# Symetrie

## Grupy ve fyzice

Ve fyzice našly grupy své první uplatnění v krystalografii, kde se pomocí nich vyjadřují vlastnosti symetrie krystalové mřížky pevných látek. V relativistické fyzice se poprvé grupy objevily již v práci H.Poincaré, který ukázal, že transformace prostorových a časových souřadnic mezi inerciálními vztažnými soustavami (které nazval Lorentzovy) tvoří (Lieovu) grupu; tato grupa obecných Lorentzových transformací (nehomogenních, včetně translací) se nazývá **Poincarého grupa**. Při dalším rozvoji speciální a zvláště obecné teorie relativity se však s použitím grup můžeme setkat jen ojediněle a okrajově. Teorie grup se od konce 20. a začátku 30.let začala více uplatňovat v kvantové mechanice při analýze víceelektronových konfigurací atomů a v kvantové chemii.

*Grupy unitární symetrie*

Nové obzory pro aplikaci grup se od 40. a 50.let let otevřely v jaderné fyzice při popisu vlastností **elementárních částic**. Velký počet elementárních částic, které byly objeveny při vysokoenergetických interakcích, přirozeně vedl ke snahám o jejich **systematiku** a zavedení **unitarizačních schémat**. Především, každému baryonu a leptonu je přiřazeno **baryonové číslo** B a **leptonové číslo** L (částice +1, antičástice -1), které se zachovávají při všech interakcích. Byly zjištěny výrazné **podobnosti** a **symetrie** mezi některými elementárními částicemi, především hadrony.
Odhlédneme-li od elektrického náboje, lze např. protony a neutrony považovat za dva stavy (dublet) jedné částice - nukleonu. Podobně piony $\pi^+,\pi^o,\pi^-$ tvoří triplet podobných částic. Při studiu samotných silných interakcí, které jsou nábojově nezávislé, můžeme od náboje odhlédnout. Pro popis těchto podobností a symetrií byla zavedena nová veličina **izotopický spin** neboli **izospin T**. Nukleony mají izospin T = 1/2, přičemž projekce izospinu T = +1/2 odpovídá protonu a T = -1/2 neutronu. Pionům se připsal izospin T = 1, s projekcemi -1,0,+1 pro $\pi^-,\pi^o,\pi^+$. V soustavě interagujících nukleonů a pionů pak

platí zákon zachování izospinu. Pro vyjádření těchto symetrií vznikla grupa ***SU*(2)** - speciální, unitární (unimodulární) grupa v komplexním 2-rozměrném prostoru; tato grupa je lokálně izomorfní grupě rotací ***O*(3)** v 3-prostoru, vyjadřující izotropii prostoru - symetrii vůči prostorovým rotacím, vedoucí k zákonu zachování momentu hybnosti. Vyšlo se z formální analogie s obyčejným spinem, kde částice se spinem 1/2 se vyskytuje ve dvou stavech s průmětem spinu -1/2, +1/2 a částice se spinem 1 ve třech stavech s průměty spinu -1,0,+1. Izospin **T** je vektorem v myšleném (pomocném) "izotopickém prostoru". Obecně částice s izospinem T se může vyskytovat v (2 T + 1) stavech s projekcemi izospinu na vztažnou osu:

$$-T, (-T+1), (-T+2), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (T-2), (T-1), T . \qquad (8.1)$$

Dalším důležitým krokem byl objev některých "podivných" (nečekaných) vlastností interakcí mesonů K a hyperonů při jejich sdružené párové produkci, které vedly k zavedení pojmu **podivnosti**, popsaného kvantovým číslem S ("Strange"). Později bylo zavedeno obecnější kvantové číslo zvané **hypernáboj** Y = B + S, dané součtem baryonového čísla B a podivnosti S. Ukázalo se, že při silných interakcích se zachovává jak izospin T, tak hypernáboj Y. To přivedlo k hledání grupy ***SU***(2) × Y, popisující rozšířené vlastnosti symetrie hadromů. V r.1964 navrhli M.Gellman a E.Neeman použít minimální Lieovu grupu, obsahující ***SU***(2) × Y jako podgrupu - **grupu unitární symetrie *SU*(3)**. Tato rozšířená symetrie vedla k sestavení multipletu baryonů - dekupletu ($3/2^+$), v němž však v té době chybělo jedno místo; byl tak předpovězen hyperon **Ω**, který byl zanedlouho skutečně objeven.
Grupa symetrií hadronů je 4-parametrická grupa zachování izospinu a hypernáboje. Další analýza unitární symetrie ukázala, že systematiku hadronů lze velmi dobře vysvětlit hypotézou, že hadrony jsou složeny ze subčástic - tripletu kvarků. Vznikla tak kvantová chromodynamika jakožto teorie silných interakcí - grupy symetrií ***U***(1), ***SU***(2), ***SU***(3), ....., ***SO***(...), .... , Lieovy algebry, ... .
V terminologii teorie grup unitárních symetrií lze říci, že **částice jsou reprezentacemi grupy symetrií**. Přesněji, komponenty báze ireducibilní reprezentace grupy symetrie ztotožňujeme

(interpretujeme, přiřazujeme) s množinou fyzikálních stavů - částicemi (popř. jejich ecxitovanými stavy, rezonancemi).

*Lorentzova grupa*

**Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928)**

Světobod $Q$ je v pevně zvolené inerciální soustavě určen okamžikem $t$ a polohovým vektorem **r**.
Jinými slovy řečeno, světobod $Q$ je určen řtyřvektorem $q$, jehož kontravariantní komponenty

$$q^{\mu} \equiv \{ct, \mathbf{r}\}, \qquad (8.2)$$

tj.

$$q^{0} \equiv ct, \qquad (8.3)$$

a

$$q^{0} \equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{k} \qquad (8.4)$$

je projekce vektoru **r** na $k$-tou souřadnou osu.
Souřadnice $q'^{\mu}$ téhož světobodu v libovolné jiné inerciální souřadné soustavě souvisejí s $q^{\mu}$ lineární transformací

$$q'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, q^{\nu} + b^{\mu}. \qquad (8.5)$$

Interval mezi dvěma světobody *x*, *y* je veličina, invariantní, tj. musí platit

$$\left(x_\mu - y_\mu\right)\left(x^\mu - y^\mu\right) = \left(x'_\mu - y'_\mu\right)\left(x'^\mu - y'^\mu\right) \equiv \left(x-y\right)^2, \qquad (8.6)$$

kde kovariantní komponenty

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu . \qquad (8.7)$$

Požadavek ( 8.6 ) je splněn právě tehdy, když reálné parametry transformace ( 8.5 ) vyhovují podmínce

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\sigma{}_\nu \Lambda^\mu{}_\rho = g_{\nu\rho} . \qquad (8.8)$$

Všechny takovéto transformace tvoří **Poincarého grupu**.
Nejprve se omezíme pouze na vyšetřování **Lorentzovy grupy**, která je tvořena těmi z uvažovaných transformací, pro něž je $b_\mu$ =0, tj transformace

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu . \qquad (8.9)$$

Povšimněme si, že díky relaci ( 8.8 ) je poslední formule ekvivalentní vztahu

$$x^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu x'^\nu . \qquad (8.10)$$

Pro další bude výhodné, transformaci ( 8.9 ) zapsat v maticovém tvaru jako

$$x' = \mathbf{\Lambda} x , \qquad (8.11)$$

kde jednosloupcová matice

$$x \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{8.12}$$

a elementy čtvercové matice $\mathbf{\Lambda}$ jsou definovány jako

$$\mathbf{\Lambda}_{(\mu,\nu)} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \ , \tag{8.13}$$

kde závorkou zdůrazňujeme, že na levé straně nejde o tenzorové indexy, ale o indexy číslující maticové elementy.
Zavedeme-li ještě čtvercovou matici $g$ jejíž elementy

$$g_{(\mu,\nu)} \equiv g_{\mu\nu} \ , \tag{8.14}$$

můžeme podmínku ( 8.8 ) vyjádřit v maticovém tvaru jako

$$\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{T}}\mathbf{g}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{g}, \tag{8.15}$$

což je ekvivalentní s

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{g}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{T}}\mathbf{g} \ . \tag{8.16}$$

Porovnáním determinantů obou stran této rovnosti dostáváme

$$\left(\det \mathbf{\Lambda}\right)^2 = 1 \ . \tag{8.17}$$

Komponentu (0, 0) maticové rovnosti ( 8.15 ) lze přepsat do tvaru

$$\left(\mathbf{\Lambda}_{(0,0)}\right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}\left(\mathbf{\Lambda}_{(i,0)}\right)^2, \tag{8.18}$$

z něhož vidíme, že

$$\left(\mathbf{\Lambda}_{(0,0)}\right)^2 \geq 1 \ . \tag{8.19}$$

Na základě formulí ( 8.17 ), ( 8.19 ) můžeme všechny elementy Lorentzovy grupy rozdělit do čtyř podmnožin:
Elementy, pro něž platí

$$\det \mathbf{\Lambda} = 1 , \quad \mathbf{\Lambda}_{(0,0)} \geq 1 \ , \tag{8.20}$$

tvoří tzv. **vlastní Lorentzovu grupu *SO*($m$,$n$)**, což je grupa vlastních Lorenzových transformací v $m + n$ dimenzionálním Minkowského prostoru, v němž čas je $n$ dimenzionální.
My budeme prozatím operovat pouze ve čtyřrozměrném prostoročasu, tj. na grupě ***SO***(3,1).
Ostatní podmnožiny již nepředstavují podgrupy, avšak z ***SO***(3,1) je obdržíme velice snadno:
Libovolný element Lorentzovy grupy, pro který platí

$$\det \mathbf{\Lambda} = -1 , \quad \mathbf{\Lambda}_{(0,0)} \geq 1 \ , \tag{8.21}$$

resp.

$$\det \mathbf{\Lambda} = -1 , \quad \mathbf{\Lambda}_{(0,0)} \leq 1 \ , \tag{8.22}$$

resp.

$$\det \mathbf{\Lambda} = 1 , \quad \mathbf{\Lambda}_{(0,0)} \leq -1 \ , \tag{8.23}$$

Můžeme vyjádřit jako součin nějakého elementu ***SO***(3,1) s prostorovou inverzí $\mathbf{P} \equiv \mathbf{\Lambda}(P)$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} , \tag{8.24}$$

resp. časovou inverzí $\mathbf{T} \equiv \mathbf{\Lambda}(T)$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{8.25}$$

resp. časoprostorovou inverzí $\mathbf{P} \equiv \mathbf{\Lambda}(PT) \equiv \mathbf{\Lambda}(P)\ \mathbf{\Lambda}\ (T)$:

$$\mathbf{PT} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{8.26}$$

Libovolný element $\boldsymbol{SO}(3,1)$ lze získat složením speciální Lorentzovy transformace s pootočením souřadných os.
Pootočení souřadné soustavy o úhel $\varphi$ kolem osy určené jednotkovým vektorem **n** je popsáno transformační maticí

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{n},\varphi) = \exp(i\varphi\mathbf{nM}), \tag{8.27}$$

kde

$$\mathbf{M_1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & i & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -i & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -i & \cdot \\ \cdot & i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{8.28}$$

jsou generátory rotací kolem příslušných souřadných os.
Všechna možná pootočení souřadné soustavy tvoří grupu $\boldsymbol{SO}(3)$, která je samozřejmě podgrupou grupy $\boldsymbol{SO}(3,1)$.

Přechodu k souřadné soustavě, která se vůči výchozí pohybuje rychlostí $v$ ve směru jednotkového vektoru **n**, odpovídá transformační matice

$$\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{n},v)=\exp(iu\mathbf{nN}) \ , \tag{8.29}$$

kde parametr

$$u=\operatorname{argtgh}\frac{v}{c}=\frac{1}{2}\ln\frac{c+v}{c-v} \tag{8.30}$$

nazýváme **rapidita**, a matice

$$\mathbf{N}_1=\begin{pmatrix} \cdot & i & \cdot & \cdot \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N}_2=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N}_3=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{8.31}$$

jsou generátory speciálních Lorenzových transformací podél příslušných souřadných os.
Tento pohyb budeme nazývat **boost**.
Kompozicí dvou boostů podél stejné osy představuje opět boost podél téže osy, ale transformace vzniká složením boostů v různých směrech již bosostem být nemusí, tj. všechny možné boosty (na rozdíl od rotací) grupu netvoří.
Matici odpovídající libovolné vlastní Lorentzově transformaci lze jednoznačně určit pomocí šesti reálných parametrů tak, že

$$\boldsymbol{\Lambda}(a_1,\dots,a_6)=\exp\left\{i\sum_{j=1}^{3}\left(a_j\mathbf{M}_j+a_{j+3}\mathbf{N}_j\right)\right\}. \tag{8.32}$$

***SO***(3,1) je šestiparametrickou nekompaktní Lieovou grupou.
Odpovídající Lieova algebra je determinována komutačními relacemi mezi generátory ( 8.28 ), ( 8.31 ):

$$\left[\mathbf{M}_j,\mathbf{M}_k\right]=i\varepsilon_{jkl}\mathbf{M}_l\ ,$$
$$\left[\mathbf{N}_j,\mathbf{N}_k\right]=-i\varepsilon_{jkl}\mathbf{M}_l\ , \qquad (\ 8.33\ )$$
$$\left[\mathbf{N}_j,\mathbf{M}_k\right]=\left[\mathbf{M}_j,\mathbf{N}_k\right]=i\varepsilon_{jkl}\mathbf{N}_l\ .$$

definujeme-li

$$\mathbf{I}^{jk}\equiv-\mathbf{I}^{kj}\equiv\varepsilon_{jkl}\mathbf{M}_l\ ,\qquad \mathbf{I}^{0k}\equiv-\mathbf{I}^{k0}\equiv\mathbf{N}_k\ , \qquad (\ 8.34\ )$$

můžeme komutační relace ( 8.33 ) zapsat jako

$$\left[\mathbf{I}^{\mu\nu},\mathbf{I}^{\rho\sigma}\right]=i\left(g^{\mu\sigma}\mathbf{I}^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}\mathbf{I}^{\nu\sigma}+g^{\nu\sigma}\mathbf{I}^{\mu\sigma}-g^{\nu\sigma}\mathbf{I}^{\mu\rho}\right)\ . \qquad (\ 8.35\ )$$

Zavedeme-li parametry

$$\omega_{kl}\equiv-\omega_{lk}\equiv\varepsilon_{kli}a_i\ ,\qquad \omega_{0l}\equiv-\omega_{l0}\equiv a_{l+3}\ , \qquad (\ 8.36\ )$$

můžeme matici ( 8.32 ) zapsat jako

$$\boldsymbol{\Lambda}(\omega)=\exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{I}^{\alpha\beta}\right). \qquad (\ 8.37\ )$$

Snadno se lze přesvědčit, že transformace, pro které $\omega_{j0}$ = 0, tvoří podgrupu vlastní Lorentzovy grupy, jíž je pochopitelně grupa ***SO***(3) generovaná generátory třírozměrných rotací **R**, jíž jsme se dostatečně věnovali již v UTU.
Odpovídající matice mají kvazidiagonální tvar

$$\boldsymbol{\Lambda}(R)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&&&\\0&&\mathbf{R}&\\0&&&\end{pmatrix}\ . \qquad (\ 8.38\ )$$

Porovnáním s formulí ( 8.27 ), resp. ( 8.29 ) vidíme, že natočení o úhel $\varphi$ kolem osy **n** odpovídají parametry

$$\omega_{0k} = 0 , \qquad \omega_{jk} = \varphi \varepsilon_{jkl} n_l \ , \tag{8.39}$$

resp., že posouvání rychlostí *v* ve směru **n** odpovídají parametry

$$\omega_{0k} = u n_k \ , \qquad \omega_{jk} = 0 \ . \tag{8.40}$$

Z formulí ( 8.28 ), ( 8.31 ), ( 8.34 ) nalezneme, že elementy matic $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ mají tvar

$$\left(\mathbf{I}^{\alpha\beta}\right)_{(\mu,\nu)} = \mathbf{I}^{\alpha\beta,\mu}{}_{\nu} \ , \tag{8.41}$$

kde na pravé straně vystupují elementy invariantního tenzoru 4. řádu

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta,\mu}{}_{\nu} \equiv i\left(g^{\alpha\mu} g^{\beta}_{\nu} - g^{\alpha}_{\nu} g^{\beta\mu}\right) \ . \tag{8.42}$$

povšimněme si, že platí

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta,\mu\nu} = -\mathbf{I}^{\beta\alpha,\mu\nu} = -\mathbf{I}^{\alpha\beta,\nu\mu} = \mathbf{I}^{\mu\nu,\alpha\beta} \ . \tag{8.43}$$

Z formulí ( 8.37 ) až ( 8.42 ) vidíme, že v případě infinitesimálních transformací nabývá vztah ( 8.9 ) tvaru

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \ . \tag{8.44}$$

Na základě komutačních relací ( 8.35 ) snadno zjistíme, že matice

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\mu\nu}\mathbf{I}^{\mu\nu} = \hat{\mathbf{M}}^2 - \hat{\mathbf{N}}^2 \ , \\ &\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathbf{I}_{\mu\nu}\mathbf{I}_{\rho\sigma} = \hat{\mathbf{M}} \cdot \hat{\mathbf{N}} \end{aligned} \tag{8.45}$$

komutují se všemi generátory ***SO***(3,1).

Těmto veličinám jsou v libovolné ireducibilní reprezentaci ***SO***(3,1) přiřazeny násobky operátoru identity.
Hodnoty těchto násobků je možno využít ke klasifikaci ireducibilních reprezentací.
Ireducibilní reprezentace ***SO***(3,1) se však častěji specifikují zadáním hodnot jiných parametrů.
K tomu zaveďme veličiny

$$\mathbf{J}_{(1)}^{l} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{M}_l + i\mathbf{N}_l\right), \qquad (8.46)$$
$$\mathbf{J}_{(1)}^{l} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{M}_l - i\mathbf{N}_l\right).$$

Komutační relace ( 8.33 ) jsou pak ekvivalentní relacím

$$\left[\mathbf{J}_{(1)}^{j}, \mathbf{J}_{(1)}^{k}\right] = i\varepsilon_{jkl}\mathbf{J}_{(1)}^{l},$$
$$\left[\mathbf{J}_{(2)}^{j}, \mathbf{J}_{(2)}^{k}\right] = i\varepsilon_{jkl}\mathbf{J}_{(2)}^{l}, \qquad (8.47)$$
$$\left[\mathbf{J}_{(1)}^{j}, \mathbf{J}_{(2)}^{k}\right] = 0.$$

Veličiny $\hat{\mathbf{J}}_{(1)}$, $\hat{\mathbf{J}}_{(2)}$ tedy můžeme formálně identifikovat jako dva nezávislé impulsmomenty.
Ireducibilní reprezentace ***SO***(3,1) pak určujeme zadáním velikostí těchto impulsmomentů.
Tj. $D^{(j,j')}$ označuje $(2j + 1)\,(2j' + 1)$ rozměrnou ireducibilní reprezentaci ***SO***(3,1), v níž veličině $\hat{\mathbf{J}}_{(1)}^2$, resp. $\hat{\mathbf{J}}_{(2)}^2$ je přiřazena jednotková matice vynásobená faktorem $j(j + 1)$, resp. $j'(j' + 1)$.
Všechny konečněrozměrné ireducibilní reprezentace obdržíme, když necháme parametry $j$, $j'$ nezávisle probíhat všechny nezáporné celé a polocelé hodnoty.
Přitom každá z veličin $\hat{\mathbf{J}}_{(1)}^2$, $\hat{\mathbf{J}}_{(2)}^2$ je reprezentována hermitovskou maticí.

Z definice ( 8.46 ) pak vidíme, že v libovolné konečněrozměrné reprezentaci jsou přiřazeny generátorům $\mathbf{M}_l$ matice hermitovské, ale matice odpovídají generátorům $\mathbf{N}_l$ se od hermitovských liší faktorem $i$. Tedy s výjimkou triviální reprezentace $D^{(0,0)}$, žádná konečněrozměrná reprezentace ***SO***(3,1) není unitární.
Jde o přímý důsledek nekompaktnosti ***SO***(3,1): Až na triviální jednorozměrnou reprezentaci jsou všechny ireducibilní unitární reprezentace libovolné nekompaktní grupy nekonečněrozměrné.
Z definice ( 8.46 ) dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}_{(1)}^2 &= \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbf{M}}^2 - \hat{\mathbf{N}}^2 + 2i\hat{\mathbf{M}}\cdot\hat{\mathbf{N}}\right), \\ \hat{\mathbf{J}}_{(2)}^2 &= \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbf{M}}^2 - \hat{\mathbf{N}}^2 + 2i\hat{\mathbf{M}}\cdot\hat{\mathbf{N}}\right). \end{aligned} \tag{8.48}$$

Z formule ( 8.45 ) pak vidíme, že vektorová reprezentace je ireducibilní reprezentací $D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$.
Omezíme-li se v libovolné reprezentaci grupy ***SO***(3,1) pouze na operátory odpovídající elementům z její podgrupy ***SO***(3), obdržíme reprezentaci grupy ***SO***(3).
Z definice ( 8.46 ) dostáváme pro generátory této grupy vyjádření

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{J}}_{(1)} + \hat{\mathbf{J}}_{(2)} \ . \tag{8.49}$$

Z komutačních relací ( 8.47 ) vidíme, že $\hat{\mathbf{M}}$ představuje celkový impulsmoment, obdržený komposicí dvou nezávislých impulsmomentů $\hat{\mathbf{J}}_{(1)}, \hat{\mathbf{J}}_{(2)}$.
Z pravidel o skládání impulsmomentů je pak zřejmé, že ireducibilní reprezentace $D^{(j,j')}$ grupy ***SO***(3,1) představuje z hlediska grupy ***SO***(3) direktní součet

$$\sum_{J=|j-j'|}^{j+j'} \oplus D^{(J)} \tag{8.50}$$

jejích ireducibilních reprezentací.

Nepřehlédněte, že žádná ireducibilní reprezentace grupy $\boldsymbol{SO}(3)$ není v ireducibilní reprezentaci grupy $\boldsymbol{SO}(3,1)$ zastoupena více než jednou.

Nakonec ještě uveďme vztahy mezi maticemi odpovídajícími čistému natočení, resp. boostu a maticemi odpovídajícími jednotlivým druhům inverze:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{n},\varphi)\mathbf{P} &= \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{n},\varphi)\,, \\ \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{n},v)\mathbf{P} &= \boldsymbol{\Lambda}(-\mathbf{n},v)\,, \end{aligned} \tag{8.51}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{n},\varphi)\mathbf{T} &= \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{n},\varphi)\,, \\ \mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{n},v)\mathbf{T} &= \boldsymbol{\Lambda}(-\mathbf{n},v)\,. \end{aligned} \tag{8.52}$$

**Globální a lokální symetrie; Kalibrační pole**

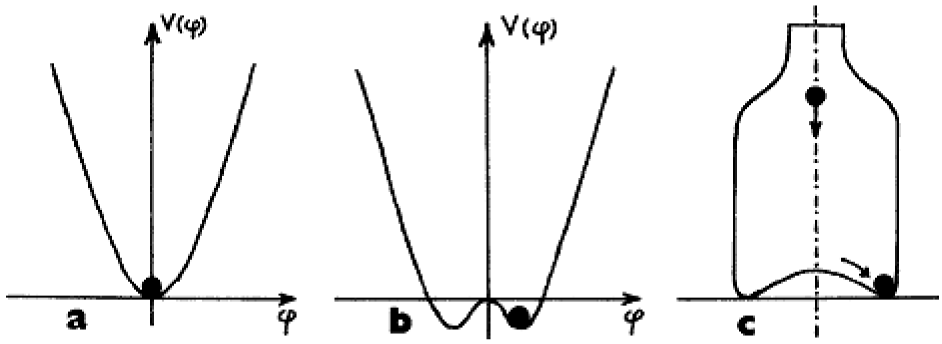
Ve fyzice se uplatňují symetrie dvojího druhu :

a) **Globální symetrie** - ať již se jedná o symetrie prostoročasu (invariace vzhledem k posunům v prostoru a čase, prostorovým rotacím, Lorentzovým transformacím a pod.), nebo o vnitřní symetrie (invariance vůči jiným než prostoročasovým stupňům volnosti - např. transformace izospinu).
Z požadavku invariance vůči globálním symetriím plynou (podle věty Noetherové) různé zákony zachování, např. energie a hybnosti.

b) **Lokální symetrie -** invariance vůči transformacím, které jsou prostoročasově proměnné (závisí na světobodu, v němž kalibrační transformaci provádíme).
Při lokálních (kalibračních) transformacích se v rovnicích pole objevují určité přídavné členy obsahující derivace parametrů transformace. Požadujeme-li zachování invariance vůči takové transformaci, je třeba pro odstranění těchto členů zavést odpovídající kompensující členy, které je možno interpretovat jako nějaké pole. Požadavek invariance vzhledem ke kalibračním (lokálním) transformacím tak vede k přítomnosti "**kompenzujících polí**" - **nových interakcí**.

Základním východiskem **kalibračních teorií** je theze, že všechny čtyři základní interakce v přírodě jsou důsledkem požadavku invariance teorie vůči příslušným kalibračním transformacím. V rámci kalibrační teorie lze formulovat kvantovou elektrodynamiku (kde elektromagnetické pole se obdrží jako kalibrační pole při požadavku invariance lagrangiánu volného spinorového pole vůči lokálním transformacím fáze z grupy $\boldsymbol{U}(\mathbf{1})$) i Einsteinovu gravitační teorii (gravitační pole zde vzniká z požadavku invariance vůči lokálním kalibračním transformacím prostoročasu - Poincaréova grupa).

Kalibrační pole v kalibračních teoriích jsou primárně "nehmotná" (jejich kvanta mají nulovou klidovou hmotnost), což je adekvátní pro pole elektromagnetické a gravitační. Při budování teorie např. slabých interakcí v rámci kalibračních teorií to však způsobuje určité potíže pramenící z toho, že tyto interakce jsou zprostředkovány intermediálními bosony ($W^+$,$W^-$,Z°), které mají díky krátkému dosahu interakce značně velkou hmotnost (desítky GeV/$c^2$). Tuto potíž se podařilo překlenout mechanismem tzv. **spontánního narušení symetrie**, což je modifikace lagrangiánu, při níž sice lagrangián i pohybové rovnice mají nadále původní danou symetrii, ale vlastní fyzikální stavy tuto symetrii již nemají (není v tom žádný rozpor- např. pohyb v centrálně symetrickém poli nemusí být při nesymetrických počátečních podmínkách vůbec symetrický). Toto spontánní narušení symetrie pak způsobuje, že příslušné kalibrační pole bude efektivně vystupovat jako pole s nenulovou hmotností, aniž by se porušila kalibrační invariantnost.




**Obr.8.1: Znázornění mechanismu spontánního narušení symetrie v kalibračních teoriích.**
**a**) Pro efektivní potenciál tvaru jednoduché symetrické jámy s jediným minimem je i základní stav symetrický.
**b**) Pro takový tvar symetrického efektivního potenciálu základní stav pole $\varphi$ již symetrii nemá.
**c**) Pohyb kuličky puštěné přesně po ose do sklenice s promáčknutým dnem ilustruje případ, kdy navzdory tomu, že rovnice pohybu kuličky, počáteční podmínky i tvar sklenice jsou symetrické, konečný stav tuto symetrii nemá: kulička se po dopadu do metastabilní polohy ve vyvýšeném středu dna vždy skutálí do prohlubně u stěny - předchozí symetrie se spontánně naruší.

Podstata mechanismu spontánního narušení symetrie je zhruba znázorněna na obr. 8.1. Na obr. 8.1a je znázorněna potenciální energie (efektivní potenciál) skalárního pole $\varphi$ o hmotnosti $\mu$ a vazbové konstantě $\lambda$ s jednoduchým (modelovým) lagrangiánem

$$L = \frac{1}{2}\left(\varphi_{,i}\right)^2 - \frac{\mu^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 . \qquad (8.53)$$

Efektivní potenciál

$$V(\varphi) = \frac{\mu^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \qquad (8.54)$$

má (pro $\mu^2 > 0$) tvar symetrické potenciálové jámy, v níž nejvýhodnější energetický stav odpovídá poli $\varphi = 0$. V případě, že efektivní potenciál by měl tvar

$$V(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \qquad (8.55)$$

(odpovídající případu $\mu^2 < 0$), bude mít potenciálová jáma tvar podle obr. 8.1b, takže minimu $V(\varphi)$ již nebude odpovídat stav $\varphi = 0$, ale pole

$$\varphi = \varphi_0 = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \qquad (8.56)$$

I když potenciál $V(\varphi)$ je nadále symetrický vůči změně znaménka $\varphi \to -\varphi$, základní stav pole $\varphi$ tuto symetrii již nerespektuje (kulička symbolicky představující stav pole se vždy skutálí do jednoho z minim - obr. 8.1c).

Po narušení symetrie se spektrum částic (hmotnosti excitací) mění. V uvedeném jednoduchém případě by se při $\varphi = 0$, $\mu^2 < 0$ jednalo o teorii tachyonů s imaginární hmotností

$$m^2(\varphi = 0) = \left. \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = -\mu < 0 \qquad (8.57)$$

zatímco po narušení symetrie se čtverec hmotnosti excitací skalárního pole stává kladný:

$$m^2(\varphi = \varphi_0) = \left. \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = 2\mu^2. \qquad (8.58)$$

Základní myšlenka **Higgsova-Kibbleova mechanismu** tedy spočívá v tom, že do lagrangiánu kalibrační teorie se zavede pomocné skalární pole (Higgsovo pole) s takovým interakčním potenciálem, aby došlo ke spontánnímu narušení symetrie, přičemž však lagrangián jako celek by zůstal kalibračně invariantní. Potom se kalibrační pole budou efektivně chovat jako pole s nenulovou hmotností. Kromě toho se v teorii objeví navíc tzv. **Higgsovy bosony -** skalární částice s nenulovou klidovou hmotností, pocházející z pomocných skalárních polí.

Ukazuje se tedy, že teorie všech fundamentálních interakcí lze jednotně vytvářet v rámci kalibračních teorií lišících se především

**kalibrační grupou**. Kalibrační teorie tak tvoří zároveň vhodnou základnu pro **sjednocování interakcí**: dva typy interakcí s kalibračními grupami $\boldsymbol{G_1}$ a $\boldsymbol{G_2}$ lze sjednotit tak, že vytvoříme kalibrační teorii s kalibrační grupou $\boldsymbol{G}$, obsahující grupu $\boldsymbol{G_1} \times \boldsymbol{G_2}$ jako svoji podgrupu. Při konstrukci jednotných teorií slabých, silných a elektromagnetických interakcí je tato základní idea doplněna předpokladem, že před narušením symetrie všechny vektorové bosony zprostředkovávající interakce byly nehmotné. Po spontánním narušení symetrie (vlivem vzniku konstantních skalárních polí v celém prostoru) však část vektorových bosonů získá hmotnost a příslušné interakce se stanou krátkodosahovými - symetrie mezi různými typy interakcí se poruší.

**a) Globální symetrie**

S každou symetrií v přírodě se pojí některý zákon zachování, a tento zákon zachování je touto symetrií definován.
Energie je veličina, která se zachovává vzhledem k časovému posunutí, tj posunutí v ose *t*.
Protože obecně platí

$$m\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\mathrm{grad}\, W_p\left(t, \mathbf{r}\right) \tag{8.59}$$

kde $W_p$ je potenciální energie, a při symetrii vzhledem k toku času (homogenita času)

$$W_p = W_p(\mathbf{r}), \tag{8.60}$$

čili

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} = 0, \tag{8.61}$$

můžeme okamžitě psát

$$m\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2}=-\frac{dW_p}{d\mathbf{r}}, \tag{8.62}$$

neboli

$$m\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\frac{dW_p}{d\mathbf{r}}. \tag{8.63}$$

Metodou separace proměnných postupně dostaneme

$$m\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial t}\partial\mathbf{v}=-dW_p, \tag{8.64}$$

a tedy

$$m\mathbf{v}\,\partial\mathbf{v}=-dW_p. \tag{8.65}$$

Integrací pak získáme zákon zachování celkové energie hmotného bodu:

$$\frac{mv^2}{2}+W_p=konst. \tag{8.66}$$

Zákon zachování hybnosti platí pouze tehdy, platí-li navíc symetrie vzhledem k posunutí v prostoru, tj. posunutí v osách *x*, *y*, *z* (izotropie prostoru):

$$\frac{\partial W_p}{\partial\,\mathbf{r}}=0. \tag{8.67}$$

Pak ovšem

$$m\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2}=0, \tag{8.68}$$

což po integraci dá vskutku zákon zachování hybnosti:

$$m\mathbf{v} = konst. \tag{8.69}$$

V kvantové mechanice platí převodní vztah mezi zachovávajícími se čtyřvektory popisujícími stav částice a stav vlny, ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} \omega \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}. \tag{8.70}$$

Zákon zachování impulsmomentu je určen symetriemi vzhledem ke trojrozměrným rotacím, tj. rotacím ***SO*(3)** v rovinách *xy*, *xz*, *yz*.
Spin částice je veličina určená Lorenzovou symetrií, tj. rotací ***SO*(3,1)** v rovinách *xt*, *yt*, *zt*.

Máme tak v přírodě celkem 10 globálních symetrií.

**b) Lokální symetrie**

K tomu, aby nějaká diferenciální rovnice mohla hrát roli pohybové rovnice v rámci kvantové teorie je nezbytné, aby se jednalo o rovnici prvního řádu v časové proměnné.
Tedy jestliže $\psi(\mathbf{r}, t)$ má být vlnovou rovnicí popisující v $\{\hat{\mathbf{Q}}\}$ reprezentaci stav jednočásticového systému v okamžiku *t*, potom musí vyhovovat rovnici typu

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \hat{\mathbf{H}} \psi(\mathbf{r},t). \tag{8.71}$$

Kde hamiltonián již neobsahuje žádnou časovou derivaci.
Protože impuls volné částice je integrálem pohybu, musí hamiltonián splňovat komutační relaci

$$\left[\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{P}}\right] = 0. \tag{8.72}$$

Energie volné částice je jejím impulsem jednoznačně určena. Tedy vlnová funkce $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ stacionárního stavu uvažované částice s impulsem **p** musí vyhovovat rovnicím

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{p}\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \\ \hat{\mathbf{H}}\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) &= E\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \end{aligned} \qquad (\ 8.73\ )$$

kde

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}\,. \qquad (\ 8.74\ )$$

První z nich vyžaduje, aby

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right), \qquad (\ 8.75\ )$$

jestliže jsme vlnovou funkcí $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ popsali stav uvažované částice v čase $t = 0$, potom

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) \equiv \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right) = \psi_{\mathbf{p}} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)\right], \qquad (\ 8.76\ )$$

je řešením rovnice ( 8.71 ) které jsme interpretovali jako vlnovou funkci stavu částice v čase $t$.
Snadno se přesvědčíme, že tato vlnová funkce vyhovuje Klein – Gordonově rovnici.
Na základě principu superpozice tak dospíváme k závěru, že řešení pohybové rovnice odpovídající jakémukoli stavu volné částice musí vyhovovat K-G rovnici ( 6.197 ).
Na druhé straně, derivujeme-li podle času obě strany rovnice ( 8.71 ), zjistíme, že libovolné její řešení vyhovuje rovnici

$$\left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{\mathbf{H}}^2\right)\psi(\mathbf{r},t) = 0\,. \qquad (\ 8.77\ )$$

Tedy libovolné řešení pohybové rovnice ( 8.71 ) bude vyhovovat K-G rovnici, pokud pro Hamiltonův operátor platí

$$\hat{\mathbf{H}}^2 = -\hbar^2 c^2 \Delta + m^2 c^4 , \qquad (8.78)$$

tj. pokud uvažovaný hamiltonián představuje druhou odmocninu z operátoru vystupujícího na pravé straně.
Pokud by poloha částice představovala úplnou množinu pozorovatelných, tj. pokud by $\psi(\mathbf{r}, t)$ byla jednokomponentovou vlnovou funkcí, potom by tato odmocnina představovala nelokální operátor.
Pokud se tedy nechceme smířit s nelokálními operátory, musíme přijmout, že pro uvažovanou částici její poloha úplnou množinu pozorovatelných netvoří.
V této situaci se ukazuje nesmírně výhodným použít formalismus vícekomponentových vlnových funkcí.
Pod $\psi(\mathbf{r}, t)$ budeme tedy v dalším rozumět jednosloupcovou $n$-řádkovou matici

$$\psi(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r},t) \\ \psi_1(\mathbf{r},t) \\ \vdots \\ \psi_1(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} . \qquad (8.79)$$

Ve formuli ( 8.78 ) je pak mlčky rozuměno, že na pravé straně stojí direktní součin operátoru explicitně uvedeného s jednotkovou maticí.
$\hat{\mathbf{H}}^2$ je tedy čtvercová $n$-řádková diagonální matice, jejíž všechny diagonální členy obsahují diferenciální operátor stojící na pravé straně ( 8.78 ).
Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme podobné zjednodušené označení používat i na další operátory.
Z veličin, které připadají v úvahu, mají rozměr energie pouze $mc^2$ a $c\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar c \nabla$.

Možná závislost na $\hat{\mathbf{P}}$ je požadavkem lokality omezena na polynomiální.
Výraz na pravé straně ( 8.78 ) představuje polynom druhého řádu, takže jeho omocnina je alespoň polynomem řádu prvního.
Snadno nahlédneme, že polynom prvního řádu v $\hat{\mathbf{P}}$, který by mohl reprezentovat operátor $\hat{\mathbf{H}}$, musí mít nutně tvar

$$\hat{\mathbf{H}} = \hbar c\left[\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{P}}}{\hbar}\right)+\boldsymbol{\beta}\frac{mc}{\hbar}\right] \equiv -i\hbar c\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{\alpha}_j\frac{\partial}{\partial q^j}+\boldsymbol{\beta}\, mc^2, \qquad (8.80)$$

kde elementy čtvercových matic $\boldsymbol{\alpha}_j$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou bezrozměrné konstanty nezávislé na $\mathbf{q}$, což zaručuje, že

$$\left[\boldsymbol{\alpha}_j, \hat{\mathrm{P}}_k\right] = \left[\boldsymbol{\beta}, \hat{\mathrm{P}}_k\right] = 0. \qquad (8.81)$$

Samosdruženost hamiltoniánu tedy vyžaduje, aby také matice $\boldsymbol{\alpha}_j$, $\boldsymbol{\beta}$ byly samosdružené:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_j^\dagger &= \boldsymbol{\alpha}_j\,, \\ \boldsymbol{\beta}^\dagger &= \boldsymbol{\beta}\,. \end{aligned} \qquad (8.82)$$

z vyjádření ( 8.80 ) dostáváme

$$\hat{\mathbf{H}}^2 = -\hbar^2 c^2 \sum_{j,k=1}^{3}\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_k\frac{\partial^2}{\partial q^j \partial q^k}+\boldsymbol{\beta}^2 mc^4 - i\hbar c\sum_{k=1}^{2}\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial q^k}, \qquad (8.83)$$

odkud vidíme, že požadavek ( 8.78 ) je splněn právě tehdy, když matice $\boldsymbol{\alpha}_k$, $\boldsymbol{\beta}$ vyhovují relacím

$$\begin{aligned} \left\{\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_k\right\} &= 2\delta_{jk}\,, \\ \left\{\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}\right\} &= 0\,, \\ \boldsymbol{\beta}^2 &= 1\,. \end{aligned} \qquad (8.84)$$

Pokusme se nyní zkonstruovat čtvercové $n$-řádkové matice vyhovující všem výše uvedeným požadavkům.
Jaká je minimální hodnota $n$, pro kterou lze tyto požadavky splnit?
Z formule ( 8.84 )vidíme, že

$$\boldsymbol{\beta}^2 = \boldsymbol{\alpha}_j^2 = 1 , \qquad j = 1, 2, 3 , \tag{8.85}$$

a tedy vlastní hodnoty každé z hermitovských matic $\boldsymbol{\alpha}_j$, $\boldsymbol{\beta}$ mohou být pouze ±1.
Navíc, s využitím invariance stopy vůči cyklickým permutacím faktorů z těchto relací dostáváme

$$\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\beta} = \mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}_1^2 = \mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}_1 = -\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\alpha}_1^2\boldsymbol{\beta} = -\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\beta} , \tag{8.86}$$

a tedy musí platit

$$\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\beta} = 0 . \tag{8.87}$$

Zcela analogicky zjistíme, že rovněž

$$\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\alpha}_j = 0 , \qquad j = 1, 2, 3 . \tag{8.88}$$

Tedy počet vlastních hodnot +1 každé z matic $\boldsymbol{\alpha}_j$, $\boldsymbol{\beta}$ musí být stejný jako počet jejích vlastních hodnot –1.
To je však možno splnit pouze pro sudé $n$.
Snadno se též přesvědčíme o lineární nezávislosti matic $\boldsymbol{\alpha}_j$, $\boldsymbol{\beta}$.
V opačném případě bychom mohli např. matici $\boldsymbol{\beta}$ vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^{3} a_j \boldsymbol{\alpha}_j . \tag{8.89}$$

Díky ní by však musela platit relace

$$\boldsymbol{\beta}^2 = \sum_{j=1}^{3} a_j \boldsymbol{\alpha}_j = \sum_{j=1}^{3} a_j \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} a_j \left\{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j\right\}, \qquad (8.90)$$

což ovšem není možné,neboť by nebyly splněny poslední 2 rovnice ( 8.84 ).
Libovolnou čtvercovou dvouřádkovou matici lze vyjádřit jako lineární kombinaci čtyř lineárně nezávislých matic, za které můžeme např. zvolit jednotkovou matici **1** a Pauliho matice

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (8.91)$$

pro které platí (srov. UTU)

$$\boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma}_k = \delta_{ik} + i\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{\sigma}_l \ , \qquad (8.92)$$

a tedy vyhovují komutačním relacím

$$\left[\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k\right] = 2i\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{\sigma}_l \qquad (8.93)$$

a antikomutačním relacím

$$\left\{\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k\right\} = 2\delta_{jk} \, . \qquad (8.94)$$

Pauliho matice tak představují trojici lineárně nezávislých matic, které všechny vzájemně antikomutují, ale každá z nich komutuje s jednotkovou maticí.
Pro $n$ = 2 tak neexistuje čtveřice lineárně nezávislých a vzájemně antikomutujících matic, tj. nelze splnit požadavek ( 8.84 ).
Libovolnou čtvercovou čtyřřádkovou matici lze vyjádřit jako lineární kombinaci šestnácti lineárně nezávislých matic, za které lze zvolit např. direktní součiny výše uvedených matic dvouřádkových.

$$\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\sigma}_j \otimes \mathbf{1}, \quad \mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\sigma}_j , \quad \boldsymbol{\sigma}_j \otimes \boldsymbol{\sigma}_k \ . \qquad (8.95)$$

První z nich představuje matici jednotkovou.
Snadno nahlédneme (stačí si uvědomit, že Pauliho matice mají nulovou stopu a kvadrát každé z nich je jednotkovou maticí), že každá ze zbývajících patnácti je hermitovská, má nulovou stopu a kvadrát roven jednotkové matici.
Kteroukoli z matic $\alpha_j$, $\beta$ můžeme tedy bez újmy na obecnosti identifikovat s matricí

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{\sigma}_3 \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad (\ 8.96\ )$$

kde každý element v posledním výrazu představuje submatici $2 \times 2$.
Z anikomutačních relací ( 8.94 ) vidíme, že s touto maticí antikomutuje trojice matic $\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma}_j$ .
Protože tyto matice také všechny navzájem antikomutují, můžeme identifikovat

$$\boldsymbol{\alpha}_j \equiv \boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_j \\ \boldsymbol{\sigma}_j & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, 3\ , \qquad (\ 8.97\ )$$

což často zapisujeme jako

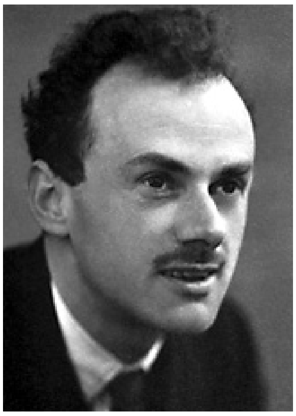
$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \qquad (\ 8.98\ )$$

Matice definované formulemi ( 8.96 ), ( 9.97 ) představují tzv. Pauliho reprezentaci Diracovy algebry ( 8.84 ).
Explicitní konstrukcí jsme ukázali, že pro $n = 4$ existují matice, vyhovující relacím ( 8.82 ), ( 8.84 ).
Samozřejmě, že také všechny matice, které s nimi souvisejí libovolnou unitární transformací, budou vyhovovat témže relacím, neboť jde o vztahy invariantní vůči těmto transformacím.
Důležitou skutečností je, že v případě $n = 4$ platí i tvrzení opačné: libovolná čtveřice matic $\alpha_j$, $\beta$ vyhovujících relacím ( 8.82 ), ( 8.84 ),

souvisí se čtveřicí matic definovaných formulemi ( 8.96 ), ( 8.97 ) unitární transformací.
Čtveřice matic $\boldsymbol{\alpha}_j$, $\boldsymbol{\beta}$ vyhovujících relacím ( 8.82 ), ( 8.84 ) existuje právě tehdy, když $n$ je celočíselným násobkem 4.
Každou takovouto čtveřici lze unitární transformací převést na kvazidiagonální tvar, v němž každá ze submatic na diagonále je dána pravou stranou formule ( 8.96 ), resp. ( 8.97 ).
V případě $n$ = 4 představují vztahy ( 8.71 ), ( 8.80 ) slavnou **Diracovu rovnici** volné částice

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left(-i\hbar \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \boldsymbol{\beta}\, mc^2\right)\psi(\mathbf{r},t). \qquad (8.99)$$

Má-li Diracova rovnice představovat relativistickou pohybovou rovnici, musí mít stejný tvar ve všech ekvivalentních souřadných soustavách.



**Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984)**

Pro tuto vlastnost se užívá termín **kovariance rovnice**.
Pro vyšetření splnitelnosti této podmínky je výhodné rovnici ( 8.99 ) nejprve násobit nesingulární maticí $\boldsymbol{\beta}$.
Můžeme ji pak napsat jako

$$\left(i\boldsymbol{\gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(q) = 0, \qquad (8.100)$$

kde **Diracovy gama-matice**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}^0 &\equiv \boldsymbol{\beta}\,,\\ \boldsymbol{\gamma}^k &\equiv \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}_k\ .\end{aligned} \qquad (\ 8.101\ )$$

V termínech Diracových matic nabývají požadavky ( 8.84 ) tvaru antikomutačních relací

$$\left\{\boldsymbol{\gamma}^\mu,\boldsymbol{\gamma}^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu}\,. \qquad (\ 8.102\ )$$

A hermicita ( 8.82 ) je ekvivalentní vztahům

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}^{0\dagger} &= \boldsymbol{\gamma}^0\ ,\\ \boldsymbol{\gamma}^{k\dagger} &= -\boldsymbol{\gamma}^k\ ,\end{aligned} \qquad (\ 8.103\ )$$

které, díky ( 8.102 ) můžeme zapsat též jako

$$\boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}^{\mu\dagger}\boldsymbol{\gamma}^0 = \boldsymbol{\gamma}^\mu\,. \qquad (\ 8.104\ )$$

Uvažujme dvě inerciální vztažné soustavy, které spolu souvisejí Lorenzovou transformací $\Lambda$, tj. souřadnice, kterými v těchto soustavách popisujeme tentýž světobod, spolu souvisejí vztahem

$$q'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, q^\nu \Leftrightarrow q^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu q'^\nu\,. \qquad (\ 8.105\ )$$

Jestliže nějaká fyzikální skutečnost je v nečárkované soustavě popsána funkcí $\psi(q)$, potom tutéž skutečnost popíše pozorovatel v soustavě čárkované funkcí

$$\psi'(q') = \mathbf{S}(\Lambda)\psi(q)\,, \qquad (\ 8.106\ )$$

kde $\mathbf{S}(\Lambda)$ je matice přiřazená transformaci $\Lambda$ v nějaké reprezentaci Lorentzovy grupy.
Ekvivalence uvažovaných souřadných soustav pak vyžaduje, aby funkce $\psi$ a $\psi'$ vyhovovaly stejné pohybové rovnici.

Tedy Diracova rovnice může hrát úlohu relativistické pohybové rovnice, pokud existuje čtyřrozměrná reprezentace Lorentzovy grupy, v níž je elementu $\Lambda$ přiřazena matice $\mathbf{S}(\Lambda)$ taková, že funkce ( 8.106 ) vyhovuje rovnici

$$\left(i\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\frac{\partial}{\partial q^{\mu}}-\frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(q')=0\,, \tag{8.107}$$

právě tehdy, když funkce $\psi(q)$ je řešením rovnice ( 8.100 ).
V takovém případě totiž můžeme postulovat takové transformační vlastnosti čtyřkomponentové vlnové funkce, které ponechají tvar Diracovy rovnice nezměněn:

$$\left(i\mathbf{S}(\Lambda)\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\mathbf{S}^{-1}(\Lambda)\frac{\partial}{\partial q^{\mu}}-\frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(q')=0\,, \tag{8.108}$$

je shodný s ( 8.107 ), pokud

$$\mathbf{S}(\Lambda)\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\mathbf{S}^{-1}(\Lambda)\frac{\partial}{\partial q^{\mu}}=\boldsymbol{\gamma}^{\nu}\frac{\partial}{\partial q'^{\nu}}\;. \tag{8.109}$$

Z formule ( 8.105 ) však víme, že

$$\frac{\partial}{\partial q'^{\nu}}=\Lambda_{\nu}{}^{\mu}\frac{\partial}{\partial q^{\mu}}\,, \tag{8.110}$$

a tedy předcházející požadavek je splněn právě tehdy, když platí

$$\mathbf{S}(\Lambda)\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\mathbf{S}^{-1}(\Lambda)=\boldsymbol{\gamma}^{\nu}\Lambda_{\nu}{}^{\mu}\,, \tag{8.111}$$

což je ekvivalentní se vztahem

$$\mathbf{S}^{-1}(\Lambda)\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\mathbf{S}(\Lambda)=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\boldsymbol{\gamma}^{\nu}\,. \tag{8.112}$$

Každý element vlastní Lorentzovy grupy můžeme jednoznačně zadat ve tvaru ( 8.37 ) pomocí šesti nezávislých parametrů $\omega_{\alpha\beta}$.
Označíme-li, v souhlase s vžitou konvencí, matice odpovídající dvojnásobku generátorů $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ v hledané reprezentaci jako $\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta}$, potom Lorentzově transformaci $\Lambda(\omega)$ je v této reprezentaci přiřazena matice

$$\mathbf{S}(\omega) \equiv \exp\left(\frac{i}{4}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta}\right) . \qquad ( 8.113 )$$

Vzhledem k tomu, že všechny konečné transformace můžeme obdržet iterací transformací infinitesimálních, stačí se při vyšetřování splnitelnosti podmínky ( 8.112 ) omezit na veličiny prvního řádu v $\omega$.
Z formulí ( 8.112 ), ( 8.113 ), ( 8.37 ) pak vidíme, že tím se úloha vyšetření invariance Diracova rovnice vůči Lorenzovým transformacím redukuje na úlohu zjistit, zda existují matice $\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta}$, které by (do veličin prvního řádu v $\omega$) vyhovovaly vztahům

$$\left(1+\frac{i}{4}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta}\right)\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\left(1-\frac{i}{4}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta}\right)=\boldsymbol{\gamma}^{\mu}-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\sum_{\nu}\left(\mathbf{I}^{\alpha\beta}\right)_{(\mu,\nu)}\boldsymbol{\gamma}^{\nu} . \qquad ( 8.114 )$$

S využitím formule ( 8.108 ) snadno zjistíme, že tento požadavek můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\left[\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta},\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\right]=2i\left(g^{\beta\mu}\boldsymbol{\gamma}^{\alpha}-g^{\alpha\mu}\boldsymbol{\gamma}^{\beta}\right). \qquad ( 8.115 )$$

Na základě antikomutačních relací ( 8.102 ) a algebraické identity

$$[\mathrm{AB,C}]=\mathrm{A}\{\mathrm{B,C}\}-\{\mathrm{A,C}\}\mathrm{B} \qquad ( 8.116 )$$

pak zjistíme, že matice

$$\mathbf{\Sigma}^{\mu\nu}\equiv\frac{i}{2}\left[\boldsymbol{\gamma}^{\mu},\boldsymbol{\gamma}^{\nu}\right] \qquad ( 8.117 )$$

tomuto požadavku vyhovují.

Zbývá ovšem dokázat, že odpovídající matice ( 8.113 ) skutečně představují reprezentaci vlastní Lorenzovy grupy.
Zavedeme proto matice $\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{N}}$, které by v uvažované reprezentaci měly odpovídat generátorům **M**, **N** vlastní Lorentzovy grupy:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}_k &\equiv \frac{1}{4}\varepsilon_{klj}\boldsymbol{\Sigma}^{lj} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_k = -\frac{i}{4}\varepsilon_{klm}\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_m \,, \\ \hat{\mathbf{N}}_k &\equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{0k} = \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}_k \,. \end{aligned} \qquad (\ 8.118\ )$$

Z formulí ( 8.96 ), ( 8.98 ), ( 8.101 ) víme, že Pauliho reprezentace matice $\boldsymbol{\gamma}^\mu$ má tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}^0 &= \boldsymbol{\sigma}_3 \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= i\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (\ 8.119\ )$$

V této reprezentaci je tedy

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}} &= \frac{1}{2}\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{N}} &= \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (\ 8.120\ )$$

S využitím relací ( 8.92 ) pak dostáváme

$$\left[\hat{\mathbf{M}}_j, \hat{\mathbf{M}}_k\right] = \frac{1}{4}\mathbf{1}\otimes\left[\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k\right] = \frac{i}{2}\varepsilon_{jkl}\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\sigma}_l = i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathbf{M}}_l \,,$$

$$\left[\hat{\mathbf{N}}_j, \hat{\mathbf{N}}_k\right] = -\frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}_1^2 \otimes\left[\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k\right] = -\frac{i}{2}\varepsilon_{jkl}\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\sigma}_l = -i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathbf{M}}_l \,,$$

$$\left[\hat{\mathbf{M}}_j, \hat{\mathbf{N}}_k\right] = \left[\hat{\mathbf{N}}_j, \hat{\mathbf{M}}_k\right] = \frac{i}{4}\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes\left[\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k\right] = -\frac{i}{2}\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{\sigma}_1\otimes\boldsymbol{\sigma}_l = i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathbf{N}}_l \,,$$

$$(8.121)$$

a tedy matice ( 8.118 ) skutečně reprezentují generátory vlastní Lorentzovy grupy.
Z těchž relací rovněž vidíme, že pokud **n** je libovolný jednotkový vektor, potom

$$\left(2\mathbf{n}\hat{\mathbf{M}}\right)^2 = \left(2i\mathbf{n}\hat{\mathbf{N}}\right)^2 = \mathbf{1}. \qquad (8.122)$$

Tedy pootočení kolem osy **n**, resp. speciální Lorentzově transformaci podél této osy je v uvažované reprezentaci přiřazena matice

$$\mathbf{S}(\mathbf{n},\varphi) = \exp\left(i\varphi\mathbf{n}\hat{\mathbf{M}}\right) = \exp\left(i\frac{\varphi}{2}\mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma}\right) = \cos\frac{\varphi}{2} + i\mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma}\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad (8.123)$$

resp.

$$\mathbf{S}(\mathbf{n},v) = \exp\left(iu\mathbf{n}\hat{\mathbf{N}}\right) = \exp\left(i\frac{u}{2}\mathbf{n}\boldsymbol{\alpha}\right) = \cosh\frac{u}{2} - \mathbf{n}\boldsymbol{\alpha}\sinh\frac{u}{2}, \qquad (8.124)$$

tj.

$$\mathbf{S}(\mathbf{n},v) = \sqrt{\frac{1+\xi}{2\xi}}\left[1 - \frac{1}{1+\xi}\frac{v}{c}\mathbf{n}\boldsymbol{\alpha}\right], \qquad (8.125)$$

kde

$$\xi \equiv \frac{1}{\cosh u} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (8.126)$$

Povšimněme si, že pro matice ( 8.120 ) platí

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}^\dagger &= \hat{\mathbf{M}}, \\ \hat{\mathbf{N}}^\dagger &= \hat{\mathbf{N}}, \end{aligned} \qquad (8.127)$$

a

$$\left[\hat{\mathbf{M}},\boldsymbol{\gamma}^0\right]=\left\{\hat{\mathbf{N}},\boldsymbol{\gamma}^0\right\}=0. \qquad (8.128)$$

Tedy nalezená reprezentace vlastní Lorentzovy grupy sice není unitární, ale zato matice $\mathbf{S}(\Lambda)$, odpovídající libovolnému elementu této grupy vyhovují relaci

$$\boldsymbol{\gamma}^0\mathbf{S}^\dagger(\Lambda)\boldsymbol{\gamma}^0=\mathbf{S}^{-1}(\Lambda). \qquad (8.129)$$

Ze vztahů ( 8.128 ), je vskutku evidentní, že této relaci vyhovují matice ( 8.123 ), ( 8.124 ).
Na druhé straně víme, že libovolnou Lorentzovu transformaci lze obdržet komposicí dvou natočení a jedné speciální Lorentzovy transformace, tj. libovolnou z matic ( 8.37 ) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\Lambda(\omega)=\Lambda(\mathbf{n}_1,\varphi_1)\Lambda(\mathbf{n}_3,u)\Lambda(\mathbf{n}_2,\varphi_2). \qquad (8.130)$$

To ovšem znamená, že také matice odpovídající této transformaci v libovolné reprezentaci musí být vyjádřitelná v analogickém tvaru, tj.

$$\mathbf{S}(\Lambda)=\mathbf{S}(\mathbf{n}_1,\varphi_1)\mathbf{S}(\mathbf{n}_3,u)\mathbf{S}(\mathbf{n}_2,\varphi_2). \qquad (8.131)$$

A tedy ve zkonstruované reprezentaci vyhovuje relaci ( 8.129 ), neboť

$$\left(\boldsymbol{\gamma}^0\right)^2=\mathbf{1}. \qquad (8.132)$$

Podívejme se tedy, o jakou že reprezentaci vlastní Lorentzovy grupy se jedná.
K tomu stačí, když si uvědomíme, že matice

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{(1)}&\equiv\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{M}}+i\hat{\mathbf{N}}\right),\\ \mathbf{J}_{(2)}&\equiv\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{M}}-i\hat{\mathbf{N}}\right)\end{aligned} \qquad (8.133)$$

mají v Pauliho reprezentaci tvar

$$\mathbf{J}_{(1)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & -\boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}_{(2)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{8.134}$$

Odtud je ihned vidět, že matice

$$\mathbf{J}_{(1)}^2 = \frac{3}{8}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}_{(2)} = \frac{3}{8}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{8.135}$$

nejsou násobkem matice jednotkové a nalezená reprezentace tedy není ireducibilní.
Snadno se však přesvědčíme, že je lze obě současně diagonalizovat pomocí matice

$$\mathbf{T} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}, \tag{8.136}$$

a přitom

$$\mathbf{T}\mathbf{J}_{(1)}^2\mathbf{T}^{-1} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}\mathbf{J}_{(2)}^2\mathbf{T}^{-1} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{8.137}$$

Tedy maticemi $\mathbf{S}(\omega)$ je realizována reprezentace

$$D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)} \oplus D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}. \tag{8.138}$$

Veličiny, které se transformují podle této reprezentace, se nazývají **bispinory**.
Na základě relace ( 8.104 ) snadno zjistíme, že pokud bispinor $\psi(q)$ je řešením Diracovy rovnice ( 8.100 ), potom diracovsky sdružený bispinor

$$\bar{\psi}(q) \approx \psi^{\dagger}(q)\boldsymbol{\gamma}^0 \tag{8.139}$$

vyhovuje rovnici

$$-i\frac{\partial}{\partial q^{\mu}}\bar{\psi}(q)\boldsymbol{\gamma}^{\mu}-\bar{\psi}(q)\frac{mc}{\hbar}=0, \qquad (8.140)$$

kterou můžeme ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\left[i\left(-\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\right)^{\mathsf{T}}\frac{\partial}{\partial q^{\mu}}-\frac{mc}{\hbar}\right]\bar{\psi}^{\mathsf{T}}(q)=0. \qquad (8.141)$$

Transponováním obou stran rovnosti ( 8.102 ) dostaneme antikomutační relace

$$\left\{\left(-\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\right)^{\mathsf{T}},\left(-\boldsymbol{\gamma}^{\nu}\right)^{\mathsf{T}}\right\}=2g^{\mu\nu}. \qquad (8.142)$$

Musí tedy existovat unitární matice **C** (zvaná **Schwingerova matice**), pro kterou platí:

$$\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{C}^{\dagger}=-\boldsymbol{\gamma}^{\mu}. \qquad (8.143)$$

Z formule ( 8.140 ) pak okamžitě vidíme, že

$$\psi_C(q)\equiv\mathbf{C}\bar{\psi}^{\mathsf{T}}(q) \qquad (8.144)$$

vyhovuje Diracově rovnici

$$\left[\left(i\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial q^{\mu}}-\frac{mc}{\hbar}\right]\psi_C(q)=0. \qquad (8.145)$$

Říkáme, že řešení $\psi_C(q)$ je nábojově sdružené k řešení $\psi(q)$.

K tomu, abychom nalezli konkrétní vyjádření matice **C**, si nejprve povšimněme toho, že již sama možnost přepisu antikomutačních relací ( 8.102 ) do tvaru

$$\left\{\left(-\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\right),\left(-\boldsymbol{\gamma}^{\nu}\right)\right\} = 2g^{\mu\nu} \qquad (8.146)$$

zaručuje existenci unitární matice $\boldsymbol{\gamma}_5$ , takové, že platí

$$\boldsymbol{\gamma}_5\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\boldsymbol{\gamma}_5^{-1} = -\boldsymbol{\gamma}^{\mu}, \qquad (8.147)$$

což je totéž, jako

$$\left\{\boldsymbol{\gamma}_5,\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\right\} = 0. \qquad (8.148)$$

Z antikomutačních relací ( 8.102 ), je zřejmé, že součin všech čtyř $\gamma$-matic (nezávisle na pořadí faktorů) antikomutuje s každou z matic $\boldsymbol{\gamma}^{\mu}$, a tedy požadavku ( 8.147 ) jistě vyhovuje matice

$$\boldsymbol{\gamma}_5 \equiv i\boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}^1\boldsymbol{\gamma}^2\boldsymbol{\gamma}^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\boldsymbol{\gamma}^{\nu}\boldsymbol{\gamma}^{\rho}\boldsymbol{\gamma}^{\sigma} = -i\boldsymbol{\alpha}^1\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\alpha}^3 = -\frac{i}{3!}\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{\alpha}^j\boldsymbol{\alpha}^k\boldsymbol{\alpha}^l. \qquad (8.149)$$

Každá unitární matice antikomutující se všemi čtyřmi $\gamma$-maticemi se od ní může lišit jen fázovým faktorem.
V dalším budeme pod $\boldsymbol{\gamma}_5$ rozumět matici definovanou formulí ( 8.149 ).
Takto definovaná matice je nejen unitární, ale také hermitovská, tj. platí nejen

$$\boldsymbol{\gamma}_5^{\dagger} = \boldsymbol{\gamma}_5^{-1}, \qquad (8.150)$$

ale rovněž

$$\boldsymbol{\gamma}_5^{\dagger} = \boldsymbol{\gamma}_5, \qquad (8.151)$$

a tedy

$$\left(\boldsymbol{\gamma}_5\right)^2 = \mathbf{1}. \qquad (8.152)$$

V Diracově reprezentaci je

$$\boldsymbol{\gamma}_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \qquad (8.153)$$

Porovnáním s formulí ( 8.147 ) vidíme, že matice nábojového sdružení je požadavkem ( 8.143 ) určena, až na libovolný fázový faktor.
V diracově reprezentaci dostáváme pro tuto matici vyjádření

$$\mathbf{C} = i\boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}^2 = i\boldsymbol{\alpha}_2, \qquad (8.154)$$

neboli

$$\mathbf{C} = i\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_2 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (8.155)$$

Z Pauliho teorému víme, že pokud matice $\boldsymbol{\gamma}'^{\mu}$ představují jakoukoli reprezentaci Diracovy algebry a přitom vyhovují podmínkám hermicity vyjádřeným relacemi ( 8.103 ).
Potom existuje unitární matice **A** taková, že

$$\boldsymbol{\gamma}'^{\mu} = \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\mathbf{A}^{\dagger}, \qquad (8.156)$$

kde $\boldsymbol{\gamma}^{\mu}$ jsou výše uvažované matice v Diracova reprezentaci.
Z definice matice $\boldsymbol{\gamma}_5$ je zřejmé, že při přechodu od Diracovy reprezentace k jiné reprezentaci definované unitární transformací

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mu} \to \boldsymbol{\gamma}'^{\mu}, \qquad (8.157)$$

přechází

$$\boldsymbol{\gamma}_5 \to \boldsymbol{\gamma}'_5 = \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}_5\mathbf{A}^{\mathsf{T}}. \qquad (8.158)$$

Matice nábojového sdružení má v této nové reprezentaci tvar

$$\mathbf{C}' = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}, \qquad (8.159)$$

tj.

$$\mathbf{C}' = i\boldsymbol{\gamma}'^{0}\boldsymbol{\gamma}'^{2}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}. \qquad (8.160)$$

Matice ( 8.155 ) je antisymetrická, kterážto vlastnost je invariantní vzhledem k transformaci ( 8.159 ), a tedy v libovolné reprezentaci platí:

$$\mathbf{C}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{C}. \qquad (8.161)$$

Na základě této relace se pak snadno přesvědčíme, že

$$\mathbf{C}\,\overline{\psi}_C^{\mathsf{T}}(q) \equiv \psi(q), \qquad (8.162)$$

a tedy výrok „první bispinor je nábojově sdružený ke druhému“ je ekvivalentní s výrokem „druhý bispinor je nábojově sdružený k prvnímu“.
Elektrický náboj se nám tak objevuje v teorii z ničehož nic, jakožto důsledek invariance kvantové vlnové funkce vzhledem k Lorenzově transformaci.
Analogicky tomu, nás Diracova rovnice informuje o existenci částic s poločíselným spinem.
To však ještě není zdaleka všechno.
Zapišme si Diracovu rovnici ve tvaru

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla - \boldsymbol{\beta}\,mc^2\right)\begin{pmatrix}\psi_1(q)\\ \psi_2(q)\\ \psi_3(q)\\ \psi_4(q)\end{pmatrix} = 0\,. \qquad (8.163)$$

Každé řešení rovnice

$$\hat{\mathbf{P}}\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \qquad (8.164)$$

lze vyjádřit jako lineární kombinaci čtyř funkcí:

$$\psi_{\mathbf{p};j}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}(\mathbf{p};j)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right), \qquad j = 1, 2, 3, 4, \qquad (8.165)$$

kde **U(p**; $j$) je libovolná čtveřice lineárně nezávislých jednosloupcových matic.
Přitom skalární součin

$$\int\psi^{\dagger}_{\mathbf{p};j}(\mathbf{r})\int\psi_{\mathbf{p}';k}(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r} = (2\pi\hbar)^3\,\mathbf{U}(\mathbf{p};j)\mathbf{U}(\mathbf{p};k)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \qquad (8.166)$$

Každé nenulové řešení rovnice ( 8.164 ) je tedy také vlastní funkcí kvadrátu hamiltoniánu, příslušnou k vlastní hodnotě $E^2$.
Vlastní vektor hamiltoniánu, který je zároveň vlastním vektorem operátoru hybnosti, příslušným k vlastní hodnotě **p**, musí splňovat rovnici

$$\hat{\mathbf{H}}\mathbf{U}(\mathbf{p};p_0)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right) = cp_0\mathbf{U}(\mathbf{p};p_0)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right), \qquad (8.167)$$

a tedy **U(p**; $p_0$) musí být řešením algebraické rovnice

$$\mathbf{H}(\mathbf{p})\mathbf{U}(\mathbf{p};p_0) = cp_0\mathbf{U}(\mathbf{p};p_0), \qquad (8.168)$$

kde

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) \equiv c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \boldsymbol{\beta}\,mc^2. \qquad (8.169)$$

Je hermitovská matice, jejíž vlastní hodnoty jsou shodné s hledanými vlastními hodnotami hamiltoniánu.

Díky antikomutačním relacím, kterým vyhovují matice $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, dostáváme

$$\mathbf{H}^2(\mathbf{p}) = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4 = E^2, \tag{8.170}$$

srov. ( 8.73 ).
Nulovost stopy matic $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ zaručuje, že

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{H}(\mathbf{p}) = 0. \tag{8.171}$$

Z posledních dvou rovností již vidíme, že vlastními hodnotami matice $\mathbf{H}(\mathbf{p})$ jsou $\pm E$, a přitom každá z nich je dvakrát degenerovaná. Dospíváme tak k závěru, že každý stav diracovské částice se zadaným impulsem $\mathbf{p}$ je popsán čtyřkomponentovou vlnovou funkcí, kterou je možno vyjádřit jako superpozici dvou funkcí

$$\psi_{\mathbf{p};j}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{p};j)}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3\,\mathbf{N}(\mathbf{p};j)}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right), \qquad j = 1, 2\ , \tag{8.172}$$

kde jednosloupcové matice $\mathbf{u}(\mathbf{p};j)$ vyhovují rovnici

$$\mathbf{H}(\mathbf{p})\mathbf{u}(\mathbf{p};j) = E\mathbf{u}(\mathbf{p};j) \tag{8.173}$$

a podmínce ortogonality

$$\mathbf{u}^{\mathsf{T}}(\mathbf{p};j)\mathbf{u}(\mathbf{p};j) = \mathbf{N}(\mathbf{p};j)\delta_{jk}\ , \tag{8.174}$$

díky níž je

$$\int \psi^{\dagger}_{\mathbf{p};j}(\mathbf{r})\psi_{\mathbf{p}';k}(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r} = \delta_{jk}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \tag{8.175}$$

Ze vztahu ( 8.99 ) víme, že pokud je $\psi_E(\mathbf{r})$ je jakýkoliv vlastní vektor hamiltoniánu příslušný k vlastní hodnotě $E$, potom nábojovým sdružením z něho obdržíme vektor téhož operátoru příslušný k vlastní hodnotě $-E$.

Specielně to musí platit o bispinorech ( 8.172 ), jež mají popisovat stav diracovské částice s impulsem **p**.
Čtyřkomponentová funkce

$$\left(\psi_{\mathbf{p};j}(\mathbf{r})\right)_C = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{p};j)}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2E}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right), \qquad j = 1, 2 \qquad (8.176)$$

kde

$$\mathbf{v}(\mathbf{p};j) \equiv \mathbf{u}_C(\mathbf{p};j) \equiv \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}^*(\mathbf{p};j) \qquad (8.177)$$

je vlastním vektorem hamiltoniánu příslušejícím k vlastní hodnotě –*E*.
Jako takový je nutně ortogonální ke všem vlastním vektorům tohoto operátoru patřícím ke kladným vlastním hodnotám.
Musí tedy platit

$$\int \psi^{\mathsf{T}}_{\mathbf{p}';k}(\mathbf{r})\left(\psi_{\mathbf{p};j}(\mathbf{r})\right)_C \, d^3\mathbf{r} = 0 \ , \qquad (8.178)$$

a tedy

$$\mathbf{u}^{\mathsf{T}}(\mathbf{p}';k)\,\mathbf{v}(\mathbf{p};j)\,\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}') = 0 \ , \qquad (8.179)$$

neboli

$$\mathbf{u}^{\mathsf{T}}(\mathbf{p}';k)\,\mathbf{v}(-\mathbf{p};j) = 0 . \qquad (8.180)$$

Z formulí ( 8.167 ), ( 8.168 ), vidíme, že jednosloupcová matice **v**(**p**; *j*) vyhovuje algebraické rovnici

$$\mathbf{H}(-\mathbf{p})\,\mathbf{v}(\mathbf{p};j) = -E\mathbf{v}(\mathbf{p};j). \qquad (8.181)$$

**u**(**p**; *j*), resp. **v**(**p**; *j*) jsou tedy vlastními vektory hermitovské matice **H**(**p**), příslušející k vlastní hodnotě *E*, resp. –*E*.

Relativistická kvantová mechanika tak předpovídá existenci jakéhosi zrcadlového protějšku částic, vyznačujícího se zápornými frekvencemi (pohybem v inverzním čase) a opačným nábojem.
V předcházejícím jsme viděli, že bispinor přiřazený volné nehmotné diracovské částici s danou helicitou je vlastním vektorem matice $\boldsymbol{\gamma}_5$ .
Právě proto se o matici $\boldsymbol{\gamma}_5$ hovoří jako o operátoru chirality.
Vyjděme z triviálního postřehu, že každý bispinor lze zapsat ve tvaru

$$\psi = \psi_R + \psi_L \ , \qquad (8.182)$$

kde jednosloupcové matice

$$\begin{aligned} \psi_R &= \frac{1}{2}\left(1+\boldsymbol{\gamma}_5\right)\psi \,, \\ \psi_L &= \frac{1}{2}\left(1-\boldsymbol{\gamma}_5\right)\psi \,, \end{aligned} \qquad (8.183)$$

pokud jsou nenulové, představují vlastní vektory chirality příslušné k vlastním hodnotám +1, resp. –1:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_5\psi_R &= \psi_R \ , \\ \boldsymbol{\gamma}_5\psi_L &= -\psi_L \ . \end{aligned} \qquad (8.184)$$

Rozklad ( 8.183 ) je invariantní vůči libovolné vlastní Lorentzově transformaci, tj. platí:

$$\left(\psi_R\right)_\Lambda = \left(\psi_\Lambda\right)_R \qquad \forall \Lambda \in \mathrm{VLG} \,, \qquad (8.185)$$

kde

$$\begin{aligned} \left(\psi_R\right)_\Lambda &\equiv \mathbf{S}\left(\Lambda\right)\psi_R \ , \\ \left(\psi_\Lambda\right)_R &\equiv \frac{1}{2}\left(1+\boldsymbol{\gamma}_5\right)\psi_\Lambda \ , \\ \psi_\Lambda &\equiv \mathbf{S}\left(\Lambda\right)\psi \,. \end{aligned} \qquad (8.186)$$

Obdobné vztahy platí mezi levotočivými částmi bispinorů.
K důkazu tvrzení si stačí uvědomit, že

$$[\boldsymbol{\gamma}_5, \boldsymbol{\Sigma}] = [\boldsymbol{\gamma}_5, \boldsymbol{\alpha}] = 0 \ , \tag{8.187}$$

tj. že matice $\boldsymbol{\gamma}_5$ komutují jak s operátory rotací, tak s operátory boostů. Na druhé straně však matice $\boldsymbol{\gamma}_5$ a $\boldsymbol{\gamma}^0$ navzájem antikomutují, takže při prostorové inverzi si pravotočivá a levotočivá složka navzájem vymění roli, tj.

$$\begin{aligned} (\psi_R)_P &= (\psi_P)_L \ , \\ (\psi_L)_P &= (\psi_P)_R \ , \end{aligned} \tag{8.188}$$

kde

$$\psi_P \equiv \boldsymbol{\gamma}^0 \psi \ . \tag{8.189}$$

Hermitovská matice $\boldsymbol{\gamma}_5$ má nulovou stopu a její kvadrát je roven matici jednotkové.
Díky tomu existuje reprezentace Diracovy algebry realizovaná maticemi

$$\boldsymbol{\gamma}^\mu \equiv \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma}_D^\mu \mathbf{T}^\dagger , \tag{8.190}$$

kde **T** je taková unitární matice, že

$$\boldsymbol{\gamma}_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} . \tag{8.191}$$

v takové reprezentaci mají matice $\psi_R$ , resp. $\psi_L$ nenulové pouze horní, resp. dolní dvě komponenty, takže mají tvar

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \psi_L = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\chi} \end{pmatrix} , \tag{8.192}$$

kde $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\chi}$ jsou dvouřádkové matice.
Tomuto požadavku vyhovuje např. matice ( 8.136 ), kterou můžeme napsat též jako

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{\gamma}_D^0 + \boldsymbol{\gamma}_D^5\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{\gamma}^0 + \boldsymbol{\gamma}^5\right). \qquad (8.193)$$

Odpovídající reprezentace Diracovy algebry se nazývá **chirální**, neboli **Weylova**.
Matice ( 8.190 ) v ní mají tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (8.194)$$

Generátory rotací, resp. boostu ( 8.118 ) pak mají v této reprezentaci tvar

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{N}} &= \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (8.195)$$

Ve Weylově reprezentaci se tedy horní, resp. dolní komponenty bispinoru transformují jako $D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$, resp. $D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$.
Tato skutečnost je přitom nezávislá na tom, jakou realizaci Diracovy algebry využíváme.
Proto je výhodné v termínech Weylovy reprezentace vyjádřit Diracovu rovnici ( 8.100 ):

$$\left(i\partial_\mu \boldsymbol{\gamma}^\mu - \kappa\right)\psi\left(q\right) = 0 \ , \qquad (8.196)$$

kde $\kappa$ je reciproká hodnota Comptonovy vlnové délky.
Vynásobíme-li ji maticí $\boldsymbol{\gamma}_5$ , vidíme, že je ekvivalentní s rovnicí

$$\left(i\partial_\mu \boldsymbol{\gamma}^\mu - \kappa\right)\boldsymbol{\gamma}_5 \psi(q) = 0. \tag{8.197}$$

Sečtením a odečtením posledních dvou rovnic dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} i\partial_\mu \boldsymbol{\gamma}^\mu \psi_R(q) &= \kappa\psi_L(q), \\ i\partial_\mu \boldsymbol{\gamma}^\mu \psi_L(q) &= \kappa\psi_R(q), \end{aligned} \tag{8.198}$$

které v chirální reprezentaci představují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} i(\partial_0 + \nabla\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\varphi}(q) &= \kappa\boldsymbol{\chi}(q), \\ i(\partial_0 + \nabla\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\chi}(q) &= \kappa\boldsymbol{\varphi}(q) \end{aligned} \tag{8.199}$$

pro dvoukomponentové spinory $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\chi}$.
Nepřehlédněme, že vazbu mezi těmito dvěma rovnicemi zprostředkovává pouze parametr $\kappa$; takže v případě nehmotné částice se tato soustava rozpadá na dvě nezávislé **Weylovy rovnice**

$$\begin{aligned} (\partial_0 + \nabla\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\varphi}(q) &= 0, \\ (\partial_0 + \nabla\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\chi}(q) &= 0. \end{aligned} \tag{8.200}$$

Každá z nich je invariantní vůči vlastní Lorentzově grupě.
Při prostorové inverzi si však navzájem vyměňují úlohu.
Pokud tedy od pohybové rovnice požadujeme invarianci pouze vůči vlastní Lorentzově grupě, potom každá z rovnic ( 8.200 ) může být sama o sobě kandidátem na pohybovou rovnici pro částici s nulovou hmotou a spinem 1/2.
O odpovídající částici se pak hovoří jako o **weylovské částici**.
Zdůrazněme, že zatímco k popisu stavů diracovské částice potřebujeme čtyřkomponentové vlnové funkce, v případě weylovské částice vystačíme s dvoukomponentovými.
Snadno totiž nahlédneme, že polovina ze všech stavů, ve kterých se může nalézat částice diracovská, je pro weylovskou částici zakázaných.

Zatímco helicita diracovské částice může nabývat hodnot ±1/2, v případě částice weylovské je to buď pouze +1/2, nebo –1/2 .
Není bez zajímavosti, že sám H. Weyl, který svoji rovnici publikoval roku 1929, ji jako kandidáta na pohybovou rovnici zavrhl, právě z důvodu, že nevyhovovala požadavku pravo-levé symetrie.
Její fyzikální význam tak mohl být doceněn až tehdy, když v polovině padesátých let experimentální data jasně prokázala, že pravo-levá symetrie je v přírodě obecně narušena. Že některé přírodní zákony nejsou symetrické vůči prostorové inverzi.
Ukažme si nyní invarianci Diracovy rovnice vzhledem k unitárním transformacím, konkrétněji vzhledem ke grupě ***U*(1)**.
Těmto transformacím odpovídá přetočení vlnové funkce

$$\psi \to \psi e^{i\alpha} . \qquad (8.201)$$

Při této transformaci tedy nahrazujeme původní vlnovou funkci $\psi$, přetočenou vlnovou funkcí $\psi'$ pro kterou platí:

$$\psi' = \psi e^{i\alpha} . \qquad (8.202)$$

Snadno se přesvědčíme, že pro kvadrát normy pak platí

$$\langle \psi | \psi \rangle \to \psi^* \mathrm{e}^{-i\alpha} \psi \mathrm{e}^{i\alpha} = \langle \psi | \psi \rangle . \qquad (8.203)$$

Vůči této transformaci je Diracova rovnice samozřejmě invariantní (násobíme konstantou), stejně, jako kterákoli jiná pohybová rovnice kvantové mechaniky.
Podívejme se ale jak se situace změní, jestliže bude parametr $\alpha$ obecně funkcí místa a času, tj.

$$\alpha = \alpha(\mathbf{r}, t) . \qquad (8.204)$$

V tomto případě hovoříme o lokální symetrii ***U*(1)**, označované jako ***U*(1)**$_{\mathrm{loc}}$ .
Snadno opět nahlédneme, že ač hustota pravděpodobnosti se při této transformaci

$$\psi' = \psi e^{i\alpha(\mathbf{r},t)} \tag{8.205}$$

opět zachovává:

$$\langle\psi|\psi\rangle \to \psi^{*}\mathrm{e}^{-i\alpha(\mathbf{r},t)}\psi\mathrm{e}^{i\alpha(\mathbf{r},t)} = \langle\psi|\psi\rangle. \tag{8.206}$$

Vlnová funkce $\psi'$ již není řešením původní Diracovy rovnice, neboť kalibrační transformace $\boldsymbol{U}(\mathbf{1})_{\mathrm{loc}}$ závisí na prostoročasových souřadnicích. Na základě našich dřívějších poznatků o kalibrační invarianci snadno uhodneme, že abychom zachovali kalibrační invarianci Diracovy rovnice vzhledem k symetrii $\boldsymbol{U}(\mathbf{1})_{\mathrm{loc}}$, budeme do ní muset přidat další 4 kompenzující pole.
Provedeme-li záměnu parciálních derivací za derivace kovariantní, předpisem

$$\partial_{\mu} \to D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu} \;, \tag{8.207}$$

dá se ukázat, že Diracova rovnice zůstane kalibračně invariantní vzhledem k transformacím $\boldsymbol{U}(\mathbf{1})_{\mathrm{loc}}$ právě tehdy, pokud $A_{\mu}$ jsou komponenty čtyřpotenciálu.
Oním hledaným kompenzujícím polem je pole elektromagnetické, jak si podrobněji ukážeme ihned v následující kapitole.
Symetrie $\boldsymbol{U}(\mathbf{1})_{\mathrm{loc}}$ podle věty Noetherové bude souviset s nějakým dalším zákonem zachování.
V tomto případě se jedná o zákon zachování elektrického náboje.
Pro diracovskou částici v elektromagnetickém poli tak dospíváme k rovnici

$$\left(i\boldsymbol{\gamma}^{\mu} D_{\mu} - \kappa\right)\psi(q) = 0. \tag{8.208}$$

Snadno se lze přesvědčit, že pro každé řešení $\psi(q)$ této rovnice vyhovuje čtyřproud

$$j^{\mu}(q) \equiv c\overline{\psi}(q)\boldsymbol{\gamma}^{\mu}\psi(q) \tag{8.209}$$

rovnici kontinuity

$$\partial_\mu j^\mu(q) = 0 . \qquad (8.210)$$

Pauliho rovnice

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q) = \left[\left(c\hat{\mathbf{P}} - e\mathbf{A}(q)\right)\cdot\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\, mc^2 + e\varphi(q)\right]\psi(q), \qquad (8.211)$$

kde

$$\varphi = A^0, \qquad (8.212)$$

při Pauliho reprezentaci Diracovy algebry představuje soustavu rovnic

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(q) = \left[\left(c\hat{\mathbf{P}} - e\mathbf{A}(q)\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi(q) + \left(mc^2 + e\varphi(q)\right)\right]\Phi(q),$$
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi(q) = \left[\left(c\hat{\mathbf{P}} - e\mathbf{A}(q)\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}\Phi(q) + \left(-mc^2 + e\varphi(q)\right)\right]\chi(q),$$
$$(8.213)$$

pro dvoukomponentové funkce $\Phi$, $\chi$, tvořící horní, resp. dolní komponenty bispinoru $\psi$.
V obecném případě představuje $\psi$ nějakou superpozici stacionárních stavů diracovské částice.
V nerelativistickém případě budou k této superpozici přispívat výrazněji pouze ty stavy, jejichž energie má hodnotu blízkou k energii klidové, a tedy bude

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi(q) \simeq mc^2\chi(q) . \qquad (8.214)$$

Pro nepříliš silná pole bude

$$\left(-mc^2 + e\varphi(q)\right)\chi(q) \simeq -mc^2\chi(q) . \qquad (8.215)$$

z druhé rovnice ( 8.213 ) v tomto případě dostáváme

$$\chi(q) \simeq \frac{1}{2mc^2}\left(c\hat{\mathbf{P}} - e\mathbf{A}(q)\right)\boldsymbol{\sigma}\Phi(q) \ . \qquad (8.216)$$

V této aproximaci se pak formule ( 8.213 ) redukuje na rovnici

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(q) = \left\{\frac{1}{2m}\left[\left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(q)\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]^2 + e\varphi(q) + mc^2\right\}\Phi(q) \, . \qquad (8.217)$$

Na základě relací ( 8.92 ) dostáváme

$$\left[\left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(q)\right)\boldsymbol{\sigma}\right]^2 = \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(q)\right)^2 - \frac{e\hbar}{c}\mathbf{B}(q)\cdot\boldsymbol{\sigma} \ , \qquad (8.218)$$

a tedy rovnici ( 8.218 ) můžeme přepsat do tvaru

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(q) = \left\{\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(q)\right)^2 - \mu\mathbf{B}(q)\cdot\boldsymbol{\sigma} + e\varphi(q) + mc^2\right\}\Phi(q) \ , \qquad (8.219)$$

kde

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \qquad (8.220)$$

je magnetický moment diracovské částice.
Vidíme, že je orientován ve, resp. proti směru jejího spinu v závislosti na tom, zda je nabita kladně, či záporně.¨

## Elektromagnetická interakce

| | |
|---|---|
| Působení | výběrové (na $Q_e \neq 0$) |
| Dosah | nekonečný |
| Symetrie | $\boldsymbol{U}(\mathbf{1})_{\text{loc}}$ |
| IM částice | $\gamma$ - foton |

- **Působení interakce:** Elektromagnetická interakce je *výběrová interakce*. Působí jen na částice s nenulovým elektrickým nábojem.
- **Dosah interakce:** *Nekonečný*, existují radiační členy s intenzitou pole $1/r$, tj. s intenzitou energie $1/r^2$, které neubývají ani v nekonečnu. Tyto členy odpovídají elektromagnetickým vlnám.
- **Symetrie interakce:** Každá ze základních interakcí podléhá určité symetrii, která je pro ni typická. Pro elektromagnetickou interakci jde o symetrii, při které se rovnice kvantové teorie pole nezmění, nahradíme-li vlnovou funkci jinou vlnovou funkcí,vynásobenou komplexní jednotkou. Jde tedy o transformaci: $\psi \to \psi \exp\left[i\,\alpha(t,x,y,z)\right]$. Z matematického hlediska se jedná o pootočení vlnové funkce, neboli o *unitární* transformaci, s *jedním* parametrem (úhlem $\alpha$), který může být v každém bodě časoprostoru různý (závisí na $t$, $x$, $y$, $z$ - takovéto transformace nazýváme *lokální*). Matematici proto tuto transformaci označují $\boldsymbol{U}(\mathbf{1})_{\mathbf{loc}}$. Jejím přímým důsledkem je existence a zachování elektrického náboje. Někdy se proto zkráceně hovoří o kvantové teorii elektromagnetického pole jako o $\boldsymbol{U}(\mathbf{1})_{\mathbf{loc}}$ teorii.
- **Intermediální částice**: Symetrie je popsána jedním volným parametrem (úhlem otočení $\alpha$), kterému odpovídá jediná intermediální částice - foton. Foton má nulovou klidovou hmotnost. Plyne to z relací neurčitosti mezi energií vyslané intermediální částice $mc^2$ a dobou, po kterou může být mimo

objekt. Má-li mít interakce nekonečný dosah, musí mít intermediální částice nulovou hmotnost.

## Trocha historie

To, že jevy elektrické a magnetické mají společnou podstatu, objevili ve svých experimentech a teoretických pracích Michael Faraday, Andre Marie Amper, Hans Christian Orsted, Heinrich Hertz, Guglielmo Marconi. Završením těchto prací byla **teorie elektromagnetického pole** formulovaná Jamesem Clercem Maxwellem a Heinrichem Hertzem. Dnešní podoba Maxwellových rovnic pochází od Olivera Heavisidea. Maxwell správně rozpoznal, že světlo je příčné elektromagnetické vlnění. Mezi různými souřadnicovými systémy se Maxwellovy rovnice transformují pomocí Lorentzovy transformace. Právě odlišnost transformačních vlastností Maxwellových rovnic od rovnic newtonovské mechaniky vedla ve svých důsledcích ke vzniku speciální teorie relativity.

**Hans Christian Ørsted (1777 – 1851)**

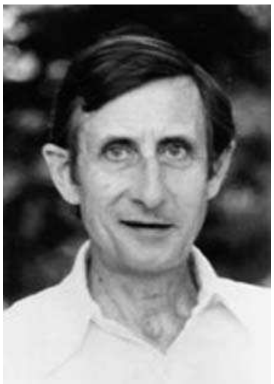
**Guglielmo Marconi (1874 – 1937)**

Na počátku 20. století bylo stále zřejmější, že matematické prostředky, které využíváme k popisu makroskopických jevů, selhávají při popisu mikrosvěta. Byl třeba nový, kvantový přístup k popisu jevů, který využívá nekomutujících objektů. To je nutné, uvědomíme-li si, že například sám akt měření není komutativní (různé výsledky dosáhneme, změříme-li v mikrosvětě nejprve rychlost a poté polohu částice, nebo provedeme-li měření v obráceném pořadí. U zrodu kvantové teorie stáli Max Planck, Albert Einstein, Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Louis de Broglie, Wolfgang Pauli, Max Born a mnozí další. První verze kvantových teorií (Schrödingerova rovnice, Heisenbergova maticová mechanika) byly nerelativistické. K relativistické kvantové teorii přispěli zejména Klein, Gordon (Klein-Gordonova rovnice pro částice s nulovým spinem) a Paul Adrien Maurice Dirac (Diracova rovnice pro částice s poločíselným spinem). Právě **Diracova rovnice**, jako rovnice vhodná pro popis elektronu, znamenala další zvrat v elektromagnetické teorii. Na jejím základě předpověděl Dirac existenci pozitronu, první antičástice. Na základě Diracovy rovnice byla vybudována kvantová elektrodynamika. Za její tvorbu získali Richard Philips Feynman, Julian Schwinger a Sin-Itiro Tomonaga Nobelovu cenu v roce 1965.

Tvůrci kvantové elektrodynamiky

**Richard Phillips Feynman (1918 – 1988)**

**Julian Seymour Schwinger (1918 – 1994)**



**Freeman John Dyson (1923)**

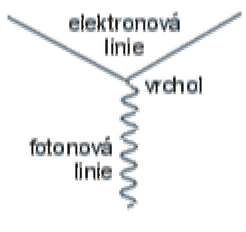
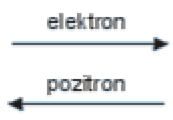
**Shin'ichirō Tomonaga (1906 – 1979)**

Doplníme-li do Diracovy rovnice symetrii $\boldsymbol{U(1)_{loc}}$ objeví se přirozenou cestou v rovnici pro elektron další pole - elektromagnetické pole. Právě doplňování symetrií do rovnic se dnes stalo základním způsobem tvorby nových fyzikálních zákonů (hovoříme o tzv.

*kalibračních teoriích*, teoriích postavených na transformačních symetriích fyzikálních zákonů). První takto vytvořenou teorií byla **kvantová teorie elektromagnetického pole** (P.A.M. Dirac, Richard Phillips Feynman). Komplikovaný aparát kvantové teorie byl zjednodušen do grafických zkratek, které dnes známe pod názvem Feynmanovy diagramy. Podle kvantové teorie pole je elektromagnetické pole kvantováno, základním kvantem je foton, který současně tvoří výměnnou částici zprostředkující elektromagnetickou interakci. Elektrický náboj je stíněn přítomností párů elektron-pozitron ve vakuu. Dostaneme-li se k elektronu na velmi malé vzdálenosti, jeho náboj roste. Pozorovaný elektrický náboj je stíněný náboj, skutečný náboj nazýváme holý náboj elektronu. Základní konstanta interakce (elektrický náboj) tak není ve skutečnosti konstantní, ale mění se v závislosti na energii částic (čím energetičtější částice, tím blíže elektronu se mohou přiblížit).

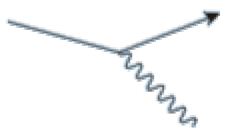
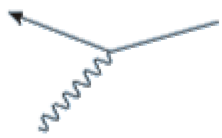
## Feynmanovy diagramy

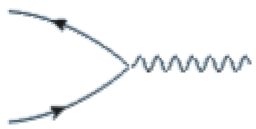
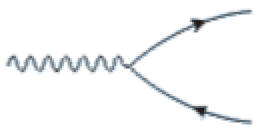
Feynmanovy diagramy jsou zástupné grafické zkratky pro jednotlivé členy rozvoje rovnic kvantové teorie elektromagnetického pole do řady. Každému diagramu odpovídá konkrétní matematický výraz a pro sestavování diagramů platí jednoduchá pravidla.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Základním diagramem elektromagnetické interakce je diagram s jednou elektronovou linií (libovolné generace), jednou fotonovou linií a jedním vrcholem. Tento diagram můžeme libovolně spojitě deformovat a skládáme z něho elektromagnetické děje.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Veškeré částice se ve Feynmanových diagramech pohybují doprava. Šipky na liniích neznamenají pohyb, ale rozlišují mezi částicemi a</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | antičásticemi. Šipka doprava znamená částici (zde elektron) a šipka doleva antičástici (zde pozitron). |
|  | Do interakční oblasti mohou vcházet libovolné částice. Napravo vylétávají částice po interakci. Najdeme-li jakýkoli způsob pospojování částic Feynmanovými diagramy, nalezli jsme jeden možný kanál reakce. |

Základní diagram elektromagnetické interakce lze interpretovat šesti způsoby:

| | | | |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| *emise fotonu elektronem* | *absorpce fotonu elektronem* | *emise fotonu pozitronem* | *absorpce fotonu pozitronem* |

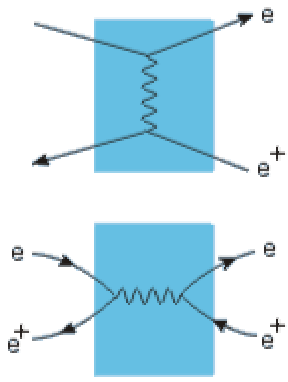
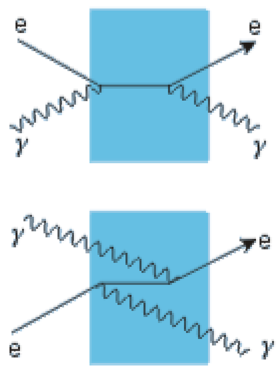
| | |
|---|---|
|  |  |
| *anihilace páru elektron pozitron* | *kreace páru elektron pozitron* |

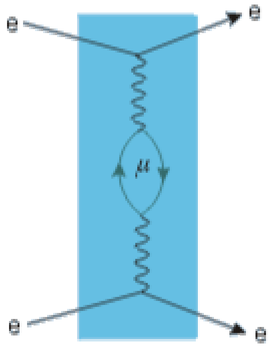
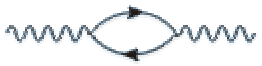
## Typické elektromagnetické procesy

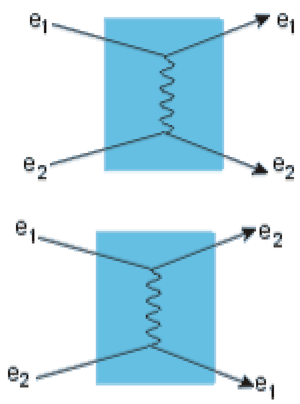
Počet vrcholů diagramu odpovídá pořadí v odpovídající řadě a amplituda pravděpodobnosti dějů s každým dalším vrcholem klesá v poměru, který nazýváme *konstanta jemné struktury*:

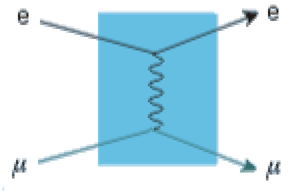
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137} \ . \qquad (8.221)$$

Jedině linie s volnými konci jsou skutečné částice, které lze registrovat v našich přístrojích. Linie, které začínají a končí ve vrcholu odpovídají tzv. virtuálním částicím, které nesplňují Heisenbergovy relace neurčitosti. Tyto částice nikdy nemůžeme registrovat v přístrojích (nemají volné konce linií), jde například o intermediální částice. Uveďme některé jednoduché Feynmanovy diagramy:

| | |
|---|---|
|   | $e + e^+ \rightarrow e + e^+$<br>(elektron pozitronový rozptyl)<br>Dva základní kanály reakce v druhém řádu Feynmanových diagramů. Odpovídající příspěvek k účinnému průřezu reakce spočítal v roce 1936 Bhabha bez pomoci FD. |
|   | $e + \gamma \rightarrow e + \gamma$ (elektron-foton)<br>Comptonův rozptyl<br>Dva základní kanály reakce v druhém řádu Feynmanových diagramů. |

| | |
|---|---|
|  | Anomální magnetický moment elektronu. |
|  | Vakuový diagram. |
|  | Diagram polarizace vakua. |
|  | Diagram vlastní hmotnosti elektronu. |

| | |
|---|---|
|  | e + e → e + e (Coulombův zákon) Dva základní kanály reakce, jde o diagramy druhého řádu se dvěma vrcholy. Modrá oblast je "černá skříňka" - oblast interakce. Běžně se v diagramech neoznačuje. Později uvidíme kvantové opravy ke Coulombovu zákonu od slabé interakce. |

| | |
|---|---|
|  | $\mathrm{e} + \mu \rightarrow \mathrm{e} + \mu$ (elektron-mion) Existuje jediný diagram 2. řádu. Odpovídající příspěvek k účinnému průřezu reakce spočítal v roce 1932 Möller bez FD. |

Předpovědi nerelativistické kvantové teorie jsou v neobyčejně dobrém souladu s experimentem ve všech případech, kdy se jedná o stavy, v nichž klidové energie částic dominují nad všemi ostatními příspěvky k celkové hodnotě energie.
Navíc, v těchto případech bylo možno malé odchylky předpovědi teorie od velice přesných experimentálních dat připsat na vrub zanedbávaných relativistických korekcí.
Tento názor byl nejen dobře fyzikálně motivován, ale významně podpořen zejména skutečností, že již započtení odpovídajících oprav v nejnižším řádu vedlo vesměs k podstatnému zlepšení souhlasu předpovědí s experimentálními daty.
Bylo proto přirozené očekávat, že dalšího zlepšení bude dosaženo, když se podaří problém adekvátně formulovat v rámci relativistické kvantové mechaniky.
Na řadě konkrétních problémů zejména z oblasti spektroskopie se ukázalo, že toto očekávání bylo plně oprávněné pokud jde o jevy dominované klidovou energií příslušných částic.
Je takřka nemyslitelné, že by šlo o pouhou náhodu.
Máme proto důvody předpokládat, že relativistická kvantová mechanika adekvátně popisuje velké množství stránek fyzikálního světa.
Na druhé straně je zřejmé, že kvantová mechanika nemůže poskytnout rámec pro adekvátní popis úplně všech stránek fyzikální reality, a to zcela nezávisle na tom, zda se jedná o teorii, která je, či není plně vnitřně konzistentní z hlediska čistě matematického.

V tomto případě totiž není podstatné to, že jde o teorii kvantovou, alebrž že jde o mechaniku, tj. o teorii, v níž je systém předem určen zadáním počtu a druhů částic, které tento systém tvoří.
Jinými slovy řečeno, mechanika je představuje teorii, která nepřipouští žádné procesy, při nichž by docházelo ke změnám počtu a druhů částic, a to ani vlivem vnějších polí, ani v důsledku interakce mezi jednotlivými částicemi systému samotného.
Ve skutečnosti však v přírodě nepřeberné množství právě takovýchto procesů probíhá.
Vždy při tom jde o procesy, v nichž dochází ke změnám energie jednotlivých částic tak velkým, že jsou srovnatelné s klidovou energií některé částice, tj. procesy probíhají daleko od nerelativistického režimu.
Je dobře si připomenout, že relativistické kvantová mechanika naráží na zásadní problémy právě tehdy, když se ji pokusíme aplikovat na výše naznačené oblasti.
Z výše popsaných důvodů, je však fakt, že relativistická kvantová mechanika přestává být vnitřně konzistentní právě v těchto oblastech, možno považovat za její klad.
Signalizuje totiž, že představuje aproximaci nějaké bohatší teorie.
Teorie fyzikálního systému, jehož stavy budou obsahovat různé počty částic a přitom v procesech dominovaných nerelativistickým režimem bude dynamika stavu se zadanými počty jednotlivých druhů částic jen málo ovlivňována faktem, že se systém může nacházet ve stavech s jinými počty či a druhy částic.
Jestliže výše zmíněná bohatší teorie má být teorií kvantovou, potom naznačená situace může nastat , když stavy s pevně zadaným počtem jednotlivých druhů částic jsou zobrazovány elementy nějakého podprostoru $H_P$ Hilbertova prostoru $H$ přiřazeného zmíněnému systému.
Pokud je dynamika celého systému determinována hamiltoniánem $\hat{\mathbf{H}}$, potom kvantově mechanická aproximace popisu dynamiky soustavy výše zmíněných částic bude zřejmě determinována nějakým efektivním hamiltoniánem $\hat{\mathbf{H}}_P$, pro který platí

$$\hat{\mathbf{H}}_P = \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{P}} \ , \qquad (8.222)$$

kde $\hat{\mathbf{P}}$ je projekční operátor na podprostor $\hat{\mathbf{H}}_P$.
Úspěch kvantové mechaniky pak signalizuje, že pro ty vektory $|\psi\rangle \in \hat{\mathbf{H}}_P$, které odpovídají stavům dominovaným nerelativistickým režimem, řešení pohybové rovnice

$$
\begin{aligned}
& i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{\mathbf{H}}|\psi(t)\rangle , \\
& |\psi(t_0)\rangle = |\psi\rangle
\end{aligned}
\qquad (8.223)
$$

je prakticky ekvivalentní s řešením rovnice

$$
\begin{aligned}
& i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{\mathbf{H}}_P|\psi(t)\rangle , \\
& |\psi(t_0)\rangle = |\psi\rangle .
\end{aligned}
\qquad (8.224)
$$

Zatímco v případě mechaniky je otázka, zda umožňuje formulovat výroky v termínech opírajících se o pojem „částice" téměř triviální (je ex definitione konstruována tak, aby popisovala chování částic), v obecném případě tomu tak ani z daleka není.
K tomu, abychom mohli v rámci nějaké teorie adekvátně popsat situaci, kdy v běžném jazyce mluvíme o individuální částici, je zřejmě nezbytné, aby fyzikální systém popisovaný takovouto teorií mohl být ve stavech, které takovéto částici odpovídají.
To m.j. znamená, že spektrum celkového impulsu a energie systému musí obsahovat takové hodnoty $P^\mu$, že

$$
P_\mu P^\mu = m^2 , \qquad (8.225)
$$

kde $m$ je hmota zmíněné částice.
Z předchozího víme, že v kvantové teorii operátor celkového impulsu a energie libovolného systému je třeba identifikovat s operátory reprezentujícími generátory prostoročasových translací.
V kvantové teorii tedy otázka existence jednočásticových stavů nějakého systému intimně souvisí s otázkou reprezentace grupy ***Poincaré*** na Hilbertově prostoru tohoto systému.

Ve skutečnosti jde jen o jeden z aspektů klíčové role, kterou tato grupa hraje v relativistické kvantové teorii.
Právě z tohoto hlediska se nyní věnujme grupě ***Poincaré*** poněkud podrobněji.

## Poincaréova grupa

**Jules Henri Poincaré (1854 – 1912)**

Řekneme, že nová souřadná soustava vznikla z výchozí translací $T(a)$ pokud je vůči ní v klidu, její souřadné osy jsou paralelní s výchozími, pouze počátek je posunut do místy (-***a***) a její časová škála je posunuta dopředu o hodnotu ($-a_0$).
Jestliže souřadnice světobodu mají ve výchozí soustavě hodnotu $x^\mu$, potom z hlediska nové souřadné soustavy mají souřadnice téhož světobodu hodnotu

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu . \qquad (8.226)$$

Je zřejmé, že dvě po sobě provedené translace představují opět translaci a přitom výsledek je nezávislý na pořadí, v jakém byly zmíněné dvě translace provedeny.

**Niels Henrik Abel (1802 – 1829)**

Všechny možné takovéto translace tvoří čtyřparametrickou abelovskou grupu (grupu translací v Minkowského prostoru), jejíž elementy jsou jednoznačně určeny hodnotami parametrů $a^{\mu}$ tak, že

$$T(a)T(b) = T(a+b). \qquad (8.227)$$

V každé reprezentaci této grupy lze tedy operátor $\hat{\mathbf{U}}(a)$ přiřazený elementu $T(a)$ zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathbf{U}}(a) = \exp\left(i a_{\mu} \hat{\mathbf{P}}^{\mu}\right), \qquad (8.228)$$

kde operátory $\hat{\mathbf{P}}^{\mu}$ reprezentující generátory této grupy všechny navzájem komutují

$$\left[\hat{\mathbf{P}}^{\mu}, \hat{\mathbf{P}}^{\nu}\right] = 0. \qquad (8.229)$$

Translace můžeme ovšem skládat také s Lorentzovými transformacemi. Jestliže nová soustava vznikne transformací $G(\Lambda(\omega_{(1)}), a_{(1)})$ z výchozí tak, že nejprve provedeme vlastní Lorentzovu transformaci $\Lambda(\omega_{(1)}$ a po ní translaci $T(a_{(1)})$, potom hodnoty souřadnic téhož světobodu v nové a výchozí soustavě spolu souvisí vztahem

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\left(\omega_{(1)}\right) x^{\nu} + a^{\mu}_{(1)} \ . \qquad (8.230)$$

Přejdeme-li z této soustavy opět do další, transformací $G(\Lambda(\omega_{(2)}), a_{(2)})$, potom v takto vzniklé soustavě bude mít uvažovaný světobod souřadnice

$$\begin{aligned} x''^{\mu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\left(\omega_{(2)}\right)x'^{\nu} + a^{\mu}_{(2)} = \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\left(\omega_{(2)}\right)\left[\Lambda^{\rho}{}_{\nu}\left(\omega_{(1)}\right)x^{\nu} + a^{\rho}_{(1)}\right] + a^{\mu}_{(2)} = \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\left(\omega_{(1,2)}\right)x^{\nu} + a^{\mu}_{(1,2)} \ . \end{aligned} \tag{8.231}$$

kde

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\left(\omega_{(1,2)}\right) \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\left(\omega_{(2)}\right)\Lambda^{\rho}{}_{\nu}\left(\omega_{(1)}\right) \tag{8.232}$$

představuje opět vlastní Lorentzovu transformaci a

$$a^{\mu}_{(1,2)} \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\left(\omega_{(2)}\right)a^{\rho}_{(1)} + a^{\mu}_{(2)} \ . \tag{8.233}$$

Jinými slovy řečeno, do poslední soustavy jsme mohli přejít také přímo ze soustavy výchozí provedením nejprve vlastní Lorentzovy transformace $\Lambda(\omega_{(1,2)})$, následované translací $T(a_{(1,2)})$.
Tedy všechny takovéto transformace tvoří grupu a násobení mezi jejími elementy $G(\Lambda(\omega), a)$ je determinováno relací

$$G\left(\Lambda\left(\omega_{(2)}\right),a_{(2)}\right)G\left(\Lambda\left(\omega_{(1)}\right),a_{(1)}\right) = G\left(\Lambda\left(\omega_{(2)}\right)\Lambda\left(\omega_{(1)}\right),\Lambda\left(\omega_{(2)}\right)a_{(1)} + a_{(2)}\right). \tag{8.234}$$

Tato desetiparametrická Lieova grupa se nazývá Poincaréovu grupou $\boldsymbol{P}$. Vzhledem k tomu, že libovolný element Poincaréovy grupy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$G\left(\Lambda(\omega),a\right) = G(1,a)G\left(\Lambda(\omega),0\right), \tag{8.235}$$

bude také v každé reprezentaci platit analogický vztah mezi odpovídajícími operátory

$$\hat{\mathbf{U}}(\omega,a)=\hat{\mathbf{U}}(a)\hat{\mathbf{U}}(\omega). \qquad (8.236)$$

Přitom víme, že operátory přiřazené translacím *T*(*a*), resp. vlastním Lorentzovým transformacím Λ(*ω*) musí mít tvar ( 8.228 ), resp.

$$\hat{\mathbf{U}}(\omega)=\exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{\mathbf{M}}^{\mu\nu}\right), \qquad (8.237)$$

kde operátory $\hat{\mathbf{P}}^{\mu}$, $\hat{\mathbf{M}}^{\mu\nu}$ odpovídají generátorům těchto transformací, a tedy musí vyhovovat komutačním relacím ( 8.229 ), resp.

$$\left[\hat{\mathbf{M}}^{\mu\nu},\hat{\mathbf{M}}^{\rho\sigma}\right]=i\left(g^{\mu\sigma}\hat{\mathbf{M}}^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}\hat{\mathbf{M}}^{\nu\sigma}+g^{\nu\rho}\hat{\mathbf{M}}^{\mu\sigma}-g^{\nu\sigma}\hat{\mathbf{M}}^{\mu\rho}\right) \qquad (8.238)$$

definované pravou stranou formule ( 8.236 ) vyhovující relacím (viz. ( 8.231 ) – ( 8.234 ))

$$\hat{\mathbf{U}}\left(\omega_{(1,2)},a_{(1,2)}\right)=\hat{\mathbf{U}}\left(\omega_{(2)},a_{(2)}\right)\hat{\mathbf{U}}\left(\omega_{(1)},a_{(1)}\right) \qquad (8.239)$$

i tehdy, když se nejedná o pouhé skládání dvou translací, nebo skládání dvou vlastních Lorentzových transformací.
K tomu, aby tomu tak bylo, musí být evidentně splněny ještě relace mezi operátory $\hat{\mathbf{P}}^{\mu}$ a $\hat{\mathbf{M}}^{\mu\nu}$, odpovídající zákonům skládání translací s vlastními Lorentzovými transformacemi, tj. musí např. platit

$$\hat{\mathbf{U}}(\omega,0)\hat{\mathbf{U}}(1,a)\hat{\mathbf{U}}(-\omega,0)=\hat{\mathbf{U}}\left(1,\Lambda(\omega)a\right). \qquad (8.240)$$

Zderivováním této relace pro *a* = 0 dostaneme

$$\hat{\mathbf{U}}(\omega)\hat{\mathbf{P}}^{\mu}\hat{\mathbf{U}}^{-1}(\omega)=\Lambda_{\nu}{}^{\mu}(\omega)\hat{\mathbf{P}}^{\nu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(-\omega)\hat{\mathbf{P}}^{\nu}, \qquad (8.241)$$

a tedy do veličin prvního řádu v $\omega$

$$\left(1+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\hat{\mathbf{M}}^{\alpha\beta}\right)\hat{\mathbf{P}}^{\mu}\left(1-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\hat{\mathbf{M}}^{\alpha\beta}\right)=\hat{\mathbf{P}}^{\mu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}\hat{\mathbf{P}}^{\mu}, \qquad (8.242)$$

tj.

$$\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\left[\hat{\mathbf{M}}^{\alpha\beta},\hat{\mathbf{P}}^{\mu}\right]=\omega_{\alpha\nu}g^{\mu\alpha}\hat{\mathbf{P}}^{\nu}\,. \qquad (8.243)$$

S využitím toho, že $\hat{\mathbf{M}}^{\mu\nu}=-\hat{\mathbf{M}}^{\nu\mu}$ a

$$\frac{\partial\omega_{\alpha\beta}}{\partial\omega_{\rho\sigma}}=\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma}-\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}\ , \qquad (8.244)$$

odtud dostáváme

$$\left[\hat{\mathbf{M}}^{\mu\nu},\hat{\mathbf{P}}^{\rho}\right]=i\left(g^{\nu\rho}\hat{\mathbf{P}}^{\mu}-g^{\mu\rho}\hat{\mathbf{P}}^{\nu}\right). \qquad (8.245)$$

Snadno se lze přesvědčit, že tyto komutační relace, spolu s dříve nalezenými ( 8.229 ), ( 8.238 ):

$$\left[\hat{\mathbf{P}}^{\mu},\hat{\mathbf{P}}^{\nu}\right]=0\,, \qquad (8.246)$$
$$\left[\hat{\mathbf{M}}^{\mu\nu},\hat{\mathbf{M}}^{\rho\sigma}\right]=i\left(g^{\mu\sigma}\hat{\mathbf{M}}^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}\hat{\mathbf{M}}^{\nu\sigma}+g^{\nu\rho}\hat{\mathbf{M}}^{\mu\sigma}-g^{\nu\sigma}\hat{\mathbf{M}}^{\mu\rho}\right), \qquad (8.247)$$

již zajišťují, že operátory ( 8.236 ) vyhovují relacím ( 8.239 ) pro všechny elementy Poincaréovy grupy.
Libovolné operátory $\hat{\mathbf{P}}^{\rho}$ a $\hat{\mathbf{M}}^{\mu\nu}$ vyhovující komutačním relacím ( 8.245 ) – ( 8.247 ) realizují reprezentaci Poincaréovy algebry.
Zavedeme-li (srov. definice ( 8.34 )) operátory

$$\hat{\mathbf{H}}\equiv\hat{\mathbf{P}}^{0}\ , \qquad (8.248)$$
$$\hat{\mathbf{J}}_{k}\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}\hat{\mathbf{M}}^{lm}\ , \qquad (8.249)$$
$$\hat{\mathbf{K}}_{j}\equiv\hat{\mathbf{M}}^{oj}\ , \qquad (8.250)$$

můžeme výše uvedené komutační relace definující Poincaréovu algebru ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\left[\hat{\mathbf{P}}_j,\hat{\mathbf{P}}_k\right]=\left[\hat{\mathbf{P}},\hat{\mathbf{H}}\right]=\left[\hat{\mathbf{J}},\hat{\mathbf{H}}\right]=0\ , \tag{8.251}$$

$$\left[\hat{\mathbf{J}}_j,\hat{\mathbf{J}}_k\right]=-\left[\hat{\mathbf{K}}_j,\hat{\mathbf{K}}_k\right]=i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathbf{J}}_l\ , \tag{8.252}$$

$$\left[\hat{\mathbf{J}}_j,\hat{\mathbf{P}}^k\right]=i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathbf{P}}^l, \tag{8.253}$$

$$\left[\hat{\mathbf{J}}_j,\hat{\mathbf{K}}_k\right]=i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathbf{K}}_k \tag{8.254}$$

$$\left[\hat{\mathbf{K}}_j,\hat{\mathbf{P}}^k\right]=-i\delta_{jk}\hat{\mathbf{H}}\ , \tag{8.255}$$

$$\left[\hat{\mathbf{K}},\hat{\mathbf{H}}\right]=-i\hat{\mathbf{P}}\ . \tag{8.256}$$

Libovolný výraz utvořený z generátorů grupy, který se všemi generátory komutuje, musí být v každé ireducibilní reprezentaci realizován nějakým násobkem operátoru identity.
Takové výrazy se nazývají **Casimirovými operátory**.
Prostor libovolné ireducibilní reprezentace grupy tak představuje charakteristický podprostor každého Casimirova operátoru příslušný k nějaké jeho vlastní hodnotě.

**Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909 – 2000)**

Díky tomu lze ireducibilní reprezentace jednoznačně (až na ekvivalenci) určit zadáním odpovídajících vlastních hodnot všech nezávislých Casimirových operátorů.
V případě Poincaréovy grupy jsme již nalezli, že generátory translací se vůči vlastním Lorentzovým transformacím chovají jako čtyřvektor, tj. že pro ně platí relace ( 8.241 ).

Zcela analogicky zjistíme, že generátory vlastní Lorentzovy grupy se transformují jako komponenty antisymetrického tenzoru druhého řádu, tj. platí

$$\hat{\mathbf{U}}^{-1}(\omega)\hat{\mathbf{M}}^{\mu\nu}\hat{\mathbf{U}}(\omega)=\Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\omega)\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}(\omega)\hat{\mathbf{M}}^{\rho\sigma}. \qquad (\ 8.257\ )$$

Pomocí nich můžeme běžným způsobem (násobením, kontrakcí) konstruovat další tenzorové veličiny.
Tak např. okamžitě vidíme, že pro operátor

$$\hat{\mathbf{P}}^{2}\equiv\hat{\mathbf{P}}_{\mu}\hat{\mathbf{P}}^{\mu} \qquad (\ 8.258\ )$$

platí

$$\left[\hat{\mathbf{U}}(\omega),\hat{\mathbf{P}}^{2}\right]=0 \qquad (\ 8.259\ )$$

a díky komutačním relacím ( 8.246 ) také

$$\left[\hat{\mathbf{U}}(a),\hat{\mathbf{P}}^{2}\right]=0\ . \qquad (\ 8.260\ )$$

Tedy $\hat{\mathbf{P}}^{2}$ představuje Casimirův operátor Poincaréovy grupy.
Definujme **Pauli-Lubanského vektor**

$$\hat{\mathbf{W}}^{\mu}\equiv-\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{\mathbf{M}}_{\nu\rho}\hat{\mathbf{P}}_{\sigma}\ . \qquad (\ 8.261\ )$$

Takto definované operátory splňují relaci

$$\hat{\mathbf{U}}^{-1}(\omega)\hat{\mathbf{W}}^{\mu}\hat{\mathbf{U}}(\omega)=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\omega)\hat{\mathbf{W}}^{\nu}\ , \qquad (\ 8.262\ )$$

tj. chovají se vůči vlastním Lorentzovým transformacím jako komponenty čtyřvektoru, ale také komutují se všemi generátory translací:

$$\left[\hat{\mathbf{W}}^{\mu},\hat{\mathbf{P}}^{\nu}\right]=0\ . \tag{8.263}$$

Odtud pak okamžitě vidíme, že také operátor

$$\hat{\mathbf{W}}^{2}\equiv\hat{\mathbf{W}}_{\mu}\hat{\mathbf{W}}^{\mu} \tag{8.264}$$

je Casimirovým operátorem Poincaréovy grupy.
Pro další je užitečné si všimnout, že komponenty Pauli-Lubanského vektoru lze též zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}&\hat{\mathbf{W}}^{0}=\hat{\mathbf{P}}\cdot\hat{\mathbf{J}}\ ,\\&\hat{\mathbf{W}}=\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{J}}-\left[\hat{\mathbf{P}}\times\hat{\mathbf{K}}\right].\end{aligned} \tag{8.265}$$

Podle teorie relativity jsou všechny souřadné soustavy, které spolu souvisejí nějakou transformací patřící do Poincaréovy grupy ***P***, navzájem ekvivalentní.
Tedy jestliže nějakému fyzikálnímu systému přiřadíme ve vybrané soustavě Hilbertův prostor $\mathsf{H}$ , potom tentýž Hilbertův prostor lze přiřadit tomuto systému v každé soustavě, kterou z ní obdržíme jakoukoliv transformací $G(\Lambda(\omega), a) \in$ ***P***.
Jestliže z hlediska výchozí soustavy je systém ve tvaru popsaném vektorem $|\psi\rangle \in \mathsf{H}$ , potom z hlediska transformované soustavy je ve stavu, který lze popsat vektorem

$$|\psi'\rangle\equiv\hat{\mathbf{U}}(\omega,a)|\psi\rangle\in\mathsf{H}\ . \tag{8.266}$$

Přitom bez újmy na obecnosti můžeme požadovat, aby

$$\|\psi'\|=\|\psi\|\ . \tag{8.267}$$

Operátor $\hat{\mathbf{U}}(\omega,a)$ musí být unitární lineární, anebo antilineární.

Protože spojitou změnou hodnot parametrů lze transformaci $G(\Lambda(\omega), a)$ převést v transformaci identickou, tj. transformaci $G(1, a)$, nemůže operátor $\hat{\mathbf{U}}(\omega,a)$ být antilineárním.
Operátory $\hat{\mathbf{U}}(\omega,a)$ musí respektovat zákon skládání uvažovaných transformací.
Pokud by stavům byly přiřazeny vektory, plynula by odtud podmínka

$$\hat{\mathbf{U}}\left(g_{(2)}\right)\hat{\mathbf{U}}\left(g_{(1)}\right)=\hat{\mathbf{U}}\left(g_{(1,2)}\right) , \tag{8.268}$$

kde jsme pro zjednodušení označili

$$\hat{\mathbf{U}}\left(g_{(j)}\right)=\hat{\mathbf{U}}\left(\omega_{(j)},a_{(j)}\right) . \tag{8.269}$$

Jinými slovy řečeno, v takovémto případě by operátory $\hat{\mathbf{U}}(g)$ musely realizovat unitární reprezentaci Poincaréovy grupy na Hilbertově prostoru $\mathbf{H}$ .
Skutečnost, že stavům nejsou přiřazeny vektory, ale paprsky, vede k tomu, že důsledky zákona skládání transformací jsou slabší.
Musí platit pouze relace

$$\hat{\mathbf{U}}\left(g_{(2)}\right)\hat{\mathbf{U}}\left(g_{(1)}\right)=\exp\left[i\varphi\left(g_{(2)},g_{(1)}\right)\right]\hat{\mathbf{U}}\left(g_{(1,2)}\right) , \tag{8.270}$$

kde $\varphi\left(g_{(2)},g_{(1)}\right)$ je reálná funkce naznačených parametrů, tj. operátory $\hat{\mathbf{U}}(g)$ musí tvořit projektivní reprezentaci grupy.
Ukazuje se, že v případě Poincaréovy grupy se ve skutečnosti stačí omezit na vyšetřování jejích reprezentací, pokud pod pojmem „reprezentace“ zahrneme i reprezentace dvojznačné.
Uvedené výsledky představují speciální případ mnohem obecněji platných závěrů, které hrají důležitou roli i v mnoha dalších oblastech.
Zde je pouze stručně shrneme: Jestliže unitární operátory $\hat{\mathbf{U}}(g)$, definované na Hilbertově prostoru $\mathbf{H}$ tvoří projektivní reprezentaci $N$-parametrické Lieovy grupy $\boldsymbol{G}$, potom tyto operátory lze zapsat jako

$$\hat{\mathbf{U}}\left(g\left(\alpha\right)\right) = \exp\left(i\sum_{a=1}^{N}\alpha_a\hat{\mathbf{X}}_a\right), \qquad (8.271)$$

kde $\alpha_a$ jsou reálné parametry a $\hat{\mathbf{X}}_a$ jsou samosdružené operátory.
Z požadavku, aby vztah ( 8.270 ) platil pro $\alpha_a \to 0$ (tj. v blízkosti jednotkového elementu grupy ***G***), nalezneme, že tyto operátory musí vyhovovat komutačním relacím

$$\left[\hat{\mathbf{X}}_a, \hat{\mathbf{X}}_b\right] = i\sum_{c=1}^{N} C_{ab}^{c}\hat{\mathbf{X}}_c + iC_{ab}, \qquad (8.272)$$

kde $C_{ab}^{c}$ jsou strukturní konstanty grupy ***G*** a

$$C_{ab} = -C_{ba} \qquad (8.273)$$

jsou reálná čísla, která musí vyhovovat relacím

$$\sum_{c=1}^{N}\left(C_{ab}^{c}C_{cd} + C_{bd}^{c}C_{ca} + C_{da}^{c}C_{cb}\right) = 0, \qquad a, b, d = 1, \ldots, N. \qquad (8.274)$$

Pro poslední členy na pravé straně komutačních relací ( 8.272 ) (které je samozřejmě třeba chápat jako příslušné násobky operátoru identity) se užívá názvu **centrální náboje**.
Jsou to tedy pouze centrální náboje, které v okolí jednotkového elementu grupy ***G*** determinují odlišnost operátorů realizujících projektivní reprezentaci téže grupy.
Někdy ovšem může jít o odlišnost zcela nepodstatnou: Předpokládejme, že na prostoru $\mathsf{H}$ existuje i unitární reprezentace grupy ***G***, tj. existují unitární operátory $\widehat{\mathbf{U}}\left(g\right)$, pro které platí

$$\widehat{\mathbf{U}}\left(g_{(2)}\right)\widehat{\mathbf{U}}\left(g_{(1)}\right) = \widehat{\mathbf{U}}\left(g_{(1,2)}\right). \qquad (8.275)$$

Přitom víme, že je lze vyjádřit ve tvaru

$$\widehat{\mathbf{U}}\left(g\left(\alpha\right)\right) = \exp\left(i\sum_{a=1}^{N}\alpha_a\widehat{\mathbf{X}}_a\right) , \qquad (\ 8.276\ )$$

kde operátory $\widehat{\mathbf{X}}_a$ vyhovují komutačním relacím

$$\left[\widehat{\mathbf{X}}_a , \widehat{\mathbf{X}}_b\right] = i\sum_{c=1}^{N} C_{ab}^{c}\widehat{\mathbf{X}}_c \ . \qquad (\ 8.277\ )$$

definujeme-li

$$\hat{\mathbf{X}}_a \equiv \widehat{\mathbf{X}}_a + \xi_a \ , \qquad (\ 8.278\ )$$

kde $\xi_a$ jsou libovolná pevně zvolená reálná čísla, potom, snadno zjistíme, že tyto operátory vyhovují komutačním relacím ( 8.272 ), v nichž

$$C_{ab} = -\sum_{c=1}^{N} C_{ab}^{c}\xi_c \ , \qquad (\ 8.279\ )$$

a operátory ( 8.271 ) vyhovují relacím ( 8.270 ), v nichž

$$\varphi\left(g_{(2)}, g_{(1)}\right) = \sum_{a=1}^{N}\left[\alpha_0\left(2\right) + \alpha_0\left(1\right) - \alpha_0\left(1,2\right)\right]\xi_a \ . \qquad (\ 8.280\ )$$

Konstanty ( 8.279 ) pochopitelně vyhovují rovnicím ( 8.274 ). Důležitější však je, že pro mnohé grupy žádná jiná řešení těchto rovnic neexistují, tj. neexistují pro ně žádné pravé projektivní reprezentace (tj. takové, které nelze pouhou transformací ( 8.278 ) generátorů změnit v reprezentaci). Lze dokázat, že tak tomu je nejen pro všechny poloprosté grupy, ale také např. pro grupu Poincaré.

Z uvedeného je zřejmé, že pokud se nejedná o pravou projektivní reprezentaci, potom v okolí jednotkového elementu je odlišnost projektivní reprezentace od reprezentace naprosto triviální.
To však vůbec neznamená, že by to muselo platit i tehdy, vzdálíme-li se z okolí jednotkového elementu.
Tak tomu obecně je jedině u grup jednoduše souvislých.
Na druhé straně však víme, že ke každé *m*-násobně souvislé grupě ***G*** existuje právě jedna univerzální pokrývací grupa $\overline{\boldsymbol{G}}$, tj. grupa, která je jednoduše souvislá a přitom může být homomorfně zobrazena na ***G***.
Každá z reprezentací grupy $\overline{\boldsymbol{G}}$ je buď reprezentací grupy ***G***, nebo její víceznačnou (až *m*-značnou) reprezentací.
Odtud vidíme, že výše uvedený výrok o tom, že projektivní reprezentace, pokud nejsou pravými projektivními se jen triviálně liší od reprezentací, je obecně platným, pokud pod termín reprezentace zahrneme v případě vícenásobně souvislých grup i reprezentace víceznačné.
Připomeňme, že jak grupa rotací v třírozměrném Eukleidově prostoru ***SO***(3), tak vlastní Lorentzova grupa ve čtyřrozměrném Minkowského prostoru ***SO***(3,1), jsou grupami dvojnásobně souvislými.
Odpovídající univerzální pokrývací grupu v těchto případech tvoří grupa ***SU***(2), resp. ***SL***(2,C).
Na bázi Hilbertova prostoru $\mathsf{H}$ libovolné unitární ireducibilní reprezentace Poincaréovy grupy můžeme utvořit z vektorů $|p,\xi\rangle$, pro které platí

$$\hat{\mathbf{P}}^{\mu}|p,\xi\rangle = p^{\mu}|p,\xi\rangle ,$$
$$p_{\mu}p^{\mu} = p^{2} , \qquad (8.281)$$

kde $\xi$ je parametr, který čísluje nějakou ortogonální bázi v každém charakteristickém podprostoru společných vlastních vektorů operátoru $\hat{\mathbf{P}}^{\mu}$.
Z formule ( 8.228 ) pak vidíme, že pokud jde o operátory reprezentující translace, je jejich působení na uvedenou bázi téměř triviální:

$$\hat{\mathrm{U}}(a)|p,\xi\rangle = \exp\left(ip^{\mu}a_{\mu}\right)|p,\xi\rangle \; . \qquad (8.282)$$

Na druhé straně v případě vlastních Lorentzových transformací
z formule ( 8.241 ) víme, že

$$\hat{\mathbf{U}}(\omega)\hat{\mathbf{P}}^{\mu}\left|p,\xi\right\rangle = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(-\omega)\hat{\mathbf{P}}^{\nu}\hat{\mathbf{U}}(\omega)\left|p,\xi\right\rangle \ , \qquad (8.283)$$

tj.

$$p^{\mu}\hat{\mathbf{U}}(\omega)\left|p,\xi\right\rangle = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(-\omega)\hat{\mathbf{P}}^{\nu}\hat{\mathbf{U}}(\omega)\left|p,\xi\right\rangle \ , \qquad (8.284)$$

což je totéž jako

$$\hat{\mathbf{P}}^{\mu}\hat{\mathbf{U}}(\omega)\left|p,\xi\right\rangle = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\omega)\,p^{\nu}\hat{\mathbf{U}}(\omega)\left|p,\xi\right\rangle \ . \qquad (8.285)$$

Jinými slovy, vektor $\hat{\mathbf{U}}(\omega)\left|p,\xi\right\rangle$ patří do charakteristického podprostoru operátoru $\hat{\mathbf{P}}^{\mu}$ příslušného k vlastním hodnotám

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\omega)\,p^{\nu} \ , \qquad (8.286)$$

a tedy ho musí být možno vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\hat{\mathbf{U}}(\omega)\left|p,\xi\right\rangle = \sum_{\xi'} A_{\xi',\xi}(\omega,p)\left|\Lambda(\omega)\,p,\xi\right\rangle \ . \qquad (8.287)$$

Odtud vidíme, že do Hilbertova prostoru kterékoliv pevně zvolené
ireducibilní reprezentace mohou náležet vektory $\left|p,\xi\right\rangle$, $\left|p',\xi'\right\rangle$ jedině
tehdy, existuje-li vlastní Lorentzova transformace $\Lambda(\omega)$ taková, že platí
relace ( 8.286 ).
Díky tomu můžeme všechny unitární ireducibilní reprezentace
Poincaréovy grupy rozdělit podle šesti tříd čtyřvektorů invariantních
vůči vlastním Lorentzovým transformacím, tak jak jsou uvedeny
v následující tabulce.

**Tab. 8.1**

| Číslo třídy | Vlastnosti čtyřvektorů | 4-vektor $k^\mu$ | Malá grupa |
|---|---|---|---|
| 1 | $p_\mu p^\mu = 0,\ p^0 = 0 \Leftrightarrow p^\mu = 0$ | $\{0,0\}$ | $\boldsymbol{SO}(3,1)$ |
| 2 | $p_\mu p^\mu = M^2,\ M > 0 \Leftrightarrow p^0 > 0$ | $\{M,0\}$ | $\boldsymbol{SO}(3)$ |
| 3 | $p_\mu p^\mu = 0,\ p^0 > 0$ | $\{1,0,0,1\}$ | $\boldsymbol{SO}(2) \otimes \boldsymbol{T}(2)$ |
| 4 | $p_\mu p^\mu = M^2,\ M > 0 \Leftrightarrow p^0 > 0$ | $\{-M,0\}$ | $\boldsymbol{SO}(3)$ |
| 5 | $p_\mu p^\mu = 0,\ p^0 > 0$ | $\{-1,0,0,1\}$ | $\boldsymbol{SO}(2) \otimes \boldsymbol{T}(2)$ |
| 6 | $p_\mu p^\mu = M^2 < 0$ | $\{0,0,0,M\}$ | $\boldsymbol{SO}(2,1)$ |

kde $\boldsymbol{T}(2)$ je grupou translací v rovině.
Přitom každý vektor $p^\mu$ ze zadané třídy lze získat vhodnou vlastní Lorentzovou transformací z libovolného jiného vektoru téže třídy.
Specielně ho tedy můžeme obdržet transformací „standardního vektoru“ $k^\mu$, specifikovaného pro každou třídu v předposledním sloupci tabulky.
Tato Lorentzova transformace ovšem není zadáním vektoru $p^\mu$ určena jednoznačně.
Okamžitě např. vidíme, že pokud je

$$p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\omega) k^\nu \ , \qquad (\ 8.288\ )$$

potom určitě také platí

$$p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\tilde{\omega}) k^\nu \ , \qquad (\ 8.289\ )$$

kde

$$\Lambda(\tilde{\omega}) \equiv \Lambda(\omega''; p)\Lambda(\omega)\Lambda(\omega'; k) \qquad (\ 8.290\ )$$

a $\Lambda\left(\omega';k\right)$, resp. $\Lambda\left(\omega'';p\right)$ je libovolná transformace, vůči níž je čtyřvektor *k*, resp. *p* invariantní, tj. platí

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\left(\omega';k\right)k^{\nu} &= k^{\mu}\ , \\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\left(\omega'';p\right)p^{\nu} &= p^{\mu}\ . \end{aligned} \qquad (\ 8.291\ )$$

Snadno nahlédneme, že množina všech vlastních Lorentzových transformací, vůči nimž je invariantní jakýkoliv pevně vybraný čtyřvektor *p*, tvoří podgrupu. Wigner ji nazval **malou grupou *W*(*p*)**.
Není snad nutno zdůrazňovat, že do malé podgrupy dvou různých čtyřvektorů patří různé transformace.
Podstatné však je, že pro všechny čtyřvektory patřící do téže třídy jsou odpovídající malé grupy navzájem izomorfní, tj. představují pouze různé realizace téže grupy.
O kterou grupu se jedná, je uvedeno v posledním sloupci tabulky 7.1.
Při pevně zvoleném standardním vektoru dané třídy můžeme z množiny všech transformací $\Lambda(\omega)$, které splňují relaci ( 8.288 ), evidentně nějakým předpisem vybrat transformaci jedinou.
Pro tuto transformaci, která je již zadáním čtyřvektoru *p* určena jednoznačně, budeme užívat symbolu **L**(*p*).
Zdůrazněme ještě jednou, že to, kterou konkrétní Lorentzovu transformaci symbol **L**(*p*) představuje záleží nejen na *p*, ale také na výše zmíněném předpisu.
Nezávisle na jeho volbě ovšem vždy platí

$$L^{\mu}{}_{\nu}\left(p\right)k^{\nu} = p^{\mu}. \qquad (\ 8.292\ )$$

Dříve zmíněné vektory báze $\mathbf{H}$ budeme nyní identifikovat s

$$\left|\,p,\xi\right\rangle \equiv N\left(p\right)\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{L}\left(p\right)\right)\left|k,\xi\right\rangle\ , \qquad (\ 8.293\ )$$

kde *N* (*p*) je normalizační konstanta, kterou budeme specifikovat později, a $\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{L}\left(p\right)\right)$ je operátor, který v uvažované reprezentaci odpovídá výše uvedené transformaci **L**(*p*).

Relaci ( 8.287 ) pak můžeme pro libovolnou vlastní Lorentzovu transformaci zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{\Lambda})|p,\xi\rangle &= N(p)\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{\Lambda})\hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{L}(p)\big)|k,\xi\rangle = \\ &= N(p)\hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{L}(\mathbf{\Lambda}p)\big)\hat{\mathbf{U}}^{\dagger}\big(\mathbf{L}(\mathbf{\Lambda}p)\big)\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{\Lambda})\hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{L}(p)\big)|k,\xi\rangle = \\ &= N(p)\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{\Lambda}p)\hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda}p)\big)|k,\xi\rangle ,\end{aligned} \tag{8.294}$$

kde

$$\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p) \equiv \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{\Lambda}p)\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}(p) \ . \tag{8.295}$$

Ale

$$\begin{aligned}\big[\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p)\big]^{\mu}{}_{\nu}\,k^{\nu} &= \big[\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{\Lambda}p)\big]^{\mu}{}_{\rho}\big[\mathbf{L}(p)\big]^{\rho}{}_{\nu}\,k^{\nu} = \\ &= \big[\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{\Lambda}p)\big]^{\mu}{}_{\rho}\,\mathbf{\Lambda}^{\rho}{}_{\nu}\,p^{\nu} = \big[\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{\Lambda}p)\big]^{\mu}{}_{\rho}(\mathbf{\Lambda}p)^{\rho} = k^{\mu} \ ,\end{aligned} \tag{8.296}$$

odkud vidíme, že transformace **W**(**Λ**, $p$) je elementem malé grupy čtyřvektoru $k$, a tedy

$$\hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p)\big)|k,\xi\rangle = \sum_{\xi'} D_{\xi'\xi}\big(\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p)\big)|k,\xi'\rangle \ , \tag{8.297}$$

kde $D_{\xi'\xi}(\mathbf{W})$ jsou elementy unitární matice **D**(**W**) přiřazené transformaci **W** v nějaké ireducibilní reprezentaci malé grupy ***W***($k$). Dosazením do pravé strany formule ( 8.294 ) dostáváme

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{\Lambda})|p,\xi\rangle &= N(p)\sum_{\xi'} D_{\xi'\xi}\big(\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p)\big)\hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{L}(\mathbf{\Lambda}p)\big)|p,\xi'\rangle = \\ &= \frac{N(p)}{N(\mathbf{\Lambda}p)}\sum_{\xi'} D_{\xi'\xi}\big(\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p)\big)|p,\xi'\rangle .\end{aligned} \tag{8.298}$$

k tomu, abychom nalezli všechny unitární ireducibilní reprezentace Poincaréovy grupy stačí, abychom nalezli tyto reprezentace pro malou grupu odpovídající každé ze šesti tříd čtyřvektorů specifikovaných v tabulce 7.1.
Pro nás jsou ovšem důležité pouze reprezentace realizovatelné v prostorech, které lze identifikovat s Hilbertovými prostory fyzikálních systémů, tj. operátory $\hat{\mathbf{P}}^{\mu}$, reprezentující generátory translací, musí současně hrát i úlohu operátorů celkového čtyřimpulsu této soustavy.
Čtyřimpuls $p^{\mu} = 0$ je evidentně invariantní vůči všem vlastním Lorentzovým transformací, tj. jeho malou grupou je grupa $\boldsymbol{SO(3,1)}$.
Vzhledem k tomu, že jde o grupu nekompaktní, její jedinou konečněrozměrnou unitární ireducibilní reprezentací je triviální jednorozměrná reprezentace přiřazující každému elementu jednotku.
Již tento prostinký fakt má závažný důsledek: Stav s nulovým čtyřimpulsem představuje vakuum.
Z uvedeného vyplívá, že žádná relativisticky invariantní kvantová teorie nemůže připustit konečný stupeň degenerace vakua.
Vakuum tak musí být buď nedegenerované, nebo je stupeň jeho degenerace nekonečný.
Čtyřvektor časového charakteru s kladnou nulovou komponentou, tj. čtyřvektor $p$, pro který platí

$$p_{\mu} p^{\mu} = m^2 , \qquad p^0 \equiv E > 0 , \tag{8.299}$$

můžeme identifikovat se čtyřimpulsem částice s klidovou hmotou $m > 0$.
Standardní čtyřvektor

$$k^{\mu} \equiv \{m, 0\} \tag{8.300}$$

je evidentně invariantní vůči všem prostorovým rotacím, kdežto vůči boostu invariantní není.
Odpovídající malou grupou tedy je grupa $\boldsymbol{SO(3)}$, tj. transformace ( 8.295 ) v tomto případě představuje rotaci.
Budeme ji nazývat **Wignerovou rotací**.
Je zřejmé, že pro operátor ( 8.258 ) platí

$$\hat{\mathbf{P}}^2 \left| k,\xi \right\rangle = m^2 \left| k,\xi \right\rangle \ . \tag{8.301}$$

Z formulí ( 8.265 ), ( 8.300 ) vidíme, že v našem případě je

$$\hat{\mathbf{W}}^0 \left| k,\xi \right\rangle = 0 \,, \tag{8.302}$$
$$\mathbf{W} \left| k,\xi \right\rangle = m\hat{\mathbf{J}} \left| k,\xi \right\rangle , \tag{8.303}$$

a tedy

$$\hat{\mathbf{W}}^2 \left| k,\xi \right\rangle = -m^2 j\left( j+1\right) \left| k,\xi \right\rangle \ , \tag{8.304}$$

kde $j$ je celé nebo polocelé nezáporné číslo,odpovídající spinu uvažované částice.
Vzhledem k tomu, že $\hat{\mathbf{P}}^2, \hat{\mathbf{W}}^2$ jsou Casimirovy operátory, zůstanou formule ( 8.301 ), ( 8.304 ) v platnosti i tehdy, když v nich provedeme záměnu

$$\left| k,\xi \right\rangle \to \left| p,\xi \right\rangle \ . \tag{8.305}$$

V případě uvažované třídy čtyřimpulsů můžeme tedy každou ireducibilní reprezentaci charakterizovat zadáním dvojice reálných parametrů $m$, $j$, z nichž první je kladný a druhý představuje nějaké celé nebo polocelé nezáporné číslo.
Z relace ( 8.303 ) vidíme, že kety $\left| k,\xi \right\rangle$ lze zvolit tak, aby představovaly vlastní vektor operátoru $\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{s}$, kde $\mathbf{s}$ je libovolný pevně zvolený jednotkový vektor. Parametr $\xi$ v uvažované reprezentaci tedy probíhá $2j + 1$ hodnot, za které můžeme zvolit $\xi = -j, \dots , j$.
Nebude-li řečeno jinak, budeme volit konvenci, kdy $\mathbf{s} = \mathbf{e}_3$ .
Potom

$$\mathbf{J}_3 \left| k,\xi \right\rangle = \xi \left| k,\xi \right\rangle , \tag{8.306}$$
$$\hat{\mathbf{J}}_\pm \left| k,\xi \right\rangle = \alpha^\pm \left( j,\xi \right) \left| k,\xi \pm 1 \right\rangle , \tag{8.307}$$

kde

$$\alpha^{(\pm)}(j,\xi) \equiv \sqrt{(j \mp \xi)(j \pm \xi + 1)} \ . \qquad (8.308)$$

Povšimněme si také toho, že rovnost ( 8.306 ) lze s využitím definice ( 8.293 ) ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{L}(p))\hat{\mathbf{W}}^3\hat{\mathbf{U}}^\dagger(\mathbf{L}(p))|p,\xi\rangle = m\xi|p,\xi\rangle \ . \qquad (8.309)$$

Tedy ket $|p,\xi\rangle$ představuje vlastní vektor operátoru $\hat{\mathbf{W}}^3(\mathbf{L}(p))$ příslušný k vlastní hodnotě $m\xi$, kde

$$\hat{\mathbf{W}}^\mu(\mathbf{L}(p)) \equiv \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{L}(p))\hat{\mathbf{W}}^\mu\hat{\mathbf{U}}^\dagger(\mathbf{L}(p)) = [\mathbf{L}(p)]_\nu^{\ \mu}\,\hat{\mathbf{W}}^\nu \ . \qquad (8.310)$$

pokud $\mathbf{R} \equiv \mathbf{\Lambda}(\mathbf{n}, \varphi)$ představuje libovolné natočení, potom

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{R}) = \exp\left(i\varphi\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{J}}\right) \qquad (8.311)$$

a z formulí ( 8.306 ) až ( 8.308 ) dostáváme

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{R})|k,\xi\rangle = \sum_{\xi'}|k,\xi'\rangle\langle k,\xi'|\exp\left(i\varphi\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{J}}\right)|k,\xi\rangle = \sum_{\xi'=-j}^{j} D^{(j)}_{\xi'\xi}(\mathbf{R})|k,\xi'\rangle \, , \qquad (8.312)$$

kde $D^{(j)}_{\xi'\xi}(\mathbf{R})$ jsou elementy ortogonální matice $\mathbf{D}^{(j)}(\mathbf{R})$ přiřazené rotaci $\mathbf{R}$ v $2j + 1$ rozměrné reprezentaci grupy ***SO*(3)**.
K tomu, abychom skutečně poznali pravou stranu formule ( 8.298 ), tj. abychom dokončili konstrukci diskutované ireducibilní reprezentace, musíme ještě specifikovat normalizační konstantu $N(p)$ a transformaci $\mathbf{L}(p)$, vystupující v definici ( 8.295 ) Wignerovy rotace $\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda}, p)$.
V obou případech to do značné míry představuje přijetí určité konvence.
Věnujme se nejprve otázce volby normalizační konstanty.
Při ní musíme respektovat skutečnost, že konstruovaná reprezentace má být unitární, a tedy operátory přiřazené jejím generátorům musí být samosdružené.

O vlastních vektorech samosdružených operátorů $\hat{\mathbf{P}}$ pak víme, že vedle rovnice

$$\hat{\mathbf{P}}\left| p,\xi \right\rangle = \mathbf{p}\left| p,\xi \right\rangle \qquad (\ 8.313\ )$$

musí vyhovovat i podmínce

$$\left\langle p,\xi \middle| p',\xi' \right\rangle = f\left(p\right)\delta_{\xi\xi'}2E\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'\right)\ , \qquad (\ 8.314\ )$$

kde $f(p)$ je nějaká, zatím blíže nespecifikovaná nenulová funkce. Připomeňme, že odpovídající relace uzavřenosti v prostoru uvažované reprezentace má potom tvar

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{2Ef\left(p\right)}\sum_{\xi=-j}^{j}\left| p,\xi \right\rangle\left\langle p,\xi \right| = 1\ . \qquad (\ 8.315\ )$$

Z formule ( 8.298 ) přitom dostáváme

$$\begin{aligned}&\left\langle p',\xi \middle| \hat{\mathbf{U}}^{\dagger}\left(\mathbf{\Lambda}\right)\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{\Lambda}\right) \middle| p',\xi \right\rangle = \\ &= \left|\frac{N\left(p\right)}{N\left(\mathbf{\Lambda}p\right)}\right|^2 \sum_{\xi''\xi'}\left(D^{(j)}_{\xi''\xi}\left(\mathbf{W}\right)\right)^* D^{(j)}_{\xi'\xi}\left(\mathbf{W}\right)\left\langle \mathbf{\Lambda}p',\xi'' \middle| \mathbf{\Lambda}p,\xi' \right\rangle ,\end{aligned} \qquad (\ 8.316\ )$$

a tedy díky unitaritě operátorů $\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{\Lambda}\right)$ a matic $\mathbf{D}^{(j)}(\mathbf{W})$ musí platit

$$\frac{1}{\left|N\left(p\right)\right|^2}\left\langle p',\xi \middle| p,\xi \right\rangle = \frac{1}{\left|N\left(\mathbf{\Lambda}p\right)\right|^2}\left\langle \mathbf{\Lambda}p',\xi \middle| \mathbf{\Lambda}p,\xi \right\rangle\ , \qquad (\ 8.317\ )$$

kde jsme využili toho, že díky relaci ( 8.314 ) poslední faktor na pravé straně formule ( 8.316 ) vymizí pro všechna $\xi'' \neq \xi'$.
Porovnáním s formulí ( 8.314 ) vidíme, že výraz

$$\frac{f(p)}{|N(p)|^2} \tag{8.318}$$

musí být invariantní vůči vlastním Lorentzovým transformacím, neboť veličina $2E\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ vůči těmto transformacím invariantní je.
To je jediná podmínka, kterou je nutno splnit.
Mezi nejčastěji užívané volby patří

$$N(p) = f(p) = 1\,, \tag{8.319}$$

nebo

$$N(p) = \sqrt{\frac{f(p)}{f(k)}}\,, \qquad f(p) = \frac{1}{2E}\,. \tag{8.320}$$

Obě mají své výhody a nevýhody, proto se ani jedné z nich nebudeme vyhýbat.
Abychom jasně odlišili, kdy máme kterou na mysli, budeme kety definované pravou stranou formule ( 8.293 ) označovat nadále symbolem $|p,\xi\rangle$ při volbě ( 8.319 ), kdežto v případě volby ( 8.320 ) budeme pro tyto veličiny užívat symbolu $|\mathbf{p},\xi\rangle$.
Pokud jde o transformaci $\mathbf{L}(p)$, opět se nejčastěji setkáváme se dvěma způsoby její volby:

$$\mathbf{L}(p) \equiv \mathbf{\Lambda}(-\tilde{\mathbf{v}}, v)\,, \tag{8.321}$$

kde

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\mathbf{p}}{E}\,, \tag{8.322}$$

tj. $\mathbf{L}(p)$ je čistý boost.
V tomto případě se veličina odpovídající operátoru

$$\frac{\hat{\mathbf{W}}^{\mu}\left(\mathbf{L}\left(p\right)\right)}{m} \tag{8.323}$$

nazývá **kovariantní spin**.
Druhým způsobem volby je boost ve směru $-\mathbf{e}_3$ následovaný pootočením o úhel $\varphi$ kolem téže osy a takovým natočením kolem osy $\mathbf{p} \times \mathbf{e}_3$ , které převede směr $\mathbf{e}_3$ do směru impulsu $\mathbf{p}$ , tj.

$$\mathbf{L}\left(p\right) \equiv \mathbf{R}\left(\tilde{\mathbf{p}}\right)\mathbf{B}\left(u\right), \tag{8.324}$$

kde

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\left(\tilde{\mathbf{p}}\right) &\equiv \exp\left\{i\vartheta\left[\mathbf{M}_1 \sin\varphi - \mathbf{M}_2 \sin\varphi\right]\right\}\exp\left(-i\varphi\mathbf{M}_3\right) = \\ &= \exp\left(-i\varphi\mathbf{M}_3\right)\exp\left(-i\vartheta\mathbf{M}_2\right),\end{aligned} \tag{8.325}$$

kde $\varphi$, $\vartheta$ jsou sférické úhly vektoru $\mathbf{p}$ a

$$\mathbf{B}\left(u\right) \equiv \exp\left\{-iu\mathbf{N}_3\right\} , \tag{8.326}$$

kde $u$ je rapidita odpovídající velikosti rychlosti ( 8.322 ), tj.

$$\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \sinh u = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} . \tag{8.327}$$

Přitom platí

$$\frac{\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{P}}}{\left|\hat{\mathbf{P}}\right|}\left|\, p, \xi\right\rangle = \xi\left|\, p, \xi\right\rangle , \tag{8.328}$$

tj. v uvažovaném případě představují kety $\left|\, p, \xi\right\rangle$ vlastní vektory helicita.
Pokud v dalším budeme chtít zdůraznit, že se nám jedná právě o tuto volbu $\mathbf{L}(p)$, budeme k označení parametru $\xi$ užívat symbolu $\lambda$ .

Vzhledem k tomu, že připouštíme i dvojznačné reprezentace, nemusí být ket $\left| p,\xi \right\rangle$ ve skutečnosti určen jednoznačně ani po zadání $\mathbf{L}(p)$.
Odstranit tuto zbývající nejednoznačnost však nečiní žádné potíže.
Např. ve zde uvažovaném případě budeme pod operátorem vystupujícím ve formuli ( 8.293 ) vždy rozumět

$$\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{L}(p)\right) \equiv \hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{B}}(u) \ , \qquad (8.329)$$

kde

$$\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}}) \equiv \exp\left(-i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right)\exp\left(-i\vartheta\hat{\mathbf{J}}_2\right) =$$
$$= \exp\left\{i\vartheta\left[\hat{\mathbf{J}}_1 \sin\varphi - \hat{\mathbf{J}}_2 \cos\varphi\right]\right\}\exp\left(-i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right), \qquad (8.330)$$
$$\hat{\mathbf{B}}(u) \equiv \exp\left\{-iu\hat{\mathbf{K}}_3\right\}$$

a přitom $\vartheta \in \langle 0, \pi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. ( 8.331 )

Čtyřvektor světelného charakteru s kladnou nultou komponentou, tj. čtyřvektor $p$, pro který platí

$$p_\mu p^\mu = 0 \,, \qquad p^0 \equiv E > 0 \ , \qquad (8.332)$$

můžeme identifikovat se čtyřimpulsem částice s nulovou klidovou hmotou.
Standardní čtyřvektor $k$:

$$k^\mu \equiv \{1, 0, 0, 1\} \qquad (8.333)$$

je evidentně invariantní vůči libovolnému pootočení kolem osy $\mathbf{e}_3$ , tj. odpovídající malá grupa ***SO*(2)** tvořenou všemi možnými rotacemi $\mathbf{R}(\mathbf{e}_3 , \varphi)$.
Vůči žádným jiným čistým pootočením čtyřimpuls ( 8.333 ) invariantní není.
V současné soustavě, která se vůči výchozí posouvá rychlostí $\mathbf{w}$, má čtyřvektor $k$ komponenty

$$k'^0 = \gamma(1 - w\cos\vartheta),$$
$$k'_{\parallel} = \gamma(\cos\vartheta - w),$$
$$\mathbf{k}'_{\perp} = \mathbf{k}_{\perp}, \tag{8.334}$$

kde jsme užili standardní zkratku

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}, \tag{8.335}$$

$\vartheta$ je úhel svíraný rychlostí **w** s osou $\mathbf{e}_3$ a

$$k'_{\parallel} \equiv \mathbf{k}' \cdot \tilde{\mathbf{w}},$$
$$\mathbf{k}'_{\perp} \equiv \mathbf{k}' - k'_{\parallel}\tilde{w}, \tag{8.336}$$
$$\mathbf{k}_{\perp} \equiv \mathbf{k} - \tilde{w}\cos\vartheta.$$

Z požadavku

$$k'^0 = 1 \tag{8.337}$$

dostáváme

$$\cos\vartheta = \frac{1-\sqrt{1-w^2}}{w}. \tag{8.338}$$

Následným pootočením kolem osy

$$\frac{\mathbf{e}_3 \times \tilde{\mathbf{w}}}{\sin\vartheta} \tag{8.339}$$

o úhel

$$\delta = \pi + 2\vartheta \bmod 2\pi, \tag{8.340}$$

případně doplněním dalším pootočením o libovolný úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ kolem osy $\mathbf{e}_3$ přejdou

$$k'^{\mu} \to k^{\mu} \ . \tag{8.341}$$

Snadno nahlédneme, že žádná jiná než právě popsaná kombinace boostu a natočení nemůže nechat standardní čtyřvektor ( 8.333 ) nezměněn.
Odtud je již zřejmé, že malá grupa je v uvažovaném případě grupou tříparametrickou.
Každý její element bychom mohli jednoznačně určit např. zadáním velikosti a polárního úhlu rychlosti **w**, doplněným zadáním výše uvedeného úhlu $\varphi$.
Ve skutečnosti je však výhodnější provést tuto parametrizaci poněkud jinak.
Libovolný element malé grupy lze jednoznačně určit zadáním parametrů $\alpha, \beta, \varphi$ tak, že

$$\mathbf{\Lambda}(\alpha,\beta,\varphi) \equiv S(\alpha,\beta)\mathbf{R}(\mathbf{e}_3,\varphi) \ , \tag{8.342}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{e}_3,\varphi) &\equiv \exp(i\varphi\mathbf{M}_3) \ , \\ S(\alpha,\beta) &\equiv \exp\left[i(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B})\right], \end{aligned} \tag{8.343}$$

a

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv \mathbf{N}_1 - \mathbf{M}_2 \ , \\ \mathbf{B} &\equiv \mathbf{N}_2 + \mathbf{M}_1 \ . \end{aligned} \tag{8.344}$$

V libovolné unitární reprezentaci Poincaréovy grupy tedy odpovídající operátor můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{\Lambda}(\alpha,\beta,\varphi)\right) = \exp\left[i\left(\alpha\hat{\mathbf{A}}+\beta\hat{\mathbf{B}}\right)\right]\exp\left(i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right) \ , \tag{8.345}$$

kde samosdružené operátory

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \hat{\mathbf{K}}_1 - \hat{\mathbf{J}}_2 \,, \qquad \hat{\mathbf{B}} \equiv \hat{\mathbf{K}}_2 + \hat{\mathbf{J}}_1 \tag{8.346}$$

vyhovují komutačním relacím

$$\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}}\right] = 0\,, \qquad \left[\hat{\mathbf{J}}_3,\hat{\mathbf{A}}\right] = i\hat{\mathbf{B}}\,, \qquad \left[\mathbf{J}_3,\hat{\mathbf{B}}\right] = -i\hat{\mathbf{A}}\,. \tag{8.347}$$

Z první z nich okamžitě vidíme, že v uvažovaném případě lze kety $\left|k,\xi\right\rangle$ vystupující ve formuli ( 8.293 ) zvolit tak, aby představovaly společné vlastní vektory operátorů $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$.
Na druhé straně však z posledních dvou komutačních relací plyne

$$\exp\left(i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right)\hat{\mathbf{A}}\exp\left(-i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right) = \hat{\mathbf{A}}\cos\varphi - \hat{\mathbf{B}}\sin\varphi\,, \qquad \exp\left(i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right)\hat{\mathbf{B}}\exp\left(-i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right) = \hat{\mathbf{A}}\sin\varphi + \hat{\mathbf{B}}\cos\varphi\,, \tag{8.348}$$

a tedy jestliže ket $\left|k,\xi\right\rangle \equiv \left|k,a,b,\lambda\right\rangle$ je společným vlastním vektorem operátorů $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$ příslušným k vlastním hodnotám *a*, resp. *b,* tj. vyhovuje rovnicím

$$\hat{\mathbf{P}}^{\mu}\left|k,a,b,\lambda\right\rangle = k^{\mu}\left|k,a,b,\lambda\right\rangle, \qquad \hat{\mathbf{A}}\left|k,a,b,\lambda\right\rangle = a\left|k,a,b,\lambda\right\rangle, \qquad \hat{\mathbf{B}}\left|k,a,b,\lambda\right\rangle = b\left|k,a,b,\lambda\right\rangle, \tag{8.349}$$

potom pro ket

$$\left|k,a',b',\lambda\right\rangle \equiv \exp\left(-i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right)\left|k,a,b,\lambda\right\rangle \tag{8.350}$$

platí

$$\hat{\mathbf{P}}^{\mu}\left|k,a',b',\lambda\right\rangle = k^{\mu}\left|k,a',b',\lambda\right\rangle ,$$
$$\hat{\mathbf{A}}\left|k,a',b',\lambda\right\rangle = a'\left|k,a',b',\lambda\right\rangle , \qquad (\ 8.351\ )$$
$$\hat{\mathbf{B}}\left|k,a',b',\lambda\right\rangle = b'\left|k,a',b',\lambda\right\rangle ,$$

kde

$$a' \equiv a\cos\varphi - b\sin\varphi ,$$
$$b' \equiv a\sin\varphi + b\cos\varphi . \qquad (\ 8.352\ )$$

Odtud vidíme, že pokud v prostoru uvažované reprezentace Poincaréovy grupy existuje vlastní vektor čtyřimpulsu příslušný k vlastní hodnotě $k^{\mu}$, který je současně společným vlastním vektorem samosdružených operátorů $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$ příslušným k vlastním hodnotám, $a$ resp. $b$, potom v něm existuje také vektor, který je vlastním vektorem čtyřimpulsu patřícím k téže vlastní hodnotě $k^{\mu}$, a přitom je společným vlastním vektorem $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$ příslušným k vlastním hodnotám $a'$, $b'$, definovaným formulí ( 8.352 ), v níž $\varphi$ může mít libovolnou hodnotu z intervalu $\langle 0, 2\pi)$. V dalším se omezíme pouze na případ $a = b = 0$ a nazveme

$$\left|k,\lambda\right\rangle \equiv \left|k,0,0,\lambda\right\rangle . \qquad (\ 8.353\ )$$

Odpovídající reprezentace malé grupy ***ISO*(2)** je jednorozměrná a parametr $\lambda$ můžeme identifikovat s vlastní hodnotou operátoru $\hat{\mathbf{J}}_3$, tj. ket $\left|k,\lambda\right\rangle$ vyhovuje rovnici

$$\hat{\mathbf{J}}_3\left|k,\lambda\right\rangle = \lambda\left|k,\lambda\right\rangle . \qquad (\ 8.354\ )$$

Z formule ( 8.346 ) navíc vidíme, že pro něj platí relace

$$\hat{\mathbf{K}}_1 |k,\lambda\rangle = \hat{\mathbf{J}}_2 |k,\lambda\rangle ,$$
$$\hat{\mathbf{K}}_2 |k,\lambda\rangle = -\hat{\mathbf{J}}_1 |k,\lambda\rangle . \qquad (8.355)$$

Odtud, s využitím ( 8.265 ), již snadno zjistíme, že tento ket vyhovuje také rovnicím

$$\hat{\mathbf{W}}^0 |k,\lambda\rangle = \hat{\mathbf{W}}^3 |k,\lambda\rangle = \lambda |k,\lambda\rangle ,$$
$$\hat{\mathbf{W}}^1 |k,\lambda\rangle = \hat{\mathbf{W}}^2 |k,\lambda\rangle = 0 . \qquad (8.356)$$

Tedy ket $|k,\lambda\rangle$ je také společným vlastním vektorem všech čtyř komponent Pauli-Lubanského vektoru, a to takovým, že

$$\hat{\mathbf{W}}^\mu |k,\lambda\rangle = \lambda k^\mu |k,\lambda\rangle \ , \qquad (8.357)$$

a tedy také

$$\hat{\mathbf{W}}_\mu \hat{\mathbf{W}}^\mu |k,\lambda\rangle = \left[ \left( \hat{\mathbf{W}}^0 \right)^2 - \left( \hat{\mathbf{W}}^3 \right)^2 \right] |k,\lambda\rangle = 0 \ . \qquad (8.358)$$

Uvažovaná třída ireducibilních reprezentací je tak charakterizována nulovými vlastními hodnotami obou Casimirových operátorů $\hat{\mathbf{P}}^2, \hat{\mathbf{W}}^2$. Vlastní hodnoty operátoru $\hat{\mathbf{J}}_3$ mohou v prostoru libovolné unitární reprezentace Poincaréovy grupy nabývat pouze celých nebo polocelých hodnot, a tedy parametr $\lambda$, vystupující v ketu $|k,\lambda\rangle$ může být roven kterémukoliv z celých nebo polocelých čísel.
Z formule ( 8.342 ) vidíme, že v diskutovaném případě lze matici $\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda}, p)$, definovanou formulí ( 8.295 ), vyjádřit jako

$$\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda}, p) = S\left(\alpha(\mathbf{\Lambda}, p), \beta(\mathbf{\Lambda}, p)\right) \mathbf{R}\left(\mathbf{e}_3, \varphi(\mathbf{\Lambda}, p)\right) , \qquad (8.359)$$

a tedy odpovídající operátor vystupující na levé straně rovnosti ( 8.297 ) má tvar

$$\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p)\right)=\exp\left\{i\left[\alpha(\mathbf{\Lambda},p)\hat{\mathbf{A}}+\beta(\mathbf{\Lambda},p)\hat{\mathbf{B}}\right]\right\}\exp\left[i\varphi(\mathbf{\Lambda},p)\hat{\mathbf{J}}_3\right]$$
( 8.360 )

a díky relacím ( 8.354 ), ( 8.355 ) je v uvažovaných reprezentacích

$$\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p)\right)\left|k,\lambda\right\rangle=\exp\left\{i\left[\alpha(\mathbf{\Lambda},p)\hat{\mathbf{A}}+\beta(\mathbf{\Lambda},p)\hat{\mathbf{B}}\right]\right\}\cdot$$
$$\cdot\exp\left[i\varphi(\mathbf{\Lambda},p)\hat{\mathbf{J}}_3\right]\left|k,\lambda\right\rangle=\exp\left(i\lambda\varphi(\mathbf{\Lambda},p)\right)\left|k,\lambda\right\rangle=$$
$$=\sum_{\lambda'}D_{\lambda'\lambda}\left(\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p)\right)\left|k,\lambda'\right\rangle,$$
( 8.361 )

tj.

$$D_{\lambda'\lambda}\left(\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p)\right)=\delta_{\lambda\lambda'}\exp\left(i\lambda\varphi(\mathbf{\Lambda},p)\right)\ . \qquad ( 8.362 )$$

ted y v diskutovaném případě transformační zákon ( 8.298 ) nabývá tvaru

$$\hat{\mathbf{U}}\mathbf{\Lambda}\left|p,\lambda\right\rangle=\frac{N(p)}{N(\mathbf{\Lambda}p)}\exp\left(i\lambda\varphi(\mathbf{\Lambda},p)\right)\left|p,\lambda\right\rangle\ . \qquad ( 8.363 )$$

Pokud jde o normalizační konstantu $N\,(p)$, je situace naprosto stejná jako ve dříve uvažovaném případě částice s nenulovou hmotou.
Pokud jde o transformaci $\mathbf{L}(p)$, zvolíme ji tak, aby co nejvíce odpovídala výše popsané volbě **B** v případě částice s nenulovou hmotou: nejprve provedeme takový boost rychlostí $-\mathrm{w}\mathbf{e}_3$ , aby čtyřvektor určený ve výchozí soustavě komponentami $k^\mu\equiv\{1, 0, 0, 1\}$, měl v nové soustavě komponenty $\{p^0, 0, 0, p^0\}$, následovaný pootočením o úhel $\varphi$ kolem téže osy a potom provedeme takové natočení kolem osy $\mathbf{p}\times\mathbf{e}_3$ ,aby odpovídající výsledný třívektor měl požadovaný **p** měl požadovaný směr $\tilde{\mathbf{p}}$. Přesněji řečeno, v dalším pod operátorem $\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{L}(p)\right)$ budeme rozumět

$$\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{L}(p)\right)\equiv\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{B}}(u)\ , \qquad ( 8.364 )$$

kde

$$\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}}) \equiv \exp\left(-i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right)\exp\left(-i\varphi\hat{\mathbf{J}}_2\right) \tag{8.365}$$

a

$$\hat{\mathbf{B}} \equiv \mathbf{exp}\left(-iu\hat{\mathbf{K}}_3\right) , \tag{8.366}$$

kde $\vartheta \in \langle 0.\ \pi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ jsou sférické úhly vektoru $\tilde{\mathbf{p}}$ a $u$ je rapidita odpovídající výše zmíněné rychlosti:

$$\tanh u = w = \frac{|\mathbf{p}|^2 - 1}{|\mathbf{p}|^2 + 1} , \tag{8.367}$$

tj.

$$\begin{aligned} \cosh u &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{|\mathbf{p}|^2 + 1}{2|\mathbf{p}|} , \\ \sinh u &= \frac{w}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{|\mathbf{p}|^2 - 1}{2|\mathbf{p}|} . \end{aligned} \tag{8.368}$$

Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby na základě relace ( 8.310 ) dokázal, že pro kety

$$|\,p,\lambda\rangle \equiv N(p)\exp\left(-i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right)\exp\left(-i\varphi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\exp\left(-iu\hat{\mathbf{K}}_3\right)|k,\lambda\rangle \tag{8.369}$$

platí

$$\frac{\hat{\mathbf{W}}^0}{|\hat{\mathbf{P}}|}|\,p,\lambda\rangle = \frac{\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{P}}}{|\hat{\mathbf{P}}|}|\,p,\lambda\rangle = \lambda|\,p,\lambda\rangle , \tag{8.370}$$

a tedy kety vystupující ve formuli ( 363 ) představují vlastní stavy helicity.

Zavedeme nyní operátory

$$\hat{\mathrm{P}} \equiv \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{P}), \qquad \hat{\mathrm{T}} \equiv \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{T}) \tag{8.371}$$

přiřazené inverzím.
Tyto operátory musí v libovolné unitární reprezentaci Lorentzovy grupy splňovat relace

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{n},\varphi)\big)\hat{\mathrm{P}}^{-1} = \hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{n},\varphi)\big), \qquad \hat{\mathrm{P}}\hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{n},v)\big)\hat{\mathrm{P}}^{-1} = \hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{\Lambda}(-\mathbf{n},v)\big), \tag{8.372}$$

$$\hat{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{n},\varphi)\big)\hat{\mathrm{T}}^{-1} = \hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{n},\varphi)\big), \qquad \hat{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{n},v)\big)\hat{\mathrm{T}}^{-1} = \hat{\mathbf{U}}\big(\mathbf{\Lambda}(-\mathbf{n},v)\big). \tag{8.373}$$

Snadno nahlédneme, že také skládáním časové a prostorové inverze transformacemi Poincaréovy grupy obdržíme opět grupu.
Uvážíme-li, že posunutí souřadné soustavy o $\boldsymbol{a}$ následované časovou (prostorovou) inverzí je ekvivalentní s časovou (prostorovou) inverzí následovanou posunutím o $\boldsymbol{a}$ (o $-\boldsymbol{a}$) a že časové o $a^0$ následované prostorovou (časovou) inverzí je ekvivalentní prostorové (časové) inverzi následované časovým posunutím o $a^0$ (o $-a^0$), vidíme, že v libovolné unitární reprezentaci této grupy musí navíc platit

$$\hat{\mathrm{P}}\exp\left(i\hat{\mathbf{P}}^0 a_0\right)\hat{\mathrm{P}}^{-1} = \exp\left(i\hat{\mathbf{P}}^0 a_0\right), \qquad \hat{\mathrm{P}}\exp\left(-i\hat{\mathbf{P}}\boldsymbol{a}\right)\hat{\mathrm{P}}^{-1} = \exp\left(i\hat{\mathbf{P}}\boldsymbol{a}\right), \tag{8.374}$$

$$\hat{\mathrm{T}}\exp\left(i\hat{\mathbf{P}}^0 a_0\right)\hat{\mathrm{T}}^{-1} = \exp\left(-i\hat{\mathbf{P}}^0 a_0\right), \qquad \hat{\mathrm{T}}\exp\left(-i\hat{\mathbf{P}}\boldsymbol{a}\right)\hat{\mathrm{T}}^{-1} = \exp\left(-i\hat{\mathbf{P}}\boldsymbol{a}\right). \tag{8.375}$$

V případě infinitesimálních vlastních Lorentzových transformací a translací můžeme požadavky ( 8.372 ) až ( 8.375 ) vyjádřit v termínech generátorů Poincaréovy grupy jako

$$\begin{aligned} &\hat{\mathrm{P}} i\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathrm{P}}^{-1} = i\hat{\mathbf{J}} \,, \\ &\hat{\mathrm{P}} i\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathrm{P}}^{-1} = -i\hat{\mathbf{K}} \,, \\ &\hat{\mathrm{P}} i\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathrm{P}}^{-1} = -i\hat{\mathbf{P}} \,, \\ &\hat{\mathrm{P}} i\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathrm{P}}^{-1} = i\hat{\mathbf{H}} \,, \end{aligned} \qquad (\ 8.376\ )$$

$$\begin{aligned} &\hat{\mathrm{T}} i\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathrm{T}}^{-1} = i\hat{\mathbf{J}} \,, \\ &\hat{\mathrm{T}} i\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathrm{T}}^{-1} = -i\hat{\mathbf{K}} \,, \\ &\hat{\mathrm{T}} i\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathrm{T}}^{-1} = -i\hat{\mathbf{P}} \,, \\ &\hat{\mathrm{T}} i\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathrm{T}}^{-1} = i\hat{\mathbf{H}} \,. \end{aligned} \qquad (\ 8.377\ )$$

Z posledních z relací ( 8.376 ), ( 8.377 ) je zřejmé, že operátor prostorové inverze $\hat{\mathrm{P}}$ musí být lineárním, kdežto operátor časové inverze $\hat{\mathrm{T}}$ musí být antilineárním.
Tedy relace ( 8.376 ), ( 8.377 ) mezi operátory reprezentujícími inverze a operátory reprezentujícími generátory Poincaréovy grupy lze ekvivalentně zapsat ve tvaru komutačních a antikomutačních relací

$$\left[\hat{\mathrm{P}},\hat{\mathbf{J}}\right] = \left\{\hat{\mathrm{P}},\hat{\mathbf{P}}\right\} = \left\{\hat{\mathrm{P}},\hat{\mathbf{K}}\right\} = \left[\hat{\mathrm{P}},\hat{\mathbf{H}}\right] = 0 \,, \qquad (\ 8.378\ )$$

$$\left[\hat{\mathrm{T}},\hat{\mathbf{J}}\right] = \left\{\hat{\mathrm{T}},\hat{\mathbf{P}}\right\} = \left\{\hat{\mathrm{T}},\hat{\mathbf{K}}\right\} = \left[\hat{\mathrm{T}},\hat{\mathbf{H}}\right] = 0 \,. \qquad (\ 8.379\ )$$

Kety $\left|k,\xi\right\rangle$ vyhovující rovnici ( 8.306 ) představují společné vlastní vektory operátorů $\left\{\hat{\mathbf{H}},\hat{\mathbf{J}}_3,\hat{\mathbf{P}}\right\}$ příslušné k vlastním hodnotám $\{M, \xi, 0\}$.
Z komutačních relací ( 8.378 ) okamžitě vidíme, že totéž je pravdou o ketu $\hat{\mathrm{P}}\left|k,\xi\right\rangle$, a tedy musí platit

$$\hat{\mathrm{P}}\left|k,\xi\right\rangle = \eta^{(P)}\left|k,\xi\right\rangle \,, \qquad (\ 8.380\ )$$

kde **vnitřní parita** uvažované částice musí splňovat podmínku

$$\left|\eta^{(P)}\right| = 1 \tag{8.381}$$

plynoucí z unitarity operátou $\hat{\mathrm{P}}$.
K tomu, abychom mohli nalézt vyjádření pro ket $\hat{\mathrm{P}}\left|p,\xi\right\rangle$, musíme nejprve specifikovat transformaci **L**($p$), nebo přesněji operátor $\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{L}\left(p\right)\right)$, vystupující v definici ( 8.293 ).
V případě báze $\left|p,\xi\right\rangle$, tvořené vlastními vektory třetí složky kovariantního spinu, tj. když je

$$\left|p,\xi\right\rangle \equiv N\left(p\right)\exp\left(-iu\tilde{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{K}}\right)\left|k,\xi\right\rangle \ , \tag{8.382}$$

kde $u$ je rapidita odpovídající velikosti rychlosti ( 8.322 ), tj. definovaná vztahy ( 8.327 ), dostáváme z antikomutačních relací ( 8.378 )

$$\hat{\mathrm{P}}\left|p,\xi\right\rangle \equiv N\left(p\right)\exp\left(iu\tilde{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{K}}\right)\hat{\mathrm{P}}\left|k,\xi\right\rangle = \frac{N\left(p\right)}{N\left(\mathbf{P}p\right)}\eta^{(P)}\left|\mathbf{P}p,\xi\right\rangle \ . \tag{8.383}$$

Při volbě ( 8.319 ), stejně jako při volbě ( 8.320 ) je splněna podmínka

$$N\left(p\right) = N\left(\mathbf{P}p\right) \ , \tag{8.384}$$

čímž se relace ( 8.383 ) zjednoduší na

$$\hat{\mathrm{P}}\left|p,\xi\right\rangle = \eta^{(P)}\left|\mathbf{P}p,\xi\right\rangle \ . \tag{8.385}$$

V případě báze tvořené vlastními vektory helicity, tj. když

$$\left|p,\xi\right\rangle \equiv \left|p,\lambda\right\rangle = N\left(p\right)\hat{\mathbf{R}}\left(\tilde{\mathbf{p}}\right)\exp\left(-iu\hat{\mathbf{K}}_3\right)\left|k,\lambda\right\rangle \ , \tag{8.386}$$

kde

$$\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}}) = \exp\left(-i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right)\exp\left(-i\vartheta\hat{\mathbf{J}}_2\right) , \tag{8.387}$$

přičemž sférické úhly vektoru $\tilde{\mathbf{p}}$ leží v intervalech $\vartheta \in \langle 0, \pi)$ $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, z relací ( 8.378 ) dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{P}}\left| p,\lambda \right\rangle &= N(p)\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}})\exp\left(iu\hat{\mathbf{K}}_3\right)\hat{\mathrm{P}}\left|k,\lambda\right\rangle = \\ &= \eta^{(P)}N(p)\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}})\exp\left(iu\hat{\mathbf{K}}_3\right)\left|k,\lambda\right\rangle . \end{aligned} \tag{8.388}$$

Vzpomeneme-li si, že

$$\left\langle k,\lambda' \right| \exp\left(-i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\left|k,-\lambda\right\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}(-1)^{j-\lambda} , \tag{8.389}$$

kde $j$ je velikost spinu uvažované částice, vidíme, že

$$\left|k,\lambda\right\rangle = (-1)^{j-\lambda}\exp\left(i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\left|k,-\lambda\right\rangle . \tag{8.390}$$

Na druhé straně z komutačních relací

$$\left[\hat{\mathbf{J}}_j,\hat{\mathbf{K}}_k\right] = i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathbf{K}}_l \tag{8.391}$$

víme, že

$$\exp\left(-i\alpha\hat{\mathbf{J}}_2\right)\hat{\mathbf{K}}_3\exp\left(-i\alpha\hat{\mathbf{J}}_2\right) = \hat{\mathbf{K}}_3\cos\alpha + \hat{\mathbf{K}}_1\sin\alpha , \tag{8.392}$$

a tedy

$$\exp\left(iu\hat{\mathbf{K}}_3\right)\exp\left(i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right) = \exp\left(i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\exp\left(-iu\hat{\mathbf{K}}_3\right) , \tag{8.393}$$

což nám umožňuje relaci ( 8.388 ) přepsat do tvaru

$$\hat{\mathrm{P}}\left|p,\lambda\right\rangle=\eta^{(P)}\left(-1\right)^{j-\lambda}N\left(p\right)\hat{\mathbf{R}}\left(\tilde{\mathbf{p}}\right)\exp\left(i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\exp\left(-iu\hat{\mathbf{K}}_3\right)\left|k,-\lambda\right\rangle\ . \tag{8.394}$$

Uvážíme-li, že sférickými úhly směru $-\tilde{\mathbf{p}}$ jsou $\vartheta'=\pi-\vartheta$, $\varphi'=\varphi\pm\pi$, kde horní znaménko platí pro $\varphi<\pi$ a dolní pro $\varphi\geq\pi$, vidíme, že

$$\hat{\mathbf{R}}\left(-\tilde{\mathbf{p}}\right)\equiv\exp\left(-i\left(\varphi\pm\pi\right)\hat{\mathbf{J}}_3\right)\exp\left(-i\left(\pi-\vartheta\right)\hat{\mathbf{J}}_2\right)\ , \tag{8.395}$$

a tedy

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\left(-\tilde{\mathbf{p}}\right)\hat{\mathbf{R}}\left(\tilde{\mathbf{p}}\right)\exp\left(i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)&=\exp\left(-i\left(\vartheta-\pi\right)\hat{\mathbf{J}}_2\right)\exp\left(-i\left(\varphi\pm\pi\right)\hat{\mathbf{J}}_3\right)\times\\&\times\exp\left(-i\varphi\hat{\mathbf{J}}_3\right)\exp\left(-i\left(\vartheta-\pi\right)\hat{\mathbf{J}}_2\right)=\\&=\exp\left(-i\left(\vartheta-\pi\right)\hat{\mathbf{J}}_2\right)\exp\left(\pm i\pi\hat{\mathbf{J}}_3\right)\times\\&\times\exp\left(-i\left(\vartheta-\pi\right)\hat{\mathbf{J}}_2\right)=\exp\left(\pm i\pi\hat{\mathbf{J}}_3\right),\end{aligned} \tag{8.396}$$

kde jsme využili toho, že díky komutační relaci

$$\left[\hat{\mathbf{J}}_2,\hat{\mathbf{J}}_3\right]=i\hat{\mathbf{J}}_1 \tag{8.397}$$

je

$$\exp\left(\pm i\pi\hat{\mathbf{J}}_3\right)\exp\left(i\alpha\hat{\mathbf{J}}_2\right)=\exp\left(-i\alpha\hat{\mathbf{J}}_2\right)\exp\left(\pm i\pi\hat{\mathbf{J}}_3\right)\ . \tag{8.398}$$

Díky vztahu ( 8.396 ) lze relaci ( 8.394 ) ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{P}}\left|p,\lambda\right\rangle&=\eta^{(P)}\left(-1\right)^{j-\lambda}N\left(p\right)\hat{\mathbf{R}}\left(-\tilde{\mathbf{p}}\right)\exp\left(-iu\hat{\mathbf{K}}_3\right)\exp\left(\mp i\pi\lambda\right)\left|k,-\lambda\right\rangle=\\&=\eta^{(P)}\left(-1\right)^{j-\lambda}\frac{N\left(p\right)}{N\left(\mathbf{P}p\right)}\exp\left(\mp i\pi\lambda\right)\left|\mathbf{P}p,-\lambda\right\rangle,\end{aligned} \tag{8.399}$$

který se při splnění rovnosti ( 8.384 ) zjednoduší na

$$\hat{\mathrm{P}}\left|p,\lambda\right\rangle = \eta^{(P)}\left(-1\right)^{j-\lambda}\exp\left(\mp i\pi\lambda\right)\left|\mathbf{P}p,-\lambda\right\rangle \ . \qquad (\ 8.400\ )$$

Právě nalezené výsledky dokazují, že unitární ireducibilní reprezentaci Poincaréovy grupy realizovanou v Hilbertově prostoru stavů jakékoliv částice s nenulovou hmotou lze vždy doplnit operátorem $\hat{\mathrm{P}}$, splňujícím všechny podmínky kladené na operátor reprezentující prostorovou inverzi.
Pro nehmotné částice to však již obecně možné není.
Stačí si uvědomit, že z relací ( 8.378 ) plane

$$\hat{\mathrm{P}}\frac{\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{P}}}{\left|\hat{\mathbf{P}}\right|} = -\frac{\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{P}}}{\left|\hat{\mathbf{P}}\right|}\hat{\mathrm{P}} \ , \qquad (\ 8.401\ )$$

a proto působením operátoru prostorové inverze na libovolný vlastní vektor helicity obdržíme opět vlastní vektor helicity, který však přísluší k opačné vlastní hodnotě.
Z předchozího však víme, že v případě libovolné ireducibilní reprezentace Poincaréovy grupy realizované na Hilbertově prostoru nehmotné částice nabývá helicita jedinou hodnotu $\lambda$.
K tomu, aby bylo možno na Hilbertově prostoru nehmotné částice definovat operátor prostorové inverze, musí na něm reprezentace Poincaréovy grupy představovat direktní součet alespoň dvou ireducibilních reprezentací, z nichž jedna odpovídá helicitě $\lambda$ a ta druhá helicitě $-\lambda$.
Je zřejmé, že pro jeden pevně vybraný impuls **p** můžeme vždy požadovat, aby platilo

$$\hat{\mathrm{P}}\left|p,\lambda\right\rangle = \zeta\left|\mathbf{P}p,-\lambda\right\rangle \ , \qquad (\ 8.402\ )$$

kde $\zeta$ je číslo s jednotkovou absolutní hodnotou.
Konkrétní volba je opět otázkou pouhé konvence.
Provedeme ji tak, aby byla co nejpodobnější volbě, přijaté u částice s nenulovou hmotou.
Povšimněme si proto, že pro $M \neq 0$ z formulí ( 8.380 ), ( 8.390 ) plyne relace

$$\hat{\mathbf{Y}}\left|k,\lambda\right\rangle = \eta^{(P)}\left(-1\right)^{j-\lambda}\left|k,-\lambda\right\rangle \ , \qquad (\ 8.403\ )$$

kde $j$ je spin uvažované částice a operátor

$$\hat{\mathbf{Y}} \equiv \exp\left(-i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\hat{\mathrm{P}} \qquad (\ 8.404\ )$$

reprezentuje zrcadlení v rovině $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3\}$.
Pod spinem nehmotné částice definitoricky rozumíme absolutní hodnotu její helicity.
Proto v případě $M = 0$ budeme požadovat

$$\hat{\mathbf{Y}}\left|k,\lambda\right\rangle = \eta^{(P)}\left|k,-\lambda\right\rangle \quad \text{pro} \quad \lambda \geq 0\ . \qquad (\ 8.405\ )$$

Zopakováním postupu, jenž nás přivedl k formuli ( 8.400 ), pak již snadno zjistíme, že pro libovolný impuls $\mathbf{p}$ je při $\lambda \geq 0$

$$\hat{\mathrm{P}}\left|\,p,\lambda\right\rangle = \eta^{(P)}\exp\left(\mp i\pi\lambda\right)\left|\mathbf{P}p,-\lambda\right\rangle \ , \qquad (\ 8.406\ )$$

kde horní, resp. dolní znaménko platí, když úhel $\varphi$ směru $\tilde{\mathbf{p}}$ je menší, resp. větší nebo roven $\pi$.
Z relací ( 8.379 ) vidíme, že ket $\hat{\mathrm{T}}\left|k,\xi\right\rangle$ je společným vlastním vektorem týchž operátorů příslušným k vlastním hodnotám $\{M, -\xi, 0\}$, a tedy musí být

$$\hat{\mathrm{T}}\left|k,\xi\right\rangle = \zeta_\xi\left|k,-\xi\right\rangle \ , \qquad (\ 8.407\ )$$

kde $|\zeta_\xi| = 1$.
V důsledku antilinearity operátoru $\hat{\mathrm{T}}$ však toto číslo závisí na $\xi$.
Aplikací operátoru $\hat{\mathrm{T}}$ na obě strany rovnosti ( 8.307 ) dostáváme

$$-\left(\hat{\mathbf{J}}_1 \mp i\hat{\mathbf{J}}_2\right)\hat{\mathrm{T}}\left|\mathrm{k},\xi\right\rangle = \alpha^{(\pm)}\left(\,j,\xi\right)\hat{\mathrm{T}}\left|\mathrm{k},\xi \pm 1\right\rangle \ , \qquad (\ 8.408\ )$$

tj.

$$-\alpha^{(\mp)}(j,-\xi)\zeta_{\xi}\left|k,-\xi\mp 1\right\rangle=-\alpha^{(\pm)}(j,\xi)\zeta_{\xi\pm 1}\left|k,-\xi\mp 1\right\rangle \ , \qquad (\ 8.409\ )$$

a tedy

$$\zeta_{\xi\pm 1}=-\zeta_{\xi} \ , \qquad (\ 8.410\ )$$

neboť

$$\alpha^{(\mp)}(j,-\xi)=\alpha^{(\pm)}(j,\xi) \ . \qquad (\ 8.411\ )$$

Obecné řešení relací ( 8.410 ) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\zeta_{\xi}=\eta^{(T)}(-1)^{j-\xi}, \qquad (\ 8.412\ )$$

tj. rovnost ( 8.407 ) upřesnit jako

$$\hat{\mathrm{T}}\left|\mathrm{k},\xi\right\rangle=\eta^{(T)}(-1)^{j-\xi}\left|k,-\xi\right\rangle \ , \qquad (\ 8.413\ )$$

kde

$$\left|\eta^{(T)}\right|=1 \ . \qquad (\ 8.414\ )$$

K tomu, abychom mohli vyjádřit ket $\left|p,\xi\right\rangle$, musíme nejprve specifikovat operátor $\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{L}(p))$, vystupující v definici ( 8.293 ). V případě báze $\left|p,\xi\right\rangle$, tvořené vlastními vektory třetí složky kovariantního spinu z relace ( 8.373 ) víme, že

$$\hat{\mathrm{T}}\exp\left(-iu\tilde{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{K}}\right)\hat{\mathrm{T}}^{-1}=\exp\left(-iu\tilde{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{K}}\right) \ , \qquad (\ 8.415\ )$$

díky čemuž po aplikaci operátoru $\hat{\mathrm{T}}$ na obě strany rovnosti ( 8.382 ) dostáváme

$$\hat{\mathrm{T}}\left|p,\xi\right\rangle = N^*(p)\exp\left(iu\tilde{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{K}}\right)\hat{\mathrm{T}}\left|k,\xi\right\rangle = \\ = \eta^{(T)}(-1)^{j-\xi}N^*(p)\exp\left(iu\tilde{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{K}}\right)\left|k,-\xi\right\rangle, \qquad (8.416)$$

a tedy

$$\hat{\mathrm{T}}\left|p,\xi\right\rangle = \eta^{(T)}(-1)^{j-\xi}\frac{N^*(p)}{N(\mathbf{P}p)}\left|\mathbf{P}p,-\xi\right\rangle. \qquad (8.417)$$

Při volbě normalizačních konstant reálných a vyhovujících požadavku ( 8.384 ) se relace ( 8.417 ) zjednoduší na

$$\hat{\mathrm{T}}\left|p,\xi\right\rangle = \eta^{(T)}(-1)^{j-\xi}\left|\mathbf{P}p,-\xi\right\rangle\ . \qquad (8.418)$$

V případě báze tvořené vlastními vektory helicity, tj. když

$$\left|p,\lambda\right\rangle = N(p)\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}})\exp\left(-iu\hat{\mathbf{K}}_3\right)\left|k,\lambda\right\rangle\ , \qquad (8.419)$$

využijeme toho, že na základě formulí ( 8.390 ), ( 8.413 ) víme, že

$$\exp\left(-i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\left|k,\lambda\right\rangle = (-1)^{j-\lambda}\left|k,-\lambda\right\rangle, \\ \hat{\mathrm{T}}\left|\mathrm{k},\lambda\right\rangle = \eta^{(T)}(-1)^{j-\lambda}\left|k,-\lambda\right\rangle, \qquad (8.420)$$

a tedy

$$\hat{\mathrm{T}}\left|k,\lambda\right\rangle = \eta^{(T)}(-1)^{2j}\exp\left(i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\left|k,\lambda\right\rangle \qquad (8.421)$$

a že díky relacím ( 8.373 ) platí nejen vztah ( 8.415 ), ale také

$$\hat{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}}) = \hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}})\hat{\mathrm{T}}. \qquad (8.422)$$

Aplikací operátoru $\hat{\mathrm{T}}$ na obě strany rovnosti ( 8.419 ) tak dostáváme

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{T}}\left|p,\lambda\right\rangle &= N^*(p)\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}})\exp\left(iu\hat{\mathbf{K}}_3\right)\hat{\mathrm{T}}\left|k,\lambda\right\rangle = \\ &= \eta^{(T)}(-1)^{2j} N^*(p)\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}})\exp\left(iu\hat{\mathbf{K}}_3\right)\exp\left(i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\left|k,\lambda\right\rangle = \\ &= \eta^{(T)}(-1)^{2j} N^*(p)\hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{p}})\exp\left(i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\exp\left(-iu\hat{\mathbf{K}}_3\right)\left|k,\lambda\right\rangle = \\ &= \eta^{(T)}(-1)^{2j} \frac{N^*(p)}{N(\mathbf{P}p)}\left|\mathbf{P}p,\lambda\right\rangle ,\end{aligned}$$

( 8.423 )

kde jsme k obdržení poslední rovnosti využili výsledku ( 8.396 ).
Při obvyklých normalizacích, kdy je $N^*(p) = N(\mathbf{P}p)$, se nalezený transformační zákon zjednoduší na

$$\hat{\mathrm{T}}\left|p,\lambda\right\rangle = \eta^{(T)}(-1)^{2j}\exp(\pm i\pi\lambda)\left|\mathbf{P}p,\lambda\right\rangle \ . \tag{8.424}$$

V případě částice s nulovou hmotou z relací ( 8.252 ), ( 8.253 ), ( 8.379 ) snadno zjistíme, že ket $\hat{\mathrm{T}}\left|p,\lambda\right\rangle$, kde $\left|p,\lambda\right\rangle$ je společenským vlastním vektorem operátorů $\hat{\mathbf{P}}^\mu$ a helicity příslušným k vlastním hodnotám $p^\mu$ a $\lambda$, představuje opět vlastní vektor zmíněných operátorů příslušný k témž vlastním hodnotám.
Tedy jistě můžeme pro vybraný impuls **p** požadovat, aby platilo

$$\exp\left(-i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\hat{\mathrm{T}}\left|p,\lambda\right\rangle = \zeta_\lambda\left|p,\lambda\right\rangle \ . \tag{8.425}$$

V zájmu co nejužší analogie s dříve diskutovaným případem částice s nenulovou hmotou použijeme konvenci

$$\exp\left(-i\pi\hat{\mathbf{J}}_2\right)\hat{\mathrm{T}}\left|p,\lambda\right\rangle = \eta^{(T)}(-1)^{2\lambda}\left|p,\lambda\right\rangle \ . \tag{8.426}$$

Zopakováním kroků, jež nás přivedli k formuli ( 8.424 ), pak obdržíme hledaný transformační zákon ve tvaru

$$\hat{\mathrm{T}}\left|p,\lambda\right\rangle = \eta^{(T)}(-1)^{2\lambda}\exp(\pm i\pi\lambda)\left|\mathbf{P}p,\lambda\right\rangle \ . \tag{8.427}$$

Všimněme si, že operátor časové inverze je možno, na rozdíl od operátoru inverze prostorové, definovat na Hilbertově prostoru nehmotné částice s nulovou helicitou i tehdy, jedná-li se o prostor příslušný ireducibilní reprezentaci Poincaréovy grupy, tj. časová inverze nevyžaduje, aby pro nehmotnou částici, která může být ve stavu s helicitou $\lambda$, nutně existovaly také stavy s helicitou $-\lambda$ .
Ze vztahu ( 8.418 ) dostáváme

$$\hat{\mathrm{T}}^2 \left| p,\xi \right\rangle = \left( \eta^{(T)} \right)^* (-1)^{j-\xi} \left| \mathbf{P}p,-\xi \right\rangle = (-1)^{2j} \left| p,\xi \right\rangle \ . \qquad (8.428)$$

Podobně ze vztahu ( 8.427 ) s přihlédnutím k antilinearitě operátoru $\hat{\mathrm{T}}$ obdržíme

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{T}}^2 \left| p,\lambda \right\rangle &= \left( \eta^{(T)} \right)^* (-1)^{2\lambda} \exp\left( \mp i\pi\lambda \right) \hat{\mathrm{T}} \left| \mathbf{P}p,\lambda \right\rangle = \\ &= \exp\left( \mp 2i\pi\lambda \right) \left| p,\lambda \right\rangle = (-1)^{2|\lambda|} \left| p,\lambda \right\rangle , \end{aligned} \qquad (8.429)$$

kde jsme k obdržení prostřední rovnosti využili faktu, že pokud druhá komponenta impulsu $\mathbf{p}$ je kladná, tj. odpovídající úhel $\varphi < \pi$, potom druhá komponenta impulsu $-\mathbf{p}$ je záporná, tj. odpovídající úhel $\varphi > \pi$ a naopak.
Kvadrát operátoru časové inverze je pro částice s celým spinem roven operátory identity, kdežto pro částice se spinem polocelým se od něj liší znaménkem.

Již v rámci kvantové elektrodynamiky jsme poznali, jak užitečným nástrojem pro popis soustav nerozlišitelných částic představují kreační a anihilační operátory.
Definujme proto nyní anihilační operátory $\hat{\mathbf{a}}^-\left( p,\xi \right)$ tak, že

$$\hat{\mathbf{a}}^-\left( p,\xi \right) \left| \mathbf{0} \right\rangle = \mathbf{0} \ . \qquad (8.430)$$

Operátory jim sdružené představují operátory kreační:

$$\hat{\mathbf{a}}^{+}(p,\xi)|\mathbf{0}\rangle = |p,\xi\rangle \ . \tag{8.431}$$

Přitom jsou splněny buď komutační, nebo antikomutační relace

$$\begin{aligned} &\left[\hat{\mathbf{a}}^{-}(p,\xi),\hat{\mathbf{a}}^{-}(p',\xi')\right]_{\mp} = \left[\hat{\mathbf{a}}^{+}(p,\xi),\hat{\mathbf{a}}^{+}(p',\xi')\right]_{\mp} = 0\,, \\ &\left[\hat{\mathbf{a}}^{-}(p,\xi),\hat{\mathbf{a}}^{+}(p',\xi')\right]_{\mp} = 2Ef(p)\delta_{\xi\xi'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,, \end{aligned} \tag{8.432}$$

z nichž poslední zaručuje, že kety $|p,\xi\rangle$ dané vztahem ( 8.431 ) splňují normalizační podmínku

$$\langle p,\xi|p',\xi'\rangle = 2Ef(p)\delta_{\xi\xi'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \ . \tag{8.433}$$

Dále budeme požadovat, aby platila rovnost

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{P}}|0\rangle = \hat{\mathbf{H}}|0\rangle = \hat{\mathbf{J}}|0\rangle = \hat{\mathbf{K}}|0\rangle = 0\,, \\ &\hat{\mathrm{P}}|0\rangle = \hat{\mathrm{T}}|0\rangle = |0\rangle\,, \end{aligned} \ , \tag{8.434}$$

a též relace

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\Lambda},a)\hat{\mathbf{a}}^{+}(p,\xi)\hat{\mathbf{U}}^{\dagger}(\boldsymbol{\Lambda},a) = \frac{N(p)}{N(\boldsymbol{\Lambda}p)}\exp(ia\boldsymbol{\Lambda}p)\cdot \\ \cdot\sum_{\xi'=-j}^{j} D^{(j)}_{\xi'\xi}\left(\mathbf{W}(\boldsymbol{\Lambda},p)\right)\hat{\mathbf{a}}^{+}(\boldsymbol{\Lambda}p,\xi')\,, \end{aligned} \tag{8.435}$$

díky nimž kety $|p,\xi\rangle$ určené vztahem ( 8.431 ) budou vyhovovat transformačnímu zákonu

$$\hat{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\Lambda},a)|p,\xi\rangle = \frac{N(p)}{N(\boldsymbol{\Lambda}p)}\exp(ia\boldsymbol{\Lambda}p)\sum_{\xi'=-j}^{j} D^{(j)}_{\xi'\xi}\left(\mathbf{W}(\boldsymbol{\Lambda},p)\right)|\boldsymbol{\Lambda}p,\xi'\rangle \ . \tag{8.436}$$

Dále budou splněny relace

$$\hat{\mathrm{P}}\left| p,\xi \right\rangle = \frac{N\left(p\right)}{N\left(\mathbf{P}p\right)}\eta^{(P)}\left|\mathbf{P}p,\xi\right\rangle ,$$
$$\hat{\mathrm{T}}\left| p,\xi \right\rangle = \left(-1\right)^{j-\xi}\frac{N^{*}\left(p\right)}{N\left(\mathbf{P}p\right)}\eta^{(T)}\left|\mathbf{P}p,-\xi\right\rangle , \tag{8.437}$$

pokud

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(p,\xi\right)\hat{\mathrm{P}}^{-1} = \frac{N\left(p\right)}{N\left(\mathbf{P}p\right)}\eta^{(P)}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{P}p,\xi\right),$$
$$\hat{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(p,\xi\right)\hat{\mathrm{T}}^{-1} = \eta^{(T)}\left(-1\right)^{j-\xi}\frac{N^{*}\left(p\right)}{N\left(\mathbf{P}p\right)}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{P}p,-\xi\right). \tag{8.438}$$

Porovnáním veličin prvního řádu v $a_\mu$ ve formuli ( 8.435 ) pro $\mathbf{\Lambda} = 1$ dostáváme

$$\left[\hat{\mathbf{P}}^{\mu},\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(p,\xi\right)\right] = p^{\mu}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(p,\xi\right) , \tag{8.439}$$

tj. operátor $\mathbf{a}^{+}\left(p,\xi\right)$ hraje úlohu posunovacího operátoru, zvedajícího vlastní hodnotu operátoru $\hat{\mathbf{H}}$ o $\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ a posunujícího vlastní hodnotu operátoru $\hat{\mathbf{P}}$ o $\mathbf{p}$.
tento operátor lze tedy vskutku interpretovat jako operátor rodící částici, která má hmotu $m$ a impuls $\mathbf{p}$.
Počínaje formulí ( 8.313 ) jsme všechny vztahy uváděli ve tvaru platném při libovolné volbě funkcí $N(p)$, $f(p)$, omezené pouze požadavkem invariance poměru $f(p)/|N(p)|^2$ vůči Lorentzovým transformacím.
V dalším již budeme pracovat v duchu dříve zavedené konvence:
Symboly $\left|p,\xi\right\rangle$, $\hat{\mathbf{a}}^{-}\left(p,\xi\right)$, … budeme rezervovat k označení těchto veličin při volbě $N(p) = f(p) = 1$, kdežto tytéž veličiny při volbě $f\left(p\right)=\frac{1}{2E}$, $N\left(p\right)=\sqrt{\frac{E}{k^0}}$ budeme označovat $\left|\mathbf{p},\xi\right\rangle$, $\hat{\mathbf{a}}^{-}\left(\mathbf{p},\xi\right)$, … , tj. místo relací ( 1659 ) – ( 8.438 ) bude nyní platit

$$\left\langle p,\xi \middle| p',\xi' \right\rangle = 2E\delta_{\xi\xi'}\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'\right) \tag{8.440}$$

$$\begin{aligned} &\left[\hat{\mathbf{a}}^{-}\left(p,\xi\right),\hat{\mathbf{a}}^{-}\left(p',\xi'\right)\right]_{\mp} = \left[\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(p,\xi\right),\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(p',\xi'\right)\right]_{\mp} = 0\,, \\ &\left[\hat{\mathbf{a}}^{-}\left(p,\xi\right),\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(p',\xi'\right)\right]_{\mp} = 2E\delta_{\xi\xi'}\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'\right), \end{aligned} \tag{8.441}$$

$$\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{\Lambda},a\right)\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(p,\xi\right)\hat{\mathbf{U}}^{\dagger}\left(\mathbf{\Lambda},a\right) = \exp\left(ia\mathbf{\Lambda}p\right)\sum_{\xi'=-j}^{j} D^{(j)}_{\xi'\xi}\left(\mathbf{W}\left(\mathbf{\Lambda},p\right)\right)\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{\Lambda}p,\xi'\right), \tag{8.442}$$

$$\begin{aligned} &\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(p,\xi\right)\hat{\mathrm{P}}^{-1} = \eta^{(P)}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{P}p,\xi\right), \\ &\hat{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(p,\xi\right)\hat{\mathrm{T}}^{-1} = \eta^{(T)}\left(-1\right)^{j-\xi}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{P}p,-\xi\right). \end{aligned} \tag{8.443}$$

respektive

$$\left\langle \mathbf{p},\xi \middle| \mathbf{p}',\xi' \right\rangle = \delta_{\xi\xi'}\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'\right) \tag{8.444}$$

$$\begin{aligned} &\left[\hat{\mathbf{a}}^{-}\left(\mathbf{p},\xi\right),\hat{\mathbf{a}}^{-}\left(\mathbf{p}',\xi'\right)\right]_{\mp} = \left[\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{p},\xi\right),\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{p}',\xi'\right)\right]_{\mp} = 0\,, \\ &\left[\hat{\mathbf{a}}^{-}\left(\mathbf{p},\xi\right),\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{p}',\xi'\right)\right]_{\mp} = \delta_{\xi\xi'}\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'\right), \end{aligned} \tag{8.445}$$

$$\begin{aligned} &\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{p},\xi\right)\hat{\mathrm{P}}^{-1} = \eta^{(P)}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(-\mathbf{p},\xi\right), \\ &\hat{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{p},\xi\right)\hat{\mathrm{T}}^{-1} = \eta^{(T)}\left(-1\right)^{j-\xi}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(-\mathbf{p},-\xi\right), \end{aligned} \tag{8.446}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{\Lambda},a\right)\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{p},\xi\right)\hat{\mathbf{U}}^{\dagger}\left(\mathbf{\Lambda},a\right) &= \sqrt{\frac{\left(\mathbf{\Lambda}p\right)^{0}}{E}}\exp\left(ia\mathbf{\Lambda}p\right)\cdot \\ &\cdot\sum_{\xi'=-j}^{j} D^{(j)}_{\xi'\xi}\left(\mathbf{W}\left(\mathbf{\Lambda},p\right)\right)\hat{\mathbf{a}}^{+}\left(\mathbf{\Lambda}\vec{p},\xi'\right), \end{aligned} \tag{8.447}$$

kde $\mathbf{\Lambda}\vec{p}$ jsme označili třívektor s komponentami

$$\left(\mathbf{\Lambda}\vec{p}\right)^{k} \equiv \Lambda^{k}{}_{\mu}p^{\mu} = \Lambda^{k}{}_{j}p^{j} + \Lambda^{k}{}_{0}E\,. \tag{8.448}$$

Definujme nyní ket

$$\left|\mathbf{p}_1,\xi_1;\mathbf{p}_2,\xi_2;\ldots;\mathbf{p}_N,\xi_N\right\rangle \equiv \mathbf{a}^+\left(\mathbf{p}_1,\xi_1\right)\mathbf{a}^+\left(\mathbf{p}_2,\xi_2\right)\cdot\ldots\cdot\mathbf{a}^+\left(\mathbf{p}_N,\xi_N\right)\left|0\right\rangle. \tag{8.449}$$

Díky formulím ( 8.439 ) a ( 8.434 ) víme, že se jedná o společný vlastní vektor operátorů $\hat{\mathbf{P}}$ a $\hat{\mathbf{H}}$ příslušný k vlastním hodnotám odpovídajícím celkovému impulsu a energii soustavy $N$ částic, z nichž každá má hmotu $m$, a přitom jedna z nich má impuls $\mathbf{p}_1$, jiná $\mathbf{p}_2$, jiná $\mathbf{p}_N$ .
Navíc, z formulí ( 8.447 ), ( 8.434 ) vidíme, že pokud je systém z hlediska naší soustavy ve stavu popsaném ketem ( 8.449 ), potom z hlediska soustavy, která z ní vznikne Poincaréovu transformací, je ve stavu popsaném ketem

$$\hat{\mathbf{U}}\left(\boldsymbol{\Lambda},a\right)\left|\mathbf{p}_1,\xi_1;\mathbf{p}_2,\xi_2;\ldots;\mathbf{p}_N,\xi_N\right\rangle = \prod_{k=1}^{N}\sqrt{\frac{\left(\boldsymbol{\Lambda}p\right)^0}{E}}\exp\left(ia\boldsymbol{\Lambda}p_{(k)}\right)\cdot$$
$$\cdot\sum_{\xi'=-j}^{j}D^{(j)}_{\xi'\xi}\left(\mathbf{W}\left(\boldsymbol{\Lambda},p\right)\right)\left|\boldsymbol{\Lambda}\vec{p}_1,\xi'_1;\boldsymbol{\Lambda}\vec{p}_2,\xi'_2;\ldots;\boldsymbol{\Lambda}\vec{p}_N,\xi'_N\right\rangle\ , \tag{8.450}$$

tj. vektor ( 8.449 ) se transformuje jako direktní součin vektorů odpovídajících příslušným jednočásticovým stavům.
Podobně z formulí ( 8.446 ) díky platnosti relací ( 8.434 ) obdržíme

$$\hat{\mathrm{P}}\left|\mathbf{p}_1,\xi_1;\mathbf{p}_2,\xi_2;\ldots;\mathbf{p}_N,\xi_N\right\rangle = \left(\eta^{(P)}\right)^N\left|-\mathbf{p}_1,\xi_1;-\mathbf{p}_2,\xi_2;\ldots;-\mathbf{p}_N,\xi_N\right\rangle, \tag{8.451}$$

resp.

$$\hat{\mathrm{T}}\left|\mathbf{p}_1,\xi_1;\mathbf{p}_2,\xi_2;\ldots;\mathbf{p}_N,\xi_N\right\rangle = \left(\eta^{(T)}\right)^N\cdot$$
$$\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(-1\right)^{j-\xi}\left|-\mathbf{p}_1,-\xi_1;-\mathbf{p}_2,-\xi_2;\ldots;-\mathbf{p}_N,-\xi_N\right\rangle. \tag{8.452}$$

Nalezené výsledky ukazují, že kety $|\mathbf{p}_1,\xi_1;\mathbf{p}_2,\xi_2;\ldots;\mathbf{p}_N,\xi_N\rangle$ lze bezesporně interpretovat jako vektory popisující $N$ nerozlišitelných částic, z nichž jedna má impuls $\mathbf{p}_1$ a třetí složku kovariantního spinu $\xi_1$, jiná impuls $\mathbf{p}_2$ a třetí složku kovariantního spinu $\xi_2$ , … , a přitom se jedná o bosony nebo fermiony, v závislosti na tom, zda ve formulích ( 8.445 ) platí komutační či antikomutační relace.
Jestliže příslušná částice nemá žádné další stupně volnosti, potom Hilbertův prostor diskutovaného fyzikálního systému můžeme ztotožnit s prostorem, jehož báze je tvořena kety ( 8.449 ) pro $N = 0, \ldots, \infty$. Takto zkonstruovaný Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ budeme nazývat **Fockovým prostorem**. Libovolný element $|\Phi\rangle \in \mathscr{H}$ můžeme vyjádřit ve tvaru rozvoje

$$
\begin{aligned}
|\Phi\rangle &= c_0|0\rangle + \int d^3\mathbf{p}_1 \sum_{\xi_1} c_1(\mathbf{p}_1,\xi_1)|\mathbf{p}_1,\xi_1\rangle + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2!}}\int d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 \sum_{\xi_1,\xi_2} c_2(\mathbf{p}_1,\xi_1,\mathbf{p}_2,\xi_2)|\mathbf{p}_1,\xi_1,\mathbf{p}_2,\xi_2\rangle + \cdots = \\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{N!}}\int d^3\mathbf{p}_1\cdots d^3\mathbf{p}_N \sum_{\xi_1,\ldots,\xi_2} c_N(\mathbf{p}_1,\xi_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\xi_N)|\mathbf{p}_1,\xi_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\xi_N\rangle
\end{aligned}
\tag{8.453}
$$

kde komplexní funkce $c_N(\mathbf{p}_1,\xi_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\xi_N)$ jsou invariantní, resp. mění znaménko při záměně $(\mathbf{p}_j,\xi_j) \rightleftarrows (\mathbf{p}_k,\xi_k)$ pro libovolnou dvojici $j \neq k$, kde $j$, $k = 1, \ldots, N$, v závislosti na tom, zda ve formuli ( 8.445 ) platí komutační, či antikomutační relace.
Z komutačních relací ( 8.445 ) snadno plyne vztah

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p}_N,\xi_N)\cdots\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p}_1,\xi_1)\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p}'_1,\xi'_1)\cdots\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p}'_N,\xi'_N)|0\rangle = \\
&\qquad = \delta_{NN'}\sum_P \delta_{\xi_1\xi'_{i_1}}\delta\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}'_{i_1}\right)\cdots\delta_{\xi_N\xi'_{i_N}}\delta\left(\mathbf{p}_N-\mathbf{p}'_{i_N}\right),
\end{aligned}
\tag{8.454}
$$

kde suma probíhá přes všechny permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & N \\ i_1 & \cdots & i_N \end{pmatrix} . \tag{8.455}$$

Díky němu pro koeficienty rozvoje ( 8.453 ) obdržíme výraz

$$c_N\left(\mathbf{p}_1,\xi_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\xi_N\right)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\left\langle \mathbf{p}_1,\xi_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\xi_N \middle| \Phi\right\rangle , \tag{8.456}$$

po jehož dosazení do tohoto rozvoje obdržíme relaci uzavřenosti

$$1=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{N!}}\int d^3\mathbf{p}_1\cdots d^3\mathbf{p}_N\sum_{\xi_1,\ldots,\xi_2}\left|\mathbf{p}_1,\xi_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\xi_N\right\rangle\left\langle\mathbf{p}_1,\xi_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\xi_N\right| , \tag{8.457}$$

v níž $N$ – tý člen na pravé straně není ničím jiným, než projekčním operátorem do $N$ – částicového podprostoru, tj. do prostoru $N$ – částicových stavů studovaného systému.
Pomocí této relace m.j. ihned dostaneme vyjádření kvadrátu normy vektoru ( 8.453 ) ve tvaru

$$\left\|\Phi\right\|^2\equiv\left\langle\Phi\middle|\Phi\right\rangle=\sum_{N=0}^{\infty}\int d^3\mathbf{p}_1\cdots d^3\mathbf{p}_N\sum_{\xi_1,\ldots,\xi_2}\left|c_N\left(\mathbf{p}_1,\xi_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\xi_N\right)\right|^2 . \tag{8.458}$$

V případě antikomutačních relací ( 8.445 ) obdržíme místo ( 8.454 ) vztah

$$\begin{aligned}&\left\langle 0\right|\hat{\mathbf{a}}^-\left(\mathbf{p}_N,\xi_N\right)\cdots\hat{\mathbf{a}}^-\left(\mathbf{p}_1,\xi_1\right)\hat{\mathbf{a}}^+\left(\mathbf{p}'_1,\xi'_1\right)\cdots\hat{\mathbf{a}}^+\left(\mathbf{p}'_N,\xi'_N\right)\left|0\right\rangle=\\ &\qquad=\delta_{NN'}\sum_P\varepsilon_P\delta_{\xi_1\xi'_{i_1}}\delta\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}'_{i_1}\right)\cdots\delta_{\xi_N\xi'_{i_N}}\delta\left(\mathbf{p}_N-\mathbf{p}'_{i_N}\right),\end{aligned} \tag{8.459}$$

kde $\varepsilon_P$ je parita permutace.
Formule ( 8.456 ) – ( 8.458 ) však zůstanou v platnosti bez jakékoli změny.
Právě nalezené výsledky nám dovolují interpretovat komplexní funkci $c_N\left(\mathbf{p}_1,\xi_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\xi_N\right)$ jako amplitudu hustoty pravděpodobnosti nalezení

právě $N$ částic ve stavu uvažovaného systému popsaném vektorem $|\Phi\rangle$, z nichž jedna bude mít třetí komponentu kovariantního spinu rovnu $\xi_1$ a impuls $\mathbf{p}_1$ , $N$-tá třetí komponentu kovariantního spinu $\xi_N$ impuls $\mathbf{p}_N$ .
Definujeme-li

$$\hat{\mathbf{N}}(\xi) \equiv \int d^3\mathbf{p}\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p},\xi)\,\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p},\xi)\;, \qquad (\ 8.450\ )$$

potom na základě formule ( 8.445 ), nezávisle na tom, zda v ní vystupují komutační či antikomutační relace, snadno zjistíme, že tento operátor vyhovuje komutačním relacím

$$\left[\hat{\mathbf{N}}(\xi), \hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p},\xi)\right] = \delta_{\xi\xi'}\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p},\xi)\;, \qquad (\ 8.461\ )$$

díky nimž ho můžeme interpretovat jako operátor počtu částic s třetí složkou kovariantního spinu rovnou $\xi$ .
Z formule ( 8.460 ) pak vidíme, že operátor

$$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{p},\xi) \equiv \hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p},\xi)\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p},\xi) \qquad (\ 8.462\ )$$

hraje v impulsovém prostoru úlohu operátoru hustoty počtu částic s třetí složkou kovariantního spinu rovnou $\xi$ .
Ze samotné konstrukce Fockova prostoru plyne, že libovolný operátor $\hat{\mathbf{F}}$ na tomto prostoru definovaný, lze vyjádřit pomocí kreačních a anihilačních operátorů ve tvaru

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}} = &\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{N'=0}^{\infty}\int d^3\mathbf{p}_1 \ldots d^3\mathbf{p}_N \int d^3\mathbf{p}'_1 \ldots d^3\mathbf{p}'_{N'} \\ &\sum_{\xi_1\cdots\xi_2}\sum_{\xi'_1\cdots\xi'_2} F_{N,N'}(\mathbf{p}_1,\xi_1;\ldots;\mathbf{p}_N,\xi_N;\mathbf{p}'_N,\xi'_N;\ldots;\mathbf{p}'_N,\xi'_{N'})\cdot \qquad (\ 8.463\ ) \\ &\cdot\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p}_1,\xi_1)\ldots\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p}_N,\xi_N)\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p}'_N,\xi'_N)\ldots\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p}'_1,\xi'_1)\,,\end{aligned}$$

kde $F_{N,N'}$ jsou komplexní funkce příslušných proměnných.

V tomto tvaru vyjádřené operátory celkové energie a impulsu neinteragujících částic můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}} &= \int d^3\mathbf{p} \sum_{\xi} E\,\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p},\xi)\,\hat{\mathbf{a}}^{-}(\mathbf{p},\xi) = \int d^3\mathbf{p} \sum_{\xi} E\,\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{p},\xi)\,,\\ \hat{\mathbf{P}} &= \int d^3\mathbf{p} \sum_{\xi} \mathbf{p}\,\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p},\xi)\,\hat{\mathbf{a}}^{-}(\mathbf{p},\xi) = \int d^3\mathbf{p} \sum_{\xi} \mathbf{p}\,\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{p},\xi)\,.\end{aligned} \qquad (\ 8.464\ )$$

Díky (anti)komutačním relacím ( 8.445 ) operátory vystupující na pravých stranách posledních dvou formulí vyhovují komutačním relacím ( 8.439 ).
Pro zobecnění naznačené konstrukce pro popis systému, jenž se může vyskytovat ve stavech odpovídajících libovolnému počtu nejrůznějších druhů částic, z nichž některé mohou být bosony a jiné fermiony stačí, když každému druhu částic přiřadíme vlastní kreační anihilační operátory tak, že pokud $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{p},\xi,n)$ je anihilační operátor odpovídající $n$-tému druhu částic, potom platí

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{p},\xi;n)\left|0\right\rangle = 0 \qquad (\ 8.465\ )$$

a relace

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{p},\xi;n),\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{p}',\xi';n')\right]_{\mp} &= \left[\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p},\xi;n),\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p}',\xi';n')\right]_{\mp} = 0\,,\\ \left[\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{p},\xi;n),\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{p}',\xi';n')\right]_{\mp} &= \delta_{nn'}\delta_{\xi\xi'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,,\end{aligned} \qquad (\ 8.466\ )$$

v nichž se jedná o atikomutátory pouze tehdy, když jak částice $n$, tak částice $n'$ je fermionem.

$$1 = \sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\frac{1}{n_{n_1}!\cdots n_{n_N}!}\int d^3\mathbf{p}_1^{(1)}\ldots d^3\mathbf{p}_{n_1}^{(1)}\sum_{\xi_1^{(1)}\ldots\xi_{n_1}^{(1)}}\cdots\int d^3\mathbf{p}_1^{(N)}\ldots d^3\mathbf{p}_{n_N}^{(N)}$$
$$\sum_{\xi_1^{(N)}\ldots\xi_{n_N}^{(N)}}\left|\mathbf{p}_1^{(1)},\xi_1^{(1)};\ldots;\mathbf{p}_{n_N}^{(N)},\xi_{n_N}^{(N)}\right\rangle\left\langle\mathbf{p}_1^{(1)},\xi_1^{(1)};\ldots;\mathbf{p}_{n_N}^{(N)},\xi_{n_N}^{(N)}\right|\,. \qquad (\ 8.467\ )$$

kde $N$ udává počet druhů částic a

$$\left|\mathbf{p}_1^{(1)},\xi_1^{(1)};\ldots;\mathbf{p}_{n_1}^{(1)},\xi_{n_1}^{(1)};\mathbf{p}_1^{(2)},\xi_1^{(2)};\ldots;\mathbf{p}_{n_N}^{(N)},\xi_{n_N}^{(N)}\right\rangle \equiv$$
$$\equiv \hat{\mathbf{a}}^+\left(\mathbf{p}_1^{(1)},\xi_1^{(1)};1\right)\ldots\hat{\mathbf{a}}^+\left(\mathbf{p}_{n_1}^{(1)},\xi_{n_1}^{(1)};1\right)\hat{\mathbf{a}}^+\left(\mathbf{p}_1^{(2)},\xi_1^{(2)};2\right)\ldots\hat{\mathbf{a}}^+\left(\mathbf{p}_{n_N}^{(N)},\xi_{n_N}^{(N)};N\right)\left|0\right\rangle . \tag{8.468}$$

Povšimněme si, že operátor

$$\hat{\mathbf{N}}(\xi,n) \equiv \int d^3\mathbf{p}\,\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p},\xi,n)\,\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p},\xi,n) \tag{8.469}$$

vyhovuje komutačním relacím

$$\left[\hat{\mathbf{N}}(\xi,n),\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p},\xi',n')\right] = \delta_{nn'}\delta_{\xi\xi'}\,\mathbf{a}^+(\mathbf{p},\xi,n)\ , \tag{8.470}$$

díky nimž ho můžeme interpretovat jako operátor počtu částic druhu $n$ s třetí složkou kovariantního spinu rovnou $\xi$.
Operátory celkové energie a impulsu neinteragujících částic pak můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}} &= \int d^3\mathbf{p}\sum_{n=1}^{N}\sum_{\xi} E(\mathbf{p},n)\,\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p},\xi_n,n)\,\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p},\xi_n,n)\,,\\ \hat{\mathbf{P}} &= \int d^3\mathbf{p}\sum_{n=1}^{N}\sum_{\xi}\mathbf{p}\,\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p},\xi_n,n)\,\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p},\xi_n,n)\,,\end{aligned} \tag{8.471}$$

kde

$$E(\mathbf{p},n) \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2} \tag{8.472}$$

a $m_n$ je hmota částice druhu $n$ .
Výše zavedený Fockův prostor jsme konstruovali tak, že na něm existuje unitární reprezentace Poincaréovy grupy realizovaná operátory $\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{\Lambda},a)$, které vedle požadavku

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{\Lambda},a)|0\rangle = |0\rangle \tag{8.473}$$

vyhovují relacím

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{\Lambda},a)\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p},\xi,n)\hat{\mathbf{U}}^{\dagger}(\mathbf{\Lambda},a) = \sqrt{\frac{(\mathbf{\Lambda}p)^{0}}{E}}\exp(ia\mathbf{\Lambda}p)\cdot$$
$$\cdot\sum_{\xi'=-j^{(n)}}^{j^{(n)}} D_{\xi'\xi}^{\left(j^{(n)}\right)}\left(\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p)\right)\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{\Lambda}\vec{p},\xi',n), \tag{8.474}$$

kde

$$p^{0} = E \equiv \sqrt{\mathbf{p}^{2} + m_{n}^{2}}\ . \tag{8.475}$$

Povšimněme si, že na obou stranách těchto relací vystupují kreační operátory odpovídající téže částici, ale pro různé hodnoty kinematických proměnných.
Fyzikálně to odráží skutečnost, že pozorovatelé užívající různé souřadné soustavy vidí tytéž částice, ale hodnoty jejich impulsů a spinových charakteristik závisí na tom, v jaké soustavě jsou určovány.
Podobně je tomu i u operátorů reprezentujících prostorovou, resp. časovou inverzi, které vedle požadavku

$$\hat{\mathrm{P}}|0\rangle = \hat{\mathrm{T}}|0\rangle = |0\rangle \tag{8.476}$$

vyhovují relacím

$$\begin{gathered}\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p},\xi,n)\hat{\mathrm{P}}^{-1} = \eta^{(P)}\hat{\mathbf{a}}^{+}(-\mathbf{p},\xi,n),\\ \hat{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p},\xi,n)\hat{\mathrm{T}}^{-1} = \eta^{(T)}(-1)^{j^{(n)}-\xi}\hat{\mathbf{a}}^{+}(-\mathbf{p},-\xi,n).\end{gathered} \tag{8.477}$$

Na diskutovaném prostoru však mohou existovat i reprezentace dalších grup ($\equiv \mathfrak{G}$)realizované unitárními operátory $\hat{\mathbf{U}}(g)$, jejichž vlastnosti

jsou v jistém smyslu opačné: nemění kinematické charakteristiky částic, ale mohou mezi sebou míchat různé druhy částic.
V dalším se zaměříme na ty z těchto operátorů, pro které platí

$$\hat{\mathbf{U}}(g)|0\rangle = |0\rangle \qquad (8.478)$$

a přitom

$$\hat{\mathbf{U}}(g)\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p},\xi,n)\hat{\mathbf{U}}^{\dagger}(g) = \sum_{n'} U_{n'n}(g)\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p},\xi,n') \ , \qquad (8.479)$$

kde $U_{n'n}(g)$ představují elementy unitárních matic U($g$), kterými je realizována nějaká reprezentace uvažované grupy $\mathfrak{G}$.
Z hlediska těchto transformací hrají kinematické proměnné naprosto pasivní roli, tj. tyto transformace neodrážejí žádné vlastnosti prostoročasu.
Proto se o nich obvykle mluví jako o transformacích vnitřních symetrií.
Formálně se to odráží v tom, že všechny operátory vnitřních symetrií komutují s operátory reprezentujícími Poincaréovu grupu, tj.

$$\left[\hat{\mathbf{U}}(g),\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{\Lambda},a)\right] = 0 \ , \qquad (8.480)$$

což m.j. vyžaduje, aby platilo

$$\left[\hat{\mathbf{U}}(g),\hat{\mathbf{H}}\right] = \left[\hat{\mathbf{U}}(g),\hat{\mathbf{J}}\right] = 0 \ . \qquad (8.481)$$

Pokud $\mathfrak{G}$ je $\eta$ - parametrickou Lieovou grupou, potom každý její element $g$ je jednoznačně určen hodnotou $\eta$ reálných parametrů $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\eta \equiv \alpha)$ a operátory $\hat{\mathbf{U}}(g)$, resp. matice $\mathbf{U}(g)$ možno vyjádřit ve tvaru

$$\hat{\mathbf{U}}(g(\alpha)) \equiv \hat{\mathbf{U}}(\alpha) = \exp\left\{ i\sum_{\alpha=1}^{\eta} \alpha_a \hat{\mathbf{X}}_a \right\} \ , \qquad (8.482)$$

resp.

$$\mathbf{U}\big(g(\alpha)\big) \equiv \mathbf{U}(\alpha) = \exp\left\{ i \sum_{\alpha=1}^{\eta} \alpha_a \mathbf{t}_a \right\} , \qquad (\ 8.483\ )$$

kde samosdružené operátory $\hat{\mathbf{X}}_a$ i hermitovské matice $\mathbf{t}_a$ realizují reprezentaci generátorů grupy $\mathfrak{G}$, tj. reprezentaci odpovídající Lieovy algebry, a tedy vyhovují komutačním relacím

$$\left[ \hat{\mathbf{X}}_a , \hat{\mathbf{X}}_b \right] = i \sum_{c=1}^{N} C^c{}_{ab} \hat{\mathbf{X}}_c \ ,$$
$$\left[ \mathbf{t}_a , \mathbf{t}_b \right] = i \sum_{c=1}^{N} C^c{}_{ab} \mathbf{t}_c \ , \qquad (\ 8.484\ )$$

kde $C^c{}_{ab}$ jsou strukturní konstanty grupy $\mathfrak{G}$.
Porovnáním veličin prvního řádu v $\alpha$ na obou stranách formulí ( 8.479 ), resp. ( 8.478 ) nalezneme, že platí komutační relace

$$\left[ \hat{\mathbf{X}}_a , \hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p},\xi,n) \right] = \sum_{n'} (t_a)_{n'n} \, \hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p},\xi,n) , \qquad \alpha = 1, \ldots, \eta \quad (\ 8.485\ )$$

a přitom

$$\hat{\mathbf{X}}_a \left| 0 \right\rangle = 0 , \qquad \alpha = 1, \ldots, \eta \ . \qquad (\ 8.486\ )$$

Z komutační relace ( 8.481 ) navíc vidíme, že musí platit

$$\left[ \hat{\mathbf{X}}_a , \hat{\mathbf{H}} \right] = 0 \ . \qquad (\ 8.487\ )$$

tj. operátory $\hat{\mathbf{X}}_a$ představují integrály pohybu částic.

Ve speciálním případě, když matice $\mathbf{t}_a$, odpovídající některému z generátorů je diagonální, tj. když (pro určitou hodnotu *a*) je

$$\left(t_a\right)_{n'n} = q_n \delta_{n'n} \ , \tag{8.488}$$

operátor

$$\hat{\mathbf{Q}} \equiv \mathbf{X}_a \tag{8.489}$$

splňuje komutační relace

$$\left[\hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{a}}^+\left(\mathbf{p}, \xi, n\right)\right] = q_n \hat{\mathbf{a}}^+\left(\mathbf{p}, \xi, n\right) \ , \tag{8.490}$$

z nichž okamžitě vidíme, že ket ( 468 ) je jeho vlastním vektorem takovým, že

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{Q}}\left|\mathbf{p}_1^{(1)}, \xi_1^{(1)}; \ldots; \mathbf{p}_{n_1}^{(1)}, \xi_{n_1}^{(1)}; \mathbf{p}_1^{(2)}, \xi_1^{(2)}; \ldots; \mathbf{p}_{n_N}^{(N)}, \xi_{n_N}^{(N)}\right\rangle = \\
&= \sum_{j=1}^{N} n_j q_j \left|\mathbf{p}_1^{(1)}, \xi_1^{(1)}; \ldots; \mathbf{p}_{n_1}^{(1)}, \xi_{n_1}^{(1)}; \mathbf{p}_1^{(2)}, \xi_1^{(2)}; \ldots; \mathbf{p}_{n_N}^{(N)}, \xi_{n_N}^{(N)}\right\rangle .
\end{aligned} \tag{8.491}$$

Díky tomu můžeme $\hat{\mathbf{Q}}$ interpretovat jako operátor odpovídající nějakému kvantovému náboji, jako je elektrický náboj, leptonové číslo, baryonové číslo, projekce izospinu, či jakékoliv jiné aditivní kvantové číslo.
Číslo $q_n$ pak udává hodnotu náboje pro částici druhu *n*.
Povšimněme si, že tento operátor lze vyjádřit pomocí kreačních a anihilačních operátorů jako

$$\hat{\mathbf{Q}} = \sum_n q_n \hat{\mathbf{N}}\left(n\right) \ , \tag{8.492}$$

kde

$$\hat{\mathbf{N}}(n) \equiv \sum_{\xi} \hat{\mathbf{N}}(\xi, n) = \sum_{\xi} \int d^3\mathbf{p}\, \hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p}, \xi, n)\hat{\mathbf{a}}^{-}(\mathbf{p}, \xi, n) \qquad (8.493)$$

je operátor počtu částic druhu *n*.
Vraťme se však ještě zpátky k formuli ( 8.479 ).
Je zřejmé, že částic je možno vždy očíslovat tak, aby postupně vytvářely skupiny takové, že žádná z uvažovaných transformací navzájem nemíchá částice náležející do různých skupin.
Matice **U**(*g*) pak mají kvazidiagonální tvar, v němž každé z těchto skupin odpovídá jedna submatice na diagonále.
Uvážíme-li, že relaci ( 8.481 ) lze splnit jedině tehdy, když se mezi sebou mohou míchat pouze ty částice, které mají stejné hmoty a stejné spiny (aby maticový element $\mathbf{U}_{n'n}(g)$ mohl být nenulový, je nezbytné, aby hmota i spin částice *n´* měly stejné hodnoty, jako u částice *n*), vyvstává přirozeně otázka, zda výše zmíněné submatice vůbec mohou být více než jednorozměrné.
Demonstrujme na nejprve na jednom konkrétním případu, že to skutečně možné je.
V rámci relativistické kvantové teorie docházíme k závěru, že ke každé částici *n* musí existovat její antičástice $\overline{n}$, která má stejnou hmotu a spin jako částice *n*, ale opačnou hodnotu všech kvantových nábojů.
Proto hraje důležitou roli diskrétní symetrie nazývaná nábojovým sdružením, která je na Fockově prostoru realizována unitárním operátorem $\hat{\mathbf{C}}$, takovým, že

$$\hat{\mathbf{C}}|0\rangle = |0\rangle \qquad (8.494)$$

a

$$\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p}, \xi, n)\hat{\mathbf{C}}^{-1} = \eta_n^{(C)}\hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p}, \xi, n) \ , \qquad (8.495)$$

kde $\eta_n^{(C)}$ je nábojová parita částice *n*, pro kterou platí

$$\eta_n^{(C)} = \eta_{\overline{n}}^{(C)} = \pm 1 \ . \qquad (8.496)$$

Odtud vidíme, že operátor nábojového sdružení $\hat{\mathbf{C}}$ patří mezi uvažované operátory vnitřních symetrií $\hat{\mathbf{U}}(g)$, neboť pro něj platí

$$\hat{\mathbf{C}}^2 = 1 \,, \qquad (8.497)$$

a tedy představuje spolu s operátorem identity reprezentaci grupy $\boldsymbol{S_2}$ .
Očíslujeme-li druhy částic tak, že mezi částicí a jí odpovídající antičásticí nefiguruje žádný jiný druh částic, potom odpovídající matice $\mathbf{U}(g)$ má kvazidiagonální tvar, v němž každé částici a její antičástici odpovídá jedna submatice.
Každá z těchto submatic společně s odpovídající jednotkovou maticí představuje opět reprezentaci grupy $\boldsymbol{S_2}$ .
Tato reprezentace je jednorozměrná (a tedy ireducibilní), resp. dvourozměrná (a tedy ireducibilní) v závislosti na tom, zda příslušná částice je, či není identická se svojí antičásticí.
Nábojové sdružení tak představuje diskrétní transformaci vnitřních symetrií uvažovaného typu, která hraje v relativistické kvantové teorii a jejích aplikacích velmi významnou roli.
Naznačená konstrukce však dovoluje bez problémů nalézt i celou řadu dalších operátorů vnitřních symetrií, tvořících reprezentace také Lieových grup.
Např. jestliže ve formuli ( 8.479 ) vezmeme $\mathbf{U}(g) \equiv \mathbf{U}(\alpha;n)$, kde matice napravo je diagonální a všechny její diagonální elementy jsou jednotkové, až na $n$-tý, který je dán výrazem $\exp(i\alpha)$.
Potom odpovídající operátory $\hat{\mathbf{U}}(\alpha;n)$, v nichž $n$ je pevně zvolené číslo a parametr $\alpha$ nabývá všech možných reálných hodnot, tvoří reprezentaci grupy $\boldsymbol{U(1)}$.
Totéž je evidentně pravdou i o operátorech obdržených coby součin více operátorů $\hat{\mathbf{U}}(\alpha;n)$, z nichž všechny odpovídají téže hodnotě $\alpha$, ale různým hodnotám $n$.
Podobně, jestliže ve formuli ( 8.479 ) je $\mathbf{U}(g) \equiv \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha};n \neq \overline{n})$, kde $\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha};n \neq \overline{n})$ je kvazidiagonální matice, se submaticemi na diagonále odpovídajícími vždy jednomu druhu částice a její antičástici, které jsou všechny rovny jednotkové matici, s výjimkou jediné.

Ta odpovídá některému (pevně zvolenému) druhu částic ($\equiv n$), které nejsou identické se svými antičásticemi.
Tuto submatici definujeme výrazem

$$\exp\left(i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) . \qquad (8.498)$$

Snadno se přesvědčíme, že odpovídající operátory $\hat{\mathbf{U}}\left(\boldsymbol{\alpha};n\neq\overline{n}\right)$, u nichž druh částice $n\neq\overline{n}$ je pevně zvolený a každý z trojice parametrů $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ probíhá všechny možné reálné hodnoty, tvoří reprezentaci grupy ***SU*(2)**.
Také součiny více operátorů $\hat{\mathbf{U}}\left(\boldsymbol{\alpha};n\neq\overline{n}\right)$, z nichž všechny odpovídají témuž $\boldsymbol{\alpha}$, ale různým $n\neq\overline{n}$ opět tvoří reprezentaci ***SU*(2)**.
Lze očekávat, že pouze ty z výše uvedených reprezentací grupy ***U*(1)**, resp. ***SU*(2)**, u nichž jsou některé generátory shodné s operátory odpovídajícími dynamickým proměnným, které se buď zachovávají (např. elektrický náboj), nebo je jejich zachování jen slabě narušeno (baryonové číslo, leptonové číslo, projekce izospinu, podivnost, půvab, krása, pravda, …), mohou být fyzikálně zajímavé.
Formálně pak lze dokonce na všechny druhy částic patřící do téže skupiny pohlížet jako na částici jedinou, která se může nalézat v různých stavech z hlediska nějakých vnitřních stupňů volnosti. Transformace vnitřních symetrií pak odpovídají transformacím v prostoru těchto vnitřních stupňů volnosti.
To nám umožňuje prakticky beze zbytku zopakovat úvahy, které jsme dříve provedli při konstrukci reprezentací grup ***U*(1)** a ***SU*(2)**, vycházeje z rovnosti hmot částice a antičástice.
Pouze rozměr submatic nacházejících se na diagonále $\mathbf{U}(g)$ bude nyní dán počtem druhů částic patřících do jednotlivých skupin (počtem nezávislých vnitřních stavů odpovídající zobecněné částice).
Protože do některých skupin mohou patřit i více než 2 druhy částic, můžeme tak dospět k nejrůznějším reprezentacím, a to i dalších než dříve zmíněných grup (např. ***SU*(3)**).
Většina z takto získaných operátorů $\hat{\mathbf{U}}\left(g\right)$ bude opět fyzikálně málo zajímavá.

Zato ty z nich, které odpovídají vnitřním symetriím interagujících částic, tj. komutují s operátorem $\hat{\mathbf{H}}_{(I)}$ nebo alespoň s jeho podstatnou částí (např. v případě ***SU*(3)** symetrie s právě tou částí $\hat{\mathbf{H}}_{(I)}$, která popisuje silné interakce, ale nekomutuje s tou částí $\hat{\mathbf{H}}_{(I)}$, která odpovídá interakcím slabím a elektromagnetickým), poskytují velice účinný nástroj pro fyzikální analýzu.
V dalším budeme požadovat, aby příslušná vnitřní symetrie, kterou dosud formulujeme v termínech transformačních vlastností kreačních a anihilačních operátorů, byla rovněž vnitřní symetrií odpovídajících polí. Nastává to tehdy, když se kreační operátory antičástic transformují stejně, jako kreační operátory částic.
Označíme-li $\hat{\mathbf{a}}^{+}(h,H)$ kreační operátor částice *h* patřící do multipletu *H*, potom relace ( 8.479 ) znamená, že pro každý multiplet *H* platí

$$\hat{\mathbf{U}}(g)\hat{\mathbf{a}}^{+}(h,H)\hat{\mathbf{U}}^{\dagger}(g)=\sum_{h'}U_{h'h}(g,H)\,\hat{\mathbf{a}}^{+}(h',H)\ , \qquad (\ 8.499\ )$$

kde $\mathbf{U}(g,H)$ jsou zadané matice realizující unitární reprezentaci $D(\mathfrak{G};H)$ grupy $\mathfrak{G}$.
Sdružením obou stran této rovnosti dostaneme odpovídající transformační zákon pro anihilační operátory:

$$\hat{\mathbf{U}}(g)\hat{\mathbf{a}}^{-}(h,H)\hat{\mathbf{U}}^{\dagger}(g)=\sum_{h'}U^{*}{}_{h'h}(g,H)\,\hat{\mathbf{a}}^{-}(h',H)\ . \qquad (\ 8.500\ )$$

Odtud vidíme, že antičástice $\overline{h}$ k částicím *h* z multipletu *H* tvoří multiplet $\overline{H}$ a pro jejich kreační operátory platí

$$\hat{\mathbf{U}}(g)\hat{\mathbf{a}}^{+}(\overline{h},\overline{H})\hat{\mathbf{U}}^{\dagger}(g)=\sum_{h'}U_{\overline{h}'\overline{h}}(g,\overline{H})\,\hat{\mathbf{a}}^{+}(\overline{h}',\overline{H})\ , \qquad (\ 8.501\ )$$

kde

$$\mathbf{U}\left(g;\bar{H}\right) \equiv \mathbf{U}^{*}\left(g;H\right) = \left\{\left[\mathbf{U}\left(g;H\right)\right]^{-1}\right\}^{\mathsf{T}}. \qquad (8.502)$$

Tento poznatek se obvykle formuluje jako teorém „antičástice se transformují kontragradientně“.
Připomeňme, že pokud matice $\mathbf{U}(g)$ tvoří reprezentaci $D(\mathfrak{G})$ grupy $\mathfrak{G}$, potom také matice $\mathbf{U}^{*}(g)$, resp. $\left\{\left[\mathbf{U}\left(g\right)\right]^{-1}\right\}^{\mathsf{T}}$ realizují reprezentaci $D^{*}(\mathfrak{G})$, resp. $\bar{D}(\mathfrak{G})$ téže grupy.
Přitom se o $D^{*}(\mathfrak{G})$, resp. $\bar{D}(\mathfrak{G})$ hovoří jako o reprezentaci sdružené, resp. kontragradientní.

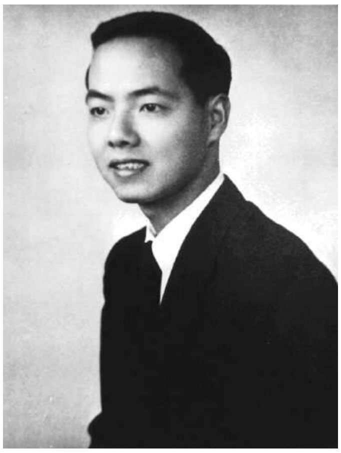
## 3) Slabá jaderná interakce

### Trocha historie

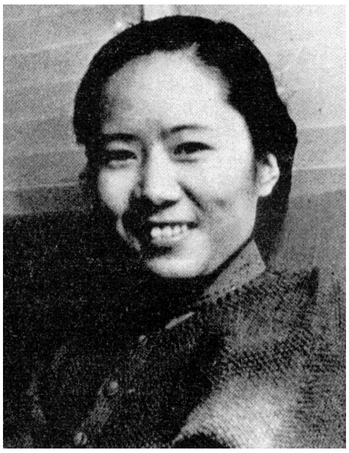
Slabá interakce byla poprvé poznána u $\beta$ rozpadu neutronu. Od té doby bylo pozorováno mnoho rozpadů částic ovládaných slabou interakcí. Jde o rozpady s relativně velmi dlouhými poločasy (odtud název slabá interakce) od $10^{-15}$ s do několika týdnů. Interakce působí na značné množství částic (na všechny leptony a kvarky a samozřejmě částice z kvarků složené). Nepůsobí na intermediální částice.

V roce 1956 byly pozorovány slabé rozpady $K^{+}$ mezonů, které nezachovávaly pravolevou symetrii. Tento závažný fakt byl ověřen laboratorním experimentem s $\beta$ rozpadem kobaltu $^{60}$Co v roce 1957 (experiment navrhli T. D. Lee a C. N. Yang a provedla ho Chien-Shiung Wu z Kolumbijské university). Tak bylo poprvé přímo detekováno narušení P symetrie (pravo-levé symetrie prostoru). V roce 1964 (James W. Cronin, Val L. Fitch) byly pozorovány rozpady levotočivého $K^{0}_{L}$ mezonu na piony $\pi^{+}$ a $\pi^{-}$, které sice málo, ale přece jen narušují i CP symetrii (kombinovanou symetrii parity P a nábojového sdružení C). Veškeré tyto experimenty znamenaly první poznávání zákonů slabé interakce.

# První poznání slabé interakce

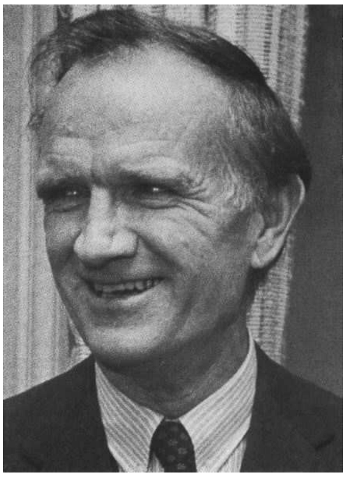


**Tsung-Dao Lee (1926)**



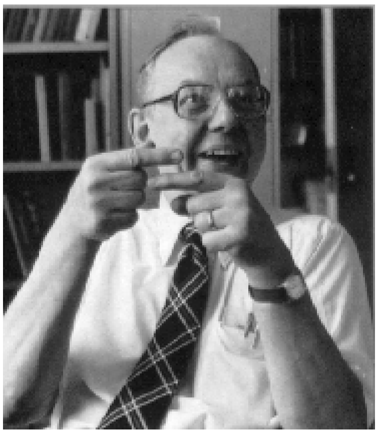
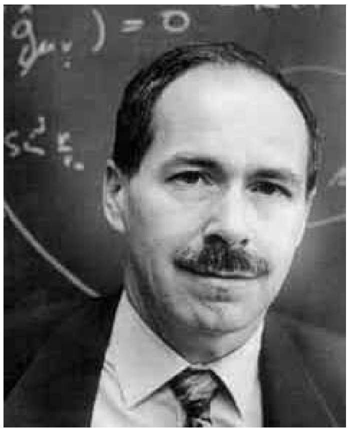
**Chien-Shiung Wu (1912-1997)**

**James Watson Cronin (1931)**



**Val Logsdon Fitch (1923)**

V padesátých letech byly navrženy první teorie slabé interakce, které postupně vedly k vybudování teorie založené na $\boldsymbol{SU(2)}$ symetrii. Roku 1954 publikovali Chen Ning Yang a Robert Mills článek o možném zobecnění kvantové elektrodynamiky ve snaze popsat kromě elektromagnetické interakce i elektroslabou. Tato teorie má lokální kalibrační symetrii izospinových transformací právě $\boldsymbol{SU(2)}$. Tento zobecněný druh kalibračních transformací je dnes znám pod názvem Yangova–Millsova kalibrační symetrie a jejich teorii se říká Yangova–Millsova kvantová teorie pole. V této teorii vystupuje pole analogické elektromagnetickému, ale jeho kvanta jsou tří různých druhů a navíc mezi nimi působí síly určené kalibrační symetrií.

**Chen Ning Yang (1922) Robert Laurence Mills (1927 – 1999) Gerardus 't Hooft (1946)**

Od počátečních návrhů Yanga a Millse se různí špičkoví fyzici své doby pokoušeli konstruovat pro tuto teorii poruchový rozvoj a renormalizovat ji. Techniky rozvinuté pro zacházení s kalibrační invariancí kvantové elektrodynamiky si však nedokázaly poradit se zobecněnou kalibrační invariancí Yangovy–Millsovy teorie. Teprve roku 1971 se Gerardu van´t Hoffovi v rámci dizertace pod vedení Martina Veltmana podařilo dokázat, že Yangovy–Millsovy teorie renormalizovatelné jsou a tedy principielně umožňují ve svém poruchovém rozvoji bezrozporně vypočítat členy libovolného řádu. Teorie slabé interakce se nazývá *kvantová flavourdynamika*, zkratku má *QFD* (Quantum Flavour Dynamics). Jde tedy o teorii postavenou na symetrii vůně při slabé interakci, symetrii ***SU*(2)**.

## Kvantová flavourdynamika

Při slabé interakci dochází k výměně intermediálních vektorových bosonů $W^+$, $W^-$, $Z^0$. Tyto částice teoreticky předpověděli S. Weinberg, A. Salam a S. L. Glashow, kteří jsou autory jednotné teorie elektromagnetické a slabé interakce (*elektroslabé interakce*). Za tuto práci obdrželi Nobelovu cenu v roce 1979. Částice objevil v Cernu C. Rubbia na přelomu roku 1983 a 1984. Za jejich objev obdržel Nobelovu cenu spolu s konstruktérem zařízení S. van der Meerem v roce 1984.

**Symetrie interakce:** Interakce slabá nerozpozná od sebe částice stejného barevného náboje. Například elektron a elektronové neutrino se při slabé interakci jeví jako jediná částice. Stejně tak kvark *d* a kvark $u$ a i ostatní dvojice. Samozřejmě při jiných interakcích (například elektromagnetické) lze tyto dvojice snadno odlišit. Symetrii nazýváme ***SU*(2)**, což je anglická zkratka pro Special Unitary - v matematice je popsána komplexními maticemi 2×2 (přehazují mezi sebou dvě částice nerozlišitelné při slabé interakci). Tyto matice jsou unitární (Unitary) s determinantem rovným jedné (Special). Unitární matice jsou matice, které se nezmění, překlopíme-li je kolem diagonály a komplexně sdružíme. V matematice reprezentují unitární matice dvě třídy operací: rotace (det = +1) a zrcadlení (det = -1).

Slabá jaderná interakce od sebe nerozlišuje následující dvojice vůní částic:

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \tag{8.503}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \tag{8.504}$$

které tak tvoří ***SU*(2)** izodublety z hlediska nového kvantového čísla (náboje) zvaného **vůně**.
Transformace ***SU*(2)** se realizují s pomocí komplexních unitárních unimodulárních matic působících na vlnové funkce částic izodubletu (označme si je pro názornost *a*, *b*):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} . \tag{8.505}$$

Tím dostáváme v teorii celkem 8 volných parametrů.
Z požadavku unitarity

$$\boldsymbol{\sigma}^\dagger \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1} \tag{8.506}$$

dostáváme celkem 4 vazby a z požadavku unimodularity

$$\det \boldsymbol{\sigma} = 1 \tag{8.507}$$

další jednu vazbu.
V teorii tak zbývají pouhé 3 volné parametry, které odpovídají třem vektorovým polím a jim odpovídajícím bosonům.
Tyto vektorové bosony označujeme $W^+$, $W^-$, $Z^0$.

## Základní informace

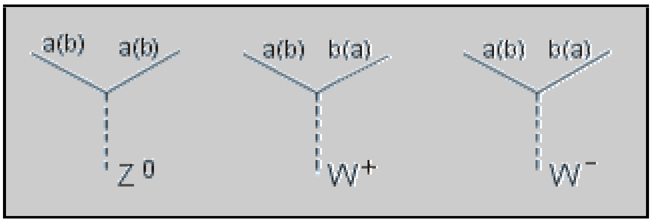
| | |
|---|---|
| Působení | výběrové, na $Q_w \neq 0$ (leptony a kvarky) |
| Dosah | konečný, $10^{-18}$ m |
| Symetrie | SU(2) |
| IM částice | IM vektorové bosony $W^+$, $W^-$, $Z^0$ |

- **Působení interakce:** Slabá interakce je *výběrová interakce*. Působí jen na částice s nenulovým nábojem slabé interakce $Q_w$, který souvisí s vůní (flavour). Vůni mají leptony a kvarky. Vždy jedna generace částic tvořící jeden izodublet z hlediska vůně (například elektron se svým neutrinem) má stejný barevný náboj. Rozeznáváme tedy barevný náboj elektronový, mionový, tauonový, a barevný náboj kvarků *d* a *u*, kvarků *s* a *c* a kvarků *t* a *b* (celkem 6 barevných nábojů).
- **Dosah interakce:** *Konečný*, interakce slabá má krátký dosah, cca $10^{-18}$ m. S tím je spojená nenulová hmotnost intermediálních částic interakce ($W^\pm$ mají hmotnost 80 GeV a $Z^0$ má hmotnost 91 GeV).

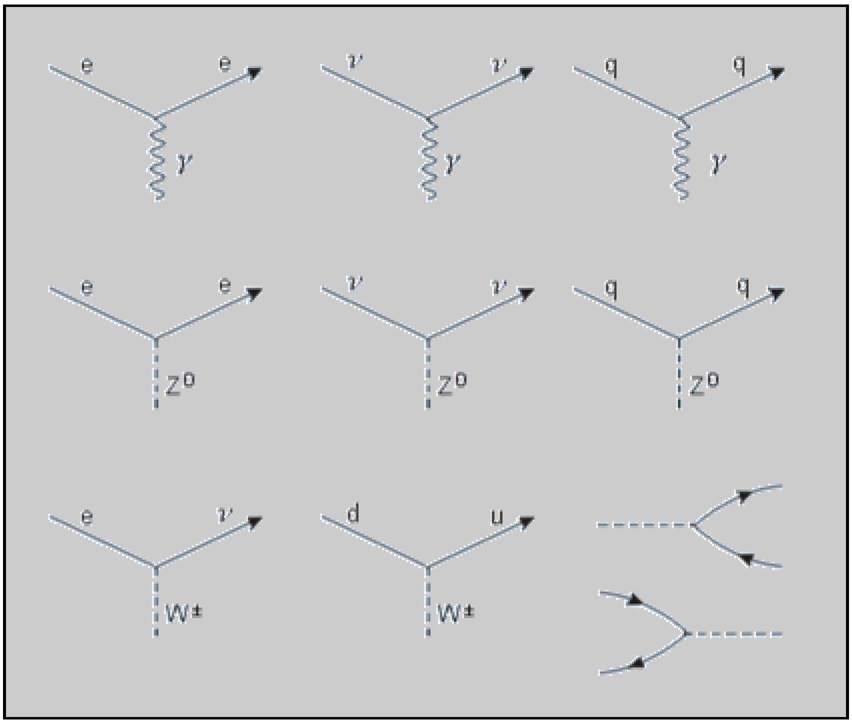
## Feynmanovy diagramy

Základní diagramy se skládají z leptonové či kvarkové linie, vrcholu a linie intermediální částice $W^+$, $W^-$ nebo $Z^0$. Na rozdíl od elektromagnetické interakce máme diagramy dvou typů. První je podobný jako v elektromagnetické interakci. Částice $Z^0$ neodnáší žádný elektrický náboj (hovoříme o tzv. *neutrálních tocích*). Částice kvarkové či leptonové linie pokračuje za vrcholem.

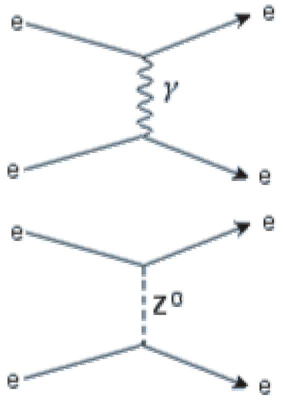
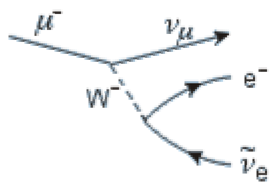
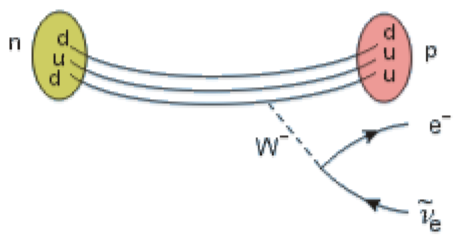
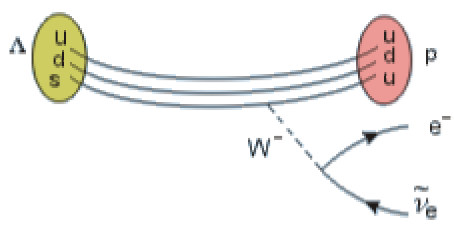
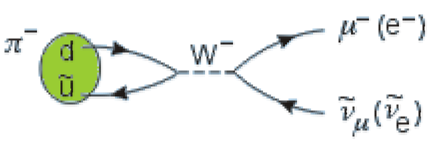
Jiná situace ale nastane, je-li intermediální částicí W+ nebo W-. Tyto částice přináší do či odnáší z vrcholu elektrický náboj. Z hlediska slabé interakce jde sice pořád o jednu částici (***SU*****(2)** symetrie), ale z hlediska elektromagnetické interakce se horní částice izodubletu (dvojice částic se stejným slabým nábojem) stává dolní či naopak

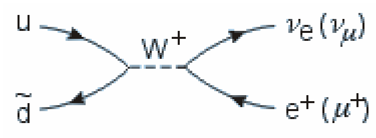



Vhodnou deformací těchto tří základních diagramů již v prvním řádu dostáváme značné množství možností. Povšimněte si, že z hlediska slabé interakce se elektron a jeho neutrino (nebo kvark *d* a *u*) chovají v nabitých tocích jako jediná částice. V následujících diagramech je jen část z mnoha možností diagramů prvního řádu:



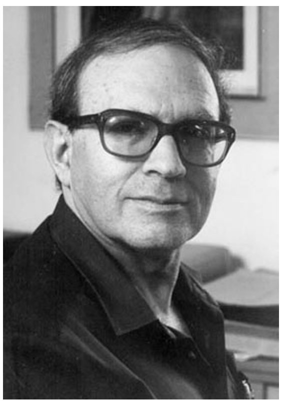
## Typické slabé procesy

| | |
|---|---|
|  | Coulombův zákon. Druhý kanál reakce je oprava k elektrodynamice způsobená slabou interakcí. Elektron s elektronem interagují také slabě pomocí částice $Z^0$. |
|  | Rozpad mionu. $\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ |
|  | Beta rozpad neutronu. $\mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{p}^+ + \mathbf{e}^- + \bar{\nu}_e$ |
|  | Slabý rozpad Λ hyperonu. $\Lambda \longrightarrow \mathbf{p}^+ + \mathbf{e}^- + \bar{\nu}_e$ |
|  | Rozpad $\pi^+$ a $\pi^-$ mezonů: Pozorován v produktech interakce kosmického záření s horními vrstvami atmosféry. Vede na $e^+, e^-, \mu^+, \mu^-$ a elektronová a mionová neutrina. |

<table>
<tr><td></td><td>Objev částic $W^{+/-}$.<br>CERN (1983). Proton antiprotonový svazek. Každý svazek měl energii 270 GeV. Nabité proudy.</td></tr>
<tr><td></td><td>Objev částice $Z^0$.<br>CERN (1984). Zařízení LEP, neutrální toky. Oba objevy: Carlo Rubbia, Simon van der Meer.</td></tr>
</table>

## 4) Silné interakce

Mladý americký fyzik Murray Gell-Mann si počátkem 60. let minulého století všiml, že úplně všechny fermiony, kterých již v té době bylo známo přes 200 druhů, by šlo popsat s pomocí pouhých dvou kvantových čísel (nábojů), které nazval **vůně** (flavour) a **barva** (color). Gell-Mann zjistil, že kdyby kromě 6 leptonových vůní existovalo ještě dalších 6 vůní hadronových, daly by se všechny hadrony poskládat z pouhých 6 elementárních částic, které nazval **kvarky** (tento název byl s notnou dávkou recese převzat z literárního díla Jamese Joyce).

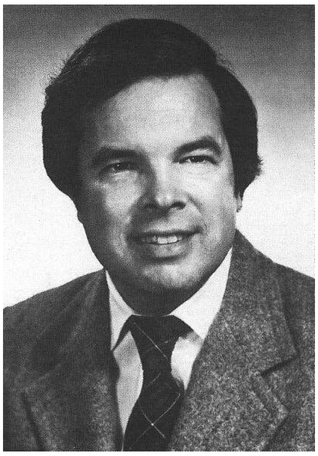

**Murray Gell-Mann (1929)** **Yuval Ne'eman (1925 – 2006)** **George Zweig (1937)**

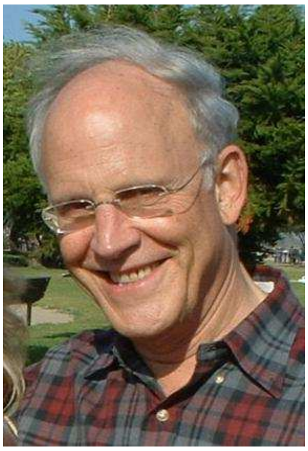
Aby mohlo uvnitř jediného hadronu existovat i vícero kvarků téže vůně, musel Gell-Mann postulovat existenci nového kvantového náboje zvaného barva. K poskládání všech mezonů z kvarků mu stačila teoreticky jediná barva a její antibarva (color), avšak k sestavení všech baryonů potřeboval 3 různé barvy, jejichž vzájemným sečtením vznikaly bezbarvé baryony. Tyto barvy byly tudíž nazvány klasicky R,G,B (red, green, blue). Vůně kvarků získaly exotická jména: *d* – down, *u* – up, *s* – strange, *c* – charm, *b* – beauty, *t* – truth.

Následně se objevily úvahy zda dokonce i leptony a kvarky by nemohly být složeny z pouhých 8 druhů ještě elementárnějších částic nazvaných **preony** (viz UTU).

Na základě obsáhlého experimentálního materiálu, získaného převážně v 50. a 60. letech při hledání nových elementárních částic, byly vypozorovány výrazné **symetrie** ve vlastnostech elementáních částic, které v r.1964 vyústily zformulováním **kvarkového modelu** hadronů. Hlavní obtíž kvarkové hypothézy však tkvěla v tom, že žádné volné částice s vlastnostmi kvarků nebyly dlouho nikdy pozorovány. Kvarky by tedy musely být v nukleonech **velmi silně vázány**.
Koncem 60. let byl kvarkový model dopodpořen výsledky experimentů s rozptylem vysokoenergetických elektronů na nukleonech (hluboce nepružný rozptyl) ukazujících na to, že při takovém "tvrdém ostřelování" se nukleon nechová jako kompaktní částice, ale jako shluk několika (tří) víceméně volných rozptylových center - tzv. **partonů**. Přitom kvantová čísla partonů (náboj, spin, izospin) odpovídala hodnotám očekávaným u kvarků. Přímému ztotožnění kvarků a partonů však bránil rozpor: na jedné straně se při experimentech partony v nukleonech chovaly jako volné, na druhé straně kvarky jsou tak silně vázány, že je nelze z nukleonů uvolnit.

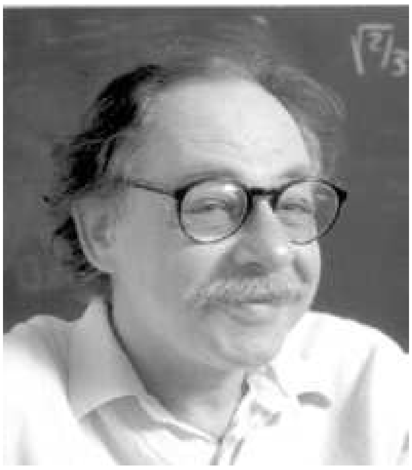
## Kvantová chromodynamika


**Kenneth Geddes Wilson (1936)**


**David Jonathan Gross (1941)**


**Frank Anthony Wilczek (1951)**


**Hugh David Politzer (1949)**


**Sidney Richard Coleman (1937 – 2007)**

Výrazného pokroku v chápání vlastností silné interakce bylo dosaženo v 70. letech, kdy byla zformulována a rozvinuta tzv. **kvantová chromodynamika** (QCD, řecky chromos = barva) jako teorie silné interakce. Tato teorie je vybudována podobným způsobem jako kvantová elektrodynamika (QED), avšak je založena na neabelovských kalibračních symetriích fyzikálně souvisejících s barvou kvarků. Význačnou vlastností QCD je **asymptotická volnost**: efektivní vazbová konstanta vzájemného působení mezi kvarky se blíží nule při zmenšování vzdáleností, ale prudce roste se zvětšováním vzdálenosti. Asymptotická volnost umožňuje přirozeně pochopit zdánlivě neslučitelné vlastnosti kvarků jakožto partonů: kvarky na malých vzdálenostech uvnitř nukleonů téměř neinteragují, zatímco z hlediska větších vzdáleností jsou vázány velmi silně. S asymptotickou volností tak těsně souvisí hypotéza **dokonalého** "**uvěznění**" **kvarků**, podle níž kvarky nemohou existovat jako volné částice (nekonečně velká energie potřebná na uvolnění), ale pouze vázané v hadronech. Silná jaderná interakce není schopna vzájemně rozlišit kvarky téže barvy.

**Symetrie interakce:** Kvarky jsou fermiony, proto by se neměly nacházet podle Pauliho vylučovacího principu ve stejném kvantovém stavu. Tomu zdánlivě odporuje již existence neutronu (*ddu*), kde jsou dva kvarky *d* v témže stavu. V částici $\Omega^-$ (*sss*) jsou dokonce tři kvarky *s* ve stejném stavu. Tento problém se řeší zavedením další kvantové vlastnosti, která odlišuje jednotlivé kvarky v částici - *barvy*. Každý kvark se v přírodě musí vyskytovat ve třech navzájem různých provedeních (barvách), na které je citlivá silná interakce. V matematice tuto symetrii označujeme ***SU*(3)** symetrie (barevná symetrie) a je na ní postavena teorie silné interakce. ***SU*(3)** je anglická zkratka pro Special Unitary - symetrie je popsána komplexními maticemi, které převádí mezi sebou tři barevné náboje silné interakce. Tyto matice jsou unitární (Unitary) s determinantem rovným jedné (Special). Unitární matice jsou matice, které se nezmění, překlopíme-li je kolem diagonály a komplexně sdružíme. V matematice reprezentují unitární matice dvě třídy operací: rotace (det = +1) a zrcadlení (det = -1).

Máme-li tedy např. matici, kde jednotlivé prvky označují vůně a jejich indexy označují barvy, pak zatímco slabá interakce permutuje částice v každém jednom sloupci, silná interakce naopak permutuje částice v řádcích a elektromagnetická zas částice na diagonálách.

$$\begin{pmatrix} d_R & s_G & b_B \\ u_R & c_G & t_B \end{pmatrix} . \qquad (8.508)$$

(Libovolnou záměnou jednotlivých prvků v řádcích ( 8.508 ) dojdeme k obecně jinému uspořádání, které je však z hlediska silné interakce nerozeznatelné od původního – dává stále celkově bezbarvou permutaci).

Vzájemně permutovatelné kvarky pro silnou interakci tedy tvoří ***SU*(3)** izotriplety z hlediska nového kvantového čísla (náboje) zvaného **barva**.

Transformace ***SU*(3)** se realizují s pomocí komplexních unitárních unimodulárních matic působících na vlnové funkce částic izotripletu (označme si je pro názornost *a*, *b*, *c*):

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{pmatrix} . \qquad (\ 8.509\ )$$

čímž dostáváme v teorii celkem 18 volných parametrů.
Z požadavku unitarity

$$\boldsymbol{\lambda}^{\dagger}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1} \qquad (\ 8.510\ )$$

dostáváme celkem 9 vazebních podmínek a z požadavku unimodularity

$$\det \boldsymbol{\lambda} = 1 \qquad (\ 8.511\ )$$

další jednu vazbu.
V teorii tak zbývá 8 volných parametrů, které odpovídají osmi skalárním polím a jim příslušejícím bosonům.
Tyto skalární bosony se nazývají **gluony** a označují *g* s příslušným barevným indexem.

Silná interakce mezi kvarky je tedy v QCD zprostředkována vektorovým kalibračním polem, jehož kvanta s nulovou klidovou hmotností – **gluony**, zde hrají podobnou úlohu jako fotony v QED. Na rozdíl od kvantové elektrodynamiky mají gluony "**barevný**" **náboj** a interagují samy se sebou (mohou se navzájem "emitovat"); v důsledku této nelinearity má vakuum v QCD složitou strukturu, zvláště v oblasti "infračervených" (nízkoenergetických) vakuových fluktuací.

## Základní informace

| | |
|---|---|
| Působení | výběrové, na $Q_c \neq 0$ (kvarky, gluony) |
| Dosah | konečný, $10^{-15}$ m |
| Symetrie | SU(3) |
| IM částice | 8 gluonů |

- **Působení interakce:** Silná interakce je *výběrová interakce*. Působí jen na částice s nenulovým nábojem silné interakce $Q_c$, tzv. barevným nábojem (chromos). Barvu mají kvarky a gluony. Rozeznáváme tři barvy. Výsledný svět je bezbarvý.
- **Dosah interakce:** *Konečný*, interakce silná má krátký dosah, cca $10^{-15}$ m.

## Trocha historie

**Hideki Yukawa (1907-1981)**

Silná interakce je v pořadí třetí interakcí popisovanou kvantovou teorií pole. Jde o interakci, která drží pohromadě nukleony v atomovém jádře a současně i kvarky tvořící jednotlivé nukleony. První jednoduchou teorii silné interakce vytvořil Hideki Yukawa v roce 1934.

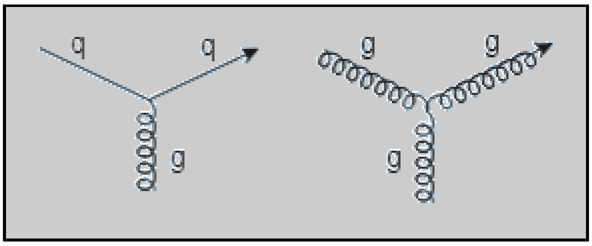
Z dosahu interakce vypočítal hmotnost intermediálních částic a usoudil, že při silné interakci si neutrony a protony v jádře mezi sebou

vyměňují mezony. Dnes víme, že jde o podobnou situaci, jako v elektromagnetické interakci. Interagují-li mezi sebou dva bodové náboje, vyměňují si fotony a síla ubývá jako $1/r^2$. Elektromagnetická interakce může ovlivňovat ale i složitější komplexy, byť jsou navenek neutrální - jde o dipól-dipólovou interakci, dipól-kvadrupólovou interakci, atd., ve kterých silové působení ubývá s vyšší mocninou $r$ (tzv. Van der Waalsovy síly). U silné interakce představuje základní úroveň výměna gluonů mezi kvarky tvořícími částici (například neutron nebo proton). Vzájemná interakce neutronu s protonem je potom na úrovni vzájemné interakce větších komplexů.
Kvarky se skládají do částic tak, aby výsledek byl bezbarvý. První možností je kombinace kvark-antikvark (například červená-antičervená). To jsou pro nás již známé mezony. Druhou možností je složení tří kvarků různých základních barev, které dohromady dají bílou - jde o baryony.

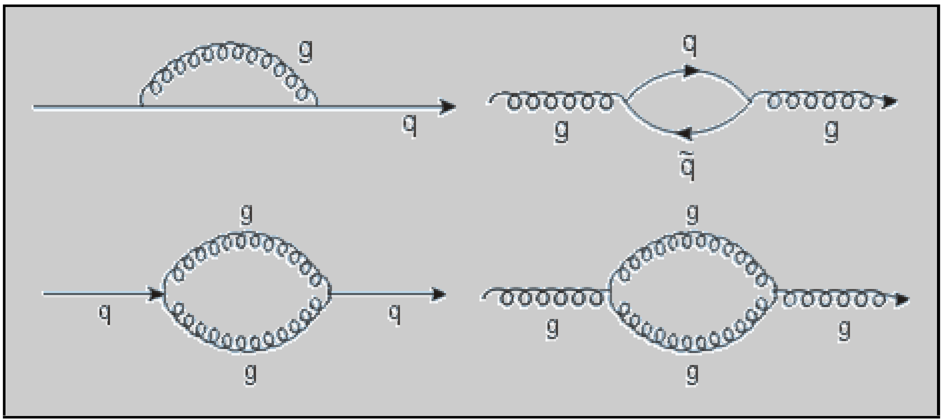
Jde o výběrovou interakci, která působí jen na částice složené z kvarků, tj. na hadrony (mezony a baryony). V okolí kvarků vytvářejí gluony těžké „gluonové kožichy", které jsou hmotnější než samotné kvarky. Například *d* kvark má hmotnost 4 MeV a jeho gluonový kožich cca 300 MeV. Na rozdíl od ostatních interakcí jsou v silné interakci samy intermediální částice nositeli barevného náboje (barvy). To neznáme u elektromagnetické interakce: foton jako intermediální částice elektromagnetické interakce sám o sobě nenese elektrický náboj. Důsledkem tohoto faktu je tzv. antistínění barevného náboje. Čím blíže kvarku se nacházíme, tím je jeho barevný náboj menší. Proto kvarky na velmi malých vzdálenostech neinteragují a síla interakce roste se zvětšující se vzdáleností kvarků (tzv. asymptotická svoboda kvarků na malých vzdálenostech). Proto se kvarky nevyskytují nikdy o samotě. V počátečních fázích vývoje Vesmíru byla průměrná vzdálenost mezi částicemi menší než $10^{-15}$ m a kvarky netvořily mezony a baryony a vyplňovaly Vesmír jako volné částice – **kvark-gluonové plazma**. Teprve když Vesmír expanzí získal větší rozměry, začaly vznikat hadrony.

## Feynmanovy diagramy

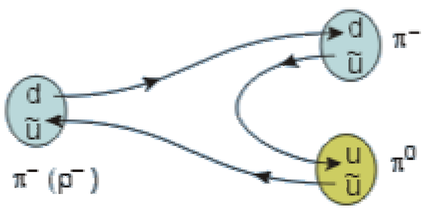
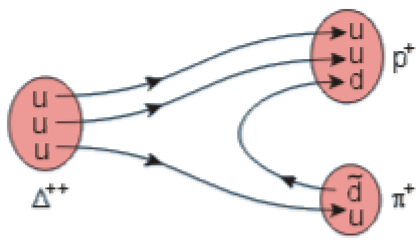
Stejně jako u elektromagnetické interakce je základním diagramem linie interagující částice (kvarku) s intermediální částicí (gluonem) vycházející z vrcholu. U silné interakce je ale možná i silná interakce gluonů samotných (mají barevný náboj), je tedy možná gluon - gluonová interakce z druhého diagramu.



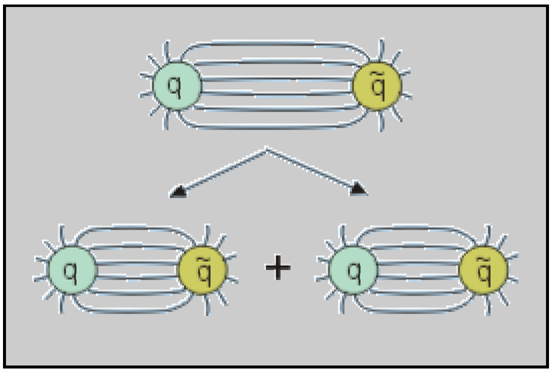

Podobně jako v elektromagnetické interakci je možné, aby letící kvark vyslal a chytil intermediální částici (zde gluon), nebo aby se letící částice (zde gluon) rozštěpila na pár částice - antičástice (zde kvark antikvark). Navíc je u silné interakce možné, aby se letící kvark nebo gluon změnily na pár gluonů.



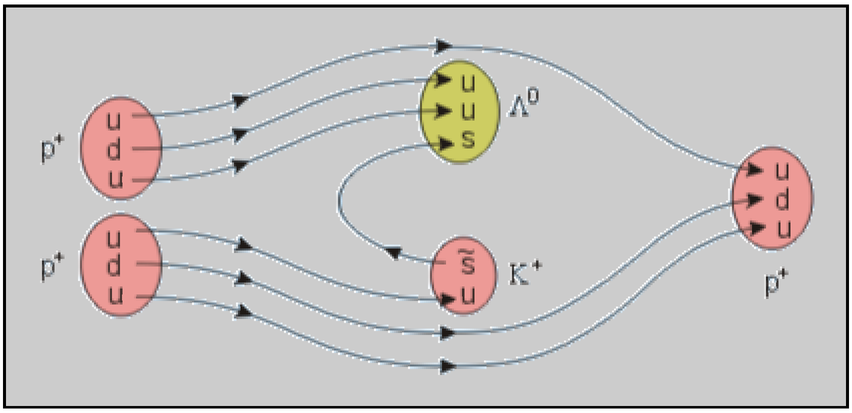

U diagramů silné interakce nebývá zvykem zakreslovat všechny vyslané a chycené gluony. Jako příklad uveďme diagram rozpadu mezonu na dva mezony a silný rozpad částice $\Delta^{++}$.

| | |
|---|---|
|   | Rozpad mezonu na dva mezony.<br>Podobně jako se dva kousky rozděleného magnetu chovají zase jako magnety, tak se rozdělený mezon chová jako dva mezony. Samotný kvark nelze z mezonu vytrhnout. |
|   | $\Delta^{++} \rightarrow p^{+} + \pi^{+}$<br>Silný rozpad Δ baryonu na proton a pion. Doba života Δ baryonu je méně jak $10^{-23}$ s. Takové částice nazýváme rezonance. Silné rozpady jsou velmi rychlé. |

Dělení mezonu je podobné dělení magnetu na dvě části. Nikdy nezískáme samotný kvark, ale po rozdělení získáme opět dvojici mezonů. Čáry mezi kvarky představují silokřivky gluonového pole. Prostor mezi kvarky se nazývá *gluonová nit*.

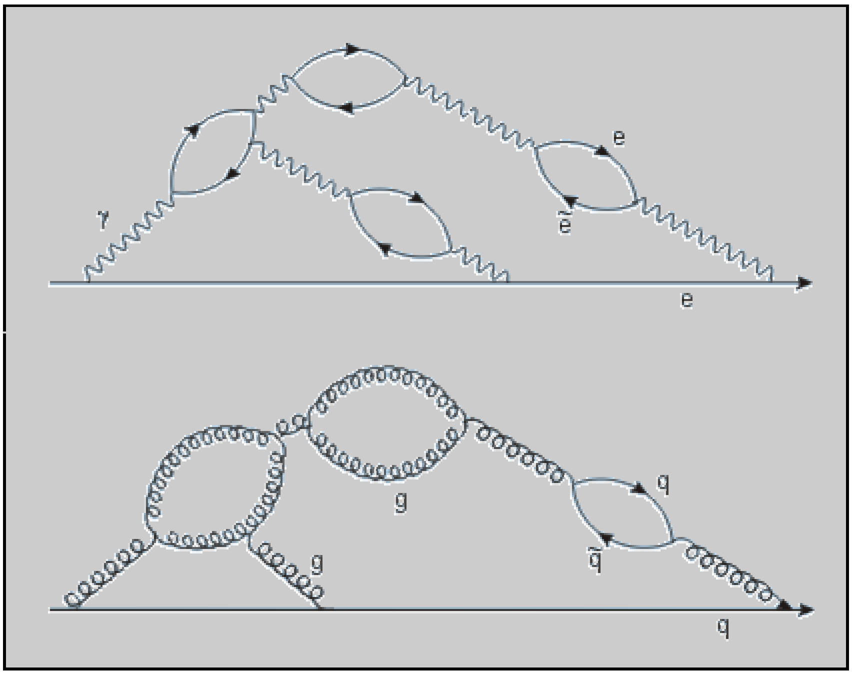


A na závěr ještě jeden trochu složitější diagram. Jde o silnou srážku dvou urychlených protonů $p^+ + p^+ \rightarrow \Lambda^0 + K^+ + p^+$:



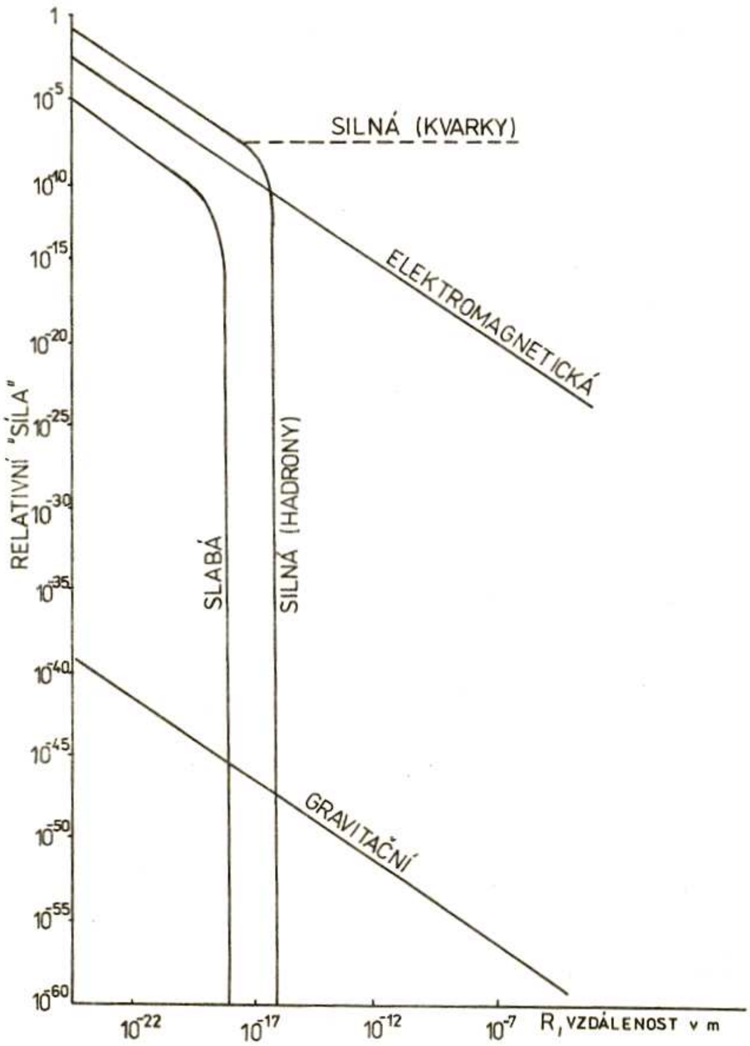

## Porovnání s elektromagnetickou interakcí

Základní odlišností je to, že intermediální částice silné interakce mají barevný náboj (u elektromagnetické interakce nenesou fotony elektrický náboj). Odsud plynou základní rozdíly.

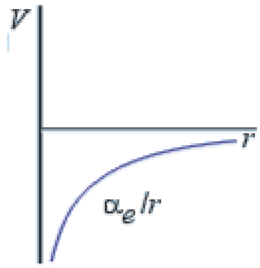
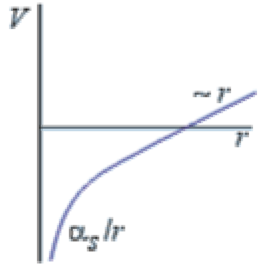
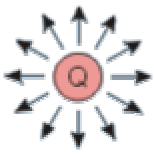


Volně letící elektron vysílá fotony, které se dělí na elektron pozitronové páry. Důsledkem je, že kolem letícího elektronu je oblak virtuálních elektron pozitronových párů, které efektivně *stíní* náboj elektronu. Při vysokých energiích se částice dostávají blíže elektronu a pociťují vyšší elektrický náboj než z větší vzdálenosti. U letícího kvarku je situace jiná. Vytváří kolem sebe kromě oblaku kvark antikvarkových párů mohutný *gluonový kožich*. Tyto gluony jsou nositeli barevného náboje, proto dochází k *antistínění* kvarku. Čím blíže se ke kvarku dostaneme, tím menší barevný náboj budeme pociťovat. Vzdálené kvarky velmi silně interagují a nelze je proto od sebe odtrhnout.

Obr. 8.2



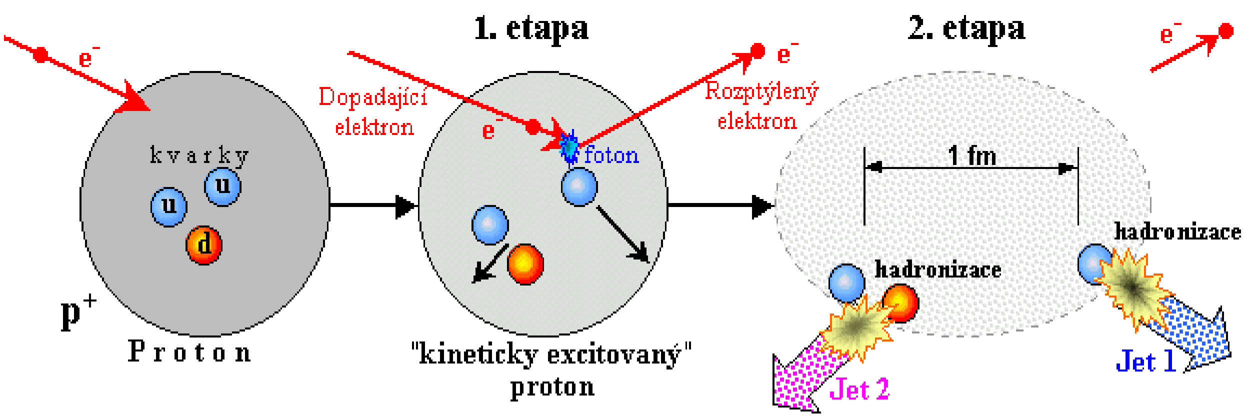

Průběh velikosti („síly“) interakcí v závislosti na vzdálenosti. Silná interakce mezi hadrony prudce klesá při vzdálenosti $R \geq 10^{-15}$ m. Působení této interakce mezi kvarky má však jiný charakter (přerušovaná čára).

| | |
|---|---|
| Foton nenese elektrický náboj. | Gluon nese barevný náboj. |
| Elektricky nabité částice jsou *stíněné* elektron pozitronovými páry. | Kvarky jsou *antistíněné* svými gluonovými kožichy. |
| Potenciál interakce je v celém průběhu Coulombický.<br> | Potenciál interakce je na malých vzdálenostech Coulombický, na velkých se chová jako potenciál homogenního pole.<br> |
| Nejjednodušší elektrické pole (bodový náboj):<br> | Nejjednodušší silné pole (dvojice kvark antikvark - mezon):<br><br>Těsně u kvarků je pole podobné Coulombickému. Ve větších vzdálenostech je homogenní a vytváří tzv. *gluonovou strunu*. |
| Tenzor pole: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ | Tenzor pole: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g\,(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)$<br>Navíc je zde nekomutující nelineární člen představující interakci gluonu s gluonem. |
| Abelova (komutující) $U(1)_{loc}$ teorie. | Neabelova (nekomutující) SU(3) teorie. |

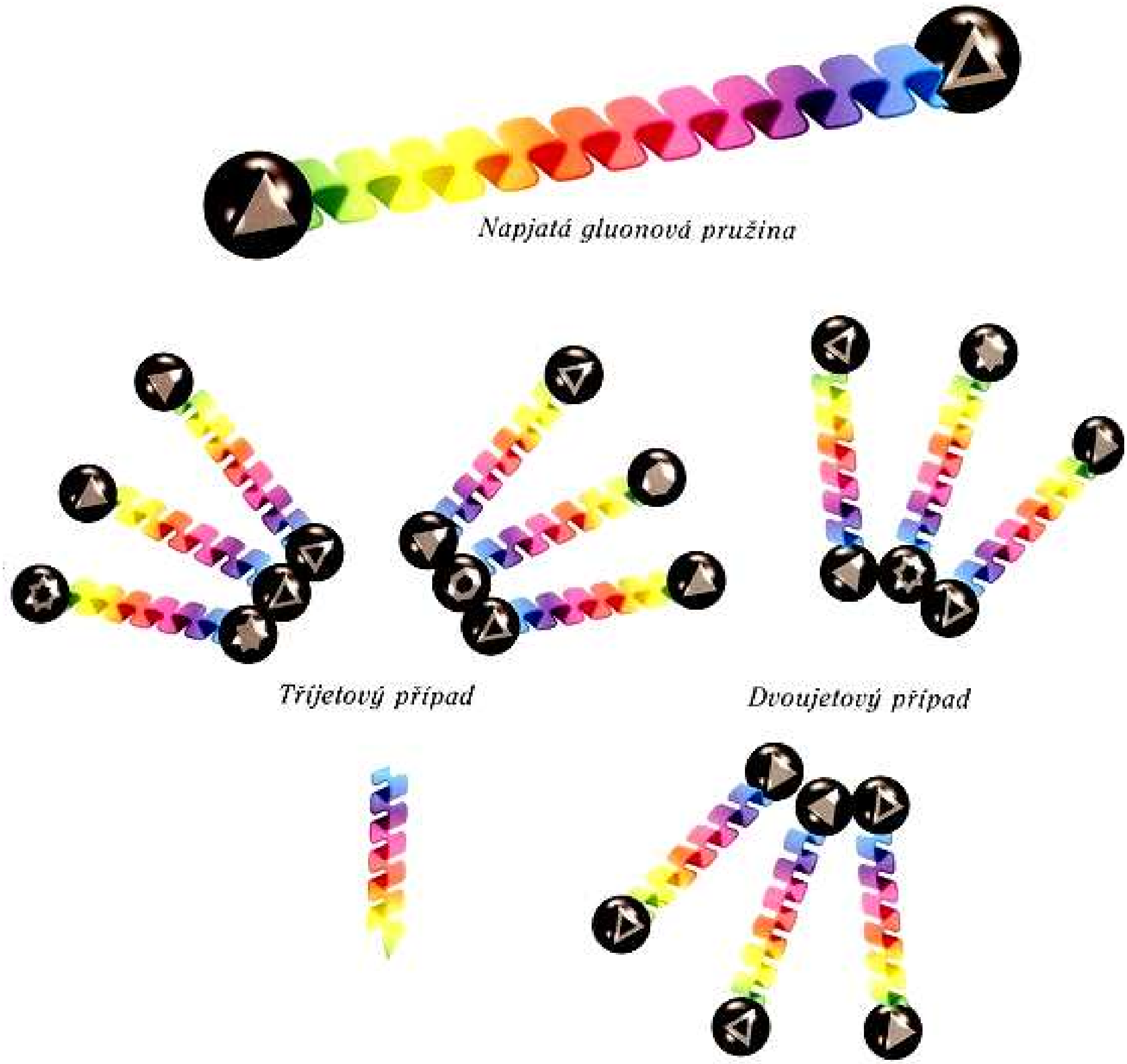
## Jety - stopy po hadronizovaných kvarcích

Za velmi vysokých energií při tvrdých a hluboce nepružných srážkách elektronů s protony vzniká řada sekundárních částic, které vylétají **neizotropně** v jakýchsi směrovaných "výtryscích" - **jetech**. Detailní analýza úhlového rozdělení a energie částic v jetech ukázala následující mechanismus interakce, který lze rozdělit do dvou etap: Během 1.etapy vysokoenergetický elektron při interakci s protonem předá část své kinetické energie jednomu z kvarků, který se po tomto rozptylu po určitou kratičkou dobu pohybuje prakticky volně (asymptotická volnost) uvnitř protonu; podobně i zbytek protonu tvořený dvěma zbývajícími kvarky. Nedojde však k uvolnění kvarků z protonu. Jakmile vzdálenost mezi vyzářeným kvarkem a zbytkem protonu přesáhne zhruba 1fm (=$10^{-15}$ m), nastává 2. etapa: síly mezi nimi začnou prudce narůstat a v kvark-gluonovém poli dojde k produkci kvarků a antikvarků, které se zformují do mesonů a baryonů - dojde k tzv. „**hadronizaci kvark-gluonového plasmatu**“. Výsledkem je vyzáření dvou úhlově kolimovaných spršek částic - **jetů**, které vylétají přibližně ve směrech letu kvarku a zbytku protonu v první etapě. Tyto jety jsou vlastně **stopami po kvarcích**. Tento mechanismus je zjednodušeně znázorněn na obrázku 8.3 a 8.4.

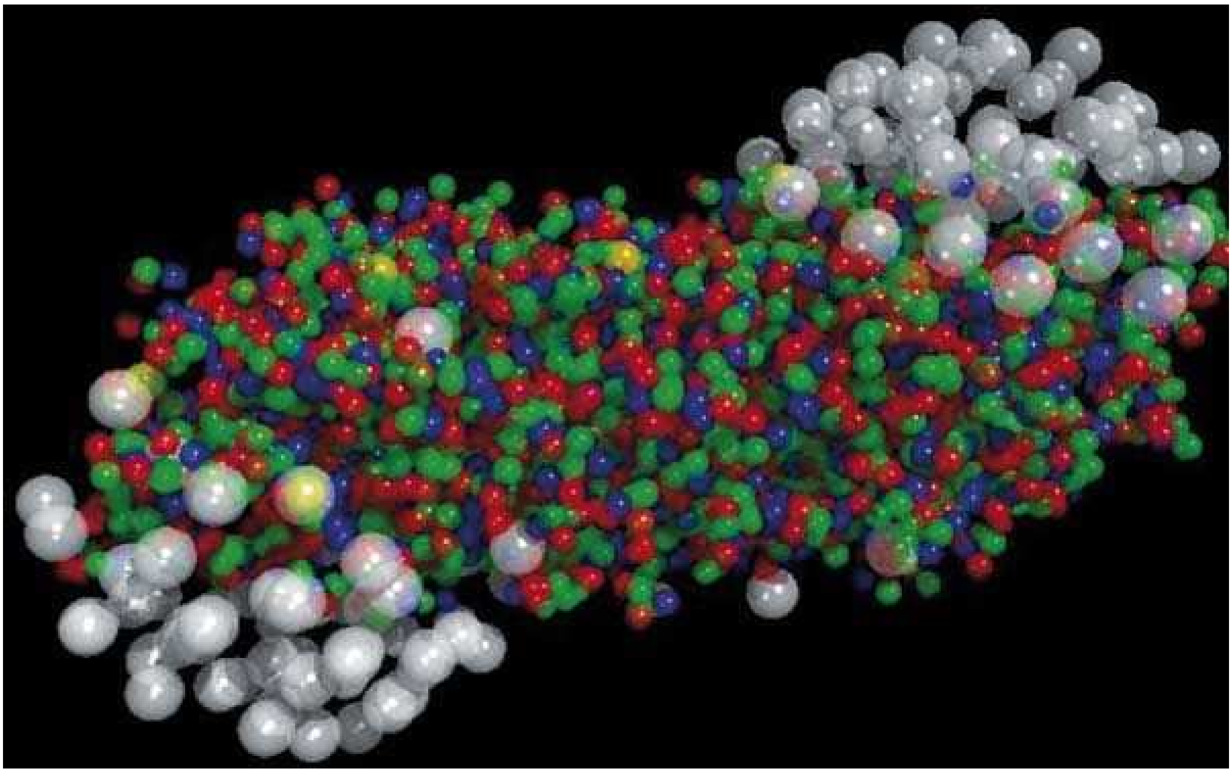
Obr. 8.3



Obr. 8.4



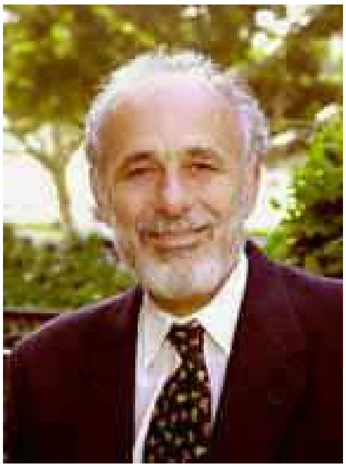

**Kvarkový posilovač svalů** *Silovou vazbu mezi kvarky můžeme přirovnat k velmi silným pružinám. Když leží posilovač svalů volně na stole, můžeme jeho držadly snadno pohybovat. Teprve když pružiny pořádně natáhneme, cítíme odpor. S kvarky je to podobné – čím jsou od sebe dál, tím silnější je jejich vazba. Jestliže pružina získá velké množství energie a natáhne se až za určitou hranici, může prasknout a z uvolněného napětí vzniknou dva proudy kvarků ve směru původní napnuté struny, spojené opět „kousky" struny* (vpravo). *Někdy se kousek gluonové struny „utrhne" a vznikne další sprška částic* (vlevo).
*Tyto spršky z kvarků a gluonů dostaly jméno „jety" a brzy se staly významným nástrojem ke zkoumání jinak neviditelných kvarků uvnitř srážejících se částic. Specifické kombinace jetů a dalších částic jsou poznávacími znaky inerakcí nových částic.*



**Obr. 8.5: počítačově vytvořený model kvark – gluonového plazmatu**

V kvantové chromodynamice se vyskytuje problém narušení kombinace nábojové symetrie a parity v teorii kvarků, který se řeší zavedením částic zvaných **axiony**.

Axiony úzce souvisí s narušením CP symetrie v přírodě. Jde o narušení symetrie fyzikálních dějů, pokud zaměníme fyzikální zařízení za jeho zrcadlový obraz (P symetrie) a všechny částice za antičástice (C symetrie). Narušení CP symetrie bylo pozorováno při rozpadu kaonů již v roce 1964 J. Croninem a V. Fitchem. Šlo o narušení CP symetrie při slabé interakci a od té doby bylo pozorováno mnohokrát. Standardní model ovšem předpovídá, že by narušení CP symetrie mělo být pozorovatelné i při silné interakci. V tomto sektoru však nikdy potvrzeno nebylo. V roce 1977 navrhli Roberto Peccei a Helen Quinn ze Stanfordské univerzity nový druh fyzikální symetrie, která vysvětluje negativní výsledek pokusů s narušením CP symetrie v silné interakci. S touto symetrií je spojena existence částice, kterou dnes nazýváme axion.



**Roberto D. Peccei (1942)**

**Helen Rhoda Quinn (1943)**

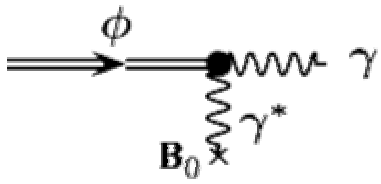
Axion by měl mít nulový spin a interagovat kromě gravitační interakce jen slabou interakcí. Jeho hmotnost se odhaduje na přibližně $10^{-5}$ eV. Velké množství axionů (tzv. reliktních axionů) mělo vznikat těsně po Velkém třesku. Jejich zachycení by znamenalo otevření nového okna do minulosti našeho vesmíru. Axiony by ale měly vznikat i v nitru hvězd při rozptylu vysoce energetických fotonů na nabitých částicích (tzv. Primakovův jev).

**Evgenii Maximovič Primakov (1929)**

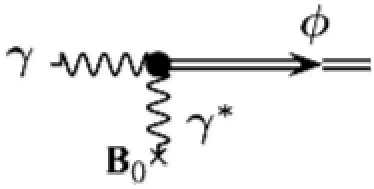
Axiony jsou žhavými kandidáty na záhadné částice temné hmoty, která tvoří 23% hmoty a energie ve vesmíru. Axiony jsou v silném magnetickém poli $\mathbf{B}_0$ schopny dvoufotonové interakce, která může být popsána dvěma typy hustoty Lagrangeovy funkce (v jednotkách $c$ = 1)

$$L_1 = g\,\Phi\,(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \qquad (8.512)$$

$L_2 = g\,\Phi\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})$ , ( 8.513 )




V obou případech vystupuje axionové pole $\Phi$ lineárně (jde o jeden axion) a elektromagnetické pole kvadraticky (jde o dva fotony). Vazebná konstanta interakce je označena symbolem $g$. V prvním případě je elektromagnetická část ($\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2$) skalární a pole $\Phi$ proto musí být také skalární (výsledná Lagrangeova funkce musí být skalární, jinak by chování polí záviselo na volbě souřadnicového systému). Takový axion interaguje s fotony, jejichž polarizace je kolmá k externímu magnetickému poli $\mathbf{B}_0$. V druhém typu interakce je elektromagnetická část interakce $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ pseudoskalární a proto musí být axionové pole také pseudoskalární. Axion v tomto případě interaguje s fotony, jejichž polarizace je rovnoběžná s externím magnetickým polem $\mathbf{B}_0$. Možný je samozřejmě i inverzní proces, ve kterém se foton v přítomnosti silného magnetického pole přemění pomocí virtuálního fotonu na axion:




Axiony pravděpodobně vznikaly v období krátce po Velkém třesku (tzv. reliktní axiony). Dnes by jejich nejbližším zdrojem mělo být nitro Slunce, kde se část vysoce energetických fotonů při rozptylu na elektrických nábojích (Primakovův jev) přeměňuje na axiony. Jejich počet by měl být roven počtu slunečních neutrin. Axiony by také mohly vznikat z fotonů v extrémních magnetických polích v okolí neutronových hvězd. Existuje řada experimentů, hledajících reliktní, sluneční i další axiony. První ze slunečních experimentů BFRT byl prováděn v Brookhavenské národní laboratoři, axiony hledají dále experimenty NOMAD, SOLAR, COSME. K nejvýznamnějším experimentům současné doby patří CAST, PVLAS, FLASH. Další experiment se od roku 1999 připravuje v LLNL.

## Experiment CAST (Cern Axion Solar Telescope)

Velmi zajímavý projekt na sledování slunečních axionů je umístěn od roku 2003 v CERNu. Jde o dalekohled, který by měl v silném magnetickém poli konvertovat axiony z nitra Slunce na fotony RTG záření. Většina dalekohledu vznikla z nepotřebných dílů jiných experimentů. Jako magnet byl využit již nepotřebný prototyp magnetu pro LHC. Je dlouhý 10 metrů a dosahuje magnetické indukce 9 T. Pro detekci vznikajících RTG fotonů slouží tři detektory, část detekční soustavy byla původně postavena pro vesmírný RTG dalekohled ABRIXAS. Dalekohled je umístěn na kolejnici, která umožňuje pohyb ve vodorovném směru ± 40°, naklánění ve výšce je možné jen v rozsahu ± 8°. Z toho důvodu může dalekohled pozorovat Slunce jen při východu a poté až při západu Slunce. Celková pozorovací doba je tři hodiny denně. Po zbytek času se měří RTG pozadí. Dosud nebyl detekován žádný přebytek RTG záření oproti pozadí (v době, kdy je dalekohled namířen na Slunce). Detektor doposud hledal axiony do hmotnosti 0,02 eV. V současné době byla citlivost dalekohledu výrazně zvýšena, magnet byl vyplněn héliem o nízké teplotě (1,8 K) a dalekohled by měl detekovat axiony až do hmotnosti 0,8 eV. Měření v nové konfiguraci budou probíhat po celý rok 2007. Je možné, že axiony nejsou detekovány proto, že ve slunečním nitru je k jejich vytvoření potřebná vyšší energie fotonů, než je k dispozici, anebo proto, že jsou v nitru Slunce nějakými procesy opět pohlcovány.

**Obr. 8.6: CAST – CERN Axion Solar Telescope.**

## Experiment PVLAS (Polarization of Vacuum with LASer)

PVLAS je zatím bezkonkurenčně nejznámějším experimentem díky pozitivní detekci stočení roviny polarizovaného světla ve vakuu. Jde o italský experiment umístěný v Národní laboratoři v Legnaru, která je součástí INFN (Istituto Nazionale di Fisica Nucleare). V experimentu bylo použito lineárně polarizované světlo o vlnové délce 1 064 nm generované laserem. Světelný puls procházel metrovým magnetem o indukci 5 T, celý prostor byl chlazen kapalným héliem na 2,6 K. Za pomoci rezonátoru byla dráha světla uměle prodloužena. E. Zavattini se spolupracovníky z 44 000 průchodů světla zjistili, že světlo získalo slabě eliptickou polarizaci a vektor polarizace se stočil za jeden průchod (tedy na metrové vzdálenosti) o úhel $(3{,}9 \pm 0{,}5)\times 10^{-12}$ rad.

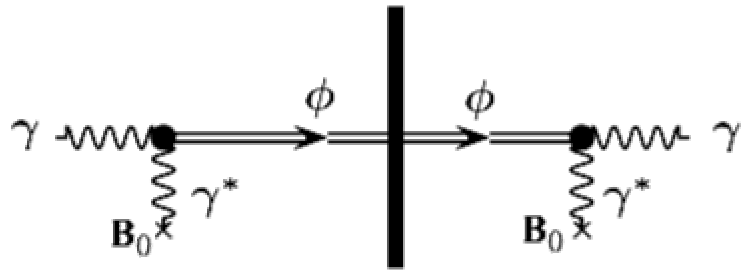
**Emilio Zavattini (1927 – 2007)**

Nejpřirozenějším vysvětlením je, že se část fotonů s polarizací rovnoběžnou s externím polem $\mathbf{B}_0$ v silném magnetickém poli přeměnila na axiony nebo jim podobné částice a tím došlo ke stočení polarizační roviny. Situace odpovídá interakci s Lagrangeovou funkcí $L_2$ a částice zodpovědné za stočení roviny polarizace by měly být pseudoskaláry odnášející nadbytečný moment hybnosti. Zda jde skutečně o axiony nebo jiné částice musí ukázat až další experimenty. Předpovídaná hmotnost $m$ pseudoskalárů je v rozmezí 1÷1,5 meV a vazební konstanta $g$ vychází v rozmezí $(1{,}7\div5)\times10^{-6}$ GeV$^{-1}$.

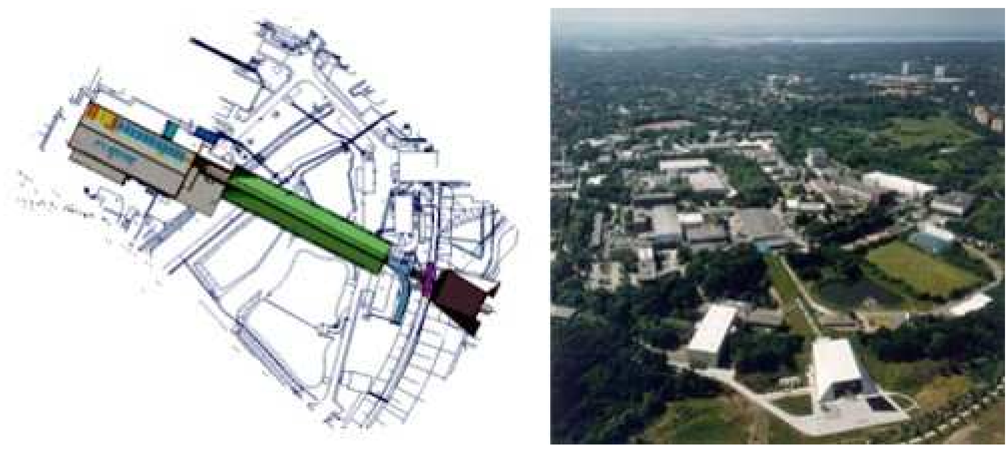
**Obr. 8.7: PVLAS: Nalevo celkový pohled na experiment, napravo je žulová věž o výšce 7 metrů, ve které je umístěn kryostat (chladící zařízení) a v horní části optická lavice.**

## Experiment FLASH (Free-electron LASer in Hamburg)

Experiment FLASH připravují v DESY v německém Hamburgu. Myšlenka experimentu je velmi prostá a měla by ověřit nezávisle anomálii měřenou v experimentu PVLAS. Část fotonů z výkonného laditelného laseru na volných elektronech bude konvertována v silném magnetickém poli na axiony. Tyto axiony snadno projdou neprůhlednou překážkou (interagují jen slabě). Za stěnou budou (opět v silném magnetickém poli) některé axiony přeměněny zpět na fotony a svazek laseru částečně obnoven. Zdánlivě by tak měla část světla projít neprůhlednou deskou.




V experimentu se počítá s laserem na volných elektronech laboratoře DESY, který je laditelný od 10 eV (EUV obor) po 200 eV (měkké RTG). Za magnety bude použito 12 elektrických dipólových magnetů, každý má indukci 2,24 T a délku 1,029 m. Šest magnetů bude umístěno před překážkou (zajistí konverzi světla na axiony) a šest za překážkou (zajistí zpětnou konverzi axionů na fotony). Laser spolu s magnety se ovšem nevejde do laboratoří DESY a proto je experiment stavěn před budovou. Se zprovozněním se počítá do konce roku 2006 a pokud bude axion objeven, jeho detailní průzkum by měl probíhat na podzim 2007. Autoři považují experiment za natolik důležitý, že původní název VUV-FEL (Vacuum Ultraviolet Free-Electron Laser) byl 16. 4. 2006 změněn na FLASH (Free-electron LASer in Hamburg). Pokud bude existence axionů potvrzena, bude to znamenat veliký krok kupředu v chápání vakua.

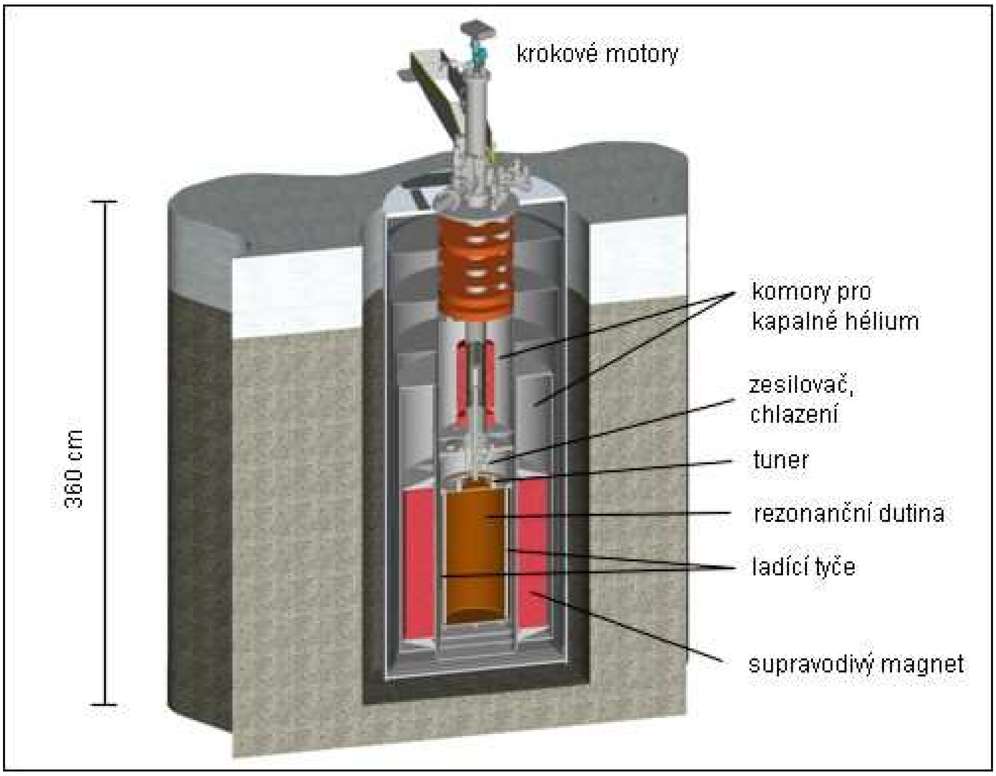


**Obr. 8.8: Experiment FLASH bude postaven před vchodem do budovy DESY.**

## Projekt ADMX

Axionový experiment v LLNL započal v roce 1995. Obdobně jako ostatní experimenty využívá faktu, že v silném magnetickém poli by se axiony měly konvertovat na fotony, v případě zařízení ADMX (Axion Dark Matter eXperiment) na mikrovlnné fotony.

Experimentální zařízení se skládá ze supravodivého magnetu o indukci 8 T, který má hmotnost 6 tun. Magnet je navinutý na vnějšku mědí potaženého ocelového válce. V nitru tohoto válce je rezonanční dutina s dvěma ladicími tyčemi, kterými lze pohybovat krokovými motory a měnit sledovanou frekvenci. Slabý signál axionů konvertovaných na fotony poté prochází zesilovačem.




**Obr. 8.9: Schéma axionového detektoru.**

## Magnet

Magnet je supravodivá cívka skládající se z 37 700 niobo-titanových závitů. Průměr jádra je 60 cm a délka magnetu 100 cm. Vlastní indukčnost magnetu je 534 H. Pole v ose magnetu dosahuje hodnoty 7,92 T, celková energie magnetického pole činí 15 MJ. Zatím největší uložené magnetické energie bylo dosaženo v Oxford Instruments před pěti lety (27 MJ).

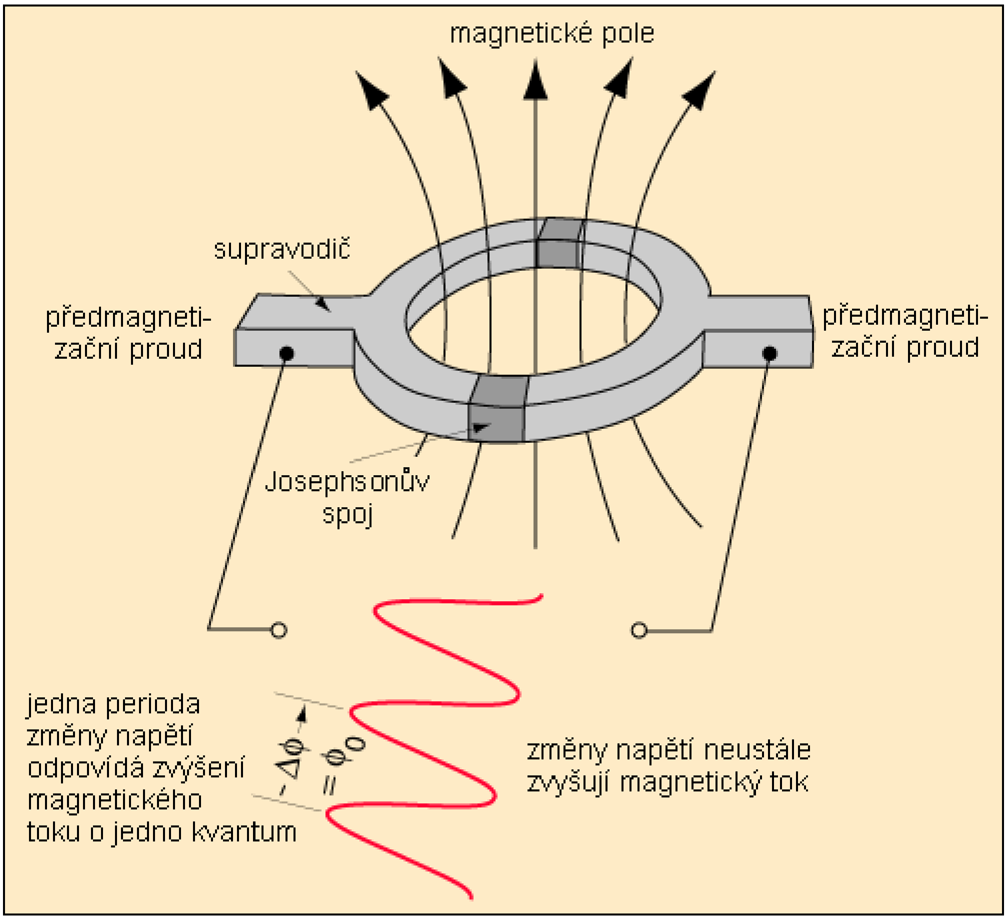
## Rezonanční dutina

Rezonanční dutinu tvoří metr dlouhý válec kruhového průřezu o průměru 50 cm. Je vyroben z oceli a oplátován mědí. Uvnitř jsou dvě pohyblivé ladicí tyče. Elektrické pole v dutině je sledováno sondou spojenou s ultranízkošumovou elektronikou. Axiony se hledají pomalým skenováním dutiny napříč frekvenčním rozsahem měněným ladicími tyčemi. Kovové ladicí tyče zvýší rezonanční frekvenci dutiny, pokud jsou posunuty směrem k centru dutiny. Naopak dielektrické tyče posunuté do centra dutiny frekvenci sníží.

**Obr. 8.10: Vlevo: pohled shora na rezonanční dutinu, jejíž průměr je 50 cm a výška 1 m. Vnitřek dutiny je potažen mědí a obsahuje dvě ladicí tyče. Vpravo: osazování horní části detektoru.**

## Přijímač

Ultranízkošumový přijímač je jádrem celého experimentu. Napěťový signál z mikrovlnné dutiny je přiveden do rezonátoru, který ho převede na magnetický tok detekovatelný SQUID elektronikou. Extrémně tiché zesilovače byly vyrobeny v NRAO v polovině 90. let. Přijímač konvertuje mikrovlnný signál v šířce pásma 50 kHz kolem rezonanční frekvence dutiny nejprve na signál s centrální frekvencí 35 kHz. Elektronika poté nalezne spektrum signálu. Sledované 50 kHz pásmo v okolí rezonanční frekvence je rozděleno na 400 kanálů o šířce 125 Hz na každé straně. Pořízeno je 10 000 takových spekter pro každou rezonanční frekvenci, zprůměrováno a uloženo na harddisk spolu s dalšími experimentálními daty. Očekává se, že vlastní axionový signál by měl vytvořit pík ve spektru široký přes 6 kanálů. Dominantním signálem je samozřejmě tepelný šum rezonanční dutiny a přijímací elektroniky.




**Obr. 8.11: SQUID (Superconducting QUantum Interference Device)**

Zařízení konstruované v LLNL je v tuto chvíli nejcitlivějším zařízením na světě pro detekci axionů. Nejoptimističtější předpovědi hovoří o možnosti detekovat až stovku axionů za sekundu. Pozitivní detekce axionů by znamenala velký pokrok v pochopení temné hmoty a přispěla významnou měrou k porozumění stavby vesmíru jako celku.

## Projekt ALPS

Dalším právě probíhajícím experimentem je projekt ALPS realizovaný v německém DESY u Hamburgu. Zdrojem světla je zde laser na volných elektronech, který se původně jmenoval FEL (Free Electron Laser) a později FLASH (Free electron LASer in Hamburg). Světlo je vedeno přes šest silných magnetů, kde by malá část měla konvertovat na axiony. V cestě světla bude neprůhledná stěna a za ní další šestice magnetů. Pokud skutečně světlo zkonvertuje na axiony, projdou axiony stěnou a za ní bude v magnetickém poli jejich malá část opět konvertována na světlo. Samo světlo stěnou neprojde a tak by pozitivní detekce světla za stěnou byla nezávislým nepřímým potvrzením existence axionů. Experiment by měl být po mnoha průtazích a přejmenovávání zprovozněn pod názvem ALPS (Axion Like Particle Search).

**Obr. 8.12 Jeden z dipólových magnetů, použitých v experimentu ALPS.**