingova forma je antisymetrická vůči operaci komutování s \mathbf{X} ; uvedená rovnost se ostatně bere za základ definice Killingovy formy i v případě obecné Lieovy algebry.

Tvrzení 2: Zobrazení

$$\mathbf{A} \mapsto \exp(-\mathbf{X}) \mathbf{A} \exp \mathbf{X} : \mathfrak{o}(n) \rightarrow \mathfrak{o}(n) \quad (7.131)$$

je izometrie pro každé $\mathbf{X} \in \mathfrak{o}(n)$.

Tvrzení 1 se dokáže prostým dosazením za $\mathbf{b}(\overrightarrow{\dots}, \overrightarrow{\dots})$ i za komutátor a využitím toho, že $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$ apod.).

Pojmy analogické grupě: Lieovu algebru \mathfrak{g} nazýváme **komutativní**, pokud $\forall x, y \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0$ a taková algebra odpovídá komutativní grupě.

Centrum algebry Lieovy je (analogicky centru grupy) množina $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ těch prvků $s \in \mathfrak{g}$, že $\forall t \in \mathfrak{g} : [s, t] = 0$, tj. komutují se všemi prvky algebry.

Lieovou podalgebrou nazýváme (analogicky podgrupě) podprostor \mathfrak{g} uzavřený na komutování. Máme dokonce analogii normální podgrupy - říká se mu **ideál** Lieovy algebry a je to podprostor I takový, že $\forall i \in I; \forall j \in \mathfrak{g} : [i, j] \in I$. Elementárním příkladem ideálu je centrum algebry; jiným důležitým příkladem je **komutant** dané Lieovy algebry,

což je množina všech prvků tvaru $[x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Ideál je to proto, že $[[x, y], j]$ opět leží v komutantu, neboť je tvaru komutátoru dvou prvků.

Zavedené pojmy mimo jiné implikují, že pokud je H normální podgrupou grupy G , pak je $\mathfrak{L}(H)$ ideálem v $\mathfrak{L}(G)$. Jestliže je G souvislá, pak

$$\mathfrak{L}(\mathbb{Z}(G)) = \mathbb{Z}(\mathfrak{L}(G)) . \quad (7.132)$$

Pro dvě grupy G_1, G_2 je infinitesimálním generátorem jejich direktního součinu direktní součet jejich infinitesimálních generátorů, kde prvky $\mathfrak{L}(G_1)$ komutují s prvky z $\mathfrak{L}(G_2)$, a tak jsou $\mathfrak{L}(G_i)$ ideály v $\mathfrak{L}(G_1 \times G_2)$

$$\mathfrak{L}(G_1 \times G_2) = \mathfrak{L}(G_1) \oplus \mathfrak{L}(G_2) . \quad (7.133)$$

Nechť \mathbf{A} označuje jedno z klasických těles \mathbf{R}, \mathbf{C} nebo \mathbf{H} (kvaterniony) a G je nějaká grupa. Pak **lineární reprezentací** grupy G nazýváme konečněrozměrný lineární prostor \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{A} , na němž je pro každý prvek $g \in G$ definována (stejně značená) funkce, splňující

- $\mathbf{1}_G \mathbf{v} = \mathbf{v}$ a $g(g' \mathbf{v}) = (gg') \mathbf{v}$
- $g \mathbf{v}$ je \mathbf{A} -lineární funkce \mathbf{v}
- $g \mathbf{v}$ je spojitá funkce g a \mathbf{v}

Jinými slovy, je zadán morfismus grup

$$\theta = \theta_{\mathbf{v}} : G \rightarrow \text{Aut } \mathbf{V} . \quad (7.134)$$

Vybereme-li bázi ve \mathbf{V} , lze si představit, že θ nabývá hodnot v $GL(n, \mathbf{A})$. V tomto případě mluvíme o **maticové reprezentaci**.

Píšeme-li v případě kvaternionů matice vlevo od \mathbf{v} , je rozumné mít ve \mathbf{V} násobení skalárem zprava (\mathbf{V} je pak **pravý modul** nad \mathbf{H}). Naštěstí lze ale definovat i násobení skalárem zleva (pruh musíme přidat na to, aby platilo $q(q' \mathbf{v}) = (qq') \mathbf{v}$)

$$q\mathbf{v} = \mathbf{v}\bar{q} \quad (7.135)$$

a tak lze levý modul převrátit na pravý a naopak. Využijeme toho, že $\overline{qq'} = \overline{q'q}$, kde \bar{q} je obvyklé sdružení kvaternionu

$$\overline{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k . \quad (7.136)$$

Máme-li reprezentace \mathbf{V}_i , lze generovat složitější reprezentace ve tvaru direktního součtu dvou (či více) prostorů, na nichž grupa účinkuje podle

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (g\mathbf{v}_1, g\mathbf{v}_2) \quad (7.137)$$

a podobně lze získat reprezentaci ve formě tenzorového (resp. symmetrizovaného resp. antisymmetrizovaného) součinu dvou prostorů, na který grupa účinkuje dle pravidla

$$g(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = (g\mathbf{v}_1 \otimes g\mathbf{v}_2) . \quad (7.138)$$

Zde nejde o nic jiného, než jak se transformují spinory - resp. tenzory - s více indexy. Ale také lze získat reprezentaci na duálním prostoru \mathbf{V}' podle vzorce (zde zase jde o transformaci tenzorů/spinorů s indexy dole/nahoře)

$$[g(\mathbf{v}')] \mathbf{w} = \mathbf{v}' \circ g^{-1} \mathbf{w} . \quad (7.139)$$

Strukturní zobrazení: Nyní se podíváme, proč stačí pracovat s komplexními reprezentacemi. Reálnou reprezentaci \mathbf{R}^n lze převést na komplexní \mathbf{C}^n , přičemž působení grupy je podle přirozené formule ($\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$)

$$g(\mathbf{v} + i\mathbf{w}) = g(\mathbf{v}) + ig(\mathbf{w}) . \quad (7.140)$$

Zdá se, že se ale o cosi okrádáme. Již "malý" prostor \mathbf{R}^n byl uzavřen na působení grupy a my jsme ho zbytečně zvětšili. Naučtujeme si to tak, že předpokládáme existenci **strukturního zobrazení** $j : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ (v následujícím vzorci jsou \mathbf{v}, \mathbf{w} reálné vektory)

$$j : (\mathbf{v} + i\mathbf{w}) \mapsto (\mathbf{v} - i\mathbf{w}), \quad (7.141)$$

které komutuje s působením grupy ($g(j\mathbf{v}) = j(g\mathbf{v})$), je antilineární ($j(z\mathbf{v}) = \bar{z} \cdot j(\mathbf{v})$, $j(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = j(\mathbf{v}) + j(\mathbf{w})$) a jeho druhá mocnina je plus minus identický operátor (v tomto případě plus) ($j(j\mathbf{v}) = \pm \mathbf{v}$, zkráceně $j^2 = \pm 1$), což jsou tři vlastnosti, definující strukturní zobrazení.

Naopak, máme-li komplexní reprezentaci se strukturním zobrazením j , rekonstruujeme reálnou reprezentaci rozkladem komplexního prostoru \mathbf{C}^n považovaného za \mathbf{R}^{2n} na dva podprostory, odpovídající vlastním číslům 1 resp. -1 (operátor, splňující $j^2 = 1$, jiná vlastní čísla nemá).

Obdobně lze převést kvaternionickou reprezentaci \mathbf{H}^m na komplexní \mathbf{C}^{2m} ; kvaternionický vektor budeme psát jako $\mathbf{v} + j\mathbf{w}$, kde \mathbf{v} a \mathbf{w} jsou komplexní vektory.

I nyní se o cosi okrádáme: prostor jsme sice zbytečně nezvětšili, ale původní reprezentace byla \mathbf{H} -lineární, zatímco nová je jenom \mathbf{C} -lineární. \mathbf{H} -linearitu si zrekonstruujeme tak, že předpokládáme existenci strukturního zobrazení (\mathbf{v} , \mathbf{w} jsou zde komplexní vektory)

$$j(\mathbf{v} + j\mathbf{w}) = -\bar{\mathbf{w}} + j\bar{\mathbf{v}}. \quad (7.142)$$

Lehce ověříte antilinearitu, komutování s působením grupy (zobrazení j je vlastně násobení j - shoda písmen čistě náhodná - zprava, což komutovalo s \mathbf{G} díky \mathbf{H} -linearitě) a rovnost $j^2 = -1$.

Naopak lze zpětně zrekonstruovat reprezentaci \mathbf{H}^n z dané \mathbf{C}^{2n} , která připouští strukturní zobrazení s $j^2 = -1$.

Reprezentace, která je direktním součtem dvou prostorů (reprezentací) \mathbf{V} , \mathbf{W} , disponujících strukturními zobrazeními se stejnými $j_V^2 = j_W^2$, připouští strukturní zobrazení $j_V \oplus j_W$ se stejným j^2 .

Tenzorový součin dvou reprezentací $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ (může jít i o (anti)symetrisovaný) se strukturními zobrazeními $j_V j_W$ toleruje strukturní zobrazení $j = j_V \oplus j_W$ se znakem $j^2 = j_V^2 j_W^2$.

Ukážeme si jednoduchý příklad. Grupa $SU(2) = Spin(2)$ má fundamentální reprezentaci kvaternionickou (jde nakonec o grupu "jednotkových" kvaternionů (s jednotkovou normou)), kterou si představíme jako dvousložkové komplexní spinvektory s_A , $A = 0,1$, mající strukturní zobrazení s $j^2 = -1$. Symetrizovaný tenzorový součin, obsahující dvouindexové spinory $s_{AB} = s_{BA}$, bude tedy disponovat strukturním zobrazením s $j^2 = +1$, tedy budeme moci požadovat podmínky reálnosti (invariantní vůči působení grupy)

$$s_{00} = -\bar{s}_{11}, \quad s_{01}, s_{10} \in \mathbb{R}. \quad (7.143)$$

Není se čemu divit, spinor s_{AB} , který svážeme maximálními podmínkami (symetrie a uvedená samodružnost), je informačně totožný s (trojrozměrným) vektorem. Proto se částicím se spinem rovným jedné říká **vektorové**.

$$s_{01} = z = s_{10}, \quad s_{11} = x + iy, \quad s_{00} = -(x - iy). \quad (7.144)$$

Co možná nejstručněji vážené čtenáře přesvědčíme (dále s tímto budeme pracovat v sekci o spinorech), že algebry $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ a $\mathfrak{su}(2)$ jsou izomorfní, a to tak, že napíšeme prvky jejich bází a tiše vás vyzveme k verifikaci níže napsaných komutačních relací pro obě sady matic.

V případě struktury "algebra Lieova" požadujeme po izomorfismu φ zajisté i zachování komutátoru, tj.

$$\varphi([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) = [\varphi(\mathbf{A}), \varphi(\mathbf{B})]. \quad (7.145)$$

Postačí zkontrolovat komutátory matic tvořících bázi, jako kombinace kterých lze prvek dané Lieovy algebry zapsat.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1^{SO(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{S}_1^{SU(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{S}_2^{SO(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{S}_2^{SU(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{S}_3^{SO(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{S}_3^{SU(2)} &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{7.146}$$

$$[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] = \mathbf{S}_3, \quad [\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] = \mathbf{S}_1, \quad [\mathbf{S}_3, \mathbf{S}_1] = \mathbf{S}_2. \tag{7.147}$$

Z podobných důvodů jsou izomorfní i algebry $\mathfrak{so}(1,3)$ a $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ a $\mathfrak{su}(1,1)$, ale také třeba $\mathfrak{so}(6)$ a $\mathfrak{su}(4)$. Dalšími příklady jsou $\mathfrak{so}(4)$ a $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ nebo $\mathfrak{so}(5)$ a $\mathfrak{spin}(2 \cdot 2)$.

Fundamentální reprezentace grupy $Spin(n)$ je

- jedna samodružná o dimenzi 2^k pro $n = 2k+1$ (liché n); je reálná, je-li $[(k+1)/2]$ sudé, jinak je kvaternionická
- dvě komplexní vzájemně sdružené s dimenzí 2^{k-1} pro $n = 2k$, k liché
- dvě samodružné navzájem neekvivalentní, každá o dimenzi 2^{k-1} pro $n = 2k$, k sudé; je-li k násobkem čtyř, jsou reálné, jinak jsou kvaternionické

Tab. 7.1

$SO(n): n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Spinorové reprezentace	$2c$	$1q$	$2q$	$1q$	$2c$	$1r$	$2r$	$1r$	$2c$
Dimenze každé	1	2	2	4	4	8	8	16	16

Na tyto skutečnosti můžeme sami přijít, z definice grupy $Spin(n)$.

Spinorová grupa: Chceme získat Lieovu algebru izomorfní $\mathfrak{so}(n)$, jejíž grupa ale obsahuje (vzájemně rozlišitelné) prvky "rotace o 0" a "rotace o 2π ". Algebra $\mathfrak{so}(n)$ je lineárním obalem antisymetrických matic

$\mathbf{e}_{ij} = -\mathbf{e}_{ji}$, které mají jednotku na místě (i, j) a minus jednotku na (j, i) , a tak splňují komutační relace

$$[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{kl}] = \delta_{jk} \mathbf{e}_{il} - \delta_{jl} \mathbf{e}_{ik} + \delta_{il} \mathbf{e}_{jk} - \delta_{ik} \mathbf{e}_{jl} . \quad (7.148)$$

Není těžké nahlédnout, že tytéž komutační relace budou mít i matice \mathbf{E}_{ij} , které získáme jako

$$\mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{4} (\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j - \mathbf{E}_j \mathbf{E}_i) , \quad (7.149)$$

pokud matice \mathbf{E}_i budou navzájem antikomutovat a čtvercem každé z nich bude jednotková matice (budou tedy Diracovými γ -maticemi pro eukleidovský prostor)

$$\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j + \mathbf{E}_j \mathbf{E}_i = 2\delta_{ij} \mathbf{1} . \quad (7.150)$$

Takové matice opravdu umíme najít; budou např. tenzorovými součiny

$[n/2]$ **Pauliho matic** rozměru 2×2 , tedy maticemi rozměru $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (7.151)$$

Společně s Pauliho maticemi budou i tyto jejich tenzorové součiny hermitovské (ve všech ortonormálních bázích), z čehož je zřejmá i antihermitovost \mathbf{E}_{ij} . Explicitně lze psát

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{2i-1} &= (\sigma_z)^{\otimes(i-1)} \otimes \sigma_x \otimes (\mathbf{1}_2)^{\otimes\left(\left[\frac{n}{2}\right]-i\right)}, \\
\mathbf{E}_{2i} &= (\sigma_z)^{\otimes(i-1)} \otimes \sigma_y \otimes (\mathbf{1}_2)^{\otimes\left(\left[\frac{n}{2}\right]-i\right)}, \\
\mathbf{E}_{2m+1} &= (\sigma_z)^{\otimes m}, \quad n = 2m + 1,
\end{aligned} \tag{7.152}$$

kde značí $[x]$ celou část x , $\mathbf{1}_2$ jednotkovou matici 2×2 . Zároveň vidíme, že jsme získali, co jsme chtěli, protože pro generátory \mathbf{e}_{ij} grupy $SO(n)$ bylo nejmenší kladné číslo t , pro které

$$\exp(t\mathbf{e}_{ij}) = \mathbf{1} \tag{7.153}$$

rovno 2π ; u matic \mathbf{E}_{ij} je to 4π (tedy až rotací o 4π dostaneme jednotkový prvek grupy).

Pro lepší názornost si lze operátory \mathbf{E}_k představit jako kombinace kreačních \mathbf{b}_k^+ a anihilačních \mathbf{b}_k^- operátorů ($k = 1, \dots, l$ pro $Spin(2l - 1)$ - pak přehledně \mathbf{E}_{2k} pro $k = l$ - a $Spin(2l)$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{2k-1} &= (\mathbf{b}_k^- + \mathbf{b}_k^+), \\
\mathbf{E}_{2k} &= i(\mathbf{b}_k^- - \mathbf{b}_k^+).
\end{aligned} \tag{7.154}$$

Lehce zkontrolujeme rovnost

$$\{\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k\} = 2\delta_{jk}. \tag{7.155}$$

Operátory \mathbf{E}_{ij} pak převádějí bosonové stavy na bosonové a fermionové na fermionové (bosonovým míníme stav, vzniklý působením sudého počtu operátorů na vakuum). U $Spin(2l - 1)$ jsou pak bosonové a fermionové prostory ekvivalentní, protože je lze na sebe převádět právě tím "přehlednutým" operátorem \mathbf{E}_{2l} , který komutuje se všemi \mathbf{E}_{ij} pro $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, 2l - 1\}$ a tak má grupa $Spin(2l - 1)$ jen jednu fundamentální reprezentaci o dimenzi 2^{l-1} .

Jistě sami najdete details o strukturních zobrazeních, pomocí nichž určíme reálnost, komplexnost nebo kvaternionovost reprezentace grupy $Spin(n)$. Jde o antilineární zobrazení, které například prvku báze $\mathbf{b}_1^+ \mathbf{b}_3^+ | \mathbf{0} \rangle$ přiřadí stav $\mathbf{b}_2^+ \mathbf{b}_4^+ \mathbf{b}_5^+ \mathbf{b}_6^+ | \mathbf{0} \rangle$ (např. pro $n = 12$), ve kterém jsou obsazeny právě ty hladiny, které nebyly obsazeny ve vzoru. Vidíme, že v případě lichého počtu hladin - pro $Spin(2l)$ s lichým l , tímto vyrobíme fermionový stav z bosonového či naopak, čili nedostaneme strukturní zobrazení uvnitř např. bosonového prostoru, ale jen důkaz, že bosonový a fermionový prostor tvoří vzájemně komplexně sdružené reprezentace (musíte si určit konzistentně znaménko).

Operátor chiralita je součinem všech \mathbf{E} matic (u lichého n , kde nehraje chiralita takovou roli, neboť je jen jedna spinorová reprezentace, je konvencí, zda vše ještě vynásobíme \mathbf{E}_{n+1});

$$\bar{\gamma} = i^{[n/2]} \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n . \quad (7.156)$$

Mocninu imaginární jednotky jsme napsali proto, aby bylo $\bar{\gamma}$ hermitovské a jeho čtvercem byl jednotkový operátor; aby tedy měl vlastní čísla ± 1 .

V Lieově algebře, příslušné dané kompaktní Lieově grupě \mathbf{G} nyní zavedeme skalární součin, invariantní vůči transformacím grupy. Chceme, aby skalární součin dvou matic algebry byl invariantní vůči transformacím grupy v tzv. **přidružené reprezentaci**, což je reprezentace, která jakožto prostor splývá s algebrou Lieovou (její dimenze je tedy rovna dimenzi grupy; matice z ní značíme $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$) a prvek grupy \mathbf{G} na ní účinkuje podle

$$\mathbf{G} : \mathbf{A} \mapsto G[\mathbf{A}] = \mathbf{G} \mathbf{A} \mathbf{G}^{-1} . \quad (7.157)$$

Zkontrolujme, že $(GH)[\mathbf{A}] = G[H[\mathbf{A}]]$. Invariance znamená požadavek, aby

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \quad \forall \mathbf{H}: \quad \mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{b}(H[\mathbf{A}], H[\mathbf{B}]) . \quad (7.158)$$

Pomocí invariantní integrace lze takový skalární součin získat z libovolného (neinvariantního) skalárního součinu s "ustředněním přes grupu"

$$\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{\mathbf{G} \in \mathbf{G}} s(\mathbf{G}[\mathbf{A}], \mathbf{G}[\mathbf{B}]) . \quad (7.159)$$

Pak zjevně platí (první "rovná-se" je oprávněné díky invarianci integrace vůči substituci $\mathbf{GH} \rightarrow \mathbf{G}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(H[\mathbf{A}], H[\mathbf{B}]) &\equiv \int_{\mathbf{G} \in \mathbf{G}} s(\mathbf{GHAH}^{-1}\mathbf{G}^{-1}, \mathbf{GHBH}^{-1}\mathbf{G}^{-1}) = \\ &= \int_{\mathbf{G} \in \mathbf{G}} s(\mathbf{GAG}^{-1}, \mathbf{GBG}^{-1}) = \mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (7.160)$$

Abychom řekli něco konkrétního o způsobu invariantní integrace: zapíšeme-li matici $\mathbf{R} \in \mathbf{SU}(2)$ ve tvaru

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \exp(i\alpha) & \sin \gamma \cdot \exp(i\beta) \\ -\sin \gamma \cdot \exp(-i\beta) & \cos \gamma \cdot \exp(-i\alpha) \end{pmatrix}, \quad (7.161)$$

kde meze α, β, γ jsou zřejmé z integrálu níže, lze invariantní integraci napsat jako

$$\int_{\mathbf{R} \in \mathbf{SU}(2)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\gamma \cdot \sin(2\gamma) \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta . \quad (7.162)$$

Co se týče jednoznačnosti invariantního skalárního součinu: lze ho vždy násobit nějakou konstantou, ale pro prosté grupy je jinak určen jednoznačně. Opravdu, kdybychom měli dva skalární součiny b_1, b_2 , mohli bychom vzít (také invariantní) kombinaci

$$b = b_1 - \lambda b_2 \quad (7.163)$$

s nejmenším možným kladným λ , při němž všechny $\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ jsou ještě nezáporné, ale už pro některé nenulové \mathbf{A} jsou nulové. Pak by množina takových matic (s nulovou normou) tvořila ideál.

Dále zvolíme torus $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{G}$, to jest maximální podgrupu izomorfní (Abelově) $U(\mathbf{1})^l$ (někdy značenou jako \mathbf{T}^l , kde $\mathbf{T} = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ je grupa intervalu $\langle 0,1 \rangle$ se sčítáním "modulo jedna"). Mnohé věty nás ujišťují o tom, že příliš nezáleží na tom, který maximální torus vybereme. Jeho l nazýváme **rankem** dané grupy.

Příklad: V grupě $SO(2l)$ a $SO(2l + 1)$ lze vybrat maximální torus \mathbf{T}^l všech matic \mathbf{t} s l bloky na diagonále ($i = 1, \dots, l$)

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi x_i & -\sin 2\pi x_i \\ \sin 2\pi x_i & \cos 2\pi x_i \end{pmatrix} \quad (7.164)$$

(v případě $SO(2l + 1)$ doplníme do pravého dolního rohu jednotku). Podobně v grupě $SU(l + 1)$ umístíme na diagonálu čísla

$$\exp(2\pi x_i), \quad (7.165)$$

kde $\sum x_i = 0$ (aby byl jednotkový determinant, neprostou grupou $U(l)$ se zde nazabýváme). Infinitesimálním generátorem maximálního toru je prostor \mathbb{R}^l . V našich příkladech obsahuje matice, které mají na diagonále bloky

$$\begin{pmatrix} 0 & -x_i \\ x_i & 0 \end{pmatrix} \quad (7.166)$$

pro případ SO (u $SO(2l + 1)$ umístíme do pravého dolního rohu nulu) a nebo čísla

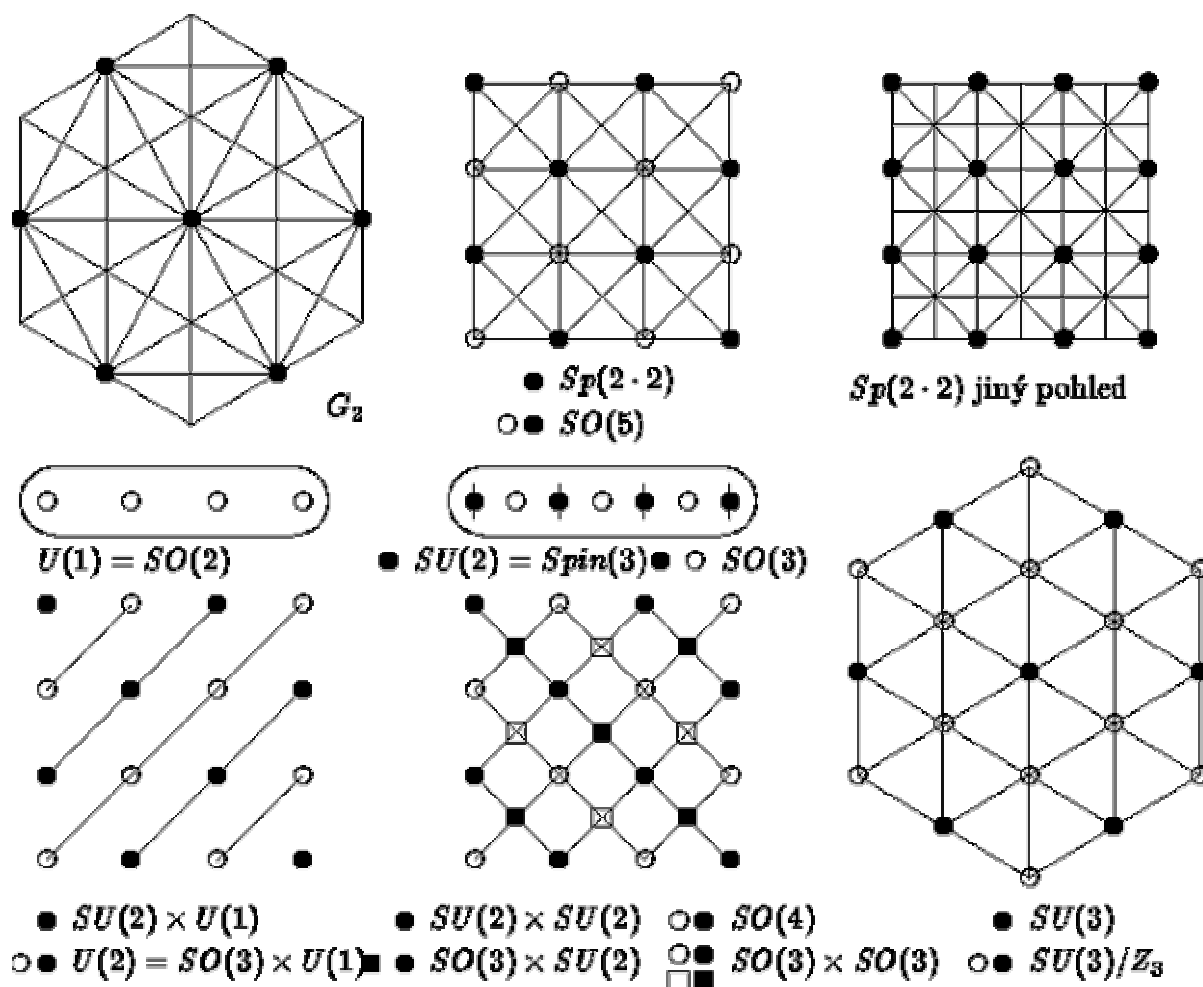
$$ix_i \quad (7.167)$$

v případě $SU(l + 1)$. \mathbf{T} je podgrupou \mathbf{G} a invariantní skalární součin z \mathfrak{g} lze zúžit na \mathfrak{t} .

Stiefelovy diagramy kreslíme do l -rozměrného prostoru, kde jsou souřadnice x_1, \dots, x_l zavedeny v souladu s tímto skalárním součinem a kolečky (resp. čtverečky) jsou vyznačeny prvky Lieovy algebry, jimž odpovídá jednotkový prvek T čili i G , to jest tzv. **celočíslná mřížka**. V našich příkladech jsou to body, kde jsou všechna x_i celá.

Na obrázku je celočíselnou mřížkou dané grupy množina všech koleček resp. čtverečků těch typů, které jsou u ní uvedeny. Rank vyznačených grup je 1 nebo 2.

Obr. 7.9



Kořeny: Zbývá vysvětlit, co znamenají ony přímky na diagramech. Vtip je v tom, že prvky T (značíme je zde t, u, \dots) působí v přidružené reprezentaci \mathfrak{g} (algebry celé grupy) tak, že se \mathfrak{g} rozpadá na direktní součet

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbf{V}_i \oplus \mathbf{V}_0 \quad (7.168)$$

příčemž na prostoru \mathbf{V}_0 (který splývá s \mathfrak{t} , je-li \mathbf{T} opravdu maximální torus) účinkují prvky \mathfrak{t} triviálně

$$\forall \mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}_0 : \mathbf{t}\mathbf{v}_0\mathbf{t}^{-1} = \mathbf{v}_0 \quad (7.169)$$

a \mathbf{V}_i jsou dvojrozměrné prostory (je jich r , což je - z důvodů rovnosti dimenzí - polovina rozdílu dimenze grupy a jejího ranku, čili bude dokázáno, že tento rozdíl je sudý) generované maticemi $\mathbf{M}_i, \mathbf{N}_i$, na nichž působí \mathfrak{t} podle

$$\begin{aligned} \mathbf{t}\mathbf{M}_i\mathbf{t}^{-1} &= \mathbf{M}_i \cos(2\pi\theta_i) - \mathbf{N}_i \sin(2\pi\theta_i), \\ \mathbf{t}\mathbf{N}_i\mathbf{t}^{-1} &= \mathbf{M}_i \sin(2\pi\theta_i) + \mathbf{N}_i \cos(2\pi\theta_i), \end{aligned} \quad (7.170)$$

kde θ_i jsou nějaké kombinace x_i (např. $x_1 - x_2$), to jest nějaké lineární formy na \mathfrak{t} , a nazýváme je **kořeny** dané grupy.



Eduard L. Stiefel (1909 – 1978)

Vidíme, že pokud např. vyměníme \mathbf{M}_i a \mathbf{N}_i (nebo třeba změníme znaménko u jedné z nich), bude poslední vysazená formule dále platná, změníme-li znaménko u θ_i . Tedy spolu s $+\theta_i$ říkáme kořen i formě $-\theta_i$.

Ještě výhodnější může být komplexifikovat Lieovu algebru (dosud jsme ji vždy považovali za prostor nad \mathbf{R} , prvky byly jen reálnými kombinacemi prvků báze, kterými - samozřejmě - mohly být i komplexní matice) a docílit tak, že se nám bude transformovat do sebe jen jedna matice $\mathbf{Q}_i = \mathbf{M}_i + i\mathbf{N}_i$ resp. $\mathbf{Q}'_i = \mathbf{M}_i - i\mathbf{N}_i$ místo dvou $\mathbf{M}_i, \mathbf{N}_i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{tQ}_i\mathbf{t}^{-1} &= \exp(2\pi\theta_i)\mathbf{Q}_i, \\ \mathbf{tQ}'_i\mathbf{t}^{-1} &= \exp(-2\pi\theta_i)\mathbf{Q}'_i. \end{aligned} \quad (7.171)$$

Matice \mathbf{Q}_i pak prostě odpovídá kořenu θ_i a matice \mathbf{Q}'_i kořenu $-\theta_i$.

Příklady: Grupa $SU(2l + 1)$ (stejně jako $U(l + 1)$) má kořeny $\theta_{rs} = x_r - x_s$, kde $r \neq s \in \{1, 2, \dots, l\}$ a jako odpovídající matici \mathbf{Q}_{rs} si lze představit matici, která má všude nuly kromě pozice (r, s) , kde má cokoli nenulového. Každý může ověřit, že $\mathbf{tQ}_{rs}\mathbf{t}^{-1}$ dá to, co má.

Podobně grupa $SO(2l)$ má kořeny $x_r - x_s$, ale navíc má kořeny $\pm(x_r + x_s)$, $r \neq s$ a grupa $SO(2l + 1)$ má proti $SO(2l)$ další kořeny $\pm x_r$.

Do Stiefelových diagramů tedy zakreslíme navíc množiny bodů \mathbf{u}_i (dimenze o jednu menší, než je rank), v nichž kořeny nabývají celých hodnot. Kořeny nabývají celých hodnot na celočíselné mřížce, kde $\mathbf{t} = \mathbf{1}$. Obecněji, průnikem soustav rovnoběžných hyperrovin \mathbf{u}_i jsou body, odpovídající centru grupy.

Přenechme specialistům důkazy toho, že tzv. **Weylova grupa**, to jest grupa všech vnitřních automorfismů \mathbf{G} fixujících zvolený maximální torus, obsahuje pro každé i prvek, který ponechává systém hyperrovin \mathbf{u}_i na místě. Je-li tomu tak, musí jít o zrcadlení podle roviny kolmé na daný kořen (pomocí invariantního skalárního součinu jsme ztotožnili infinitesimální generátor toru s jeho duálem) v obyčejném geometrickém smyslu (podle invariantního skalárního součinu). Takové zrcadlení musí množině všech kořenů přiřadit tutéž množinu. Vyslovme tedy definici.

Systémem kořenů v eukleidovském prostoru E nazýváme konečnou podmnožinu $\Sigma \subseteq E$ takovou, že

- neobsahuje nulový vektor
- pro $\alpha \in \Sigma$ je $c\alpha \in \Sigma$ právě když $c = \pm 1$
- zrcadlení podle hyperroviny (nadroviny) kolmé na kterýkoli z kořenů převádí Σ na Σ
- pro všechny dvojice kořenů α, β je

$$\{\alpha, \beta\} = \frac{2\mathbf{b}(\alpha, \beta)}{\mathbf{b}(\beta, \beta)} \quad (7.172)$$

celé číslo.

Poslední bod je důsledkem toho, že zrcadlení kořenu α podle roviny kolmé na β má samozřejmě tvar

$$\varphi_{\beta}(\alpha) = \alpha - \frac{2\mathbf{b}(\alpha, \beta)}{\mathbf{b}(\beta, \beta)}\beta, \quad (7.173)$$

Ize vybrat vektor \mathbf{v} , na němž forma β nabývá jednotky, zjistíme, že $\varphi_{\beta}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$ náleží celočíselné mřížce (protože φ_{β} fixuje \mathbf{u}_{β}). Z toho dále plyne, že

$$\alpha(\mathbf{v} - \varphi_{\beta}(\mathbf{v})) = \alpha\mathbf{v} - [\varphi_{\beta}(\alpha)](\mathbf{v}) \quad (7.174)$$

je celé (úprava vychází z toho, že při skalárním součinu je jedno, který činitel zrcadlíme), což po dosazení ($\beta(\mathbf{v}) = 1$) dává uvedený výsledek.

Buď jak buď, poslední bod má silný důsledek.

Věta: Dva kořeny $\alpha \neq \pm\beta$ jsou

- (0) buď kolmé
- (1) nebo svírají úhel 60° nebo 120° a mají stejnou normu
- (2) nebo svírají úhel 45° nebo 135° a poměr norem je $\sqrt{2}$
- (3) nebo svírají úhel 30° nebo 150° a poměr norem je $\sqrt{3}$

Důkaz: Čtyřnásobek kvadrátu kosinu úhlu kořeny sevřený

$$4 \cos^2 \omega = \frac{2\mathbf{b}(\alpha, \beta) \cdot 2\mathbf{b}(\beta, \alpha)}{\mathbf{b}(\alpha, \alpha) \cdot \mathbf{b}(\beta, \beta)} \quad (7.175)$$

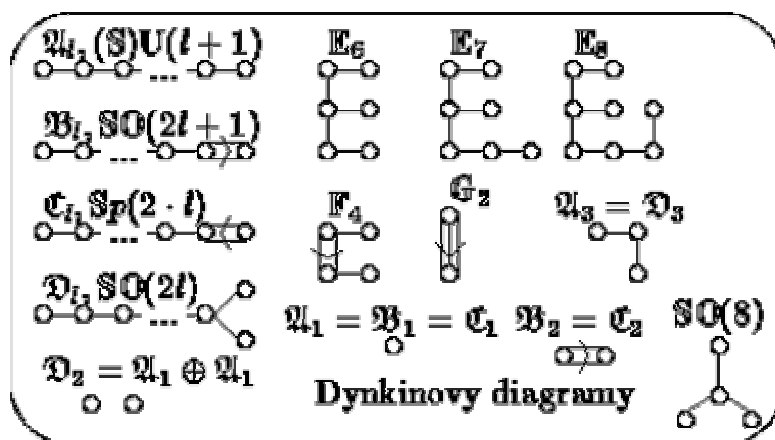
je menší (díky nezávislosti α, β ostře) než čtyři. Je to ale součin dvou celých čísel, a tak je jedno nulové (případ 0) nebo jedno rovné ± 1 . Možnosti pak lehce proberete.

Všechny kořeny daného systému lze získat jako celočíselné kombinace (lineárně nezávislých) **prostých kořenů**. Potom tento systém prostých kořenů lze buď rozdělit na sjednocení disjunktních a neprázdných množin kořenů, kde dvojice z různých podmnožin jsou vždy kolmé, a takové nerozložitelné systémy prostých kořenů lze znázornit pomocí **Dynkinova diagramu**. Prosté kořeny v něm spojíme tolika čarami, jaké je číslo varianty jejich vzájemné polohy podle poslední věty.

V případech (2) a (3) je ještě slušné přikreslit na spojnici šipku, namířenou ke kratšímu kořenu (jako při obyčejném porovnávání $<$). Pokud se (2) a (3) v Dynkinově diagramu nevyskytuje, mají všechny kořeny stejnou délku a dané algebře říkáme **jednoduše šněrovaná** (simply laced).

Jiné systémy prostých kořenů, než ty s následujícími Dynkinovými diagramy, neexistují a spolu s tím neexistují další prosté kompaktní grupy.

Obr. 7.10



Všimněte si, že na obrázku mají některé Dynkinovy diagramy určité symetrie: permutací různých kořenů dostaneme týž obrázek. Nebudeme to rozebírat, ale je to spojeno s existencí **vnějších automorfismů** dané algebry (vnější je takový, který nelze zapsat jako sdružení nějakým prvkem grupy \mathfrak{g} : $\mathbf{A} \rightarrow \mathfrak{g}\mathbf{A}\mathfrak{g}^{-1}$). S vnějšími automorfismy lze očekávat symetrie mezi reprezentacemi; u grup s Dynkinovými diagramy, které mají symetrie, lze očekávat větší počet fundamentálních reprezentací (\mathbf{E}_6 například nebo $SU(l+1)$ pro $l > 1$ má dvě vzájemně komplexně sdružené, symetrie **parity**, vyměňující pravé dva kořeny Dynkinova diagramu, u $Spin(2l)$ garantuje existenci dvou "vzájemně zrcadlově sdružených" spinorových reprezentací). Grupa $Spin(8)$ má dokonce symetrii **triality** : lze u ní permutovat tři kořeny a je s tím spojena skutečnost, že dvě reálné spinorové reprezentace (s dvěma různými chiralitami) a reprezentace vektorová mají stejnou dimenzi 8.



Evgenii Borisovič Dynkin (1924)

Naopak, pro každý z uvedených diagramů lze sestavit Lieovu algebru a z ní také kompaktní grupu. Několikrát jsme již diskutovali (a budeme) o tom, že $SO(3)$ má stejnou algebru jako $SU(2)$, která má centrum \mathbf{Z}_2 (plus minus jednotková matice), zatímco $SO(3)$ má triviální jednoprvkové centrum. Nyní můžeme izomorfnost těchto algeber ukázat na shodnosti Dynkinových diagramů. Maximální centrum (poloprosté, neobsahující $U(2) \times \dots$) grupy s danou algebrou, která lze vytvořit, vystihuje následující tabulka.

Tab. 7.2

A_l	B_l, C_l, E_7	D_{2s}	D_{2s+1}	E_6	E_8, F_4, G_2
Z_{l+1}	Z_2	$Z_2 \times Z_2$	Z_4	Z_3	$\{\mathbf{1}\}$

Tak například, grupa $A_l = \mathbf{SU}(l + 1)$ má centrum Z_{l+1} .

Jako jednoduché cvičení ponecháváme čtenáři důkaz, že není možné získat grupy E_9 atd., proč mají vyňaté grupy dimenzi, kterou jsme uváděli atd.

Poradíme vám, aby jste si zapsali v nějakých souřadnicích prosté kořeny. Např.

- A_l má prosté kořeny $x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots$, kde pracujeme jen
- s hyperrovinou, kde $\sum x_i = 0$
- B_l má prosté kořeny $x_1 - x_2, \dots, x_{l-1} - x_l, x_l$
- C_l má prosté kořeny $x_1 - x_2, \dots, x_{l-1} - x_l, 2x_l$
- D_l má prosté kořeny $x_1 - x_2, \dots, x_{l-1} - x_l, x_{l-1} + x_l$

Váhy: Kořeny byly speciálními případy vah. Obecně **vahou** máme na mysli lineární formu na Cartanově podalgebře, nabývající celých hodnot na celočíselné mřížce. Zajímavější jsou ale **váhy reprezentace** V dané algebry. Prvky Cartanovy podalgebry navzájem komutují, a tudíž můžeme hledat jejich společné vlastní vektory ve V a čísla. Váha dané (mluvíme o komplexní) reprezentace je tedy taková forma, která přiřadí prvku Cartanovy podalgebry jeho vlastní číslo příslušející nějakému vlastnímu vektoru celé podalgebry. Jestliže tedy počítáme každou váhu tolikrát, kolikarozměrný prostor jejich vlastních vektorů jí přísluší, bude vah právě tolik, jaká je dimenze V .

Kořeny lze tedy chápat jako váhy přidružené reprezentace; těchto vah je tedy tolik, kolik je dimenze dané algebry, ovšem jen proto, že počítáme i l (rank) nulových vah (vlastními vektory jsou prvky Cartanovy podalgebry), které obvykle za kořeny nepovažujeme.

Tak například grupa $SO(2l)$ (l je rank) má v základní $2l$ -rozměrné vektorové reprezentaci $2l$ vah $\pm e_i$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Samoduální mřížky: Když už jsme došli tak daleko, můžeme si něco říci o vlastnostech mřížek (soustava diskretních bodů v prostoru \mathbf{R}^n , zpravidla celočíselné kombinace základních mřížkových vektorů), a to z fyzikálního pohledu v současnosti nejnadějnějšího kandidáta na teorii všeho – heterotické struny.

Kvantová teorie bosonové struny funguje pouze v dimenzi časoprostoru 26, kvantová teorie superstruny jen v dimenzi 10. Navíc vlevojdoucí a vpravojdoucí módy uzavřené struny spolu navzájem komutují a generátory grupy Poincaré jsou součty vlevojdoucí a vpravojdoucí části. Lze pak tedy vzít levý sektor z bosonové struny a pravý ze superstruny. Přebytečných 16 vlevojdoucích bosonových dimenzí lze svinout na torus; aby z bosonových rozměrů zbyla jen vlevojdoucí část, je třeba, aby celková hybnost struny byla rovna celkovému obtáčení (ztotožníme-li body, které se liší o celočíselné kombinace mřížkových vektorů, je možné, aby při objíždění uzavřené struny jsme popojeli o nějakou takovou kombinaci - to nazýváme obtáčením). Aby vůbec existovaly nějaké stavy s nenulovou celkovou hybností ve směru svinutých souřadnic (což je nutné k dobrému chování interakcí), je třeba, aby **duální mřížka** (všech forem, nabývajících celých hodnot na původní mřížce) měla s původní společné body (při ztotožnění původního prostoru s duálem). Dokonce je dobré předpokládat, aby splývaly, to jest aby byla **mřížka samoduální**. Navíc se budeme zabývat jen **sudými** samoduálními mřížkami, kde čtverec délky každého jejího vektoru je sudý.

Je matematickou pravdou, že sudé samoduální mřížky existují jen v prostorech o dimenzi, která je násobkem osmi. Tak třeba v osmi rozměrech máme samoduální mřížku Γ_8 všech celočíselných kombinací kořenů vyňaté grupy E_8 . Těmi jsou ($i, j = 1, 2, \dots, 8$)

$$\pm e_i \pm e_j, \quad i \neq j, \quad \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \dots \pm e_8), \quad (7.176)$$

kde v druhém tvaru kořenů bereme jen ty se sudým počtem plusů. Lehce napočítáte, že je jich celkem $112 + 128 = 240$ právě $248 - 8$, čili dimenze minus rank. Formy \mathbf{v} nabývající celých hodnot na všech těchto kořenech jsou pak kombinacemi těchto kořenů (ortonormální bázi \mathbf{e}_i ztotožňujeme s bázi k ní duální):

Lehce totiž ukážete, že souřadnice \mathbf{v} jsou buď všechny celé nebo všechny polocelé. Celočíselnost formy \mathbf{v} na $\mathbf{r}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ pak říká,

že suma souřadnic \mathbf{v} musí být sudá, a tak je \mathbf{v} celočíselnou lineární kombinací $\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j$ (v případě, že souřadnice \mathbf{v} jsou celé), a nebo toto platí pro $\mathbf{v} - \mathbf{r}_0$, čímž jsme ukázali, že i \mathbf{v} leží v Γ_8 , neboli samodualitu Γ_8 .

Samozřejmě, lze vybrat osm základních mřížkových vektorů, jejichž celočíselnými kombinacemi jsou všechny ostatní, např.

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_6 - \mathbf{e}_7, \\ & \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6 - \mathbf{e}_7 - \mathbf{e}_8), \\ & \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_6 - \mathbf{e}_7 - \mathbf{e}_8). \end{aligned} \quad (7.177)$$

V šestnácti rozměrech najdeme kartézský součin $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ dvou kopií Γ_8 a mřížku Γ_{16} , která obsahuje jako podmřížku kořenovou mřížku $SO(32)$. Jde o všechny celočíselné kombinace vektorů ($i, j = 1, 2, \dots, 16$)

$$\pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j, \quad i \neq j, \quad \frac{1}{2}(\pm \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2 \dots \pm \mathbf{e}_{16}), \quad (7.178)$$

kde v druhé sadě je sudý počet plusů. Důkaz samoduality probíhá stejně jako u Γ_8 a i zde je možné vybrat 16 základních mřížkových vektorů.

To jsou důvody, proč promýšlíme teorii heterotické struny jen

s kalibrační grupou $\frac{Spin(32)}{\mathbb{Z}_2}$ (odpovídající mřížce Γ_{16}) nebo

(zajímavější) grupou $\mathbf{E}_8 \times \mathbf{E}_8$ (s mřížkou $\Gamma_8 \times \Gamma_8$).