

Supersymetrie

1) Sjednocení elektromagnetických a slabých interakcí

$U(1)$ symetrie

Mějmež Diracův lagrangián

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (9.1)$$

popisující částice se spinem $1/2$ a hmotností m .

Vlnová funkce ψ je čtyřspinor, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\psi^0$, γ^α jsou Diracovy matice 4×4 .

Lagrangián (9.1) je invariantní vůči transformaci

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ia}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-ia}\bar{\psi}, \quad a = \text{konst.} \quad (9.2)$$

Necht' nyní $a = a(x^\alpha)$.

Nový lagrangián bude mít tvar

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - T^{\beta\alpha}\partial_{\alpha\beta}(x^\alpha), \quad (9.3)$$

kde

$$T^\beta = \bar{\psi}\gamma^\beta\psi, \quad (9.4)$$

a není tedy vůči transformacím

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ia(x^\alpha)}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-ia(x^\alpha)}\bar{\psi}, \quad (9.5)$$

invariantní.

Jak minimálně modifikovat lagrangián \mathcal{L} aby byl vůči (9.5) invariantní, jsme si naznačili v kapitole o Diracově rovnici.

Vezmeme-li modifikovaný lagrangián ve tvaru

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + \tilde{e}A^\alpha(x)T_\alpha(x), \quad \tilde{e} = \text{konst.} \quad (9.6)$$

a požadujeme-li, aby se při transformaci (9.5) měnily veličiny A^α podle vztahu

$$A^\alpha \rightarrow A'^\alpha = A^\alpha + \frac{1}{\tilde{e}}\partial^\alpha a(x), \quad (9.7)$$

bude

$$\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L} + \tilde{e}A^\alpha T_\alpha + \mathcal{L}_1, \quad (9.8)$$

neboť

$$T'^\alpha = T^\alpha. \quad (9.9)$$

Abychom dosáhli požadované vlastnosti lagrangiánu, zavedli jsme nové veličiny $A^\alpha(x)$ s požadovanými transformačními vlastnostmi (9.7).

Veličiny $A^\alpha(x)$ tvoří vektorové pole a transformace (9.2), (9.5) jsou kalibračními transformacemi.

Globální kalibrační transformací je (9.2), lokální kalibrační transformací je (9.5).

Po dosazení těchto výsledků do Diracovy rovnice se ukáže, že

$$\mathcal{L}_1 = i\bar{\psi} \left[\gamma^\alpha (\partial_\alpha - i\tilde{e}A_\alpha) \right] \psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (9.10)$$

Z Diracovy teorie jsme již dříve rozeznali, že $A^\alpha(x)$ je vektorový potenciál elektromagnetického pole a \tilde{e} je náboj částice.

Lagrangián (9.10) není ovšem lagrangiánem celého systému „elektron + elektromagnetické pole“.

K úplnému lagrangiánu se dospěje snadno, přidáme-li k (9.10) ještě člen s kinetickou energií (tj. člen kvadratický v A_α).

Výsledkem je vztah

$$L = \mathcal{L}_1 - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (9.11)$$

Kde

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \quad (9.12)$$

K elektromagnetickému poli jsme tudíž dospěli na základě požadavku globální symetrie, který jsme poté rozšířili o požadavek symetrie lokální.

Kalibrační transformace (9.5), (9.7) závisí na jediném parametru a , tvoří tedy jednoparametrickou abelovskou grupu $U(1)$.

Uvedený postup se zobecňuje na další globální a poté i lokální symetrie s cílem popsat i jiné, než elektromagnetické interakce.

Symetrie $SU(2)$

Jako další příklad uvažujme o dubletu komplexních skalárních polí označených jako

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \varphi_d \end{pmatrix}, \quad (9.13)$$

a lagrangián pole vezměme ve tvaru

$$\mathcal{L}^* = \partial_a \varphi^\dagger \partial^a \varphi - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \frac{1}{4} \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2, \quad (9.14)$$

kde λ, μ jsou konstanty.

Uvedený lagrangián je invariantní vůči transformaci

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \exp\left(-\frac{i}{2} \tau^A a_A\right) \varphi. \quad (9.15)$$

Veličiny a_A ($A = 1, 2, 3$) reprezentují 3 parametry, které tuto transformaci určují a τ^A jsou 3 matice (2×2), které splňují komutační relace

$$\left[\frac{\tau^A}{2}, \frac{\tau^B}{2} \right] = i \varepsilon^{ABC} \left(\frac{\tau^C}{2} \right), \quad (9.16)$$

kde ε^{ABC} je Levi-Civitův tenzor.

Pro obecnou matici \mathbf{M} přitom platí:

$$e^{\mathbf{M}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^n}{n!}. \quad (9.17)$$

Transformace (9.15) tvoří reprezentaci grupy $SU(2)$.

Požadavek globální symetrie rozšíříme tak, že parametry a^A budou nyní funkcemi prostoročasových souřadnic x^α :

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \exp\left(-\frac{i}{2} \tau_A a^A(x^\alpha)\right) \varphi. \quad (9.18)$$

Lagrangián (9.14) vůči transformaci (9.18) invariantní není.

Invariantním však může být učiněn zavedením tří nových kalibračních polí $A_\alpha^N(x^\beta)$, $N = 1, 2, 3$, do lagrangiánu.

Nejprve nahradíme obyčejné parciální derivace ∂_α derivacemi kovariantními

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i \frac{g}{2} \tau_N A_\alpha^N(x). \quad (9.19)$$

Poté zvolíme transformační zákon pro A_α při transformaci (9.8) takový, aby výsledný lagrangián zůstal invariantním:

$$A'_\alpha = \mathbf{U} A_\alpha \mathbf{U}^{-1} - \frac{i}{g} \mathbf{U} \partial_\alpha \mathbf{U}^{-1}, \quad (9.20)$$

příčemž matice

$$A_\alpha = \frac{1}{2} \tau_A A_\alpha^A, \quad \mathbf{U} = \exp\left(-i \frac{\tau_A}{2} \alpha^A\right) = \exp(-ia). \quad (9.21)$$

Lagrangián

$$\mathcal{L}_1 = (D^\alpha \varphi)^\dagger (D^\alpha \varphi) - \frac{1}{2} \mu^2 (\varphi^\dagger \varphi) - \frac{\lambda}{4} (\varphi^\dagger \varphi)^2 \quad (9.22)$$

poté invariantním již je, nemá však ještě člen s kinetickou energií pro kalibrační pole $A_\alpha^N(x^\beta)$.

Nejjednodušší volbou je

$$\mathcal{L}^* = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^N F_N^{\alpha\beta}, \quad (9.23)$$

kde

$$F_{\alpha\beta}^N = \partial_\alpha A_\beta^N - \partial_\beta A_\alpha^N - g \varepsilon^{NPQ} A_{\alpha P} A_{\beta Q}. \quad (9.24)$$

V maticovém označení se zavedením

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \tau_A F_{\alpha\beta}^N, \quad (9.25)$$

pak bude

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + ig [A_\alpha, A_\beta]. \quad (9.26)$$

Komplexní a lokálně kalibrační lagrangián tedy je

$$L = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}^*. \quad (9.27)$$

Popisuje svět tvořený dublety hmotných skalárních polí (φ_u, φ_d) , která spolu interagují přes člen $\lambda(\varphi^\dagger \varphi)^2$ a tripletem nehmotných kalibračních polí $(A_\alpha^1(x), A_\alpha^2(x), A_\alpha^3(x))$, která spolu interagují prostřednictvím posledního členu v (9.26).

Důsledkem formulace lokálně kalibračně invariantních teorií je tedy objevení se nehmotného kalibračního pole.

Pro reálný popis interakcí s krátkým dosahem je však třeba hmotného kalibračního pole.

Odpovídajícího úspěšného popisu bylo dosaženo a příslušná jev byl nazván **spontánním narušením symetrie**.

Uvažujme o neutrálním a hmotném skalárním poli Φ , které interaguje samo se sebou a jehož lagrangián je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\alpha \Phi)(\partial_\alpha \Phi) - \frac{1}{2}\mu^2 \Phi^2 - \frac{1}{4}\lambda \Phi^4. \quad (9.28)$$

Tento lagrangián je symetrický vůči reflexi

$$\Phi \rightarrow -\Phi \quad (9.29)$$

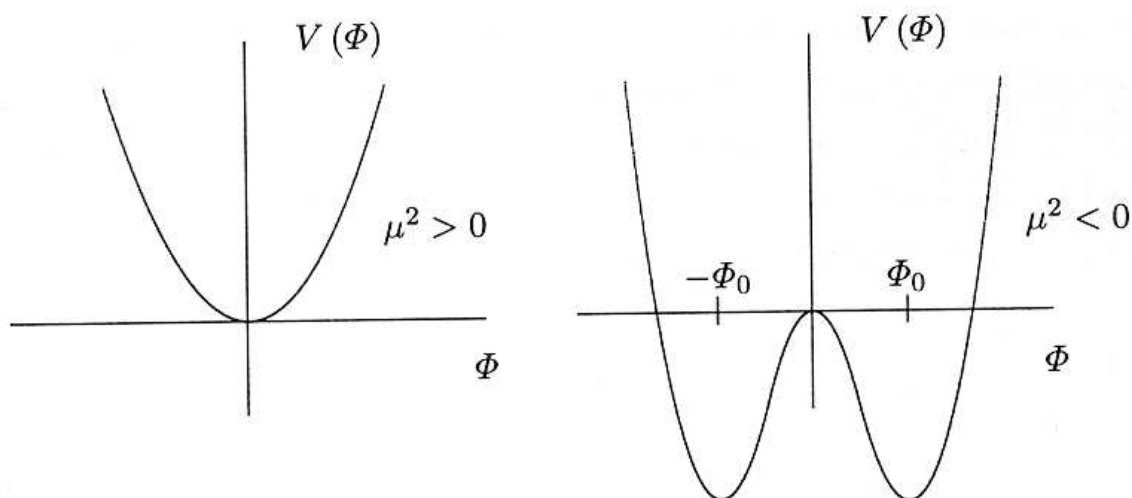
reprezentující velmi jednoduchou transformaci globální symetrie.

Různé tvary potenciálu

$$V(\Phi) = \frac{1}{2}\mu^2 \Phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \Phi^4 \quad (9.30)$$

jsou pro případy $\mu^2 > 0$ a $\mu^2 < 0$ uvedeny na obr. 9.1

Obr. 9.1



V případě $\mu^2 > 0$ existuje jen jediné minimum funkce $V(\Phi)$, a to v bodě $\Phi = 0$.

To odpovídá případu jediného stabilního, nedegenerovaného stavu.

V případě $\mu^2 < 0$ existují dvě minima funkce $V(\Phi)$, a to v bodech

$$\Phi = \pm\Phi_0, \quad \left(-\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} = \Phi_0 > 0. \quad (9.31)$$

Za základní stav je možno vybrat vždy jen jednu z těchto dvou hodnot. Oba tyto základní vakuové stavy narušují symetrii (9.29).

Všimněme si řešení blízko jednoho stavu, řekněme pro určitost stavu $+\Phi_0 > 0$.

Zaveďme novou veličinu

$$\Phi' = \Phi - \Phi_0. \quad (9.32)$$

Bod $\Phi = 0$ není bodem stability, bod $\Phi' = 0$ však ano.

Teorie vztažená k bodu $+\Phi_0$ již není symetrická vzhledem k transformaci (9.29).

Lagrangián (9.28) přepíšeme s pomocí Φ' :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\alpha \Phi')(\partial_\alpha \Phi') + \mu^2 \Phi'^2 - \lambda \Phi_0 \Phi'^3 - \frac{1}{4} \lambda \Phi'^4. \quad (9.33)$$

Pro pole Φ' se tedy vynořil hmotný člen $-2\mu^2$.

Symetrie $\Phi' \rightarrow -\Phi'$ však již z Lagrangiánu patrná není, ačkoli stále existuje - je skrytá, nikoli však ztracená.

V obecném případě je globální symetrie spojitou grupou transformací a ne jen prostou diskretní transformací (9.29), kterou jsme v našem příkladu užili.

Jestliže je taková obecná globální symetrie spontánně narušena, objeví se částice se spinem nula a s nulovou hmotností. Nazývají se **Nambuovými-Goldstoneovými bosony**.



Yoichiro Nambu (1921)



Jeffrey Goldstone (1933)

Na semiklasické úrovni je možno vznik Nambuových-Goldstoneových bosonů demonstrovat, vyjdeme-li z lagrangiánu dvou reálných polí σ a ρ se vzájemnou interakcí

$$V = \frac{1}{2} \mu^2 (\sigma^2 + \rho^2) + \lambda (\sigma^2 + \rho^2), \quad \lambda > 0. \quad (9.34)$$

Nehmotné Nambuovy-Goldstoneovy bosony jsou dobře známy z fyziky pevných látek. Dojde-li např. ke spontánnímu narušení symetrie ve feromagnetu, objeví se Nambuovy-Goldstoneovy bosony ve formě **magnonů**. V sedmé kapitole jsme také viděli, že v teorii supravodivosti dochází ke Cooperovu párování, v důsledku čehož dochází k tzv. **dynamickému spontánnímu narušení symetrie** (původ spočívá v

dynamickém jevu – druhotné síle mezi elektrony – jež dramaticky mění nejnižší energetický stav. Symetrie, která je tímto jevem narušena je kalibrační symetrie elektrodynamiky $U(1)_{\text{loc}}$. Kalibrační transformace symetrie $U(1)_{\text{loc}}$ působí na pole koordinovaných Cooperových párů a dynamika teorie je invariantní vůči kalibračním transformacím $U(1)_{\text{loc}}$, avšak vakuový stav nikoliv. Řešení zpočátku velmi komplikovaného problému, kterak zacházet s kalibrační symetrií supravodiče, našel roku 1963 teoretik kondenzované fáze Philip Anderson. Ukázal, že v rámci kvantové elektrodynamiky si lze supravodič představit jako jistý stav vakuového stavu, jímž se pole šíří. V tomto novém vakuovém stavu je kalibrační symetrie $U(1)_{\text{loc}}$ spontánně narušena, čehož důsledkem jsou Nambuovy-Goldstoneovy bosony s nenulovou klidovou hmotností – jakési zhmotnělé fotony. V jistém smyslu se zde foton kombinuje s nehmotnými Nambuovými-Goldstoneovými bosony, čímž efektivně získává hmotnost. V článku z roku 1963 Anderson vyslovil domněnku, že týž mechanismus by mohl fungovat v Yangových-Millsových teoriích s obecnější kalibrační symetrií $SU(2)$. Jedním z fyziků, kteří se jeho návrhu úspěšně chopili byl Peter Higgs, který v roce 1965 tuto teorii zveřejnil. Mechanismus, kdy je spontánně narušena symetrie lokální kalibrační grupy, čímž získají Nambuovy-Goldstoneovy bosony hmotnost, od té doby nazýváme **Higgsovým mechanismem**:

Uvažujme komplexní skalární pole

$$\Phi' = \Phi_1 + i\Phi_2 \quad (9.35)$$

s lagrangiánem

$$\mathcal{L} = (\partial_\alpha \Phi^*)(\partial^\alpha \Phi) + \frac{\mu^2}{2}(\Phi^* \Phi) + \frac{\lambda}{4}(\Phi^* \Phi)^2. \quad (9.36)$$

Tento lagrangián je invariantní vzhledem ke globální transformaci $U(1)$

$$\Phi \rightarrow e^{-ia} \Phi. \quad (9.37)$$

Budeme-li tuto symetrii kalibrovat, tj. budeme-li požadovat invarianci lagrangiánu také vůči lokální $U(1)$ grupě:

$$\Phi \rightarrow e^{-ia(x)}\Phi(x), \quad (9.38)$$

musíme uskutečnit záměnu

$$\partial_\alpha \rightarrow \partial_\alpha + ieA_\alpha \quad (9.39)$$

zavedením kalibračního pole $A_\alpha(x)$, kde e značí elementární náboj. Pro $U(1)_{\text{loc}}$ je

$$A_\alpha(x) \rightarrow A_\alpha(x) - \frac{1}{e}\partial_\alpha a(x) \quad (9.40)$$

a nyní již invariantní lagrangián má tvar

$$\mathcal{L} = (\partial_\alpha + ieA_\alpha)\Phi^* (\partial^\alpha - ieA^\alpha)\Phi - V(\Phi) - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (9.41)$$

kde

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \quad (9.42)$$

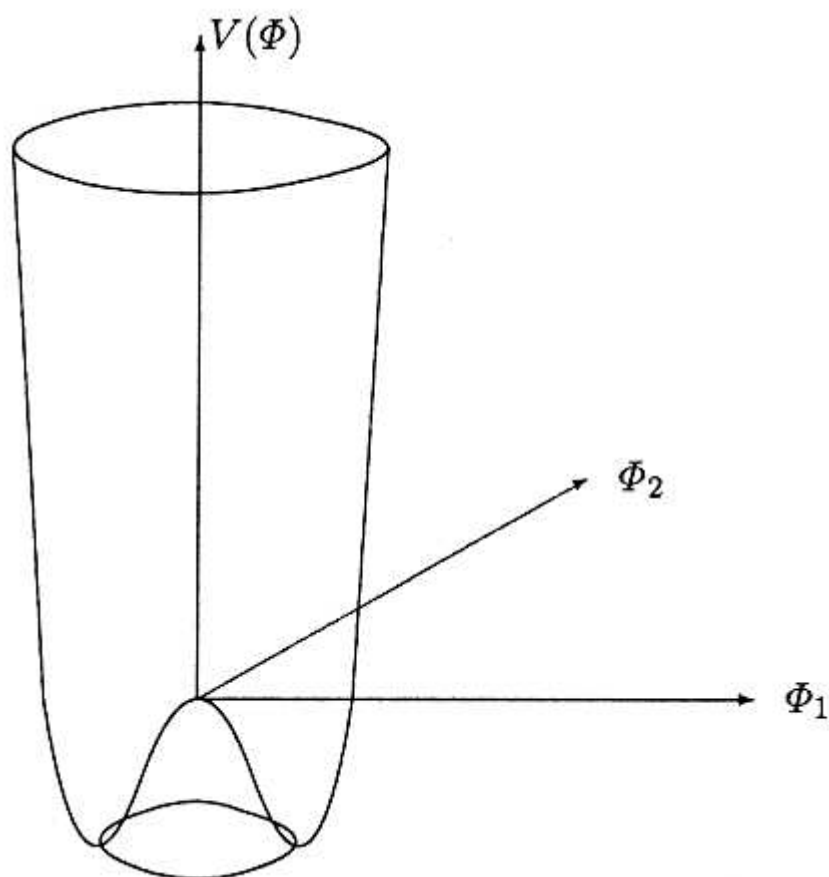
Pro $\mu^2 > 0$ jde o skalární elektrodynamiku (fotony a masivní skalární částice).

Spontánní narušení symetrie se objeví při $\mu^2 < 0$.

Minima funkce $V(|\Phi|)$ leží na kružnici $|\Phi| = \Phi_0$

$$\Phi_0 = \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}. \quad (9.43)$$

Obr. 9.2



Konkrétní volba minima $\Phi = \Phi_0$ definuje základní stav a zavede se opět fyzikální pole (9.32).

Abychom obdrželi částicovou formulaci, zavedeme speciální kalibraci, v níž

$$\Phi' = h \quad (9.44)$$

kde $h > 0$ je reálné pole.

To je možno učinit právě proto, že lagrangián (9.41) je lokálně kalibračně invarianní.

Tato operace nám nyní dovoluje dáti fyzikální interpretaci jednotlivým členům v lagrangiánu.

V uvedené speciální kalibraci má lagrangián (9.41) tvar

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\partial_\alpha h)(\partial^\alpha h) + \frac{1}{2}e^2\Phi_0^2 A_\alpha A^\alpha + \frac{1}{2}e^2 A_\alpha A^\alpha h(2\Phi_0 + h) - \frac{1}{2}h^2(3\lambda^2\Phi_0^2 + \mu^2) - \lambda\Phi_0 h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4. \quad (9.45)$$

Fundamentální pole zde odpovídají částicím a koeficienty v kvadratických členech odpovídají hmotnostem těchto částic. Z lagrangiánu (9.45) můžeme po bližší analýze vyčíst, že je přítomna reálná skalární částice h s kvadrátem hmoty

$$m_h^2 = 3\lambda^2\Phi_0^2 + \mu^2 \quad (9.46)$$

a hmotný vektorový boson A_n s hmotou

$$m_A = |e|\Phi_0. \quad (9.47)$$

Narušení $U(1)$ symetrie tak vede k reálnému poli $h > 0$ (**Higgsovo pole**) a ke hmotnému poli $A_\alpha(x)$ vektorových bosonů.

Elektroslabé sjednocení

V šedesátých letech se ukázalo, že je možné vytvořit teorii, která by jednotně popisovala elektromagnetickou i slabou interakci.

První výrazný úspěch na této cestě byl zaznamenán při sjednocování elektromagnetické interakce a slabé interakce v tzv. **elektroslabou interakci** - jedná se o Weinbergovu-Salamovu-Glashowovu teorii.

Před vznikem konstantního skalárního Higgsova pole H má tato teorie kalibrační symetrii $SU(2) \times U(1)$ a popisuje elektroslabé interakce částic způsobované výměnami nehmotných vektorových bosonů.

Po vzniku skalárního pole H se symetrie spontánně naruší až do podgrupy $U(1)$, odpovídající část vektorových bosonů (W^+, W^-, Z^0) získá hmotnost (řádu $\sim e.H \approx 10^2 \text{ GeV}$), příslušné interakce se stanou krátkodosahovými \rightarrow slabé interakce, zatímco další pole A_i zůstává nehmotné \rightarrow elektromagnetické pole. Podařilo se tak sjednotit slabé a

elektromagnetické interakce do jedné teorie, v níž vystupují jako dva různé aspekty téhož jevu.

Problém jednotného popisu elektromagnetické a slabé interakce (tzv. elektroslabé interakce) je otázkou nalezení symetrie, která obsahuje jak $U(1)_{\text{loc}}$ tak $SU(2)$ symetrii, tj. symetrii elektromagnetické a slabé interakce. To se podařilo Stevenu Weinbergovi, Abdusu Salamovi a Shaldonu Lee Glashowovi, kteří za teorii elektroslabé interakce obdrželi Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1979. Teorie elektroslabé interakce předpověděla, že kromě fotonu existují ještě další tři výměnné částice: intermediální bosony W^+ , W^- , Z^0 , které odpovídají za slabou interakci. Intermediální bosony W^+ , W^- , Z^0 byly objeveny v CERNu v roce 1983 ve vstřícných proton antiprotonových svazcích o energii 270 GeV. Jejich objevitelé Carlo Rubbia a Simon van der Meer obdrželi za tento objev Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1984.

Tvůrci elektroslabého sjednocení



Sheldon Lee Glashow (1932)



Abdus Salam (1926)



Steven Weinberg (1933)

Objevitelé částic W a Z



Carlo Rubbia (1934)



Simon van der Meer (1925)

V teorii elektroslabé interakce je jeden zásadní problém.

Platí-li symetrie $U(1)_{\text{loc}}$ a $SU(2)$ beze zbytku, vyjdou hmotnosti všech čtyř intermediálních částic nulové. Ve skutečnosti je nulová jen klidová hmotnost fotonu (s tím souvisí nekonečný dosah elektromagnetické interakce) a částice W^\pm a Z^0 mají klidové hmotnosti 80 GeV a 91 GeV (s tím souvisí krátký dosah slabé interakce). V teorii to znamená, že symetrie musí být narušena. Tento jev nazýváme **spontánní narušení symetrie**. Za narušení symetrie by měly být odpovědné další částice, které nazýváme Higgsovy bosony nebo Higgsovo pole. Tyto částice jsou v posledních letech usilovně hledány a je naděje, že bude možné tyto částice detekovat na v současné době stavěných urychlovačích. Právě energie Higgsova pole mohla být jakousi roznětkou inflační fáze raného Vesmíru. Jev analogický spontánnímu narušení symetrie známe i z běžného života. Postavíme-li jehlu na povrchu stolu na špičku, měla by podle klasické teorie spadnout tím později, čím lépe je jehla na začátku postavena svisle. Při přesné symetrii (jehla přesně na špičce) by neměla spadnout vůbec, protože nelze vybrat žádný preferovaný směr. Přesto dojde k narušení symetrie a jehla v konečném čase dopadne na povrch stolu.



Peter Higgs (1929)

S $SU(2)$ symetrií slabé interakce souvisí, podobně jako v elektromagnetizmu, i určitý kvantový náboj. Nazýváme ho vůně a nejde o nic jiného než o jiné pojmenování druhů kvarků. Základní konstanta interakce je opět s energií částic proměnná. Při energiích 10^2 GeV by se obě interakce měly chovat jednotně (jako jediná elektroslabá interakce). Při energiích nižších dojde k narušení symetrie a "oddělení" interakce

elektromagnetické od slabé a tyto interakce se chovají různě. Ve Vesmíru měly takové energie částice v době 10^{-10} s po jeho vzniku. Odpovídající teplota v té době byla 10^{15} K.

Weinbergovu-Salamovu teorii elektroslabé interakce lze dnes již považovat za experimentálně prakticky ověřenou, protože v r.1973 byla v CERNu prokázána existence tzv. slabých "neutrálních proudů" (způsobujících reakce typu $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$), a hlavně v r.1983 byly ve vstřícných proton-antiprotonových svazcích (270 GeV proti 270 GeV) collideru velkého protonového synchrotronu v CERN objeveny intermediální bosony W^\pm, Z^0 , jejichž hmotnosti ($m_W \cong 82$ GeV, $m_Z \cong 93$ GeV) i způsoby rozpadu velmi dobře souhlasí s předpovědí Weinbergova-Salamova modelu.

SU(3) symetrie

Všechny třírozměrné unitární unimodulární matice realizují grupu ***SU(3)***.

Každou z nich lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{U} = e^{i\mathbf{H}}, \quad (9.48)$$

kde matice **H** vyhovuje požadavkům

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}, \quad \text{Tr } \mathbf{H} = 0. \quad (9.49)$$

Existuje právě 8 lineárně nezávislých hermitovských matic 3×3 s nulovou stopou.

Lze za ně zvolit např. následující tzv. **Gell-Mannovy** matice:

$$\begin{aligned}
\lambda_j &\equiv \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & j = 1, 2, 3, \\
\lambda_4 &\equiv \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & \lambda_5 &\equiv \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\
\lambda_6 &\equiv \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}, & \lambda_7 &\equiv \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & i & \cdot \end{pmatrix}, \\
\lambda_8 &\equiv \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{9.50}$$

Tyto matice evidentně vyhovují požadavkům

$$\begin{aligned}
\lambda_a^\dagger &= \lambda_a, \\
\text{Tr } \lambda_a &= 0, \quad a = 1, \dots, 8.
\end{aligned} \tag{9.51}$$

Ponecháme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby dokázal, že také platí

$$\text{Tr } \lambda_a \lambda_b = 2\delta_{ab}, \quad a, b = 1, \dots, 8 \tag{9.52}$$

a že z posledních dvou relací vyplývá lineární nezávislost všech osmi matic λ_a , tj, že libovolnou třírozměrnou unitární unimodulární matici lze jednoznačně určit pomocí osmi reálných parametrů $\{\alpha_a, a = 1, \dots, 8\}$ tak, že

$$\mathbf{U}(\alpha) = \exp \left\{ i \sum_{a=1}^8 \alpha_a t_a \right\}, \tag{9.53}$$

kde

$$t_a = \frac{1}{2} \lambda_a . \quad (9.54)$$

Přímým výpočtem se lze snadno přesvědčit, že platí realce

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2i \sum_{c=1}^8 f_{abc} \lambda_c , \quad (9.55)$$

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3} \delta_{ab} + 2 \sum_{c=1}^8 d_{abc} \lambda_c ,$$

kde koeficienty f_{abc} , resp. d_{abc} jsou antisymetrické, resp. symetrické vůči vzájemné záměně libovolných dvou indexů a přitom všechny nenulové. Jsou jednoznačně specifikovány následujícími výrazy:

$$f_{123} = 1 ,$$

$$f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2} , \quad (9.56)$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}} ,$$

$$d_{146} = d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = \frac{1}{2} , \quad (9.57)$$

$$d_{247} = d_{366} = d_{377} = -\frac{1}{2} ,$$

$$d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} .$$

Povšimněme si, že relace (9.55) lze ekvivalentně vyjádřit též ve tvaru

$$\lambda_a, \lambda_b = \frac{2}{3} \delta_{ab} + \sum_{c=1}^8 (d_{abc} + if_{abc}) \lambda_c, \quad (9.58)$$

což je bezprostředním zobecněním dobře známé relace mezi Pauliho maticemi

$$\sigma_j, \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} \sigma_l. \quad (9.59)$$

Díky rovnostem (9.51), (9.52) z těchto relací také okamžitě plynou rovnosti

$$\begin{aligned} \text{Tr} \lambda_a [\lambda_b, \lambda_b] &= 4if_{abc}, \\ \text{Tr} \lambda_a [\lambda_b, \lambda_b] &= 4d_{abc}, \end{aligned} \quad (9.60)$$

tj.

$$\text{Tr} \lambda_a \lambda_b \lambda_b = 2(d_{abc} + if_{abc}). \quad (9.61)$$

Z formulí (9.53), (9.55) víme, že koeficienty f_{abc} představují strukturální koeficienty osmiparametrické Lieovy grupy $SU(3)$, a tedy operátory $\hat{\mathbf{T}}_a$ odpovídající generátorům této grupy musí v jakékoliv její reprezentaci vyhovovat komutačním relacím

$$[\hat{\mathbf{T}}_a, \hat{\mathbf{T}}_b] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc} \hat{\mathbf{T}}_c. \quad (9.62)$$

Z vyjádření (9.56) je zřejmé, že

$$\forall a \neq j = 1, 2, 3: \quad [\hat{\mathbf{T}}_8, \hat{\mathbf{T}}_j] = 0 \wedge [\hat{\mathbf{T}}_8, \hat{\mathbf{T}}_a] \neq 0 \quad (9.63)$$

a přitom

$$\forall j, k = 1, 2, 3: \quad [\hat{\mathbf{T}}_j, \hat{\mathbf{T}}_k] = i \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{jkl} \hat{\mathbf{T}}_l. \quad (9.64)$$

Odtud okamžitě vidíme, že

- 1) rank $SU(3)$ je roven dvěma,
- 2) operátory $\hat{\mathbf{T}}_j$, $j = 1, 2, 3$ realizují generátory $SU(2) \subset SU(3)$,
- 3) bázi prostoru, na kterém je realizována libovolná reprezentace algebry $SU(3)$, lze vždy zvolit tak, aby ji tvořily společné vlastní vektory operátorů

$$\hat{\mathbf{T}}_3, \quad \hat{\mathbf{T}}^2 \equiv \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{T}}_j^2 \quad \text{a} \quad \hat{y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{\mathbf{T}}_8. \quad (9.65)$$

Výše uvedenou $SU(2) \subset SU(3)$ budeme pro určitost nazývat **izospinorovou podgrupou**. Pro další je užitečné specifikovat ještě jiné dvě podskupiny $SU(2)$ grupy $SU(3)$.

K tomu nejprve definujme operátory

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}_1 &\equiv \hat{\mathbf{T}}_6, & \hat{\mathbf{U}}_2 &\equiv \hat{\mathbf{T}}_7, & \hat{\mathbf{U}}_3 &\equiv \frac{1}{2}(-\hat{\mathbf{T}}_3 + \sqrt{3} \hat{\mathbf{T}}_8), \\ \hat{\mathbf{V}}_1 &\equiv \hat{\mathbf{T}}_4, & \hat{\mathbf{V}}_2 &\equiv \hat{\mathbf{T}}_5, & \hat{\mathbf{V}}_3 &\equiv \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{T}}_3 + \sqrt{3} \hat{\mathbf{T}}_8). \end{aligned} \quad (9.66)$$

Snadno se lze přesvědčit, že komutační relace (9.62) zůstanou v platnosti jak při záměně $\hat{\mathbf{T}} \rightarrow \hat{\mathbf{U}}$, tak po záměně $\hat{\mathbf{T}} \rightarrow \hat{\mathbf{V}}$, a tedy také operátory $\hat{\mathbf{U}}_j$, $j = 1, 2, 3$ realizují generátory nějaké $SU(2) \subset SU(3)$ a totéž platí i o operátorech $\hat{\mathbf{V}}_j$.

Právě specifikovanou $SU(2)$ budeme nazývat U -spinovou, resp. V -spinovou podgrupou.

Z definice (9.66) vidíme, že

$$\hat{\mathbf{T}}_3 = \hat{\mathbf{V}}_3 - \hat{\mathbf{U}}_3. \quad (9.67)$$

Zavedme v trojrozměrném Hilbertově prostoru ($\equiv U^3$) ortonormální bázi tvořenou vektory $|^j\rangle$, ($j = 1, 2, 3$) a definujme operátory \hat{t}_a , ($a = 1, \dots, 8$) tak, že

$$\hat{t}_a|^j\rangle \equiv \sum_{k=1}^3 [t_a]_{(k,j)}|^k\rangle, \quad (9.68)$$

Kde na pravé straně vystupují elementy matice (9.54).
Libovolný vektor $|\psi\rangle \in U^3$ lze zapsat ve tvaru

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^3 \psi^j|^j\rangle, \quad (9.69)$$

kde

$$\psi^j \equiv \langle^j|\psi\rangle, \quad (9.70)$$

a tedy

$$\hat{t}_a|\psi\rangle = \sum_{j=1}^3 \psi^j \hat{t}_a|^j\rangle = \sum_{j,k=1}^3 \psi^j [t_a]_{(k,j)}|^k\rangle \equiv \sum_{j=1}^3 \psi'^j|^j\rangle, \quad (9.71)$$

tj. transformaci

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle \equiv \hat{t}_a|\psi\rangle \quad (9.72)$$

můžeme ekvivalentně vyjádřit jako

$$\psi^j \rightarrow \psi'^j \equiv \sum_{k=1}^3 [t_a]_{(k,j)} \psi^k. \quad (9.73)$$

Definice (9.68) automaticky zaručuje, že operátory $\hat{\mathbf{t}}_a$ vyhovují komutačním relacím

$$[\hat{\mathbf{t}}_a, \hat{\mathbf{t}}_b] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc} \hat{\mathbf{t}}_c, \quad (9.74)$$

a tedy realizují 3-rozměrnou reprezentaci algebry $SU(3)$, která se ve fyzikální literatuře obvykle označuje symbolem $\{\mathbf{3}\}$.

Z uvedené definice také okamžitě vidíme, že pro každý operátor

$$\hat{\mathbf{U}}(\alpha) \equiv \exp\left(i \sum_{\alpha=1}^8 \alpha_a \hat{\mathbf{t}}_a\right) \quad (9.75)$$

platí

$$\hat{\mathbf{U}}(\alpha) |^j\rangle = \sum_{k=1}^3 \mathbf{U}_{(k,j)}(\alpha) |^k\rangle, \quad (9.76)$$

kde na pravé straně vystupují elementy matice (9.53).

Přitom transformaci

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle \equiv \hat{\mathbf{U}}(\alpha) |\psi\rangle \quad (9.77)$$

můžeme ekvivalentně vyjádřit jako

$$\psi^j \rightarrow \psi'^j \equiv \sum_{k=1}^3 \hat{\mathbf{U}}_{(k,j)}(\alpha) \psi^k. \quad (9.78)$$

Operátory (9.75) realizují ireducibilní reprezentaci $\{\mathbf{3}\}$ grupy $SU(3)$. V souladu s vžitou konvencí užíváme stejného symbolu k označení reprezentace Lieovy grupy a odpovídající reprezentace algebry jejích generátorů.

Uvažujme nyní devítirozměrný Hilbertův prostor

$$U^{(3^2, 3^0)} \equiv U^3 \otimes U^3. \quad (9.79)$$

Je zřejmé, že operátory

$$\hat{U}^{(3^2, 3^0)}(\alpha) \equiv \hat{U}(\alpha) \otimes \hat{U}(\alpha) \quad (9.80)$$

na něm realizují reprezentaci

$$\{\mathbf{3}\} \otimes \{\mathbf{3}\} \quad (9.81)$$

grupy $SU(3)$.

Vzhledem k tomu, že vektory

$$|j_1 j_2\rangle \equiv |j_1\rangle |j_2\rangle, \quad j_1, j_2 = 1, 2, 3 \quad (9.82)$$

tvoří ortonormální bázi uvažovaného prostoru, můžeme jich využít k definici „operátoru transpozice“ $\hat{\mathbf{P}}_{12}$ tak, že požadujeme, aby

$$\hat{\mathbf{P}}_{12} |j_1 j_2\rangle = |j_2 j_1\rangle, \quad \forall j_1, j_2 = 1, 2, 3. \quad (9.83)$$

Z definice (9.80) pak okamžitě plynou relace

$$\left[\hat{\mathbf{P}}_{12}, \hat{U}^{(3^2, 3^0)}(\alpha) \right] = \left[\hat{\mathbf{S}}, \hat{U}^{(3^2, 3^0)}(\alpha) \right] = \left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{U}^{(3^2, 3^0)}(\alpha) \right] = 0, \quad (9.84)$$

kde

$$\hat{\mathbf{S}} \equiv \frac{1}{2}(1 + \hat{\mathbf{P}}_{12}), \quad \hat{\mathbf{A}} \equiv \frac{1}{2}(1 - \hat{\mathbf{P}}_{12}). \quad (9.85)$$

Uvážíme-li, že operátor transpozice je unitární a že jeho kvadrát je operátorem identity, vidíme, že platí

$$\hat{\mathbf{P}}_{12}^\dagger = \hat{\mathbf{P}}_{12}, \quad (\hat{\mathbf{P}}_{12})^2 = 1, \quad (9.86)$$

a tedy také

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}^\dagger &= \hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{\mathbf{S}}, \\ \hat{\mathbf{A}}^\dagger &= \hat{\mathbf{A}}^2 = \hat{\mathbf{A}}, \end{aligned} \quad (9.87)$$

tj. operátory $\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{A}}$ jsou projekční.

Navíc z jejich definice a z druhé relace (9.86) víme, že

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{A}} &= 1, \\ \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{A}} &= 0. \end{aligned} \quad (9.88)$$

Označíme-li podprostor, na který projektuje $\hat{\mathbf{S}}$, resp. $\hat{\mathbf{A}}$ symbolem $\mathbf{H}^{(2,0)}$, resp. $\mathbf{H}^{(0,1)}$, potom poslední dvě relace říkají, že $\mathbf{H}^{(0,1)}$ je ortonormálním doplňkem podprostoru $\mathbf{H}^{(2,0)}$, Uvažovaný Hilbertův prostor tak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{U}^{(3^2, 3^0)} \equiv \mathbf{H}^{(2,0)} \oplus \mathbf{H}^{(0,1)} \quad (9.89)$$

a komutační relace (9.84) vyjadřují, že podprostor $\mathbf{H}^{(2,0)}$ redukuje všechny operátory $\hat{\mathbf{U}}^{(3^2, 3^0)}(\alpha)$, a tedy reprezentace (9.81) je úplně reducibilní.

Z formule (9.88) víme, že

$$\hat{\mathbf{U}}^{(3^2, 3^0)}(\alpha) = (\hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{A}}) \hat{\mathbf{U}}^{(3^2, 3^0)}(\alpha) (\hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{A}}), \quad (9.90)$$

odkud díky relacím (9.84), (9.88) okamžitě dostáváme odpovídající rozklad operátorů (9.80):

$$\hat{\mathbf{U}}^{(3^2, 3^0)}(\alpha) \equiv \hat{\mathbf{U}}^{(2,0)}(\alpha) \oplus \hat{\mathbf{U}}^{(0,1)}(\alpha), \quad (9.91)$$

kde

$$\begin{aligned}\hat{U}^{(2,0)}(\alpha) &\equiv \hat{S}\hat{U}^{(3^2,3^0)}(\alpha)\hat{S}, \\ \hat{U}^{(0,1)}(\alpha) &\equiv \hat{A}\hat{U}^{(3^2,3^0)}(\alpha)\hat{A}.\end{aligned}\tag{9.92}$$

Přitom lze ukázat, že reprezentace grupy $SU(3)$ realizovaná operátory $\hat{U}^{(2,0)}(\alpha)$ na prostoru $\mathbf{H}^{(2,0)}$ je již ireducibilní.

Totéž platí o reprezentaci realizované operátory $\hat{U}^{(0,1)}(\alpha)$ na prostoru $\mathbf{H}^{(0,1)}$.

Zavedme vektory $|j_1j_2;[2,0]\rangle$ a $|j_1j_2;[0,1]\rangle$ tak, že

$$\begin{aligned}|j_1j_2;[2,0]\rangle &\equiv \hat{S}|j_1j_2\rangle = |j_1j_2\rangle, \\ |j_1j_2;[2,0]\rangle &\equiv \sqrt{2}\hat{S}|j_1j_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|j_1j_2\rangle + |j_2j_1\rangle\right], \quad \text{pro } j_1 \neq j_2, \\ |j_1j_2;[0,1]\rangle &\equiv \sqrt{2}\hat{A}|j_1j_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|j_1j_2\rangle - |j_2j_1\rangle\right].\end{aligned}\tag{9.93}$$

Přitom z jejich definice vidíme, že šestice vektorů $|j_1j_2;[2,0]\rangle$, $j_1 \leq j_2$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbf{H}^{(2,0)}$ a trojice vektorů $|j_1j_2;[2,0]\rangle$,

$j_1 < j_2$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbf{H}^{(0,1)}$.

První z výše uvedených ireducibilních reprezentací je tedy šestirozměrná a druhá je třírozměrná. Ve fyzikální literatuře se k jejich označení užívá symbolu $\{\mathbf{6}\}$, resp. $\{\bar{\mathbf{3}}\}$.

Rozklad reprezentace (9.81) na reprezentace ireducibilní zapisujeme ve tvaru

$$\{\mathbf{3}\} \otimes \{\mathbf{3}\} = \{\mathbf{6}\} \oplus \{\bar{\mathbf{3}}\}.\tag{9.94}$$

Proužek u posledního symbolu zdůrazňuje, že třírozměrná reprezentace vystupující na pravé straně relace (9.94) není ekvivalentní s třírozměrnými reprezentacemi, jejichž symboly figurují na straně levé. Nepřehlédněme, že zatímco každá konečněrozměrná ireducibilní reprezentace grupy $SU(2)$ je svým rozměrem určena (až na ekvivalenci) jednoznačně, v případě grupy $SU(3)$ již tomu tak není.

Každý vektor $|\psi\rangle \in \mathbf{U}^{(3^2,3^0)}$ lze samozřejmě vyjádřit ve tvaru

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, j_2=1}^3 \psi^{j_1 j_2} |j_1 j_2\rangle. \quad (9.95)$$

V obecném případě může mít takovýto vektor nenulovou projekci jak do podprostoru $\mathbf{H}^{(2,0)}$, tak do podprostoru $\mathbf{H}^{(0,1)}$. Je zřejmé, že

$$|\psi\rangle \in \mathbf{H}^{(2,0)} \quad (9.96)$$

právě tehdy, když pro všechny koeficienty v rozvoji (9.95) platí

$$\psi^{j_1 j_2} = \psi^{j_2 j_1}. \quad (9.97)$$

Obdobně

$$|\psi\rangle \in \mathbf{H}^{(0,1)} \Leftrightarrow \psi^{j_1 j_2} = -\psi^{j_2 j_1}. \quad (9.98)$$

Postupem, který nás přivedl k formuli (9.78), pak můžeme bez potíží nalézt tvar matic odpovídajících vyjádření operátorů $\hat{\mathbf{U}}^{(2,0)}(\alpha)$ a $\hat{\mathbf{U}}^{(0,1)}(\alpha)$ při výše naznačené volbě bází příslušných prostorů.

Je instruktivní provést tuto konstrukci explicitně zejména v případě reprezentace $\{\bar{\mathbf{3}}\}$.

K tomu nejprve přečíslujeme výše uvedené vektory báze tak, že

$$|j\rangle \equiv \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{jkl} |^{kl}; [0,1]\rangle, \quad j=1,2,3. \quad (9.99)$$

Inverzí tohoto vztahu dostáváme

$$|^{j_1 j_2}; [0,1]\rangle = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{j j_1 j_2} |j\rangle, \quad (9.100)$$

a tedy každý vektor z podprostoru $\mathbf{H}^{(0,1)}$ lze zapsat ve tvaru

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, j_2=1}^3 \psi^{j_1 j_2} |^{j_1 j_2}; [0,1]\rangle = \sum_{j, j_1, j_2=1}^3 \varepsilon_{j, j_1, j_2} \psi^{j_1 j_2} |j\rangle, \quad (9.101)$$

tj.

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^3 \psi_j |j\rangle, \quad (9.102)$$

kde

$$\psi_j = \sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{jkl} \psi^{kl} \quad (9.103)$$

Díky antisymetrii (9.98) lze tento vztah invertovat, tj. lze ho ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\psi^{kl} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{jkl} \psi_j. \quad (9.104)$$

Pro každý vektor $|\psi\rangle \in \mathbf{U}^{(3^2, 3^0)}$ můžeme transformaci

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle \equiv \hat{U}^{(3^2, 3^0)}(\alpha)|\psi\rangle \quad (9.105)$$

ekvivalentně vyjádřit jako transformaci koeficientů vystupujících v rozvoji (9.95)

$$\psi^{j_1 j_2} \rightarrow \psi'^{j_1 j_2} = \sum_{k_1, k_2=1}^3 \psi^{j_1 j_2} U_{(j_1, k_1)}(\alpha) U_{(j_2, k_2)}(\alpha) \psi^{k_1 k_2} . \quad (9.106)$$

Speciálně pro $|\psi\rangle \in \mathbf{H}^{(0,1)} \subset \mathbf{U}^{(3^2, 3^0)}$ pak transformaci

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle \equiv \hat{U}^{(3^2, 3^0)}(\alpha)|\psi\rangle = \hat{U}^{(0,1)}(\alpha)|\psi\rangle \quad (9.107)$$

odpovídá

$$\begin{aligned} \psi_j \rightarrow \psi'_j &= \sum_{j_1, j_2=1}^3 \varepsilon_{j j_2 j_2} \psi'^{j_1 j_2} = \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2=1}^3 \varepsilon_{j j_1 j_2} U_{(j_1, k_1)}(\alpha) U_{(j_2, k_2)}(\alpha) \psi^{k_1 k_2} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2, k=1}^3 \varepsilon_{j j_1 j_2} U_{(j_1, k_1)}(\alpha) U_{(j_2, k_2)}(\alpha) \varepsilon_{k k_1 k_2} \psi_k , \end{aligned} \quad (9.108)$$

tj.

$$\psi'_j = \sum_{k=1}^3 \bar{U}_{(j, k)}(\alpha) \psi_k , \quad (9.109)$$

kde

$$\bar{U}_{(j, k)}(\alpha) \equiv \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2=1}^3 \varepsilon_{j j_1 j_2} \varepsilon_{k k_1 k_2} U_{(j_1, k_1)}(\alpha) U_{(j_2, k_2)}(\alpha) . \quad (9.110)$$

Právě nalezený výsledek se stane transparentnějším, zapíšeme-li matici s těmito elementy ve tvaru

$$\bar{U}(\alpha) = \exp\left(i \sum_{a=1}^8 \alpha_a \bar{\mathbf{t}}_a\right). \quad (9.111)$$

Dosadíme-li do pravé strany formule (9.111) vyjádření (9.53) zjistíme, že do členů prvního řádu v α_a musí platit

$$\begin{aligned} \delta_{jk} + i \sum_{a=1}^8 \alpha_a [\bar{\mathbf{t}}_a]_{(j,k)} &= \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2=1}^3 \varepsilon_{jj_1 j_2} \varepsilon_{kk_1 k_2} \times \\ &\times \left[\delta_{j_1 k_1} + i \sum_{a=1}^8 \alpha_a [\mathbf{t}_a]_{(j_1, k_1)} \right] \left[\delta_{j_2 k_2} + i \sum_{b=1}^8 \alpha_b [\mathbf{t}_b]_{(j_2, k_2)} \right] \end{aligned} \quad (9.112)$$

odkud po jednoduchých úpravách zjistíme, že

$$[\bar{\mathbf{t}}_a]_{(j,k)} = -[\mathbf{t}_a]_{(k,j)}. \quad (9.113)$$

Tedy 3×3 matice $\bar{\mathbf{t}}_a$, odpovídající generátorům grupy $SU(3)$ v reprezentaci $\{\bar{\mathbf{3}}\}$ souvisejí s maticemi (9.54), odpovídajícími generátorům této grupy v reprezentaci $\{\mathbf{3}\}$ vztahem

$$\bar{\mathbf{t}}_a = -\mathbf{t}_a^T. \quad (9.114)$$

Odtud okamžitě vidíme, že mezi maticemi (9.53) a (9.111) přiřazenými témuž elementu grupy $SU(3)$ v těchto dvou reprezentacích platí vztah

$$\bar{U}(\alpha) = [\mathbf{U}^T(\alpha)]^{-1}, \quad (9.115)$$

tj. reprezentace $\{\bar{\mathbf{3}}\}$ je kontragradiční k reprezentaci $\{\mathbf{3}\}$.

Snadno se přesvědčíme, že tyto dvě trojrozměrné ireducibilní reprezentace nejsou navzájem ekvivalentní.

Stačí si uvědomit, že pokud by existovala nesingulární matice \mathbf{B} :

$$\forall \mathbf{U}(\alpha) \in SU(3): \quad \mathbf{B}\mathbf{U}(\alpha)\mathbf{B}^{-1} = \bar{\mathbf{U}}(\alpha), \quad (9.116)$$

potom by platilo

$$\forall a = 1, \dots, 8: \quad \mathbf{B}\mathbf{t}_a\mathbf{B}^{-1} = \bar{\mathbf{t}}_a. \quad (9.117)$$

Z vyjádření (9.114), (9.54) vidíme, že poslední rovnost mj. vyžaduje, aby

$$\det \lambda_a = \det \mathbf{B}\lambda_a\mathbf{B}^{-1} = \det(-\lambda_a^T) = \det(-\lambda_a). \quad (9.118)$$

Z explicitního vyjádření (9.50) však vidíme, že

$$\det \lambda_8 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\det(-\lambda_a), \quad (9.119)$$

a tedy podobnostní transformace (9.116) jistě neexistuje.

Ponecháme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby se přesvědčil, že platí

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}^{(0,1)}(\alpha)|_j\rangle &= \sum_{k=1}^3 \bar{\mathbf{U}}_{(k,j)}(\alpha)|_k\rangle, \\ \hat{\mathbf{t}}|_j\rangle &\equiv \sum_{k=1}^3 [\mathbf{t}_a]_{(k,j)}|_k\rangle, \end{aligned} \quad (9.120)$$

kde $\hat{\mathbf{t}}_a$ jsou operátory odpovídající v uvažované reprezentaci generátorům $SU(3)$.

Uvažujme nyní devítirozměrný Hilbertův prostor (izomorfní s prostorem (9.79))

$$\mathbf{U}^{(3^1,3^1)} \equiv U^3 \otimes \bar{U}^3, \quad (9.121)$$

kde

$$\bar{U}^3 \equiv \mathbf{H}^{(0,1)}. \quad (9.122)$$

Je zřejmé, že operátory

$$\hat{\mathbf{U}}^{(3^1,3^1)}(\alpha) \equiv \hat{\mathbf{U}}(\alpha) \otimes \hat{\bar{\mathbf{U}}}(\alpha), \quad (9.123)$$

kde

$$\hat{\bar{\mathbf{U}}}(\alpha) \equiv \hat{\mathbf{U}}^{(0,1)}(\alpha), \quad (9.124)$$

na něm realizují reprezentaci

$$\{\mathbf{3}\} \otimes \{\bar{\mathbf{3}}\} \quad (9.125)$$

grupy $SU(3)$.

Uvážíme-li, že vektory

$$\left| \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\rangle \equiv \left| \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\rangle_k \quad (9.126)$$

tvoří ortonormální bázi tohoto prostoru, a přitom

$$\hat{\mathbf{U}}^{(3^1,3^1)}(\alpha) \left| \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\rangle = \sum_{k_1, k_2=1}^3 \mathbf{U}_{(j_1, j)}(\alpha) \bar{\mathbf{U}}_{(k_1, k)}(\alpha) \left| \begin{matrix} j_1 \\ k_1 \end{matrix} \right\rangle, \quad (9.127)$$

okamžitě vidíme, že

$$\hat{\mathbf{U}}^{(3^1,3^1)}(\alpha) \sum_{j=1}^3 \left| \begin{matrix} j \\ j \end{matrix} \right\rangle = \sum_{j_1, k_1=1}^3 [\mathbf{U}(\alpha) \bar{\mathbf{U}}^T(\alpha)]_{(j_1, k_1)} \left| \begin{matrix} j_1 \\ k_1 \end{matrix} \right\rangle. \quad (9.128)$$

Z relace (9.115) však víme, že

$$\left[\mathbf{U}(\alpha) \bar{\mathbf{U}}^T(\alpha) \right] = 1, \quad (9.129)$$

a tedy

$$\hat{\mathbf{U}}^{(3^1,3^1)}(\alpha) \sum_{j=1}^3 |^j_j\rangle = \sum_{j=1}^3 |^j_j\rangle, \quad (9.130)$$

tj. jednorozměrný prostor $\mathbf{H}^{(0,0)}$, za jehož ortonormální bázi můžeme zvolit vektor

$$|[0,0]\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^3 |^j_j\rangle, \quad (9.131)$$

redukuje všechny operátory $\hat{\mathbf{U}}^{(3^1,3^1)}(\alpha)$.

Označíme-li jeho osmírozměrný ortogonální doplněk symbolem $\mathbf{H}^{(1,1)}$, můžeme prostor (9.121) vyjádřit jako

$$\mathbf{U}^{(3^1,3^1)} \equiv \mathbf{H}^{(1,1)} \oplus \mathbf{H}^{(0,0)}. \quad (9.132)$$

Odpovídající rozklad operátorů (9.123) má tvar

$$\hat{\mathbf{U}}^{(3^1,3^1)}(\alpha) \equiv \hat{\mathbf{U}}^{(1,1)}(\alpha) \otimes \hat{\mathbf{U}}^{(0,0)}(\alpha). \quad (9.133)$$

Přitom z formule (9.130) víme, že operátory $\hat{\mathbf{U}}^{(0,0)}(\alpha)$ se všechny redukují na operátor identity, tj. tyto operátory realizují na prostoru $\mathbf{H}^{(0,0)}$ triviální jednorozměrnou reprezentaci, která je samozřejmě ireducibilní.

Je možno dokázat, že také reprezentace realizovaná operátory $\hat{U}^{(1,1)}(\alpha)$ je ireducibilní.

Ve fyzikální literatuře se pro ně užívá symbolu $\{\mathbf{1}\}$, resp. $\{\mathbf{8}\}$, tj. rozklad reprezentace (9.125) na ireducibilní komponenty se zapisuje ve tvaru

$$\{\mathbf{3}\} \otimes \{\bar{\mathbf{3}}\} = \{\mathbf{8}\} \oplus \{\mathbf{1}\} . \quad (9.134)$$

Každý vektor $|\psi\rangle \in \mathbf{U}^{(3^1,3^1)}$ lze vyjádřit ve tvaru

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k=1}^3 \psi^j_k |^j_k\rangle . \quad (9.135)$$

Z formule (9.131) je evidentní, že

$$|\psi\rangle \in \mathbf{H}^{(1,1)} \quad (9.136)$$

právě tehdy, když jeho koeficienty mají nulovou stopu, tj. když platí

$$\sum_{j=1}^3 \psi^j_j |^j_j\rangle = 0 . \quad (9.137)$$

Jeho koeficienty tedy můžeme zapsat jako

$$\psi^j_k = \psi_{(j,k)} , \quad (9.138)$$

kde na pravé straně stojí elementy čtvercové matice ψ s nulovou stopou, tj.

$$\text{Tr} \psi = 0 . \quad (9.139)$$

Každou takovouto matici lze vyjádřit jako lineární kombinaci Gell-Mannových matic, tzn. zapsat ji ve tvaru rozvoje

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^8 \psi_a \lambda_a . \quad (9.140)$$

pro jehož koeficienty dostáváme díky relaci (9.52) výraz

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Tr} \psi \lambda_a . \quad (9.141)$$

Dosazením z formule (9.135) do rozvoje (9.137) vidíme, že libovolný vektor $|\psi\rangle \in \mathbf{H}^{(1,1)}$ lze vyjádřit ve tvaru

$$|\psi\rangle = \sum_{a=1}^8 \psi_a |a\rangle , \quad (9.142)$$

kde

$$|a\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j,k=1}^3 (\lambda_a)_{(j,k)} |^j_k\rangle , \quad a = 1, \dots, 8. \quad (9.143)$$

Na základě relací (9.51), (9.52) se čtenář snadno přesvědčí, že platí relace ortonormality

$$\langle b|a\rangle = \delta_{ab} , \quad (9.144)$$

a tedy vektory (9.143) tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbf{H}^{(1,1)}$.

Transformaci

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle \equiv \hat{\mathbf{U}}^{(3^1,3^1)}(\alpha) |\psi\rangle \quad (9.145)$$

lze pro každý vektor $|\psi\rangle \in \mathbf{H}^{(1,1)}$ vyjádřit v termínech příslušných rozvoju (9.135) jako

$$\psi_{k_1}^j \rightarrow \psi'_{k_1}{}^j = \sum_{j_1, k_1=1}^3 \mathbf{U}_{(j, j_1)}(\alpha) \bar{\mathbf{U}}_{(k, k_1)}(\alpha) \psi_{k_1}^{j_1}, \quad (9.146)$$

což v případě vektorů $|\psi\rangle \in \mathbf{H}^{(1,1)}$ lze ekvivalentně vyjádřit jako transformaci

$$\begin{aligned} \psi_a \rightarrow \psi'_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j, k=1}^3 \psi'^j_k (\lambda_a)_{(k, j)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j, k, j_1, k_1=1}^3 \mathbf{U}_{(j, j_1)}(\alpha) \bar{\mathbf{U}}_{(k, k_1)}(\alpha) (\lambda_b)_{(k, j)} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{b=1}^8 (\lambda_b)_{(j_1, k_1)} \psi_b = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{b=1}^8 \psi_b \text{Tr} \mathbf{U}(\alpha) \lambda_b \bar{\mathbf{U}}^T(\alpha) \lambda_a. \end{aligned} \quad (9.147)$$

Přitom z formule (9.115) víme, že

$$\bar{\mathbf{U}}^T(\alpha) = \mathbf{U}^{-1}(\alpha), \quad (9.148)$$

a tedy

$$\mathbf{U}(\alpha) \lambda_b \bar{\mathbf{U}}^T(\alpha) = \sum_{c=1}^8 \mathbf{U}_{(c, b)}^{(A)}(\alpha) \lambda_c, \quad (9.149)$$

kde na pravé straně vystupují elementy matic

$$\mathbf{U}^{(A)}(\alpha) \equiv \exp\left(i \sum_{a=1}^8 \alpha_a \mathbf{t}_a^{(A)}\right), \quad (9.150)$$

které realizují regulární reprezentaci, tj. elementy matic $\mathbf{t}_a^{(A)}$, odpovídajících v této reprezentaci generátorům $SU(3)$, jsou determinovány strukturními konstantami jako

$$\left[\mathbf{t}_a^{(A)} \right]_{(b,c)} \equiv -i \cdot f_{abc} . \quad (9.151)$$

Tedy

$$\psi'_a = \frac{1}{2} \sum_{b,c=1}^8 \psi_b \mathbf{U}_{(c,b)}^A(\alpha) \text{tr} \lambda_c \lambda_a = \sum_{b,c=1}^8 \mathbf{U}_{(a,b)}^A(\alpha) \psi_b . \quad (9.152)$$

Uvažujme nyní 3^{m+n} – rozměrný Hilbertův prostor

$$\mathbf{U}^{(3^m, 3^n)} \equiv U^3 \otimes \dots \otimes U^3 \otimes \bar{U}^3 \otimes \dots \otimes \bar{U}^3 , \quad (9.153)$$

kde na pravé straně vystupuje m faktorů U^3 a n faktorů \bar{U}^3 .
Je zřejmé, že operátory

$$\hat{\mathbf{U}}^{(3^m, 3^n)}(\alpha) \equiv \hat{\mathbf{U}}(\alpha) \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{U}}(\alpha) \otimes \hat{\bar{\mathbf{U}}}(\alpha) \otimes \dots \otimes \hat{\bar{\mathbf{U}}}(\alpha) \quad (9.154)$$

realizují na tomto prostoru reprezentaci grupy $SU(3)$.

Každý vektor $|\psi\rangle \in \mathbf{U}^{(3^m, 3^n)}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci ortonormálních vektorů

$$\left| \begin{matrix} j_1 \dots j_m \\ k_1 \dots k_n \end{matrix} \right\rangle \equiv \left| \begin{matrix} j_1 \\ k_1 \end{matrix} \right\rangle \dots \left| \begin{matrix} j_m \\ k_m \end{matrix} \right\rangle \dots \left| \begin{matrix} j_n \\ k_n \end{matrix} \right\rangle , \quad (9.155)$$

tj. ve tvaru rozvoje

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_m, k_1, \dots, k_n=1}^3 \psi^{j_1 \dots j_m}_{k_1 \dots k_n} \left| \begin{matrix} j_1 \dots j_m \\ k_1 \dots k_n \end{matrix} \right\rangle . \quad (9.156)$$

Z předchozího je zřejmé, že všechny vektory, pro jejichž koeficienty takového rozvoje jedná platí

$$\psi^{j_1 \dots j_m}_{k_1 \dots k_n} = \psi^{j_{i_1} \dots j_{i_m}}_{k_{l_1} \dots k_{l_n}}, \quad (9.157)$$

kde $\{i_1, \dots, i_m\}$, resp. $\{l_1, \dots, l_n\}$ je libovolnou permutací čísel $\{1, \dots, m\}$, resp. $\{1, \dots, n\}$, a jedná

$$\sum_{j=1}^3 \psi^{j j_2 \dots j_m}_{j k_2 \dots k_n} = 0, \quad (9.158)$$

tvoří podprostor ($\equiv \mathbf{H}^{(m,n)}$).

Označíme-li jeho ortogonální doplněk symbolem $\mathbf{H}_\perp^{(m,n)}$, můžeme prostor (9.153) vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{U}^{(3^m, 3^n)} = \mathbf{H}^{(m,n)} \oplus \mathbf{H}_\perp^{(m,n)}. \quad (9.159)$$

V případech, kdy $m \cdot n = 0$, požadavek (9.158) pochopitelně odpadá. Koeficienty rozvoje (9.156) tvoří spinory grupy $SU(3)$ s m horními a n dolními indexy.

Vlastnosti (9.157), resp. (9.158) mohou být pak formulovány spinorovou terminologií jako výrok, že příslušné spinory jsou úplně symetrické ve všech horních indexech a ve všech dolních indexech, resp. že kontrakce kteréhokoliv z jejich horních indexů s jakýmkoli indexem dolním dává nulu.

Nechť každá z veličin j_l , $l = 1, \dots, m$ může nabývat hodnot 1, 2, 3.

Nechť $N_k(m)$ je počet těch m -tic

$$\{j_1, \dots, j_m\} \quad (9.160)$$

vyhovující podmínce

$$j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m, \quad (9.161)$$

pro které je

$$j_m = k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (9.162)$$

Snadno lze dokázat, že

$$\begin{aligned} N_1(m) &= N_1(m-1), \\ N_2(m) &= N_1(m-1) + N_2(m-1), \\ N_3(m) &= N_1(m-1) + N_2(m-1) + N_3(m-1). \end{aligned} \quad (9.163)$$

Z těchto rekurentních vztahů plyne, že celkový počet m -tic vyhovujících podmínce (9.161) je dán výrazem

$$N(m) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \quad (9.164)$$

Odtud již není složité odvodit, že prostor $\mathbf{H}^{(m,n)}$ má dimenzi

$$N(m,n) = \frac{(m+1)(n+1)(m+n+2)}{2}. \quad (9.165)$$

Zopakováním předchozích úvah také snadno zjistíme, že prostor $\mathbf{H}^{(m,n)}$ redukuje všechny operátory (9.154), tj. že platí

$$\hat{\mathbf{U}}^{(3^m, 3^n)}(\alpha) = \hat{\mathbf{U}}^{(m,n)}(\alpha) \otimes \hat{\mathbf{U}}_{\perp}^{(m,n)}(\alpha). \quad (9.166)$$

Podstatné je, že reprezentace ($\equiv D(m,n)$) realizovaná operátory $\hat{\mathbf{U}}^{(m,n)}(\alpha)$ je již ireducibilní.

Takovéto reprezentace jsou výše naznačeným postupem dobře definovány pro jakékoliv celočíselná nezáporné hodnoty parametrů m a n . Přitom pod reprezentací $D(0,0)$ definatoricky rozumíme triviální jednorozměrnou reprezentaci realizovanou operátory $\hat{\mathbf{U}}^{(0,0)}(\alpha)$ zavedenými ve formuli (9.133).

Navíc je možno dokázat, že

a) každou konečněrozměrnou ireducibilní reprezentaci grupy $SU(3)$ lze ztotožnit s některou z reprezentací $D(m,n)$,

b) reprezentace $D(m,n)$ a $D(m',n')$ jsou ekvivalentní právě tehdy, když

$$m = m', \quad n = n',$$

c) reprezentace $D(n,m)$ je kontrgradientní k reprezentaci $D(m,n)$.

Jak jsme již dříve uvedli, ve fyzikální literatuře se většinou místo symbolu $D(m,n)$ užívá zjednodušeného značení zdůrazňujícího dimenzi této reprezentace.

Přitom je vžita konvence

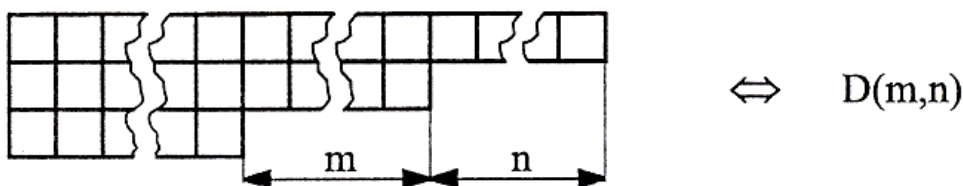
$$\begin{aligned} \{N(m,n)\} &\equiv D(m,n) && \text{pro } m \geq n, \\ \{\bar{N}(m,n)\} &\equiv D(m,n) && \text{pro } m < n \end{aligned} \quad (9.167)$$

a v případě nutnosti se k rozlišení dalších nezávislých reprezentací téže dimenze příslušné částice doplňují ještě čárkami, např.

$$\begin{aligned} D(2,1) &= \{\mathbf{15}\}, \\ D(4,0) &= \{\mathbf{15}'\}. \end{aligned} \quad (9.168)$$

Ireducibilní reprezentaci $D(m,n)$ lze přiřadit kterékoliv Youngovo polyomino s maximálně třemi řádky, v němž první řádek má o m buněk víc než řádek druhý, který zase přesahuje o n buněk řádek třetí, jak je naznačeno na obrázku 9.3.

Obr. 9.3



Všechny ireducibilní reprezentace obsažené v reprezentaci

$$D(m, n) \otimes D(m', n') \quad (9.169)$$

pak obdržíme podle následujících pravidel:

- 1) Označme písmenem a , resp. b buňku v 1. resp. v 2. řádku Youngova polyomina $D(m', n')$.
- 2) K Youngovu polyominu $D(m, n)$ přidáváme buňky z polyomina $D(m', n')$ označené písmenem a tak, že
 - i) v žádném sloupci se nevyskytuje symbol a více než jednou,
 - ii) vzniklý obrazec je opět Youngovým polyominem
- 3) Obdobným způsobem přemístíme buňky z polyomina $D(m', n')$ označené písmenem b , přičemž musí být navíc splněna podmínka

$$i) \quad N_M(a) \geq N_M(b),$$

kde $N_M(x)$ je počet symbolů x ve výsledném Youngově polyominu v prvních M přidaných buňkách, počítáno zprava doleva a shora dolů (nejprve v prvním řádku, potom ve druhém, atd.)

- ii) Vynecháme Youngova polyomina o více jak 3 řádcích.

Tak např. v případě reprezentace

$$D(1,1) \otimes D(1,1) \quad (9.170)$$

tímto postupem dostáváme:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

A tedy

$$D(1,1) \otimes D(1,1) = D(2,2) \oplus D(3,0) \oplus D(0,3) \oplus D(1,1) \oplus D(1,1) \oplus D(0,0) \quad (9.171)$$

tj.

$$\{8\} \otimes \{8\} = \{27\} \oplus \{10\} \oplus \{\overline{10}\} \oplus \{8\} \oplus \{8\} \oplus \{1\}. \quad (9.172)$$

Ponecháme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby ukázal, že z výše popsaných pravidel bezprostředně plynou nejen dříve uvedené výsledky (9.94), (9.134), ale např. i rozklady

$$\{6\} \otimes \{3\} = \{10\} \oplus \{8\}, \quad (9.173)$$

$$\{8\} \otimes \{3\} = \{15\} \oplus \{\overline{6}\} \oplus \{3\}. \quad (9.174)$$

Znalost algoritmu rozkladu dvou ireducibilních reprezentací na reprezentace ireducibilní samozřejmě umožňuje nalézt takovéto rozklady i pro součiny více ireducibilních reprezentací. Tak např. z předposlední formule spolu s relacemi (9.94), (9.134) okamžitě obdržíme rozklad

$$\{3\} \otimes \{3\} \otimes \{3\} = (\{6\} \oplus \{\overline{3}\}) \otimes \{3\} = \{10\} \oplus \{8\} \oplus \{8\} \oplus \{1\}. \quad (9.175)$$

Podobně z formulí (9.134), (9.174) vidíme, že

$$\{3\} \otimes \{\overline{3}\} \otimes \{3\} = (\{8\} \oplus \{1\}) \otimes \{3\} = \{15\} \oplus \{\overline{6}\} \oplus \{3\} \oplus \{3\}. \quad (9.176)$$

Nepřehlédněme, že v rozkladu součinu dvou ireducibilních reprezentací grupy $SU(3)$ se může některá z jejích ireducibilních reprezentací vyskytovat i více, než jednou. Připomeňme, že díky tomu může v případě této grupy v odpovídajícím Wigner – Eckartově teorému vystupovat více redukovaných maticových elementů.

Skutečnost, že nic takového nemůže nastat u grupy $SU(2)$ je jistě evidentní každému, kdo ještě nezapomněl pravidla skládání impulsmomentů.

Grandunifikační interakce

Máme-li k dispozici teorii silných interakcí (QCD) a teorii elektroslabých interakcí (WSG model), což jsou všechno kalibrační teorie, vzniká přirozeně snaha spojit tyto teorie do jedné ještě obecnější teorie interakcí. Tato další etapa unitarizace se označuje jako **velké sjednocení** (GUT - Grand Unification Theory).



Howard Mason Georgi (1947)

Grupa kalibrační symetrie G v tomto velkém sjednocení musí přitom obsahovat podgrupy $SU(3)_{\text{color}} \times [SU(2) \times U(1)]_{\text{elektroslab}} \subset G$; nejjednodušší grupou tohoto druhu je $SU(5)$, testují se však i modely s kalibračními grupami $SO(10)$, E_6 a další.

Grupa $SU(5)$ unitárních unimodulárních matic (5×5) působících na vlnové funkce částic izopentatu (označme si je pro názornost a, b, c, d, e):

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} & \gamma_{15} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} & \gamma_{25} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{35} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} & \gamma_{45} \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} & \gamma_{54} & \gamma_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_d \\ \psi_e \end{pmatrix}. \quad (9.177)$$

čímž dostáváme v teorii celkem 50 volných parametrů.
Z požadavku unitarity

$$\lambda^\dagger \lambda = \mathbf{1} \quad (9.178)$$

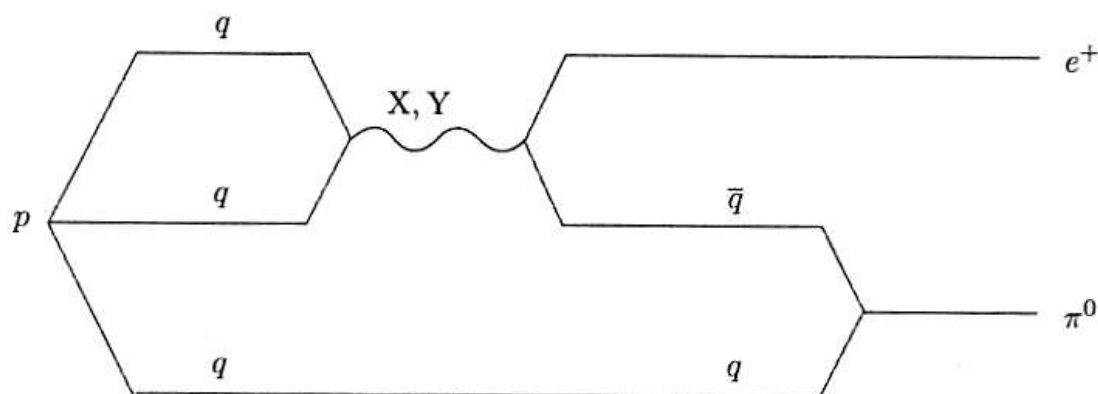
dostáváme celkem 25 vazebních podmínek a z požadavku unimodularity

$$\det \sigma = 1 \quad (9.179)$$

další jednu vazbu.

V teorii tak zbývá 24 volných parametrů, které odpovídají čtyřiaadvaceti polím a jim příslušejícím bosonům.

Čtyři z těchto polí patří elektroslabé interakci, osm polí tvoří gluony kvantové chromodynamiky a zbývajících 12 polí tvoří vektorové bosony X a Y zvané **leptokvarky**, neboť způsobují vzájemné přepisy leptonů na kvarky a naopak. Bosony X a Y jsou před narušením symetrie - stejně jako všechny ostatní vektorové částice - nehmotné; leptony se přitom mohou snadno měnit na kvarky a naopak.



Obr. 9.4: Možný rozpad protonu. Kvarky se samovolně přeměňují na bosony X a Y, které se následně rozpadají na leptony e^+ , π^0 .

První Higgsové pole narušuje výchozí symetrii $SU(5)$ na $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ - silné interakce popsané grupou $SU(3)$ se oddělují od elektroslabých popsaných grupou $SU(2) \times U(1)$. X a Y-mezony získávají velikou hmotnost (řádově $m_{X,Y} \sim 10^{16}$ GeV), čímž je přeměna kvarků v leptony silně potlačena a proton se stává prakticky stabilní. Další higgsové pole pak narušuje symetrii mezi slabými a elektromagnetickými interakcemi stejně jako ve Weinbergově-Salamově modelu.

Jednou z hlavních předpovědí grandunifikačních teorií je **nestabilita protonu**, který by se měl rozpadat na miony či pozitrony a na jeden neutrální či dva nabité piony [$p \rightarrow (\mu^+ \text{ nebo } e^+) + (\pi^0 \text{ nebo } \pi^+ + \pi^-)$] s dobou života řádově $\tau_p \approx 10^{35}$ roků. Tento rozpad by byl způsoben přeměnou kvarku na lepton prostřednictvím bosonu X a vzhledem k obrovské hmotnosti bosonu X je jeho pravděpodobnost nesmírně malá. Pozorování rozpadu protonu by však bylo velice důležité, protože by rozhodujícím způsobem ukázalo, že grandunifikační teorie jde správnou cestou. Experimenty zatím dávají odhady $\tau_p > 10^{33}$ let.

Tyto pokusy o pozorování rozpadu protonu se provádějí hluboko pod zemí (z důvodu odstínění kosmického záření), kde jsou umístěny velké nádrže s vodou, opatřené mnoha fotonásobiči, které by mohly zaregistrovat slabé záblesky způsobené průchodem rychlých částic vzniklých jako produkty rozpadu protonu. Nejdokonalejším zařízením tohoto druhu je **Superkamioka** v Japonsku, které sice nezaznamenalo žádný rozpad protonu, ale bylo velice úspěšné při detekci a spektrometrii neutrin.



Obr. 9.5: Vyprázdněná nádrž obřího neutrinového detektoru Superkamioka, se stěnami pokrytými výkonnými fotonásobiči.

Technicolor a preonový model

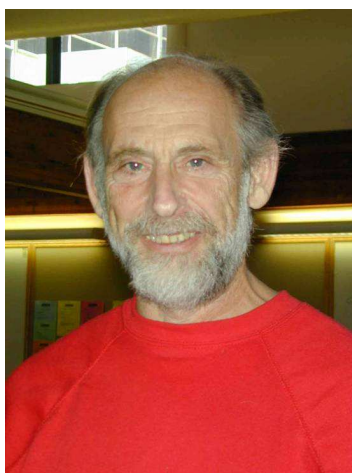
Stabilita Higgsova bosonu je dosud vlnou záhadou, neboť kvantová mechanika má podivnou tendenci tlačit jeho hmotnost směrem k Planckově hmotnosti. Ukazuje se, že aby nebyla hmotnost higgse zavlečena k Planckově hmotě, je třeba vyladit konstanty standardního modelu s fantastickou přesností 32 desetinných míst.

Poznamenejme, že Higgsův mechanismus spontánního narušení symetrie není v pravém slova smyslu dynamický. Nejde o druhotný jev způsobený dynamikou teorie, ale vyplývá ze zavedení nového pole s přesně definovanými vlastnostmi. Může-li za spontánní narušení elektroslabé kalibrační symetrie vskutku Higgsovo pole, potom jsou potřeba přinejmenším dva nové parametry, aby popsaly velikost narušení symetrie a intenzitu Higgsovy interakce jako takové. Tyto parametry nelze stanovit z teorie samé, takže model není schopen předpovědět hmotnost Higgsova bosonu. Navíc, standardní popis Higgsova pole v kvantové teorii pole není v souladu s požadavkem asymptotické volnosti, protože se vyskytují pochybnosti o jeho matematické bezrozpornosti.

Kvarky a leptony mají prozatím zcela náhodně vyhlížející hmotnosti, což dává 12 čísel, jež teorie neumí vysvětlit. Stanovení směšovacích úhlů si vyžaduje další čtyři parametry, které přesně určují, jak působí elektroslabé síly na částice. Těchto 16 parametrů ve standardním modelu působí, jakoby interakční intenzity Higgsova pole s kvarky a leptony byly úplně libovolné. Problém je pravděpodobně spojen s tím, že dobře nerozumíme pravé povaze narušení elektroslabé kalibrační symetrie vakua. Ve standardním modelu tak vystupuje 18 neurčených parametrů, které přímo souvisejí s vlastnostmi Higgsova pole. Většina problému standardního modelu tedy spočívá v tom, jak se Higgsova pole buď zbavit a nebo porozumět tomu, odkud se vzalo. Teorie velkého sjednocení založená na grupě $SU(5)$ nepřinesla nic nového o Higgsově částici ani o mechanismu spontánního narušení symetrie vakua a fakticky celý problém ještě zhoršila. Vakuový stav zde musí porušovat nejen elektroslabou symetrii, ale také většinu zbytku symetrie $SU(5)$. K tomu bylo potřeba doplnit další soubor Higgsových částic, čímž se do teorie zavádí množství dalších neurčených parametrů. Sám Glashow posléze označil Higgův mechanismus za „Weinbergův záchod“

v analogii s místností, kterou má každý doma, plní tam důležitou a nezbytnou funkci, ale nikdo se s ní nepyšní a nemá zájem ji předvádět návštěvám.

Většina problémů standardního modelu tedy pochází ze zavedení Higgsova pole a s tím spojené libovůle v jeho interakci se všemi ostatními elementárními částicemi. Protože samotné Higgsovo pole nebylo přes veškeré snahy nikdy pozorováno, je přirozené pokusit se hledat alternativní mechanismy spontánního narušení symetrie $SU(2)$. Jelikož historicky prvním případem, kdy bylo spontánní narušení kalibrační symetrie pozorováno, byla teorie supravodivosti s dynamickým spontánním narušením symetrie $U(1)_{loc}$, zdá se tedy nejpřirozenějším hledat takové částice a síly, aby nejnižší energetický stav dynamicky narušoval symetrii $SU(2)$. V supravodiči není žádné elementární pole, které by symetrii narušilo, ale dynamika interakce běžných elektronů při jejich pohybu látkou působí, že nejnižší energetický stav není invariantní vůči kalibrační symetrii.



Leonard Susskind (1940)

Jedním ze způsobů jak zkrotit higgse je, že se vůbec nejedná o elementární částici- Kdyby se např. higgs skládal z vázaných stavů velmi těžkých kvarků a leptonů, které se chovají mnohem spořádaněji, problém by zmizel. Zároveň není nutno do modelu zadávat žádné nové neznámé částice, ani volné parametry. Tato teorie však předpokládá, že těžké částice drží pohromadě nějakým dosud neznámým způsobem. Výpočty testovatelných důsledků této teorie jsou však natolik komplikované, že se dosud nepodařilo nalézt účinné matematické metody, jež by je dovolovali provést.

Roku 1978 přišli Stewen Weinberg a Leonard Susskind nezávisle na sobě s návrhem modelu, v němž by k takovému narušení mohlo dojít. Podle tohoto modelu by měla existovat pátá, dosud neznámá interakce velmi podobná silné interakci, ale s jinou grupou symetrie. Náboje této interakce byly nazvány v analogii s náboji silné interakce **technicolor**. Weinberg a Susskind ukázali, že kdyby analogie spontánně narušené symetrie $SU(3)$ v algebře toků teorie silných interakcí byla v teorii technicolor narušena stejným způsobem, způsobilo by to spontánní narušení kalibrační symetrie slabých interakcí a potřeba Higgsova pole by odpadla. Technikolorované mezony o nejnižší energii by zde hrály stejnou roli, jako Higgsovy bosony ve WSG elektroslabé kalibrační teorii. Tato teorie je mnohem snáze početně zvládnutelná, avšak za cenu zavedení nové rodiny neznámých technicolorovaných kvarků – **technikvarků**.

Přirozeným zobecněním veškerých těchto úvah bylo prohlásit všechny dosud známé částice za složené ze základnějších hypotetických částic, které koncem 70. let minulého století dostaly název **preony**.

Všechny dnes známé částice by se daly poskládat z pouhých dvou typů preonů. Preonový model navíc objasňuje řadu v přírodě pozorovaných jevů, které standardní model nevysvětluje. Např. dvě charakteristiky kvarku – barva a elektrický náboj – se zdají být dle standardního modelu zcela nezávislé. Každý kvart se vyskytuje ve třech barvách. Tato násobnost nese symetrii nutnou pro fungování kalibrační teorie silných interakcí. Proč ale tři barvy, proč ne dvě, nebo čtyři? Různé kvarky mají různé náboje, jejichž velikost je buď $1/3$, nebo $2/3$ velikosti náboje elektronu. V obou případech se tdy vyskytuje číslo 3, což naznačuje, že barva i náboj mají nějaký společný původ. Tento vztah však standardní model nikterak nevysvětluje, pouze jej postuluje. Vysvětlení dokonce dosud nepodala ani žádná ze strunových teorií. Preonový model jej však vysvětluje velmi elegantním způsobem. O preonovém modelu budeme ještě podrobně hovořit v následujících kapitolách věnovaných teorii cytoprostoru, která je založena na zobecněném preonovém modelu..

Unitární teorie pole

A. Einstein pevně věřil, že příroda, i když doslova hýří rozmanitostí nejrůznějších struktur a jevů, je velice **úsporná na základní principy**. V duchu této své vize pracoval po vytvoření obecné teorie relativity až do posledních dní svého života na unitárních teoriích pole. Myšlenka **unitární teorie pole** je nesmírně hluboká a krásná: podle ní by mělo existovat jediné, zcela základní a vše zahrnující fyzikální pole, jehož projevem by pak byla všechna pozorovaná pole v přírodě (gravitační, elektromagnetické, pole silných a slabých interakcí a příp. další pole třeba v subnukleární fyzice). Ve světě pak neexistuje nic než toto pole, z něhož je všechno složeno - i hmotné útvary (např. částice) jsou jakési místní "zhuštěniny" tohoto pole.

Dosud jsme pevně stáli na pozici **zdroj** → **pole**: existuje **zdroj** (jenž je v jistém smyslu "prvotní"), který kolem sebe **budí pole** a úkolem fyziky je stanovit zákony, podle nichž zdroj toto pole vytváří. Zdroj je přitom něco odlišného od pole, je to jakási "substance" - prvek cizorodý teorii samotného pole. Podíváme-li se na Maxwellovy rovnice $F^{ik}_{;k} = 4\pi j^i$ nebo na Einsteinovy rovnice $R_{ik} - 1/2 g_{ik} R = 8\pi T_{ik}$, vidíme že na levé straně stojí výraz popisující pole a na pravé straně veličina popisující zdroj. Porovnáme-li vzájemně charakter obou veličin, můžeme konstatovat spolu s Einsteinem, že "fenomenologický" zdroj na pravé straně (tenzor energie-hybnosti T_{ik} nebo čtyřproud j^i) působí ve srovnání s pregnantním výrazem popisujícím pole na levé straně jako "dřevěná chatrč vedle zlatého paláce". V dokonalé teorii pole by žádný takový dualismus neměl být, zdroj odlišný od pole by neměl existovat; zdroj by měl být rovněž "složen" z pole.

Unitární teorie pole tak klasický problém "Jakým způsobem zdroj kolem sebe budí pole?" obrací úplně na hlavu a ptá se: "Jakým způsobem je to, co považujeme za zdroj, ze svého pole složeno?". Problém buzení pole, stejně jako problém interakce dalších částic s tímto polem, pak již automaticky odpadá - všechno je pole, které se jistým způsobem (podle svých vnitřních zákonů) **vyvíjí** v prostoru a čase. Pouze při našem pozorování se nám některé oblasti pole jeví jako "zdroje" a jiné oblasti jako vzbuzované nebo působící "pole".

Po vytvoření obecné teorie relativity - což je vlastně geometrizace gravitace - se A.Einstein téměř po 40 let usilovně snažil vytvořit

unitární teorii gravitačního a elektromagnetického pole a završit tak své impozantní životní dílo. Elektromagnetické pole má totiž mnoho podobných vlastností jako pole gravitační, takže se přirozeně nabízelo jako nejvhodnější "kandidát" pro geometrizaci a tím pro sjednocení s již geometrizovaným gravitačním polem. A jako nejpřirozenější cesta k zahrnutí elektromagnetismu do gravitace se jevílo zobecňování geometrických vlastností Riemannova prostoročasu OTR tak, aby nově vzniklé geometrické struktury nějak popisovaly elektromagnetické pole. Unitární teorie gravitačního-elektromagnetického pole, vytvářené ve 20. letech Einsteinem a dalšími fyziky nevedly ke kýženému výsledku a proto o nich učiníme jen zcela stručnou zmínku. Tyto teorie lze rozdělit zhruba dvou skupin :

a) Zobecňování geometrických vlastností čtyřrozměrného prostoročasu

První pokus v tomto směru přísluší H. Weylovi, který v letech 1917-19 zobecnil Riemannovu geometrii v tom smyslu, že při paralelním přenosu vektoru kolem uzavřené křivky se může změnit nejen směr, ale i velikost vektoru. V této Weylově (konformní) geometrii se grupa obecné kovariance (používaná v OTR) rozšiřuje o kalibrační transformace metriky g_{ik}

$$g'_{ik} = \lambda(x) \cdot g_{ik} , \quad (9.180)$$

při nichž se délky všech vektorů v daném bodě násobí stejným libovolným koeficientem λ , který se může měnit od bodu k bodu. Délka vektoru l se pak při nekonečně malém paralelním přenosu mění podle zákona

$$\delta l = -l \cdot \varphi_i dx^i . \quad (9.181)$$

Kromě fundamentální kvadratické formy $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ tedy ve Weylově geometrii vzniká další lineární diferenciální forma $d\varphi = \varphi_i dx^i$ popisující neintegrabilitu délky vektorů. Veličiny φ_i jsou přitom

komponentami čtyřvektoru a při kalibračních transformacích (9.99) se transformují podle zákona

$$\varphi'_i = \varphi_i - \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \lambda(x^i) . \quad (9.182)$$

Takto vzniklý čtyřvektor Weyl interpretoval jako elektromagnetický čtyřpotenciál a čtyřrozměrnou rotaci $F_{ik} = \varphi_{k;i} - \varphi_{i;k}$ tohoto pole, která je kalibračně invariantní, jako tenzor elektromagnetického pole.

Rovnice elektromagnetického i gravitačního pole by pak měly vzniknout z jediného variačního principu, invariantního jak vzhledem k obecným transformacím souřadnic, tak vůči kalibračním transformacím (9.99). To vedlo ke kvadratickému lagrangiánu a tím k diferenciálním rovnicím 4. řádu.

Další způsob zobecnění axiomatiky Riemannovy geometrie pro účely unitarizace navrhl a v letech 1946-53 propracoval A. Einstein.

Zobecnění spočívá v tom, že místo symetrického tenzoru g_{ik} se v základní formě $g_{ik}dx^i dx^k$ připouští **nesymetrický metrický tenzor** g_{ik} a rovněž nesymetrické koeficienty afinní konexe Γ_{ik}^l . Právě antisymetrickou část metriky se Einstein pokoušel interpretovat jako elektromagnetické pole, zatímco symetrická část popisovala gravitaci podobně jako v OTR.

b) Pětirozměrné unitární teorie



Theodor Franz Eduard Kaluza (1885 – 1954)



Oscar Benjamin Klein (1894 – 1977)

Zcela jiný přístup k problému sjednocení gravitačního a elektromagnetického pole vypracovali v letech 1921 – 1925 T. Kaluza a O. Klein, kteří pro obecný popis fyzikální reality navrhli používat **5-rozměrnou varietu** (v níž prostoročas OTR je určitým 4-rozměrným podprostorem) v naději, že pátý rozměr by mohl vyjadřovat elektromagnetické pole. Kaluza a Klein se zřejmě inspirovali způsobem, jakým Minkowski sjednotil v trojrozměrnou oddělené elektrické a magnetické pole přechodem ke čtyřrozměrnému prostoročasu. Fyzikální prostoročas pozorujeme jako čtyřrozměrný, takže "přebytečného" pátého rozměru (který nemá přímý geometrický význam) je třeba se zbavit položením vhodné podmínky na pětirozměrnou geometrii. Kaluza původně zavedl poměrně umělý požadavek "cylindričnosti", podle něhož v pětirozměrné varietě měla existovat jednorozměrná grupa izometrických transformací; vzniká tak Killingovo vektorové pole což vede k tomu, že 5-rozměrná geometrická struktura může být plně popsána geometrií čtyřrozměrné hyperplochy. Později Einstein, Bergmann a Bargmann navrhli jinou geometrickou podmínku: uzavřenost (kompaktnost) pětirozměrné variety v pátém rozměru. Pětirozměrná varieta by pak měla topologickou strukturu $M^4 \times S^1$, kde M^4 je Minkowskiho prostoročas a S^1 je kružnice, tj. varieta by měla tvar tenké trubice. Pokud je poloměr této trubice (poloměr kompaktifikace) dostatečně malý (subatomových rozměrů), nemůže se žádný makroskopický objekt v pátém rozměru pohybovat a prostoročas se efektivně jeví jako čtyřrozměrný.



Peter Gabriel Bergmann (1915 – 2002)



Valentine Bargmann (1908 – 1989)

Integrál akce obecné teorie relativity v pětirozměrném prostoru se uvažuje ve tvaru

$$S_5 = -\frac{1}{16\pi G_5} \int \sqrt{|g^{(5)}|} R^{(5)} d^5 x \quad (9.183)$$

kde g_{AB} je pětirozměrná metrika, $g^{(5)} = \det(g_{AB})$ a $R^{(5)} = g^{AB} \cdot R_{AB}$ je skalární křivost pětirozměrného prostoru. Metrika pětirozměrného prostoru se volí ve tvaru

$$g_{AB} = \varphi^{-1/3} \cdot \begin{vmatrix} g_{ik} + A_i A_k \varphi & A_i \varphi \\ A_k \varphi & \varphi \end{vmatrix}, \quad A, B = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \quad i, k = 0, 1, 2, 3 \quad (9.184)$$

kde g_{ik} je obvyklý metrický tenzor 4-rozměrného prostoročasu, 5. složka g_{5k} je ztotožněna (až na skalární faktor φ) se čtyřpotenciálem elektromagnetického pole. Za předpokladu, že metrika g_{AB} nezávisí na souřadnici x^5 , dosazením metriky (9.184) do akce (9.183) po integraci podle x^5 dostaneme

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int \left(R^{(4)} + \frac{1}{4} \varphi F_{ik} F^{ik} + \frac{1}{6} \frac{\varphi_{,i} \varphi^{,i}}{2} \right) \sqrt{|g^{(4)}|} d^4 x \quad (9.185)$$

Pomineme-li skalární pole φ , je integrál akce v Kaluzově-Kleinově teorii roven součtu Einsteinova gravitačního členu a $U(1)$ -kalibračního členu daného tenzorem

$$F_{ik} = A_{i;k} - A_{k;i}, \quad (9.186)$$

který lze interpretovat jako Maxwellovo elektromagnetické pole. Přitom kalibrační transformace

$$A_i \rightarrow A_i + \partial\lambda/\partial x^i \quad A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial\lambda}{\partial x^i} \quad (9.187)$$

je generována speciální transformací souřadnic v 5-rozměrném prostoru:

$$x'^i = x^i, \quad x'^5 = x^5 + \lambda(x^i). \quad (9.188)$$

V teorii je bez újmy na obecnosti zvolena taková parametrizace metriky g_{AB} a označení veličin, aby se získaly Einsteinovy a Maxwellovy rovnice v obvyklém tvaru. Pátá proměnná pole – skalární veličina φ – je v Kaluzově-Kleinově teorii přebytečná a Kaluza ji vyloučil tím, že ji prostě položil rovnou jedné. Později byly činěny pokusy pochopit význam tohoto skalárního pole a dát mu kosmologický význam; Brans a Dicke dali toto pole do souvislosti se skalárním polem dalekého dosahu ve své tzv. skalárně-tenzorové teorii gravitace.



Carl Henry Brans (1935)



Robert Henry Dicke (1916 – 1997)

Einstein a Bergman chovali určitou dobu naději, že periodičnost polí vzhledem k páté zkompatifikované souřadnici (podél níž by se pole mohla měnit s periodou rovnou délce kružnice kompaktifikace) by mohla vysvětlit kvantové jevy a umožnila vytvořit klasické modely elementárních částic. Tato podobnost s Bohrovým-Broglieovým kvantováním se však ukázala jen jako povrchní a příslušné naděje se neuskutečnily.

Jedna z námitek proti Kaluzově-Kleinově teorii spočívá v tom, že tato teorie není vlastně v pravém slova smyslu jednotná: gravitace a elektromagnetismus jsou zde od sebe odděleny invariantním způsobem - jako "olej a voda".

Kaluzova-Kleinova teorie nevedla ke kýženým výsledkům a na dlouhou dobu upadla prakticky v zapomnění. V posledních desetiletích však neočekávaně zažíváme "renesanci" Kaluzovy-Kleinovy koncepce v souvislosti se snahami o geometrickou formulaci supergravitačních teorií. Jedná se o **zobecněné Kaluzovy-Kleinovy teorie** budované v superprostorech, kde se zavádějí navíc **další rozměry** spinorového charakteru vyjadřující vnitřní vlastnosti interakcí; ukazuje se, že např. 11-rozměrná Kaluzova-Kleinova teorie by mohla sjednocovat všechny známé interakce částic. Kaluzovy-Kleinovy teorie dále poskytují zajímavé možnosti modelů vesmíru o vyšším počtu rozměrů.

c) Supersjednocení a supergravitace

Názory na úlohu **gravitace** ve struktuře elementárních částic se velice různí; rozprostírají se mezi dvěma krajními polohami:

a) Gravitace nemá **žádný vliv** na strukturu a interakce elementárních částic. Tento krajní názor vychází z faktu, že gravitační interakce mezi elementárními částicemi je za všech známých okolností daleko slabší než ostatní druhy interakcí: např. pro dva protony nacházející se v jádře ve vzdálenosti $\sim 10^{-13}$ cm jsou gravitační síly zhruba $\sim 10^{40}$ -krát slabší než elektrické síly a $\sim 10^{42}$ -krát slabší než silné interakce.

b) Druhý krajní názor zastával A.Einstein a jeho následovníci (např. J.A.Wheeler): gravitace jakožto fyzika prostoročasu hraje určující roli ve struktuře elementárních částic, je jejich nejvlastnější podstatou. Podle této koncepce je nutno hledat taková zobecnění geometrických vlastností prostoročasu, jejichž přirozenými důsledky by byly vývody kvantové teorie pole o vlastnostech elementárních částic.

Pokud lze univerzálnost gravitace extrapolovat až do mikroměřítek elementárních (subnukleárních) částic, platila by zcela určitě aspoň první část druhého krajního názoru b). Lokální hustoty hmoty a energie zde totiž dosahují takových hodnot, že gravitační interakce by se stala silnou. Stále sílí názor, že v současné době již nelze od sebe odtrhovat fyziku elementárních částic a fyziku gravitace; zdá se dokonce, že bez zahrnutí gravitace nemůže být vytvořena konzistentní a jednotná teorie

částic tvořících hmotu.

Je proto přirozená snaha završit unitarizaci interakcí v kvantové teorii pole zahrnutím gravitační interakce, jejím sjednocením s ostatními třemi druhy interakcí. Tento ambiciózní unitarizační program se označuje jako **supersjednocení** nebo **supergravitace**.

Sjednotit gravitaci s ostatními druhy interakcí v duchu výše zmíněného schématu unitarizace kalibračních teorií znamená sloučit vnitřní symetrie s geometrickými, tj. najít společnou grupu zahrnující jak grupu transformací prostoročasu (např. Poincaréovu grupu) charakterizující gravitaci v OTR, tak i grupy vnitřních (nikoliv prostoročasných) symetrií slabých, silných a elektromagnetických interakcí.

První poznání supersymetrické interakce



Vladimir Akulov (1930)



Dmitry L. Volkov (1931)



Julius Wess (1934 – 2007)



Bruno Zumino (1923)

Ukázalo se, že provést takové sjednocení (netriviálním způsobem, tj. ne jako pouhý direktní součin) nelze v rámci Lieových grup, ale bylo nutné použít nové algebraické struktury - zobecněné grupy nazývané často

Lieovy superalgebry nebo graduované Lieovy algebry. Ve zobecněných grupách jsou příslušné algebry určeny jak komutačními, tak i antikomutačními relacemi mezi jednotlivými generátory. Ty Lieovy superalgebry, které obsahují jako svoji podalgebru grupu prostoročasových transformací (např. Poincaréovu grupu), se označují jako **supersymetrické**.

Algebra supersymetrie se konstruuje tak, aby obsahovala vedle obyčejných generátorů Poincaréovy grupy (prostoročasových posuvů P_k a rotací M_{kj}) také spinorové generátory Q_i s vhodnými komutačními relacemi. Pokud se taková algebra realizuje v prostoru polí, transformují generátory Q_i tenzorová pole na spinorová a naopak. Protože v kvantové teorii tenzorová pole popisují bosony s celočíselným spinem (řídící se Bose-Einsteinovou statistikou) a spinorová pole popisují fermiony s poločíselným spinem (statistika Fermi-Diracova), operátory Q_i vlastně generují transformace převádějící fermiony na bosony a naopak.

V supergravitaci je tak odstraněna ostrá hranice kladená mezi fermiony a bosony v dosavadní fyzice. Další charakteristickou vlastností supergravitace je to, že vedle gravitačního pole, které je kalibračním polem vůči lokálním transformacím prostoročasu, obsahuje ještě spinorové pole - kalibrační pole vzhledem k lokálním supersymetrickým transformacím generovaným Q_i ; takové pole se označuje jako Raritovo-Schwingerovo a jeho kvantum se nazývá **gravitino** (může mít spin $3/2$, popř. $5/2$).

Tvůrci teorie supersymetrického sjednocení



William Rarita (1907 – 1999)



Martin Roček (1949)



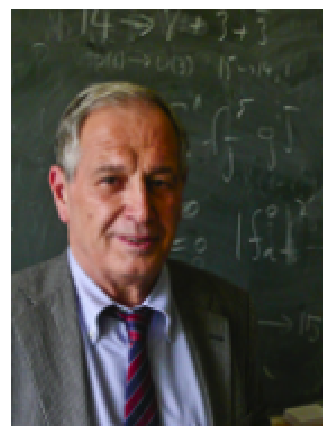
Peter van Nieuwenhuizen (1938)



Daniel Z. Freedman (1940)



Stanley Deser (1927)



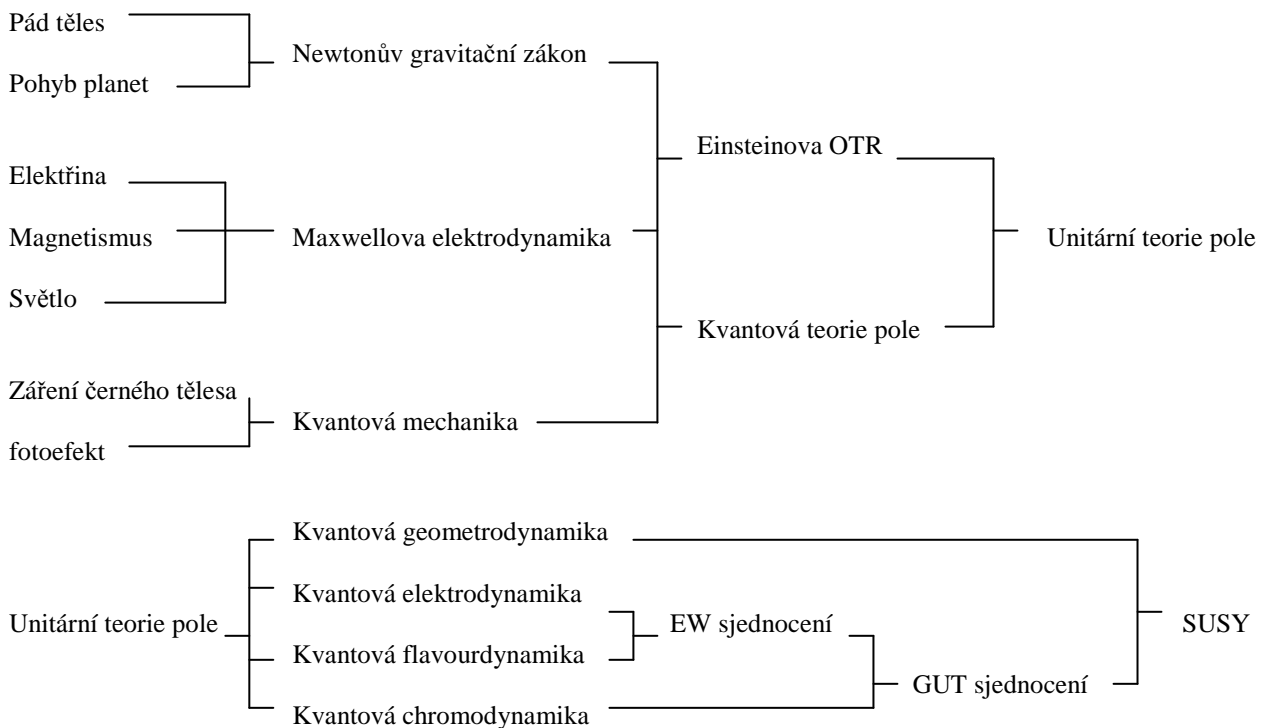
Sergio Ferrara (1945)

V supersymetrických unitárních teoriích elementárních částic je ke každé částici přiřazen její tzv. **superpartner** - každý boson má svého fermionového superpartnera a fermion má naopak svůj bosonový protějšek. Nejčastěji diskutované supersymetrické částice jsou zmíněná **gravitina** a dále též **photino** - slabě interagující hmotné částice se spinem $1/2$, zaváděné jako supersymetrický partner fotonu. Někdy se diskutují i supersymetrické částice k fermionům: **sleptony** jako superpartneři k leptonům, např. **selectron**, **smion**, **sneutrino** (zvané též **neutralino** - mělo by mít vysokou hmotnost desítky GeV), či kvarkům – **skvark**. Nejjednodušší supergravitační teorie - tzv. **prostá supergravitace** vytvořená v r. 1976, byla spíše modelovým experimentem, protože obsahuje minimální množství polí; nezahrnuje ani kvarky a leptony. Fyzikálně realističtější varianty supergravitačních teorií se snaží rozšířit počet spinorových generátorů a zavést též generátory vnitřních symetrií. Vzniká tak **rozšířená supergravitace**, která obsahuje $4N$ spinorových generátorů Q^α_i ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) nesoucích index vnitřní symetrie α . Omezíme-li se přitom na částice (pole) se spinem nepřesahujícím hodnotu 2, v prostoročase dimenze $d = 4$ jsou možné N -rozšířené supergravitační teorie s $N = 1, 2, \dots, 8$. Nejjednodušší rozšířenou supergravitační teorií je $N = 2$ -supergravitace sjednocující Maxwellovu a Einsteinovu teorii; k fotonům a gravitonům jsou zde přiřazena dvě gravitina. Maximálně rozšířená $N = 8$ -supergravitace obsahuje: jedno gravitační pole (graviton), 8 polí Raritových-Schwingerových (gravitin), 28 vektorových polí (bosonů) se spinem 1, 56 spinorových polí (fermionů) se spinem $1/2$ a 70 skalárních polí. Multiplety rozšířených

supergravitačních teorií mají tedy mnohem bohatší strukturu než v prosté supergravitaci. Avšak přesto, že obsahují nadměrný počet polí, neobsahují pole některých známých částic, např. μ -mezonu.

Z unitarizačního schématu 3 vidíme dvě na první pohled **diametrálně odlišné cesty**: Einsteinovu geometrickou cestu končící Wheelerovou geometrodynamikou a cestu kvantových kalibračních teorií pole vedoucí k supergravitaci, která nemá s geometrickým charakterem nic společného.

Schéma 3



Protože Einsteinovo pojetí gravitace jako geometrické struktury prostoročasu vychází z velmi hlubokých a názorných principů, naskytá se přirozeně otázka, zda geometrickými prostředky nelze konstruovat i supergravitační teorie. Fyzikálně by to znamenalo, že "náboje" v supergravitačních teoriích by měly mít svůj původ v geometrické struktuře zobecněného prostoročasu, podobně jako gravitační "náboj" v OTR má původ v křivosti prostoročasu.

Zajímavou variantou vícedimenzionální unitární teorie, která se objevila v posledních desetiletích, je teorie tzv. **superstrun**. V této teorii se částice a kvanta polí interpretují jako vzbuzené stavy kmitů

(jednorozměrné) **relativistické struny** ve vícerozměrném prostoru (nejčastěji $d = 10$). Tyto superstruny s charakteristickou délkou řádu Planckovy délky $\approx 10^{-33}$ cm mohou být jak otevřené (s volnými konci), tak uzavřené, přičemž interakce superstrun spočívá buď ve spojení konců dvou strun (vznikne struna třetí), nebo v roztržení jedné struny na dvě části. Za hlavní výhodu teorie superstrun se považují její lepší renormalizační vlastnosti - nevyskytují se zde "ultrafialové" divergence. O teorii superstrun je pojednáváme níže v samostatné pasáži.

Skutečně se ukázalo, že supergravitace může být formulována jako geometrická teorie v superprostoru (superprostor vzniklý rozšířením Minkowského prostoročasu je obecně zakřivený a má navíc další rozměry spinorového charakteru) s použitím aparátu diferenciální geometrie zobecněného na situaci, kdy některé ze souřadnic antikomutují. Jedná se tedy o prostor s torzí, přičemž se ukázalo, že všechny komponenty křivosti mohou být vyjádřeny pomocí torze a jejich kovariantních derivací. Torze se tak stává fundamentálním geometrickým objektem v supergravitaci.

Nejnovější pokusy o **geometrickou formulaci supergravitace** tak vedou k určité "renezanci" Kaluzovy-Kleinovy teorie: konstruují se teorie v **mnoharozměrném ($d > 4$) "prostorově"**, které by za pomoci **spontánní kompaktifikace** mohly dát realistickou teorii v prostoročase efektivní dimenze $d = 4$. Mechanismus spontánní kompaktifikace spočívá v tom, že se hledá speciální vakuové řešení zobecněných Einsteinových rovnic v d -rozměrném prostoročase, odpovídající reprezentaci d -rozměrné variety ve tvaru

$$\mathcal{M}^d = \mathcal{M}^4 \times B^{d-4}, \quad (9.189)$$

kde \mathcal{M}^4 je čtyřrozměrný prostoročas (většinou se uvažuje Minkowského) a B^{d-4} je kompaktní "vnitřní" prostor.

Byly studovány zobecněné Kaluzovy-Kleinovy unitární teorie pro různé dimenze $d > 4$. Aby taková teorie byla úplná a realistická, tj. aby sjednocovala všechny známé interakce částic, musí obsahovat fenomenologickou grupu vnitřní symetrie $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Jak nedávno ukázal Witten, aby "vnitřní" prostor B^n měl $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ - grupu izometrií, musí být jeho minimální dimenze rovna $n = 7$ tj. dimenze výchozí variety Kaluzovy-Kleinovy teorie musí být $d = 11$, což

se shoduje s výsledkem pro maximální ($N = 8$)-supergravitaci v ($d = 4$)-prostorově čase.

V nejranějších etapách vývoje vesmíru při vysokých teplotách, kdy ještě nenastala spontánní kompaktifikace, prostorově čas mohl mít všech svých 11 rozměrů. Spontánní kompaktifikace, která potom nastala, mohla vést v principu ke všem možným vakuovým řešením, takže se mohly vytvořit "ostrovy", v nichž prostorově čas může mít různou topologii, počet rozměrů i signaturu metriky. Nejranější vesmír by tak mohl být jakýmsi "oknem" do vyšších dimenzí zobecněné Kaluzovy-Kleinovy unitární teorie.

Pro ověření správnosti cesty nastoupené supergravitací by bylo podstatné, kdyby se podařilo experimentálně prokázat existenci gravitin, která jsou pro supergravitační teorie charakteristická.

Superalgebry a supersymetrie



Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877)

V minulé kapitole jsme se důkladněji seznámili s obyčejnými algebry, jakou je například algebra Poincaré – Lieova algebra, generující izometrie časoprostoru včetně posunutí. Za její bázi lze tedy vybrat $\mathbf{J}^{\mu\nu}$, tedy generátory Lorentzovy grupy (resp. otočení) a \mathbf{p}^ν , generátory posunů (značení se kryje s označením momentu hybnosti a hybnosti, a snad již mnozí z vás poznali, že to není náhoda).

Komutační relace budou

$$\begin{aligned}
[\mathbf{p}^\mu, \mathbf{p}^\mu] &= 0, \\
[\mathbf{p}^\mu, \mathbf{J}^{\alpha\beta}] &= i(g^{\mu\beta} \mathbf{p}^\alpha - g^{\mu\alpha} \mathbf{p}^\beta), \\
[\mathbf{J}^{\mu\nu}, \mathbf{J}^{\alpha\beta}] &= -i(g^{\nu\alpha} \mathbf{J}^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha} \mathbf{J}^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} \mathbf{J}^{\nu\alpha} - g^{\nu\beta} \mathbf{J}^{\mu\alpha}),
\end{aligned} \tag{9.190}$$

kde $g^{\mu\nu}$ je metrický tenzor. Jacobiho identitu můžete zkontrolovat přímým výpočtem.

Kromě obyčejných algeber se dnes hodně mluví i o **graduovaných algebrách** neboli **superalgebrách**. Ty lze psát jako lineární obal prvků, kterými již nebudou pouze operátory, které jsou zvyklé s většinou ostatních komutovat, nýbrž také grassmannské operátory, které spolu typicky navzájem antikomutují $ab = -ba$ (ovšem s negrassmannskými typicky komutují) a u nichž je tedy lepší hovořit o **antikomutátoru** $\{a, b\} = ab + ba$. Jednotným jazykem, **superkomutátor** neboli

graduovaný komutátor dvou operátorů $[a, b]_{grad}$ je antikomutátorem, pokud jsou oba grassmannské, jinak je komutátorem.

Chceme-li transformovat objekty prvkem grupy g blízkým jednotkovému, napíšeme tento jako $g = 1 + d\zeta^i s_i$, kde $d\zeta^i$ jsou infinitesimální parametry a s báze generátoru. Pokud jsou s_i

grassmannské, musí být grassmannské i $d\zeta^i$; představme si pod nimi grassmannské “číselné” parametry, např. grassmannské operátory, které komutují se všemi negrassmannskými a antikomutují se všemi grassmannskými.

Jestliže fyzika pracovala do šedesátých nebo sedmdesátých let jen s algebami, působením jejichž transformací mohly přecházet elektrony do neutrin, červené kvarky do modrých anebo se systémy mohly otáčet nebo posouvat, v pozdějších letech promýšleli teoretici i tzv.

supersymetrie, pomocí nichž lze transformovat bosony na fermiony a naopak. Uvedeme jako příklad supersymetrii na světelném kuželi v deseti-rozměrném časoprostoru, která proti algebře Poincaré obsahuje navíc i grassmannské operátory Q^a a $Q^{\dot{a}}$. Pohledme tedy zběžně na některé superkomutátory algebry super-Poincaré:

$$\begin{aligned}
\{Q^a, Q^b\} &= 2\mathbf{p} + \delta^{ab}, \\
\{Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}}\} &= 2\mathbf{p} - \delta^{\dot{a}\dot{b}}, \\
\{Q^a, Q^{\dot{b}}\} &= \sqrt{2}\gamma_{ab}^i \mathbf{p}^i, \\
[J^{i-}, Q^a] &= \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_{aa}^i Q^{\dot{a}}.
\end{aligned} \tag{9.191}$$

(Indexy a resp. \dot{a} jsou osmiznačné spinorové indexy grupy $SO(8)$, γ jsou Diracovy matice, indexy \pm odpovídají kalibraci na světelném kuželi

$v^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 \pm v^g)$ atd.) Všimněte si, že antikomutátor dvou

supersymetrií je úměrný posunu. To všechno má názorné vysvětlení, rozšíříme-li pojem prostoru na superprostor, který kromě komutujících souřadnic navíc obsahuje i antikomutující, protože v něm je supersymetrie geometrickou operací.

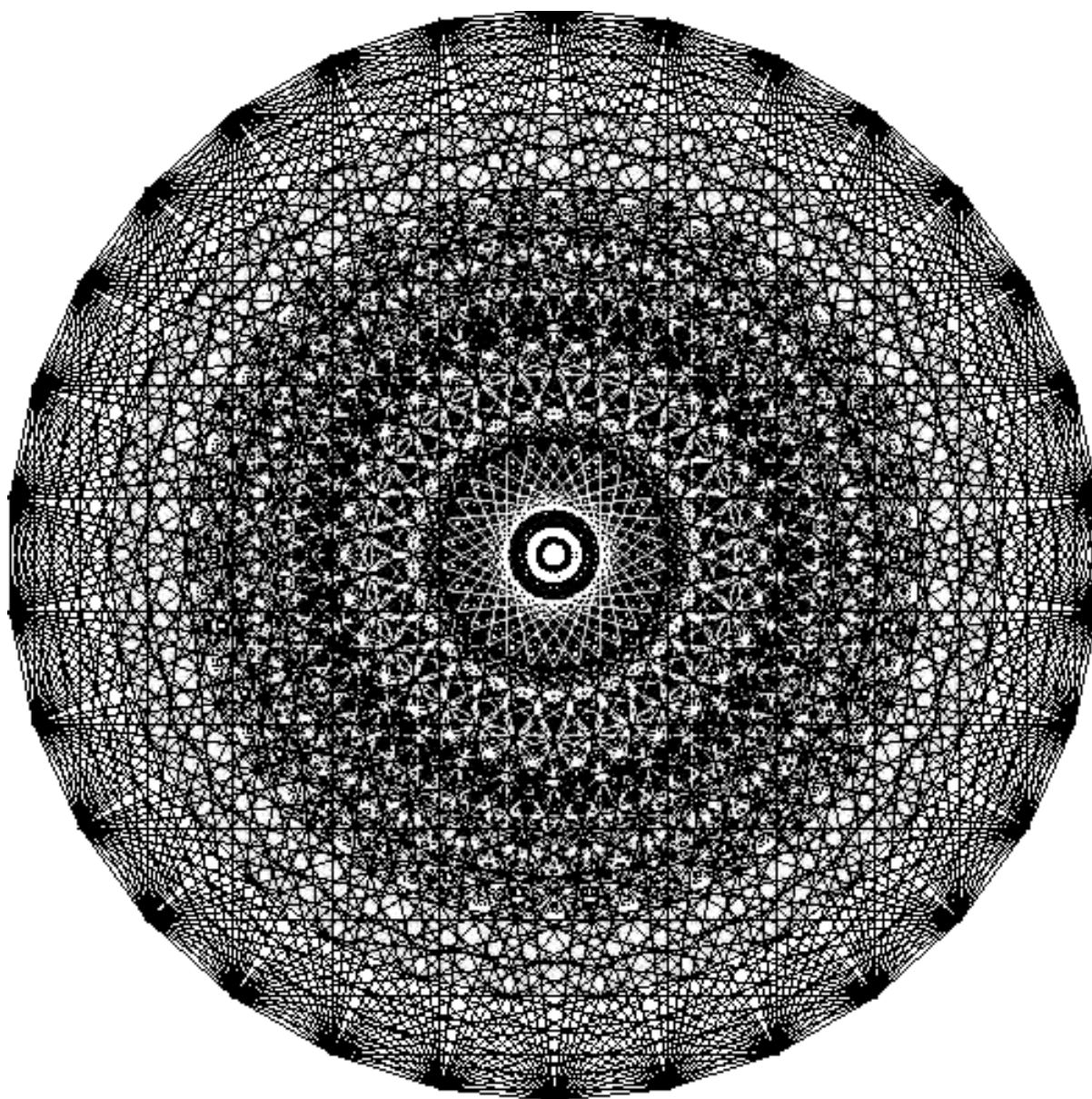
Supersymetrie zajišťuje teoriím zajímavé vlastnosti: její začlenění do teorie strun odstraní z této teorie tachyony (částice pohybující se nadsvětelnou rychlostí), jelikož např. $\{Q^i, Q^i\} = 2\mathbf{p}^-$ tj. $\mathbf{p}^- = Q^i Q^i$,

operátor Q^i je hermitovský a střední hodnota \mathbf{p}^- ve stavu $|\psi\rangle$ je tedy nezáporná, poněvadž jde o čtverec normy $\langle\psi|Q^i Q^i|\psi\rangle$ vektoru $Q^i|\psi\rangle$.

Navíc implikuje stejný počet fermionových a bosonových stavů na každé hladině; každý fermion má svého bosonového partnera a naopak (**fotino, gluino, gravitino, slepton, skvark, ...**). Supersymetrie zaručuje v mnoha případech vymizení kosmologické konstanty (hustoty vakua) a záhadou naopak zůstává, proč je kosmologická konstanta podle pozorování přinejmenším o 113 řádů menší než očekávané náhodné příspěvky od různých polí i v našem světě, který supersymetrický není nebo kde je supersymetrie narušena. A za zmínku stojí i fakt, že supersymetrie klade omezující podmínky na dimenzi časoprostoru. Již jen poznamenejme, že podobně, jako obecná teorie relativity požaduje, aby se parametry Lorentzovy transformace mohly měnit od bodu k bodu, lze tuto lokálnost požadovat od supersymetrie a získáme tak různé teorie **supergravitace**.

Obří vyňatá grupa

Cílem této sekce je ukázat explicitní konstrukci **obří grupy** (resp. odpovídající algebry) E_8 provedenou Michaellem B.Greenem, Johnem H.Schwarzem a Edwardem Wittenem. Proč jí říkáme obří? Protože má ze všech prostých vyňatých grup největší dimenzi (248) a navíc její symetrie (chápeme-li míru symetrie jako poměr dimenze a kvadrátu ranku, aby se klasické grupy $SO(n)$ asymptoticky touto veličinou blížily konstantě), dosahuje rekordní hodnoty $31/8$.



Obr. 9.6: Superalgebra E_8



Michael Boris Green (1946)



John Henry Schwarz (1941)



Edward Witten (1951)

Konstrukci začneme podalgebrou $SO(16)$, kterou generuje $16 \cdot 15/2 = 120$ operátorů $\mathbf{J}_{ij} = -\mathbf{J}_{ji}$, splňujících obvyklé komutační relace

$$[\mathbf{J}_{ij}, \mathbf{J}_{kl}] = \mathbf{J}_{il} \delta_{jk} - \mathbf{J}_{jl} \delta_{ik} - \mathbf{J}_{ik} \delta_{jl} + \mathbf{J}_{jk} \delta_{il} \quad (9.192)$$

a přidáme k nim 128 generátorů \mathbf{Q}_α (celková dimenze tedy bude $120 + 128 = 248$), které se transformují jako spinory $SO(16)$ dané (řekněme kladné) chiralitty, čímž míníme, že

$$[\mathbf{J}_{ij}, \mathbf{Q}_\alpha] = \mathbf{Q}_\beta (\sigma_{ij})_{\beta\alpha} \cdot \quad (9.193)$$

K dokončení specifikace algebry musíme dodefinovat zbývající komutátor $[\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta]$ (je to komutátor a ne antikomutátor, protože usilujeme o definici algebry a nikoli superalgebry). Teorie grupy $SO(16)$ však tento komutátor až na normalisaci určuje jednoznačně;

$$[\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta] = (\sigma_{ij})_{\beta\alpha} J_{ij} \cdot \quad (9.194)$$

Kladný faktor κ , kterým by nám teorie $SO(16)$ dovolila násobit pravou stranu, lze absorbovat do $\sqrt{\kappa}$ -násobného přeškálování \mathbf{Q}_α , jejichž normalizaci totiž žádná z předchozích formulí neomezovala. I záporné κ by vedlo k izomorfní algebře; jeho efekt by byl podobný užití spinoru

druhé (zrcadlové) chiralitě. Jestliže tedy Lieova algebra \mathbf{E}_8 s rozkladem přidružené reprezentace

$$\{248\} = \{120\} \oplus \{128\} \quad (9.195)$$

vůči její maximální podgrupě $\mathbf{Spin}(16)$ existuje, na jejích komutačních relacích daných prvými třemi vysazenými rovnicemi není co štelovat. K utvrzení se, že formule opravdu definují Lieovu algebru, je třeba ověřit Jacobiho identitu (už její splnění nám garantuje existenci matic, které splňují tytéž relace jako abstraktní operátory J_{ij} a Q_α , tj. existenci reprezentace.) Z cvičných důvodů doporučujeme explicitní kontrolu JJJ identity, která pouze vyjadřuje, že J_{ij} formují Lieovu algebru, JJQ identity, která zase potvrzuje, že se Q_α opravdu transformují jako reprezentace $\mathbf{SO}(16)$. Ani JQQ identita neklade zvláštní požadavky a její platnost je podložena zvláště tím, že σ_{ij} matice splňují touž algebru jako J_{ij} . Opravdu zásadním případem volající po kontrole je identita

$$\left[[Q_\alpha, Q_\beta], Q_\gamma \right] + \left[[Q_\beta, Q_\gamma], Q_\alpha \right] + \left[[Q_\gamma, Q_\alpha], Q_\beta \right] = 0. \quad (9.196)$$

Rozepsání vede k požadavku

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta: \sum_{ij} (\sigma_{ij})_{\alpha\beta} (\sigma_{ij})_{\gamma\delta} + (\sigma_{ij})_{\beta\gamma} (\sigma_{ij})_{\alpha\delta} + (\sigma_{ij})_{\gamma\alpha} (\sigma_{ij})_{\beta\delta} = 0 \quad (9.197)$$

který máme dokázat pro případ, že α, β, γ jsou indexy jedné chiralitě. Všimneme si, že produkt dvou spinorů může být rozepsán na kombinaci úplného systému gamma-matic $\gamma_{i_1 \dots i_n}$ pro $n = 0 \dots 16$, čili nulovost

poslední formule je ekvivalentní nulovosti jejího zúžení s $(\gamma_{k_1 \dots k_n})_{\alpha\beta}$ pro všechna n a $k_1 \dots k_n$. Díky shodné chiralitě indexů α, β se staráme jen o sudá n a antisymetrie dokazované formule v α, β nám dává možnost omezit se na případ antisymetrických $\gamma_{k_1 \dots k_n}$, což díky elementárním vlastnostem gamma-matic znamená $n = 2, 6, 10, 14$. Ve skutečnosti nám vztah

$$\gamma_{i_1 \dots i_k} = \frac{\varepsilon_{i_1 \dots i_6} \gamma_{i_{k+1} \dots i_6} \bar{\gamma}}{(16-k)!} \quad (9.198)$$

a fakt, že operátor chiralit $\bar{\gamma}$ lze vynechat, účinkuje-li na spinory kladné chiralit, zmenší práci na polovinu. Že nám stačí prohlédnout jen $n = 2$ a $n = 6$ lze spatřit už na shodnosti počtu nezávislých členů v antisymetrické kombinaci Q_α a Q_β (nalevo)

$$\frac{128 \cdot 127}{2 \cdot 1} = \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1} + \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad (9.199)$$

a součtu počtů nezávislých komponent $\gamma_{i_1 \dots i_n}$ pro $n = 2$ a $n = 6$.

Zúžení se $(\sigma_{kl})_{\alpha\beta} = -(\sigma_{kl})_{\alpha\beta}$ dá

$$-(\text{Tr}_+ \sigma_{kl} \sigma_{ij}) \cdot (\sigma_{ij})_{\gamma\delta} + 2(\sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{ij})_{\gamma\delta}, \quad (9.200)$$

což se užitím Diracových identit anuluje; prvý resp. druhý člen se rovnají $\pm 64(\sigma_{kl})_{\gamma\delta}$. Faktor 64 u druhého členu vzejde z inventury kladných a záporných příspěvků (znaménko podle parity počtu prvků průniku množin indexů $\{i, j\}$ a $\{k, l\}$) $2 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot \frac{13}{2} - 14 \cdot 2$. Kontrakcí s $(\gamma_{i_1 \dots i_6})_{\alpha\beta}$ dostaneme (první člen teď již nepřispěje)

$$2(\sigma_{ij} \gamma_{i_1 \dots i_6} \sigma_{ij})_{\gamma\delta}, \quad (9.201)$$

což opět vymizí: klíčovou je zde rovnost $45 \cdot 1 + 1 \cdot 15 - 10 \cdot 6 = 0$ při bilanci příspěvků $\pm \gamma_{i_1 \dots i_6}$.

Přidání spinoru k přidružené reprezentaci grupy $SO(N)$ vede k nové Lieově algebře jen ve třech případech: kromě $N = 16$, což přináší \mathbf{E}_8 , se dá v úplné analogii sestavit 52-rozměrná vyňatá grupa \mathbf{F}_4 přidáním 16-rozměrného spinoru k 36-rozměrné přidružené reprezentaci $SO(9)$. Podobnost je opravdu velkolepá; v 16-rozměrné spinorové reprezentaci

$SO(9)$ lze vzít za úplný soubor matic matice $\gamma_{i_1 \dots i_n}$ pro $n = 0, 2, 4, 6, 8$ a antisymetrie nám dovolí omezit se opět na $n = 2$ a $n = 6$. Vzorce zůstanou, jen čísla se obmění; ± 8 místo ± 64 , osmičku v druhém členu dostaneme jako $2 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{6}{2} - 7 \cdot 2$ a místo $45 + 15 - 60$ bude krácení u $n = 6$ vypadat $3 \cdot \frac{2}{2} + 6 \cdot \frac{2}{2} - 3 \cdot 6$.

Třetí možností je přidání osmirozměrného spinoru k přidružené reprezentaci $SO(8)$, čímž získáme grupu $SO(9)$ způsobem, který se liší $SO(8)$ rotací triality od standardnější a jednodušší konstrukce - totiž přidání 8-vektoru $J_i = J_{i9}$ k přidružené reprezentaci $SO(8)$.

Nyní bychom rádi popsali některé podgrupy E_8 . Jednu maximální podgrupu - $SO(16)$ - jsme již uvedli. Ta obsahuje maximální podgrupu $SO(10) \times SO(6)$, vůči níž se její přidružená reprezentace rozpadá na přidružené reprezentace složek a na produkt vektorů

$$\{120\} = (\{45\} \otimes \{1\}) \oplus (\{1\} \otimes \{15\}) \oplus (\{10\} \otimes \{6\}) . \quad (9.202)$$

Jak se vůči této podgrupě transformuje spinor $SO(16)$? Šestnáct γ -matic $\gamma_{1 \dots 16}$, pomocí nichž definujeme tvar operátorů ve spinorové reprezentaci, se rozpadne na prvních deset $\gamma_{1 \dots 10}$, které můžeme považovat za matice $SO(10)$, a posledních šest $\gamma_{11 \dots 16}$, které zamětnáme jako matice $SO(6)$. Spinor $SO(16)$ je tedy alespoň v prvním přiblížení součinem spinorů $SO(10)$ a $SO(6)$. Operátor chiralita $SO(16)$

$$\bar{\gamma} = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{16} \quad (9.203)$$

je zjevně součinem operátoru chiralita $SO(10)$

$$\gamma^{(10)} = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{10} \quad (9.204)$$

a podobného u $SO(6)$

$$\gamma^{(6)} = \gamma_{11} \gamma_{12} \cdots \gamma_{16} , \quad (9.205)$$

tedy

$$\bar{\gamma} = \gamma^{(10)} \gamma^{(6)} . \quad (9.206)$$

Tedy spinor Q_α pozitivní chiralilty grupy $SO(16)$, který při konstrukci E_8 přidáváme k J_{ij} , se rozpadá na dva kusy s vlastními čísly

$$\gamma^{(10)} = \gamma^{(6)} = +1 \quad (9.207)$$

resp.

$$\gamma^{(10)} = \gamma^{(6)} = -1 . \quad (9.208)$$

Označíme-li spinory pozitivní či negativní chiralilty grupy $SO(10)$ resp. $SO(6)$ jako $\{16\}$ či $\{\overline{16}\}$ resp. $\{4\}$ či $\{\overline{4}\}$ (dimenze spinorových reprezentací jsme již diskutovali), máme rozklad $\{128\}$ grupy $SO(16)$

$$\{128\} = (\{16\} \otimes \{4\}) \oplus (\{\overline{16}\} \otimes \{\overline{4}\}) \quad (9.209)$$

který ve spojení s rozkladem přidružené reprezentace výše, udává způsob transformace fundamentální reprezentace E_8 (u této grupy je to tatáž co přidružená) vůči této podgrupě.

Nyní máme tu milou povinnost představit vám grupu E_6 jako podgrupu E_8 . Jako předehru si uvědomme, že ve $\{4\}$ grupy $SO(6)$ jsou generátory hermitovskými 4×4 maticemi, jejichž bezstopost zabezpečuje prostota grupy $SO(6)$; jsou tedy $SO(4)$ generátory - neboli $SO(6)$ je podalgebrou $SO(4)$. Postřehnutím shodné dimenze 15 u obou dojdeme k přesvědčení, že nemůže jít o vlastní podalgebru: musí jít o izomorfní algebry. Tato cesta nás současně poučila, že fundamentální $\{4\}$ a $\{\overline{4}\}$ grupy $SO(4)$ se chovají v $SO(6)$ jako spinory kladné resp. záporné chiralilty. Naopak, fundamentální (vektorová) reprezentace $\{6\}$ grupy $SO(6)$ je

antisymetrickým tenzorem druhého ranku grupy $SO(4)$, který má dimenzi $4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = 6$, jak má být. Je jedno, zda bereme $\{4\} \wedge \{4\}$ nebo $\{\bar{4}\} \wedge \{\bar{4}\}$; tyto reprezentace jsou ekvivalentní, jelikož je lze přepočítávat pomocí antisymetrického tenzoru Levi-Civitty $v_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{v^{\gamma\delta}}{2}$.



Tullio Levi-Civita (1873 – 1941)

A tak mluvmě místo o podalgebře $SO(10) \times SO(6)$ o $SO(10) \times SU(4)$. Dále, $SU(4)$ má očividnou podgrupu $SU(3) \times U(1)$. Značíme-li horními indexy $U(1)$ náboje, rozkládá se nám $\{4\}$ grupy $SU(4)$ na $\{1\}^3 \oplus \{3\}^{-1}$, $\{6\}$ grupy $SU(4)$ - právě ztotožněný s antisymetrickým součinem dvou $\{4\}$, se transformuje jako $\{3\}^2 \oplus \{\bar{3}\}^{-2}$ a přidružená reprezentace $SU(4)$, což je vlastně $\{4\} \otimes \{\bar{4}\} - \{1\}$ ($-\{1\}$ značí odstraněný singlet - stopu) se pod $SU(3) \times U(1)$ transformuje jako $\{8\}^0 \oplus \{3\}^{-4} \oplus \{\bar{3}\}^{-4} \oplus \{1\}^0$, kde $\{8\}$ znamená přidruženou $SU(3)$. Kombinací všech faktů docházíme k vytouženému rozkladu přidružené reprezentace E_8 vůči podgrupě $SO(10) \times SU(4) \times U(1)$:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{248}\} = & \left((\{\mathbf{45}\} \otimes \{\mathbf{1}\})^0 \oplus (\{\mathbf{1}\} \otimes \{\mathbf{1}\})^0 \oplus (\{\mathbf{16}\} \otimes \{\mathbf{1}\})^3 \oplus (\{\overline{\mathbf{16}}\} \otimes \{\mathbf{1}\})^{-3} \right) \oplus \\
& \oplus \left((\{\mathbf{16}\} \otimes \{\mathbf{3}\})^{-1} \oplus (\{\mathbf{10}\} \otimes \{\mathbf{3}\})^2 \oplus (\{\mathbf{1}\} \otimes \{\mathbf{3}\})^{-4} \right) \oplus \\
& \oplus \left((\{\overline{\mathbf{16}}\} \otimes \{\overline{\mathbf{3}}\})^1 \oplus (\{\mathbf{10}\} \otimes \{\overline{\mathbf{3}}\})^{-2} \oplus (\{\mathbf{1}\} \otimes \{\overline{\mathbf{3}}\})^4 \right) \oplus (\{\mathbf{1}\} \otimes \{\mathbf{8}\})^0 .
\end{aligned}
\tag{9.210}$$

Zvláštní pozornosti zaslouží 78 generátorů, které jsou $SU(3)$ singlety. Neb komutátor dvou $SU(3)$ singletů musí být opět $SU(3)$ singlet, lze usoudit, že těchto 78 generátorů tvoří uzavřenou podalgebru (těch generátorů, které s onou $SU(3)$ komutují, někdy zvanou **centralizátor** grupy $SU(3)$); je známa jako vyňatá Lieova algebra E_6 . Evidentní je maximální subalgebra $SO(10) \times U(1)$, vůči níž se přidružená reprezentace E_6 rozkládá podle předpisu

$$\{\mathbf{78}\} = \{\mathbf{45}\}^0 \oplus \{\mathbf{16}\}^3 \oplus \{\overline{\mathbf{16}}\}^{-3} \oplus \{\mathbf{1}\}^0 .
\tag{9.211}$$

A co víc, rozklad $\{\mathbf{248}\}$ obsahuje 27 kopií $\{\mathbf{3}\}$ grupy $SU(3)$. Tyto se musí zobrazovat na sebe při E_6 transformacích, a tak musí mít E_6 nějakou 27-rozměrnou reprezentaci s $SO(10) \times U(1)$ rozkladem

$$\{\mathbf{27}\} = \{\mathbf{16}\}^{-1} \oplus \{\mathbf{10}\}^2 \oplus \{\mathbf{1}\}^{-4} .
\tag{9.212}$$

Jistotu zvýšíme ověřením, že $16 \cdot (-1) + 10 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) = 0$ – stopa $U(1)$ generátoru v reprezentaci $\{\mathbf{27}\}$ grupy E_6 je nula. To je v soulase s faktem, že stopa každého generátoru nějaké prosté Lieovy algebry vymizí v každé reprezentaci (onen $U(1)$ generátor je jedním ze 78 generátorů E_6). Tím také dokazujeme ireducibilitu, jelikož tato stopa by se neanulovala po vyškrtnutí některých členů rozkladu $\{\mathbf{27}\}$. Komplexně sdruženou reprezentací jsou $\{\overline{\mathbf{3}}\}$

$$\{\overline{\mathbf{27}}\} = \{\overline{\mathbf{16}}\}^1 \oplus \{\mathbf{10}\}^2 \oplus \{\mathbf{1}\}^4 .
\tag{9.213}$$

Poslední vysazené formule nejsou zjevně vzájemně izomorfní, takže $\{27\}$ a $\{\overline{27}\}$ jsou komplexní reprezentace, neekvivalentní k nim komplexně sdruženým. \mathbf{E}_6 je opravdu jedinou vyňatou Lieovou algebrou, která vůbec komplexní reprezentace má. Posbíráním členů lze dojít k rozkladu $\{248\}$ grupy \mathbf{E}_8 vůči maximální podgrupě $\mathbf{E}_6 \times SU(3)$.

$$\{248\} = (\{78\} \otimes \{1\}) \oplus (\{1\} \otimes \{8\}) \oplus (\{27\} \otimes \{3\}) \oplus (\{\overline{27}\} \otimes \{\overline{3}\}) . \quad (9.214)$$

Užijeme-li maximální podgrupu $SU(2) \times U(1)$ grupy $SU(3)$ a označíme-li horními indexy $U(1)$ náboj, máme

$$\begin{aligned} \{248\} = & (\{78\} \otimes \{1\})^0 \oplus (\{1\} \otimes \{3\})^0 \oplus (\{1\} \otimes \{2\})^{-3} \oplus \\ & \oplus (\{1\} \otimes \{2\})^3 \oplus (\{1\} \otimes \{1\})^0 \oplus (\{27\} \otimes \{1\})^2 \oplus \quad (9.215) \\ & \oplus (\{27\} \otimes \{2\})^{-1} \oplus (\{\overline{27}\} \otimes \{1\})^{-2} \oplus (\{\overline{27}\} \otimes \{\overline{2}\})^1 . \end{aligned}$$

Posbíráním $SU(2)$ singletů dostaneme 133-rozměrnou přidruženou reprezentaci další vyňaté grupy \mathbf{E}_7 , která se rozkládá pod maximální podgrupou $\mathbf{E}_6 \times U(1)$ na

$$\{133\} = \{78\}^0 \oplus \{1\}^0 \oplus \{27\}^2 \oplus \{\overline{27}\}^{-2} . \quad (9.216)$$

Shromážděním dubletů (u grupy $SU(2)$ je reprezentace $\{2\}$ pseudoreálná a tedy izomorfní $\{\overline{2}\}$!) získáme fundamentální 56-rozměrnou reprezentaci \mathbf{E}_7 s $\mathbf{E}_6 \times U(1)$ rozkladem

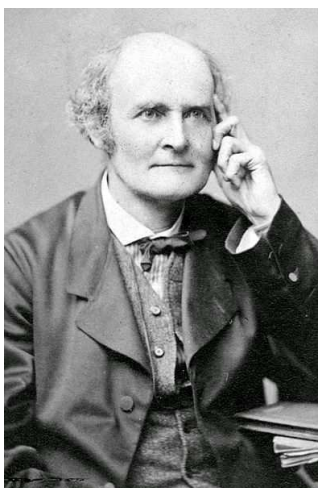
$$\{56\} = \{1\}^{-3} \oplus \{1\}^3 \oplus \{27\}^{-1} \oplus \{\overline{27}\}^1 \quad (9.217)$$

a můžeme tedy zapsat rozklad $\{248\}$ grupy E_8 pro maximální podgrupu $E_7 \times SU(2)$

$$\{248\} = (\{133\} \otimes \{1\}) \oplus (\{56\} \otimes \{2\}) \oplus (\{1\} \otimes \{3\}) . \quad (9.218)$$

Kromě E_6 , E_7 , E_8 známe ještě vyňaté grupy F_4 a G_2 . Zmíněnou $SO(9)$ konstrukci grupy F_4 lze vnořit do $SO(16)$ výstavby E_8 omezením se na J_{ij} pro $i, j = 1 \dots 9$ a výběrem 16 složek spinoru ze $\{128\}$, která se vůči $SO(9) \times SO(7)$ podgrupě $SO(16)$ rozkládá na $\{16\} \otimes \{8\}$, stejně jako $\{128'\}$.

Zajímavý je centralizátor grupy F_4 v E_8 . Musí jím být kombinace J_{ij} (spinory Q_α sotva donutíme komutovat s ostatními), a to podgrupa $SO(7)$ (aby komutovala s $SO(9)$ podgrupou F_4). Navíc musí zachovávat náš výběr $\{16\} \otimes \{1\}$ z $\{16\} \otimes \{8\}$, tj. půjde o podgrupu $SO(7)$ fixující jeden element osmírozměrné spinorové reprezentace. Této grupě se říká G_2 a je to současně grupa symetrií Cayleyovy algebry v tělese O všech oktonionů.



Arthur Cayley (1821 – 1895)

Tedy E_8 obsahuje podgrupu $F_4 \times G_2$.

Mimo jiné, trojindexový antisymetrický invariant lze teď získat z invariantního spinoru s_α jako

$$y^{mno} = s_\alpha \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^m \tilde{\gamma}_{\beta\gamma}^n \tilde{\gamma}_{\gamma\delta}^o s_\delta , \quad (9.219)$$

kde $\tilde{\gamma}^i = \gamma^i \gamma^8$ jsou gamma-matice $SO(7)$ upravené tak, aby působily uvnitř reprezentace, splňující

$$\{\tilde{\gamma}^i, \tilde{\gamma}^j\} = -\delta^{ij}. \quad (9.220)$$

A očekávali byste jiný rozpad $\{248\}$ grupy E_8 vůči podgrupě $F_4 \times G_2$ než direktní sumu přidružených reprezentací a produktu fundamentálních

$$\{248\} = (\{52\} \otimes \{1\}) \oplus (\{26\} \otimes \{7\}) \oplus (\{1\} \otimes \{14\}) ? \quad (9.221)$$

1) Topologická kvantová teorie pole

Geometrodynamika

Elektrické náboje (a jejich proudy) jsou zdroji elektromagnetického pole, avšak zároveň jsou čímsi cizorodým v teorii samotného elektromagnetického pole – jakási substance odlišná od pole.

V místech kladných elektrických nábojů elektrické siločáry začínají a vycházejí na všechny strany, do míst záporných elektrických nábojů siločáry ze všech stran vstupují a tam končí. Maxwellovy rovnice pole zde neplatí.

Celkový náboj v libovolné části prostoru lze podle Gaussovy věty zjistit tak, že vyšetřovanou oblast obklopíme myšlenou uzavřenou plochou S a změříme intenzitu E elektrického pole ve všech místech této uzavřené plochy – určíme počet siločar které jdou dovnitř nebo ven.

Nemohou se však siločáry které jdou dovnitř nějak nepozorovaně dostat zase ven aniž bychom to zaznamenali na uzavřené ploše tento vnitřek ohraničující (nebo podobně siločáry jdoucí ven se dostat zpět dovnitř)?

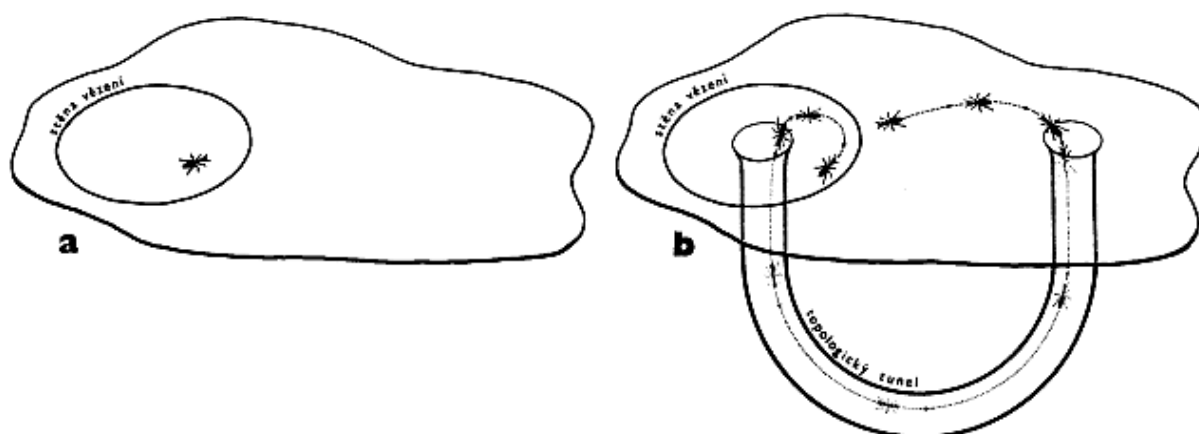
Nakresleme si tuto situaci v dvojrozměrném případě.

Místo siločar použijeme myšlené mravence, které zde budeme považovat za dvojrozměrné bytosti.

Na obr. 9.7a má dvourozměrný svět mravenců obvyklé vlastnosti a mravenec nacházející se uvnitř uzavřené křivky se skutečně nijak nemůže dostat ven aniž by prošel touto hranicí.

Co však když dvourozměrný svět mravenců vypadá tak, jak je to znázorněno na obr. 9.7b ?

Mravenec uvězněný v oblasti ze všech stran obklopené uzavřenou křivkou může projít tunelem a podívat se zvenčí na svoje vězení. Z hlediska trojrozměrného okolí, do něhož je tato konstrukce vnořena, na tom není nic divného – mravenec, i když se pohybuje stále v rámci své dvourozměrné plochy (svého světa), podleze stěnu svého vězení tak říkajíc přes další rozměr.



Obr.9.7. Vliv topologických vlastností prostoru na možnosti pohybu.

a) Vězeň (mravenec) obklopený ze všech stran stěnou vězení se v prostoru (zde dvojrozměrném) s obvyklými topologickými vlastnostmi nijak nemůže dostat ven, aniž projde stěnou vězení.

b) V prostoru s vícenásobně souvislou topologií lze opustit uzavřené vězení bez nutnosti projití jeho stěnou. Mravenec může projít topologickým tunelem a podívat se zvenku na neporušenou stěnu svého vězení.

Z hlediska samotných dvourozměrných mravenců, pro něž žádný třetí rozměr neexistuje, se však stal jakýsi zázrak: vězeň, ze všech stran obklopený zdí, se najednou nějakým způsobem ocitl vně svého vězení. Příčina je v tom, že uvedený dvojrozměrný prostor má jiné topologické vlastnosti než na obr. 9.7a - je **vícenásobně souvislý**.

Uzavřená křivka zde již nemusí být hranicí oblasti uvnitř.

Lokální geometrické vlastnosti v každém místě přitom mohou být zcela obvyklé (jen mírné zakřivení).

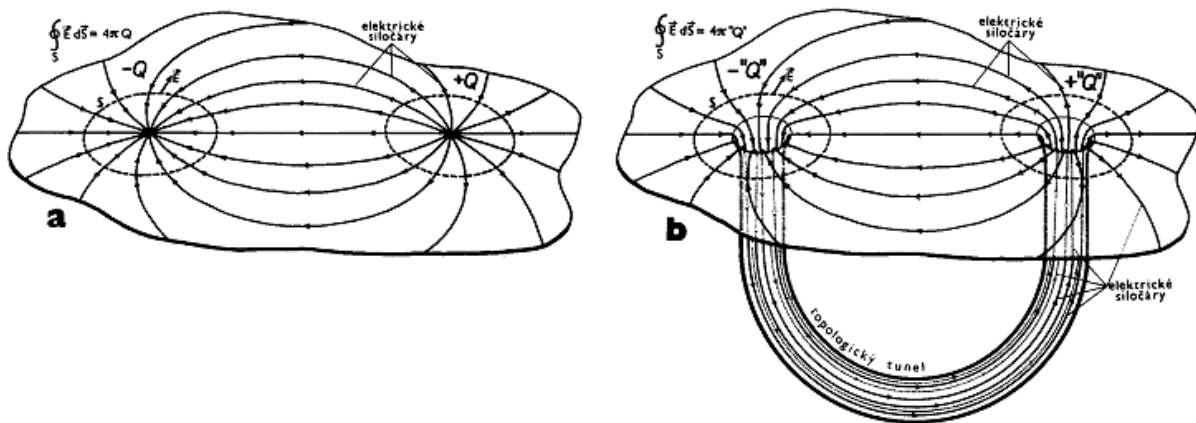
Když se teď vrátíme zpět k elektrickým nábojům, na obr. 9.8a je obvyklým způsobem v dvourozměrném nákresu znázorněn kladný elektrický náboj.

Z kladného náboje dle dohody siločáry vycházejí a končí na záporném náboji.

Obklopíme-li náboj myšlenou uzavřenou plochou S , můžeme „spočítáním“ siločar jež vcházejí nebo vycházejí stanovit hodnotu náboje Q uvnitř.

Tam však žádný skutečný elektrický náboj nemusí být.

Při vhodné topologii prostoru, jak je znázorněno na obr. 9.8b, sice budou skrze uzavřenou plochu S siločáry vstupovat dovnitř, tam však nebudou končit, alebrž projdou topologickým tunelem do jiného místa prostoru, kde opět vyvěrají na povrch a vracejí se zpět.



Obr.9.8. Klasická a topologická interpretace elektrických nábojů.

a) Obvyklé chápání elektrického náboje Q jako "substance"; z ní vycházejí (nebo do ní vcházejí) siločáry buzeného elektrického pole.

b) Topologická interpretace elektrického náboje - neexistuje žádný "skutečný" náboj jako substance, siločáry nikde nezačínají ani nekončí, jsou jen zachyceny a procházejí topologickým tunelem, jehož hrdla se pak jeví jako "zdánlivé" náboje " Q ".

Vnějšímu pozorovateli, měřícímu elektrické pole, se jedno ústí topologického tunelu jeví jako záporný náboj ($-Q$ - siločáry jdou dovnitř), druhé hrdlo tunelu jako náboj kladný ($+Q$ - siločáry jdou ven). Elektrické pole, jehož siločáry procházejí topologickým tunelem, všude vyhovuje Maxwellovým rovnicím.

V důsledku toho se celkový tok intenzity elektrického pole přes ústí tunelu nemůže měnit s časem, pokud se nemění topologie.

Nezáleží přitom na proměnnosti elektromagnetického pole, zakřivení prostoru, změnách průřezu topologického tunelu ani vzdálenosti obou jeho ústí. Tok elektrického pole

$$Q = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.222)$$

tedy vyhovuje zákonu zachování elektrického náboje.

Takováto **topologická interpretace elektrického náboje** je vlastně nábojem bez náboje. Žádné skutečné elektrické náboje neexistují, elektrické siločáry nemají začátky ani konce. Jsou pouze zachyceny a procházejí topologickým tunelem prostoru, jehož jednotlivá ústí se pak jeví jako kladné a záporné náboje. Tedy volné elektromagnetické pole ve vakuu bez nábojů může vlivem vhodné topologické struktury prostoru vytvářet efektivní elektrické náboje. Elektrický náboj se v tomto pohledu jeví jako nelokální vlastnost elektrodynamiky bez nábojů ve vícenásobně souvislém prostoru.

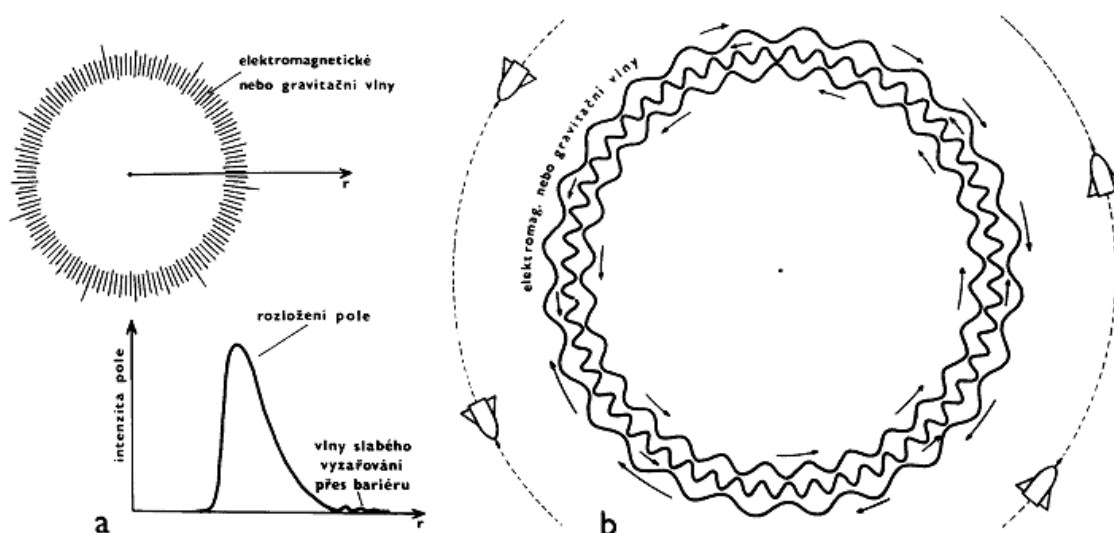
Na začátku tohoto odstavce jsme zdůraznili neuspokojivost koncepce, podle níž je pole buzeno zdrojem odlišným od pole. Pro elektromagnetické pole jako zdroj gravitace byla situace v zásadě úspěšně vyřešena, avšak v klasické fyzice je zdrojem gravitace též především obecná, blíže nespecifikovaná a nestrukturovaná hmota - objekty (tělesa, částice) mající hmotnost. V předchozích unitárních teoriích se částice pokoušeli interpretovat jako nějaké zvláštnosti (singularity) v poli, což však vede k řadě potíží, nebo jako nějaké spojitě struktury mající své zákony vnitřního pohybu; tyto zákony vnitřního pohybu však byly zavedeny zvenčí a nebylo jasné, jak je odvozovat v rámci uzavřené teorie. Jinak je tomu v geometrodynamice.

Zákony obecné teorie relativity připouštějí existenci objektů s obvyklou eukleidovskou topologií a bez singularit, chovajících se jako skutečná hmota (budící gravitační pole i na toto pole reagující), přičemž tyto objekty jsou složeny čistě ze samotného pole. Šíří-li se prostorem elektromagnetické vlny, budí kolem sebe gravitační pole - zakřivují prostoročas v němž se šíří, a to nezůstává bez vlivu na jejich pohyb. Podle obecné teorie relativity mohou velmi mohutné elektromagnetické vlny kolem sebe vytvořit tak silné gravitační pole, že jím budou nuceny trvale se pohybovat po uzavřených dráhách. Elektromagnetické vlny si

tak samy vytvářejí kolem sebe jakýsi gravitační "vlnovod" ze zakřivené geometrie prostoročasu (z gravitačního pole), v němž trvale cirkulují - obr. 9.9a.

Takový útvar z elektromagnetických vln, udržovaný pohromadě vlastní gravitací, se nazývá **elektromagnetický geon**.

Jestliže geon celkové hmotnosti M bude sféricky symetrický, bude vzbuzovat sféricky symetrické gravitační pole a prostoročasná metrika bude analogická (2.337). Geon není stabilní, ale pouze metastabilní - část energie vln proniká přes odstředivou a gravitační bariéru, geon se pomalu rozplývá (tím pomaleji, čím větší je počet vlnových délek po obvodu), nebo naopak může zkolabovat a vytvořit černou díru. Pro vzdáleného pozorovatele bude geon vykazovat gravitační účinky jako každá jiná hmota (třeba planeta) - můžeme např. na oběžnou dráhu kolem geonu uvést družici (obr. 9.9b).



Obr.9.9. Mohutné elektromagnetické nebo gravitační vlny mohou kolem sebe vytvořit tak silné gravitační pole (zakřivit prostoročas), že jím budou trvale nuceny cirkulovat v uzavřeném "gravitačním vlnovodu" - vzniká metastabilní hmotný útvar zvaný geon.

a) Průměrné rozložení pole v geonu.

b) Svými gravitačními účinky se geon chová jako každá jiná hmota (třeba planeta) - můžeme např. na oběžnou dráhu kolem geonu uvést družici.

Taková hmota složená z elektromagnetických vln se nám může zdát sice zvláštní, avšak hmotná povaha elektromagnetických vln je dostatečně vžitá. Ještě sugestivnější obraz dostaneme, když nahradíme elektromagnetické vlny vlnami gravitačními. Gravitační vlny rovněž přenášejí energii, zakřivují prostoročas (univerzální buzení gravitace) a

podle obecné teorie relativity mohou též vytvořit **gravitační geon**, který se bude navenek svými gravitačními účinky projevovat jako skutečná hmota.

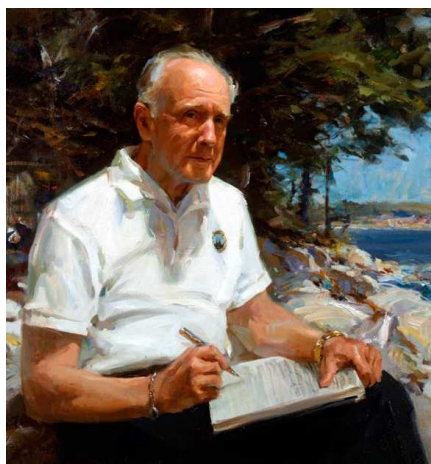
Gravitační vlny jsou však pouhým vlněním gravitačního pole, tedy fluktuacemi geometrie prázdného prostoročasu. Vnější pozorovatel se tak stává svědkem toho, kterak se vlnící křivost prázdného prostoročasu "bez hmoty" navenek projevuje jako hmotný útvar. Gravitační geon je tedy názorným modelem jakési "**hmoty bez hmoty**", hmoty utvořené doslova z "prázdnoty" prostoru s vlnící se křivostí.

Sledujeme-li hmotu buď ve stále menších měřítcích mikrosvěta, nebo naopak ve stále větších měřítcích megasvěta, bude hmota postupně ztrácet některé atributy na něž jsme zvyklí z běžné zkušenosti našeho makrosvěta a případně se začnou objevovat atributy nové. Vždy však zůstává základní znak hmoty - být **objektivní realitou**.

Hypotetický geon je jen určitým extrémním příkladem konstrukce hmotného objektu z geometrie prostoročasu; fakticky každá gravitační vlna popsaná svým **Isaacsonovým tenzorem nelokální energie-hybnosti** je takovou "hmotou bez hmoty", složenou z "vakua" chápaného v obvyklém smyslu. To, jak se i v "prázdném" prostoru bez obvyklých hmotných zdrojů objeví jakási efektivní hmota mající globální gravitační účinky, je ostatně podobné situaci v elektrodynamice, kde se i ve vakuu bez nábojů (a proudů) pro nestacionární elektromagnetické pole objevuje **Maxwellův posuvný proud** mající magnetické účinky stejné jako "skutečný" proud elektrických nábojů.

Kvantová geometrodynamika

Formální základy kvantové geometrodynamiky položil již v roce 1900 Max Planck. Fyzikální disciplínou se však kvantová geometrodynamika stala až o mnoho desetiletí později, především zásluhou J.A.Wheelera, DeWitta a později i mnohých dalších.



John Archibald Wheeler (1911 – 2008)



Bryce Seligman DeWitt (1924 – 2004)

Abychom si co nejsrozumitelněji vysvětlili oč se jedná, použijeme jednoduchý myšlenkový experiment.

Již z Newtonova gravitačního zákona plyne, že dvě hmotná tělesa o hmotnostech m_1 , m_2 , vzdálená od sebe r , se navzájem přitahují gravitační silou o velikosti

$$F_g = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (9.223)$$

kde $G = 6,67259 \cdot 10^{-11}$ je gravitační konstanta.

Gravitační potenciální energie dvou těles hmoty m_1 , m_2 je mírou práce kterou je nutno vykonat při přemístění těles ze vzdálenosti r_1 do vzdálenosti r_2 , tj.

$$\begin{aligned} E_p &= \int_{r_1}^{r_2} F_g \, dr = G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} \, dr = G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \\ &= G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) . \end{aligned} \quad (9.224)$$

Při přemístění těles ze vzájemné vzdálenosti r_2 zpět do vzdálenosti r_1 vykonají gravitační síly stejně velikou práci, takže těleso m_2 získá kinetickou energii

$$\begin{aligned}
 E_k &= \int_{r_1}^{r_2} F_g \, dr = \int_{r_1}^{r_2} m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} \, dr = m \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dv}{dt} \, dr = m \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{dr}{dt} \, dv = m \cdot \int_{v_1}^{v_2} v \, dv = \\
 &= m \cdot \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2),
 \end{aligned}
 \tag{9.225}$$

kde

$$m = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}
 \tag{9.226}$$

je tzv. **redukována hmotnost** obou těles.

Položíme-li počáteční vzájemnou rychlost obou těles $v_1 = 0$, a budeme-li dále předpokládat, že počáteční vzdálenost obou těles se blíží asymptotickému nekonečnu, pak srovnáním (9.224) a (9.225), dostáváme pro vzájemnou rychlost v_2 obou těles po vzájemném přiblížení se na vzdálenost r_1 , vztah

$$v_2 = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \sqrt{2 \cdot G \cdot (m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot (m_1 + m_2)}{r_1}}.
 \tag{9.227}$$

Jestliže mezi hmotnostmi obou těles platí relace $m_1 \gg m_2$, potom

$(m_1 + m_2) \rightarrow m_1 \stackrel{\text{def}}{=} M$, a rychlost v padajícího tělesa m_2 ve vzdálenosti r od hmotného středu gravitujícího tělesa M bude dána jednoduchým vztahem

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}}.
 \tag{9.228}$$

Dosadíme-li rychlost ze vztahu (9.228) do (2.3), dostaneme pro gravitační dilataci času

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{r \cdot c^2}} . \quad (9.229)$$

Vidíme, že čas je funkcí hmotnosti a poloměru, která je singulární při

$$r_g \leq \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2} , \quad (9.230)$$

což je tzv. **gravitační poloměr**.

Stlačíme-li těleso hmoty M pod jeho gravitační poloměr, prostoročas se okolo něho úplně uzavře a těleso vypadne ven z tohoto vesmíru.

Těleso poté pokračuje v nekontrolovaném samohroucení a neexistuje způsob, kterak tento proces zvrátit a vtáhnouti jej zpět do našeho vesmíru.

Zůstane po něm pouze prostoročasová trhlina o poloměru r_g , - černá díra, neboli **gravitační kolapsar**.

Vztah (9.230) si kupodivu zachovává svoji obecnou platnost i v Einsteinově obecné teorii relativity, takže k jeho použití zde jsme plně oprávněni.

Předpokládejme nyní, že se budeme snažit neustále zvyšovat rozlišovací schopnost optického mikroskopu, abychom mohli sledovat stále jemnější prostorové detaily.

Rozlišovací schopnost mikroskopu je rovna poloviční délce vln použitého záření, která souvisí s energií fotonů vztahem

$$\lambda = \frac{c \cdot h}{E} . \quad (9.231)$$

Jelikož energie závisí na hmotnosti částice Einsteinovým vztahem

$$E = M \cdot c^2 , \quad (9.232)$$

máme

$$\lambda = \frac{h}{M \cdot c} . \quad (9.233)$$

Srovnáme-li vztah pro gravitační průměr odvozený z (9.230) s (9.233), dostáváme

$$\frac{4 \cdot G \cdot M}{c^2} = \frac{h}{M \cdot c} . \quad (9.234)$$

čili

$$M_h = \sqrt{\frac{c \cdot h}{4 \cdot G}} . \quad (9.235)$$

což je tzv. **Planckova hmotnost**, udávající maximální hodnotu hmotnosti jíž může foton nabývat.

Této hmotnosti odpovídá nejkratší vlnová délka kterou může foton získat a která představuje zároveň nejkratší prostorový interval, který lze fyzikálně rozlišit.

Tento interval, který nazýváme **Planckovou-Wheelerovou délkou**, fyzikálně reprezentuje elementární kvantum prostoru:

$$l_h = \frac{\lambda_{\min}}{2} = \sqrt{\frac{G \cdot h}{c^3}} . \quad (2.236)$$

Doba, za kterou světlo překoná Planckovu-Wheelerovu délku představuje nejkratší možný rozlišitelný časový interval, a nazývá se **Planckův – Wheelerův čas**:

$$t_h = \frac{l_h}{c} = \sqrt{\frac{G \cdot h}{c^5}} . \quad (2.237)$$

Tato veličina reprezentuje elementární kvantum času.

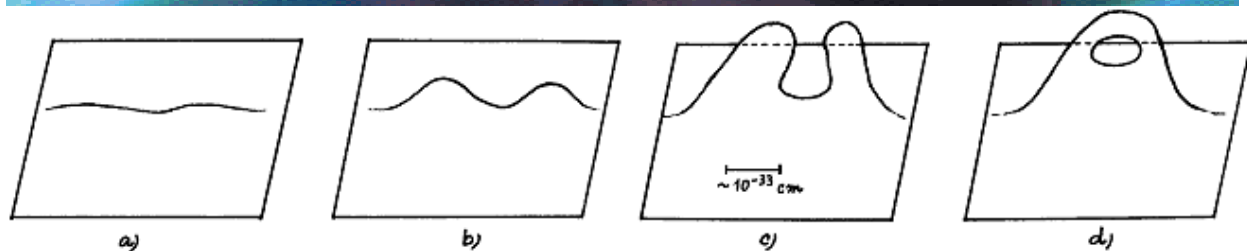
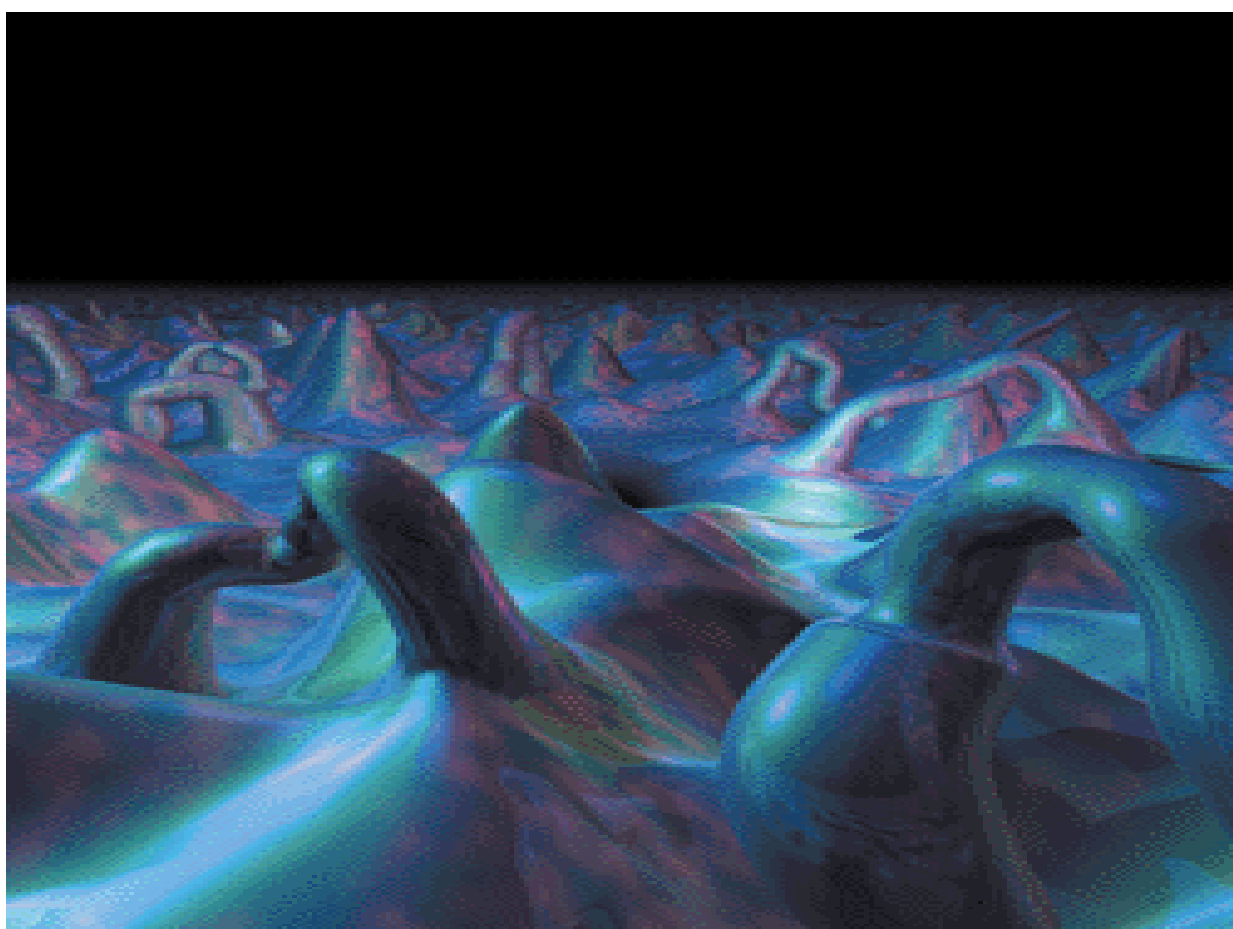
V měřítkách $\sim 10^{-10}$ m s nimiž pracuje atomová fyzika se pohybujeme v řádu $\sim 10^{25}$ Planckových délek.

Dokonce i pro měřítko $\sim 10^{-15}$ m jaderné fyziky jsou kvantové fluktuace metriky stále ještě o 20 řádů menší, a tedy zcela zanedbatelné.

Proto ve všech situacích, s nimiž se zatím setkáváme, můžeme prostoročas plným právem považovat za hladké kontinuum.

Základní postulát obecné teorie relativity, že prostor je lokálně eukleidovský, je tedy velmi dobře splněn pokud slovem lokálně nebudeme myslet měřítko blízká Planckově délce.

Jdeme-li však do stále menších měřítek, kvantové fluktuace stále rostou, až v oblastech velikosti Planckovy délky $\sim 10^{-35}$ m, jsou fluktuace metriky prostoročasu již natolik silné, že přerůstají ve fluktuace topologie viz obr. 9.10.



Obr.9.10. Ve velmi malých měřítcích mohou kvantové fluktuace metriky prostoru (a,b,c) spontánně vzrůst natolik, že prostor se stane vícenásobně souvislým (d) - přerostou ve fluktuace topologie.

Dynamická evoluce prostoročasu tak vede ke zcela specifickým zákonitostem na velmi malých vzdálenostech.

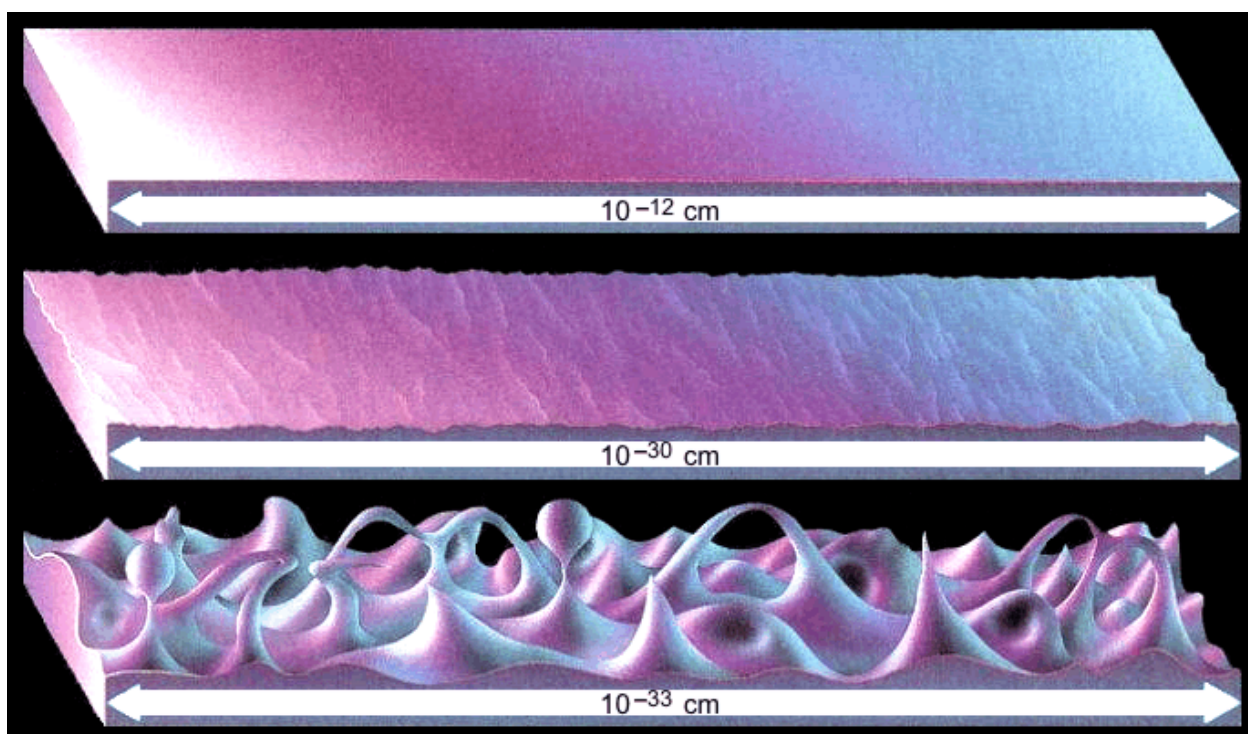
V mikroměřítkách řádu Planckových rozměrů velmi silně fluktuuje nejen geometrie, ale i topologie prostoročasu.

Při běžném pohledu se nám prostor jeví jako spojitě hladké kontinuum. Je to podobné, jako když se z vysoko letícího letadla díváme na povrch oceánu.

Vidíme zcela hladkou hladinu, jen mírně globálně zakřivenou do tvaru Zeměkoule.

Seskočí-li však pozorovatel padákem a postupně se blíží k hladině, vidí stále zřetelněji, že je rozvlněná.

Když nakonec dosedne na hladinu, uvědomí si, jak daleko má hladina do ideálně rovné a hladké plochy – hladina se prudce vlní, pění a stříká.



Obr.9.11. K analogii mezi geometricko-topologickou strukturou prostoročasu a strukturou hladiny oceánu.

- a) Při pohledu s rozlišením odpovídajícím zhruba průměru atomového jádra se struktura prostoročasu jeví jako ideálně hladká.
- b) Při detailnějším pohledu se prostoročas jeví jako zvlněný, ale jinak hladký.
- c) Z bezprostřední blízkosti je vidět, že silně fluktuuje nejen zakřivení prostoročasu, ale i jeho topologická struktura.

V metrových měřítkách silně fluktuuje místní zakřivení hladiny (vlny), v centimetrových a milimetrových měřítkách fluktuuje dokonce i topologická struktura hladiny (oddělují se kapky, vznikají bubliny pěny). Podobně i v našem časoprostorovém kontinuu se budou projevovat kvantové fluktuace geometrie tím výrazněji, čím menší mikrooblasti sledujeme - viz obr. 9.11.

V měřítkách srovnatelných s Planckovou – Wheelerovou délkou, pak bude fluktuovat i samotná topologie prostoru.

Budou se např. vytvářet a opět zanikat topologické tunely, apod. (viz kapitola 4).

Dle kvantové geometrodynamiky je tedy ono zdánlivě prázdné vakuum dějištěm nejbouřlivějších mikrojevů.

Prostorčas má v těchto měřítkách pěnovitou, neustále spontánně fluktuující mikrostrukturu, plnou prudkých perturbací prostorčasové geometrie.

Pro elektromagnetické záření s delší vlnovou délkou se v příslušném delším měřítku kvantové fluktuace metriky zprůměrují a zcela vyhladí, takže toto záření se bude v klasickém vakuu pohybovat přesně rychlostí světla $v = c$. Fotony vysokoenergetického záření gama s velmi krátkou vlnovou délkou však budou na fluktuace metriky prostorčasu v jemném měřítku "citlivější", než nízkoenergetické fotony. Takové vlnění se bude pohybovat po mírně zvlněné geodetické dráze, fotony se budou v jistém smyslu "prodírat" nerovnostmi dráhy, způsobenými jemnými poruchami metriky a jejich efektivní rychlost bude o něco menší než c . Můžeme to přirovnat k pohybu automobilu s malými kolečky a s velkými koly po hrbolaté cestě: při pohánění kol stejnou obvodovou rychlostí pojedou automobil s malými kolečky o něco pomaleji než auto s velkým průměrem kol.

Tento jev nelze považovat za porušení či selhání speciální teorie relativity, která přesně platí v plochem prostorčase bez defektů metriky.

Tyto rozdíly se projevují až při velmi vysoké energii záření gama, v oblasti GeV a TeV. I zde jsou rozdíly v rychlosti velice malé (řádově 10^{-20}), bez možnosti laboratorního změření. Mohly by být v budoucnu prokázány jedině časovým porovnáním detekce světla a záblesků tvrdého gama záření z katastrofických procesů ve vzdáleném vesmíru. Na kosmologických vzdálenostech miliard světelných let by se

i tyto nepatrné rozdíly v rychlosti mohly "nakumulovat" a projevit se měřitelnými efekty (problémem je ovšem odlišit tyto rozdíly od rozdílů emisních časů v samotných zdrojích).

Kvantové fluktuace způsobují, že prostor má kromě makroskopické (gravitační) křivosti též mikrokřivost poloměru l_h a všude vznikají a opět zanikají hrdla topologických tunelů, jejichž rozměry a vzájemné vzdálenosti jsou rovněž řádově srovnatelné s l_h .

Máme-li topologický tunel o průměru l a tedy ploše $\sim l^2$, budou zde kvantové fluktuace intenzity elektrického pole řádově

$$E \approx \frac{\sqrt{\hbar \cdot c}}{l^2}, \quad (9.238)$$

takže celkový tok intenzity pole udávající efektivní elektrický náboj bude řádově

$$q \approx \sqrt{\hbar \cdot c}, \quad (9.239)$$

nezávisle na rozměrech tunelu.

Tento geometrodynamický náboj však nemá žádnou přímou souvislost s elementárním nábojem částic, neboť je mnohem větší a není kvantován.

Hustota energie \sim hmoty pole v typickém topologickém tunelu dosahuje fantastických hodnot

$$\rho = \frac{E^2}{c^2} = \frac{\hbar}{c \cdot l_h^4} \approx 5 \cdot 10^{97} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (9.240)$$

Tuto hustotu nazýváme **Planckova-Wheelerova hustota hmoty**, a je považována za mezní hodnotu koncentrace hmoty elektromagnetického či gravitačního záření v prostoročase.

Charakteristická energie \sim hmota připadající na jeden topologický tunel je dána vztahem (9.235), což představuje zhruba $2,2 \cdot 10^{-5}$ g, tj. řádově 10^{26} eV.

To je o 8 řádů více, než největší energie částic zaznamenané doposud v kosmickém záření a o 17 řádů více než klidové hmotnosti nejtěžších známých elementárních částic.

Teoretický model předpokládá, že po dosažení energie 10^{26} eV na jednu částici, dojde ke sjednocení všech čtyř fundamentálních fyzikálních interakcí v jednu jedinou supersymetrickou interakci zvanou též **supergravitace**. Tyto obrovské hodnoty jsou však evidentně v rozporu s velmi nízkou střední hustotou energie, kterou pozorujeme v současném vesmíru. Vezmeme-li však v úvahu příspěvek gravitace k hustotě energie a hmoty, pak dvě typická ústí tunelu o hmotnostech $m_1 \approx m_2 = M_h$, vzdálená od sebe l_h , budou mít při vzájemné gravitační interakci vazbovou energii

$$E_{gr} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r_{1,2}} \approx -c^2 \cdot \sqrt{\frac{\hbar \cdot c}{G}} \quad (9.241)$$

Hmotový defekt dvou sousedních ústí topologických tunelů

$$\Delta m_{gr} = \frac{E_{gr}}{c^2} = -\sqrt{\frac{\hbar \cdot c}{G}} = -M_h \quad (9.242)$$

který je záporný a stejného řádu jako kladná elektromagnetická hmotnost obou struktur, může tedy lokálně kompenzovat energie příslušných fluktuací.

Takto lokálně vykompenzované fluktuace již nevykazují gravitační přitažlivost s ostatními toky hmoty a energie ze vzdálenějších topologických tunelů.

Po takovéto celkové kompenzaci obrovských pikofluktuací může vakuum vypadat tak, jak jej pozorujeme.

Pozorované elementární částice, které však zřejmě nejsou zdaleka elementární, jsou zřejmě jakýmsi kolektivními excitacemi v moři silných fluktuací mikrogeometrie, zahrnujícími obrovské množství elementárních fluktuací, které se však všude jinde v průměru ruší, tvoříc v makroskopických měřítkách obvyklé vakuum.

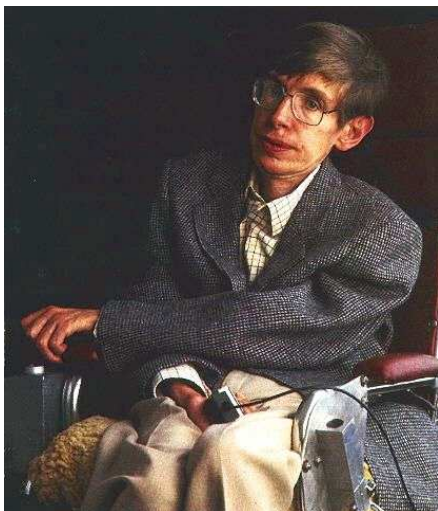
Na rozdíl od vztahu (9.240), udávajícího mezní hustotu záření, mezní hustota partonických částic je rovna hustotě partonu, tj. poměru hmoty

partonu a objemu tzv. **elementární buňky cytoprostoru**, tj. krychličky o straně jedné Planckovy délky:

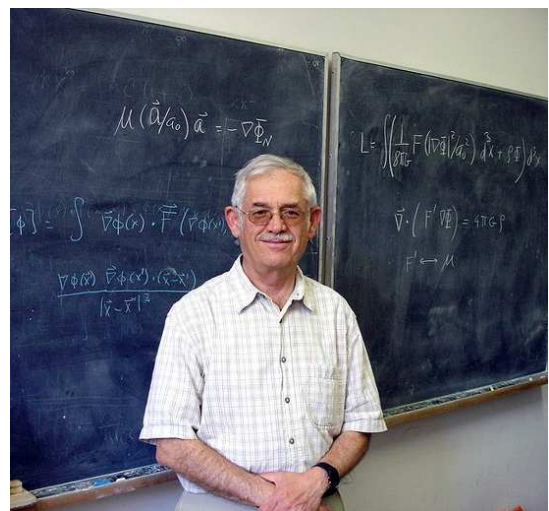
$$\rho = \frac{h}{c^2 \cdot l_h^3} \approx 10^{54} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} . \quad (9.243)$$

Termodynamika kolapsarů - Hawkingův efekt.

Stlačíme-li hmotu pod její gravitační poloměr r_g , daný vztahem (9.230), úniková rychlost (9.228) na jejím povrchu bude rovna rychlosti světla ve vakuu. To znamená, že ani světlo nebude schopno pronikat ven ze sférické oblasti vymezené gravitačním poloměrem, tj. z gravitačního kolapsaru. Protože žádný signál se nemůže v prostoročase šířit vyšší rychlostí než je rychlost světla ve vakuu, znamená to, že nitro gravitačního kolapsaru je mohutnou gravitací odříznuto od okolního regulárního prostoročasu. Zatímco do nitra kolapsaru mohou pronikat částice velmi snadno, ven by se dle klasické fyziky, tj. obecné teorie relativity, nemělo dostat nic. Jedná se tedy o oblast, v níž je relativistický prostoročas úplně zakřiven, tj. zcela uzavřen sám do sebe. Kvantověmechanický rozbor celého problému provedený v roce 1974 Stephenem Hawkingem a Jacobem Bekensteinem však odhalil pozoruhodnou skutečnost, že kolapsary ve skutečnosti vyzařují energii, ačkoliv je to v rozporu s klasickou fyzikou.



Stephen William Hawking (1942)



Jakob David Bekenstein (1947)

Hranice kolapsaru zvaná **Schwarzschildova sféra** není totiž o nic tlustší než jedna Planckova délka.

Částice která se vytvoří těsně pod touto hranicí ji může překonat a proniknout tak do regulárního prostoročasu pouze za předpokladu, že na kratičký okamžik bude schopna letět nadsvětelnou rychlostí.

Podle kvantové teorie, však tomu vůbec nic nebrání.

Heisenbergovy relace neurčitosti (3.75), (3.76) totiž ukazují, že průměrná rychlost částice podléhá na krátkých prostorových a časových intervalech lokálním fluktuacím.

Částice s tzv. nulovou klidovou hmotností, jež se dle klasické fyziky musí pohybovat přesně rychlostí světla, tedy ve skutečnosti musí dodržovat tuto mezní rychlost pouze v průměru, tj. na prostorových a časových intervalech dostatečně dlouhých ve srovnání s Planckovou délkou a Planckovým časem.

Na vzdálenostech řádově srovnatelných s šířkou Schwarzschildovy sféry však dochází ke značným odchylkám od této střední hodnoty rychlosti fotonů a dalších částic.

Pokud se zde některé fotony mohou pohybovat např. podsvětelnou rychlostí, pak jiné fotony tu musí dosahovat naopak lokálně nadsvětelných rychlostí, aby bylo možno zprůměrováním rychlostí všech fotonů nakonec dospět k hodnotě velmi blízké rychlosti světla.

Částice, které vznikly uvnitř kolapsaru v dostatečné blízkosti Schwarzschildovy sféry tedy mají možnost na krátkou dobu překonat rychlost světla a uniknout mimo kolapsar.

Poté však musí svoji rychlost rychle snížit na podsvětelnou hodnotu, aby jejich průměrná rychlost nepřekročila maximální povolenou hodnotu c .

V této fázi mohou být některé částice, kterým se již podařilo uniknout skrze Schwarzschildovu sféru ven z kolapsaru, opět vtaženy do jeho útrob působením mohutných gravitačních sil.

Pravděpodobnost že se tak stane je nepřímo úměrná tomu, jak rychle klesá intenzita gravitačního pole se vzdáleností od Schwarzschildovy sféry.

Z formule (9.223) vyplývá, že tento pokles intenzity gravitačního pole směrem od Schwarzschildovy sféry je nepřímo úměrný čtverci poloměru kolapsaru r_g .

Tedy čím je kolapsar menší, tím rychleji vyzařuje energii do asymptotického nekonečna.

Čím více energie ~ hmoty vyzáří za jednotku času, tím více se zmenší jeho poloměr, a tím více energie vyzáří v následujícím okamžiku.

Teoretický výpočet ukazuje, že kolapsar má entropii

$$S = \frac{k_B}{4l_h^2} A, \quad (9.244)$$

kde A je plocha horizontu, přičemž vyzařuje jako absolutně černé těleso zahřáté na termodynamickou teplotu

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk}. \quad (9.245)$$

Vidíme, že entropie černé díry je dána počtem **Planckových ploch** l_h^2 , kterými lze pokrýt horizont černé díry (s koeficientem 1/4). Entropie černé díry (9.244) je zároveň **maximální entropií**, kterou lze "vtěsnat" do daného objemu uzavřeného uvnitř plochy velikosti A . Jinými slovy, černá díra představuje objekt, který nejefektivněji soustřeďuje entropii – plocha jejího horizontu A je nejmenším možným povrchem prostorové oblasti, v níž se hmota dané entropie S může nacházet.

V klasické termodynamice je entropie přímo úměrná objemu zaplněnému látkou. V kvantové fyzice gravitace je však entropie přímo úměrná povrchu, takže do daného objemu je možno "zakódovat" podstatně méně informace, než by odpovídalo klasické představě.

Dvojměrná plocha horizontu černé díry nese veškerou informaci o (trojrozměrných) konfiguracích pohlcené hmoty v černé díře, podobně jako dvojměrný hologram nese informace o trojrozměrném objektu. Tato skutečnost je proto často označována jako **holografický princip**. Holografický princip byl dále ještě zobecněn v souvislosti s budováním kvantových teorií gravitace: Informaci o systému uvnitř objemu V lze lokalizovat na povrch tohoto objemu, přičemž hustota informace nepřesahuje jeden bit na Planckovu plochu l_h^2 .

S postupným vypařováním se kolapsaru (zmenšováním r_g) se intenzita záření a energie emitovaných fotonů neustále zvětšuje, takže kvantová evaporace má lavinovitý charakter.

Závěrečné okamžiky existence kolapsaru tak završí mohutná kvantová exploze, při níž se během poslední zhruba jedné desetiny sekundy uvolní energie řádově 10^{23} J.

To přibližně odpovídá současné explozi několika milionů vodíkových pum.

V samém závěru svého života emituje kolapsar poslední foton o energii $E_\gamma = M_h \cdot c^2$, což představuje veškerou zbylou energii kolapsaru, takže tento foton bude identický s původním kolapsarem, který ve snaze zbavit se energie kvantovou evaporací, pokaždé znovu a znovu emituje sám sebe.

Je tedy možné, aby obří vesmírné kolapsary byly vlastně jakýmsi „přetloustlými“ fotony?

Wheelerův teorém „**černá díra nemá vlasy**“ říká, že vlastnosti kolapsarů skutečně, až se zarážející nápadností připomínají vlastnosti elementárních částic.

Ukazuje se totiž, že všechny kolapsary, ať již vznikly těmi nejrozličnějšími způsoby, z těch nejrozmanitějších forem hmoty jaké si jen lze představit (včetně čisté gravitace v podobě koncentrovaných gravitačních vln), se navenek makroskopicky projevují vnějším polem nesoucím pouze 3 elementární informace o vlastnostech hmoty z níž kolapsar vznikl. Těmito informacemi jsou:

celková hmotnost M kolapsaru,
celkový elektrický náboj Q kolapsaru,
vlastní moment hybnosti J kolapsaru,

Všechny ostatní informace jsou horizontem odříznuty od okolního prostoročasu a jsou tudíž navždy ztraceny z vesmíru.

Ani kvantová evaporace není schopna tato data vytáhnout z pod horizontu kolapsaru zpět do vesmíru.

Všechny kolapsary, ať již nejrozmanitějšího původu, jsou od sebe makroskopicky nerozlišitelné, mají-li stejnou hmotnost, náboj a rotační moment hybnosti.

Těmito svými vlastnostmi kolapsary připomínají elementární částice, které se taktéž projevují pouze několika základními pozorovatelnými, jimiž jsou klidová hmotnost, elektrický náboj, vlastní moment hybnosti (**spin**) a několik dalších kvantových čísel.

Stejně jako kolapsary, i elementární částice jsou vzájemně nerozlišitelné, pokud se od sebe neliší ve výše jmenovaných nezávislých pozorovatelných.

Poznámka: Výsledky teoretického výzkumu strun v posledních letech ukazují, že informace se v černé díře ve skutečnosti neztrácejí. Makroskopické informace jsou pouze rozloženy až na jejich vlastní kvantovou podstatu a poté lokalizovány na horizontu, odkud mohou být opět emitovány zpátky do vesmíru kvantovou evaporací. Blíže o tom pohovoříme v odstavci o holografickém principu v teorii strun. Kolapsar je tedy charakterizován nejen makroskopickými stavovými veličinami jako je hmotnost, moment hybnosti a elektrický náboj (kterak původně předpokládali Wheeler a Hawking), ale též mikroskopickými stavovými veličinami (kvantovými čísly a charakteristikami) veškerých částic, které jej vytvořily.

Superprostor

Feynmanova formulace kvantové teorie se vyznačuje velmi těsným vztahem ke klasické fyzice vyjádřené pomocí principu nejmenší akce. V klasické fyzice (mechanice, elektrodynamice, OTR) se mezi daným počátečním x_1 a koncovým x_2 stavem vyšetřovaného systému vždy

uskuteční pouze takový pohyb, pro nějž je integrál akce $S = \int_{x_1}^{x_2} L dt$

extremální. Naproti tomu v kvantové fyzice se jak známo uskutečňují i takové procesy, které nevyhovují tomuto principu a jsou podle klasické fyziky nemožné - např. tunelový jev.

Přechod od klasické fyziky ke kvantové je zde natolik elegantní a přímočarý, že se J. A. Wheeler pomocí tohoto přístupu snažil přesvědčit A. Einsteina, leč bezvýsledně, aby zrevidoval svůj odmítavý postoj ke stochastickým principům kvantové mechaniky.

Ve Feynmanově přístupu se rovnoprávně uvažují všechny trajektorie vedoucí z počátečního stavu x_1 do konečného stavu x_2 bez ohledu na to, zda jsou podle klasické fyziky přípustné nebo nikoliv. Vypočítá-li se pro

každou trajektorii integrál $\int_{x_1}^{x_2} L dt$, bude pravděpodobnost přechodu soustavy z počátečního stavu x_1 do koncového stavu x_2 dána čtvercem veličiny

$$F(x_1, x_2) = \sum \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} L dt\right), \quad (9.246)$$

získané jako suma vzata přes všechny trajektorie. Je evidentní, že největší příspěvek k této sumě dávají ty trajektorie, které mají fázový koeficient $\frac{i}{\hbar} \int L dt$ téměř stejný (exponenty se sčítají), zatímco pro

trajektorie s velkými rozdíly v $\frac{i}{\hbar} \int L dt$ se exponenty v součtu vzájemně ruší. Nejpravděpodobnější trajektorie (odpovídající blízkým hodnotám $\int L dt$) bude proto klasická trajektorie s extrémním chováním integrálu akce. Pod trajektorií se zde rozumí "dráha" v prostoru konfigurací dané soustavy; pokud se jedná o složitou soustavu popsanou velkým počtem parametrů, bude to trajektorie v mnoharozměrném prostoru. Feynman ukázal, že tato formulace je ekvivalentní obvyklému Schrödingerovu a Heisenbergovu pojetí kvantové mechaniky. Podobně jako u klasického principu nejmenší akce se v praxi nehledá bezprostředně extrém integrálu $\int L dt$, ale odvozují se Lagrangeovy pohybové rovnice, ani při použití Feynmanovy metody se přímo nepočítá celková suma přes všechny trajektorie. Feynmanova procedura se spíše používá jako prostředek pro odvozování a rozpracování kvantových teorií, jakož i jejich fyzikální interpretace.

Wheeler a DeWitt se pokusili použít Feynmanovy koncepce pro kvantování "nejklasičtějšího" objektu jaký si dovedeme představit: vesmíru jako celku. Zavedli tzv. **superprostor** - nekonečněrozměrný prostor, jehož "body" představují všechny možné geometrie prostoru (stavy vesmíru). Čára (trajektorie) v tomto superprostoru pak reprezentuje určitou variantu evoluce vesmíru. Je jasné, že praktické

použití superprostoru je možné pouze za velmi zjednodušujících předpokladů. Misner proto navrhl studovat evoluci uzavřeného homogenního vesmíru (zobecněných Kasnerových modelů), pro popis jehož stavu stačí tři parametry; nekonečně rozměrný superprostor se zde redukuje na trojrozměrný "minisuperprostor". Superprostor Fridmanových homogenních izotropních vesmírů je dokonce jednorozměrný - všechny prostorové řezy jsou charakterizovány hodnotou parametru $a(x^0)$. V rámci superprostoru lze matematicky formulovat i Wheelerovu kvantovou geometrodynamiku.



Edward Kasner (1878 – 1955)

Wittenovy topologické kvantové teorie pole

Roku 1974 navrhl Van't Hooft zobecnění kvantové chromodynamiky z kalibrační symetrie $SU(3)$, zahrnující 3 barvy na teorii, kde počet barev je libovolně velké přirozené číslo N a odpovídající grupa symetrie je $SU(N)$. Ukazuje se, že s růstem N je naděje na stále přesnější řešení teorie, neboť lze konstruovat nový druh poruchového rozvoje, v němž rozvojový parametr je $1/N$. V případě kvantové chromodynamiky $N = 3$ se poté lze omezit na prvních několik členů tohoto rozvoje, bychom dostali výsledky dostatečně blízké realitě. Ukázalo se, že tato myšlenka dobře funguje u kvantové chromodynamiky definované ve dvourozměrném prostoročase (jeden rozměr prostorový a jeden časový). Teorie tohoto druhu sdílejí mnohé rysy čtyřrozměrných kvantových teorií pole, ale bývají matematicky snáze zpracovatelné, zejména co se týče mnohem snadnější renormalizovatelnosti. Na základě tohoto

modelu Witten již roku 1978 podal vysvětlení, hmotností pionů. Roku 1983 pak Witten ukázal, že na základě této algebry by mohla být pochopena nejen fyzika pionů, ale i dalších hmotnějších hadronů. K tomu je nutno si představit hadrony jako exotické konfigurace pionových polí, jež nesou netriviální topologii. Z topologických důvodů nemohou být tyto polní konfigurace deformovány do malých variací v pionovém poli. Witten užil k odvození výsledku výjimečně chytré kombinace argumentů o pravděpodobném chování aproximace velkého N a pokročilé geometrie a topologie vedoucí k existenci nukleonů a dalších hadronů. Přes tento pokrok však dodnes nikdo nedokázal najít přesné řešení kalibrační teorie $SU(N)$ pro $N \rightarrow \infty$. To je výchozí bod, čili člen nultého řádu rozvoje v mocninách $1/N$, bez něhož nelze provádět přesné výpočty. Později se ukázalo, že tato limitní teorie velkého N je jistým druhem teorie strun pojednané v následujícím odstavci. Jak ale přesně postupovat aby tato idea fungovala, zůstává otevřeným problémem. O důležitý pokrok se postaral opět Witten, když roku 1983 objevil to, co dnes nazýváme **Wessův-Zuminův-Wittenův model**, jehož konstrukce se opět opírá o topologické triky s dvourozměrným prostoročasem. Tak, jako Hilbertův prostor kvantověmechanických modelů dává reprezentaci nějaké konečněrozměrné grupy transformací symetrie modelu, tak Wessův-Zuminův-Wittenův model je založen na Kacově-Moodyho nekonečněrozměrné grupě symetrie, a metodách, kterými se roku 1974 podařilo Victoru Katzovi a Robertu Moodymu zobecnit Weylovu teorii reprezentací konečněrozměrných grup na teorii reprezentací grup nekonečněrozměrných. Jeho Hilbertův prostor je pak reprezentací této grupy. Navíc může být rozložen na části, které jsou reprezentacemi grupy konformních transformací. Z fyzikálního hlediska je tato kvantová teorie pole zajímavá zejména tím, že jí lze přesně řešit bez potřeby poruchového rozvoje, neboť teorie reprezentace grup nám dovoluje přímá a přesná řešení. Pozoruhodné také je, že Kacovy-Moodyho grupy jsou grupami kalibračních symetrií, jež se ukázaly důležitými pro rozvoj standardního modelu. Jak studium těchto grup nižší dimenze může pomoci při výzkumu kalibračních symetrií ve čtyřrozměrném prostoročase, si ukážeme v následujícím odstavci věnovaném teorii strun.



Victor G. Kac (1943)



Robert Vaughan Moody (1941)

Pro každý daný prostor libovolné dimenze lze konstruovat kvantověmechanický model se supersymetrií, jehož Hilbertův prostor závisí čistě na topologii. Tento Hilbertův prostor je konečněrozměrný a odpovídá homologii prostoru. Homologie prostoru je topologickým invariantem, tzn. nemění se při spojitých deformacích daného prostoru a závisí tedy čistě jen na jeho topologii. Homologické invarianty udávají zpravidla počty děr různé dimenze pro daný prostor a topologie tohoto prostoru je jimi jednoznačně určena.

Topologický invariant uzlů objevil roku 1985 Vaughn Jones (tzv. Jonesův polynom). Michael Atiyah navrhl, že by mohla existovat čtyřrozměrná kvantová teorie pole, jejímž Hilbertovým prostorem by byla Floerova homologie třírozměrné hranice čtyřrozměrného prostoru a jejími pozorovatelnými veličinami by byly Donaldsonovy topologické invarianty. Atiyah ukázal, že Floerova homologie třírozměrného hraničního prostoru je přesně to, co je potřeba zafixovat, chceme-li dát smysl Donaldsonovým invariantům v případě čtyřrozměrného prostoru s hranicí. Roku 1988 použil Witten čtyřrozměrnou kvantovou teorii se supersymetrií a zavedl tzv. zkroucenou (twisted) supersymetrii, zaručující existenci supersymetrie i v zakřiveném čtyřrozměrném prostoru. Tato nová symetrie mu umožnila propojit supersymetrické kvantové teorie pole s topologií, do jediné topologické kvantové teorie pole. Snažíme-li se pro každý daný čtyřrozměrný prostor v této teorii vypočítat pozorovatelné veličiny, dostaneme nenulová řešení pouze tehdy, jedná-li se o veličiny nezávislé na deformacích prostoru – Donaldsovy polynomy. Jejich výpočet v obecném čtyřrozměrném prostoru je však mimořádně nesnadný.



Sir Vaughan Frederick Randal Jones (1952)



Sir Michael Francis Atiyah (1929)



Andreas Floer (1956 – 1991)



Simon Kirwan Donaldson (1957)

Podoblastí topologie s dlouhou historií je teorie uzlů. Jedním z hlavních cílů této teorie je nalezení topologických invariantů, jež by šlo přiřadit každému uzlu. Tyto invarianty se nemění, když deformujeme uzel, např. když se jej snažíme rozplést.

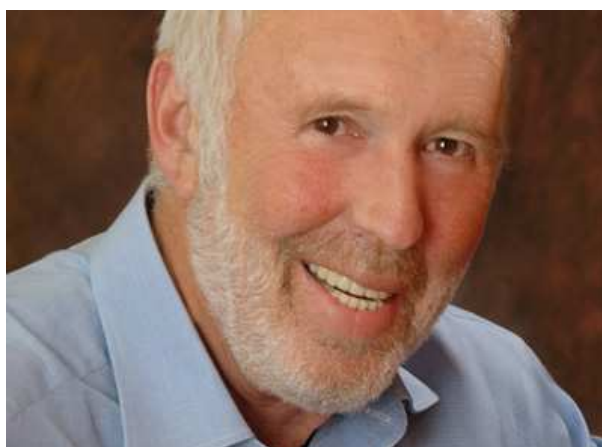
Jonesův polynom je topologický invariant, na nějž se v osmdesátých letech minulého století soustřeďovala značná část výzkumu uzlových teoretiků. Objevil se i v jedné práci o dvourozměrných konformních kvantových teoriích pole. Během léta 1988 se Wittenovi podařilo vytvořit topologickou kvantovou teorii pole, jejímiž fyzikálními veličinami byly přesně Jonesovy polynomy. Byla založena na Yangových-Millsových kalibračních polích a na uzlu, který se objevil jako trajektorie nabitě částice pohybující se v třírozměrném prostoročase. Lagrangián teorie je tvořen z Yangových-Millsových polí kalibrační teorie a nazývá se Chernův-Simonsův člen podle geometrů, kteří jej jako první zkoumali roku 1971.



Shiing-Shen Chern (1911 – 2004)



Erik Peter Verlinde (1962)



James Harris Simons (1938)

Nejpřekvapivější částí teorie je její Hilbertův prostor. Ten je konečněrozměrný s dimenzí určenou Verlindeovou formulí objevenou poprvé v konformní teorii pole. Ve Wittenově nové teorii pole se vynořovaly udivující vztahy mezi topologií uzlů a třírozměrnými prostory, teorií Kacových-Moodyho grup a jejich reprezentací, konformními teoriemi pole, atd.

Kromě Chernovy-Simsonovy a Donaldsonovy topologické kvantové teorie pole, jež vedly k novým myšlenkám o topologii třírozměrných a čtyřrozměrných prostorů, jakož i o uzlech v těchto prostorech, rozvinul Witten roku 1988 ještě jeden druh kvantové teorie pole, který nazval **topologickým modelem sigma**. V modelech sigma se poli v každém bodě prostoročasu přiřazuje bod v tzv. terčovém prostoru, což je obecně zakřivený prostor určité dimenze. V algebře toků je terčovým prostorem grupa. Prostor všech možných prvků grupy je zakřiveným prostorem

jisté dimenze. Pro grupu $U(1)$ je to prostě kružnice – prostor dimenze 1. Pro grupu $SU(2)$ je to třírozměrný povrch čtyřrozměrné koule.

Wittenův topologický model sigma je dvourozměrná kvantová teorie pole, jejímž terčovým prostorem je komplexní varieta. Každý bod takového prostoru je určen komplexními souřadnicemi. Ke každému bodu lze pak provést otočení souřadnic o 90° dané násobením imaginární jednotkou. Aby mohla mít varieta komplexní strukturu, zřejmě musí být její dimenze sudé číslo, neboť každá komplexní souřadnice je dvojicí reálných souřadnic.

V topologickém sigma modelu má jak dvourozměrný prostoročas, tak i terčový prostor komplexní strukturu, takže můžeme na pole klást **podmínku analytičnosti**. Podle této podmínky je pole analytické, pokud při násobení imaginární jednotkou (ať už v prostoročase či v terčovém prostoru) obdržíme totéž pole. Ačkoli obecně existuje neomezený počet všech možných konfigurací pole, počet těch analytických bývá zpravidla konečný.

Pozorovatelné veličiny ve Wittenově topologickém modelu sigma tvoří počty těchto analytických konfigurací pole. Tato čísla jsou v tomto modelu analogiemi Donaldsonových polynomů z Wittenovy topologické kvantové teorie pole.

Problém výpočtu takových čísel spadá do oblasti tzv. **algebraické geometrie**, studující všechna možná řešení soustav polynomiálních rovnic více proměnných. Má-li systém polynomiálních rovnic nekonečný počet řešení, tvoří tato řešení body abstraktního prostoru velmi komplikované geometrie a topologie. Jsou-li pak polynomiální rovnice rovnicemi komplexních proměnných, pak prostory jejich řešení tvoří komplexní variety a mohou být terčovými prostory pro Wittenův topologický model sigma. Obecně se očekává, že pro každý prostor řešení poskytne topologický model sigma číslo, udávající počet analytických polí, které bude druhem topologického invariantu. Dvěma různým prostorům řešení pak budou odpovídat různé počty analytických polí.

Topologický model sigma je supersymetrická kvantová teorie pole, v níž Witten opět použil triku zkroucení supersymetrie. Navíc jde o případ konformní teorie pole, neboť pozorovatelné veličiny jsou zde invariantní vzhledem ke všem transformacím dvourozměrného prostoročasu, včetně konformních transformací. V teoriích tohoto typu lze provést

jednoduchou transformaci, jež převádí původní teorii v novou, která je však velmi těsně provázána s původní. Tehdy hovoříme o tzv. **zrcadlité symetrii**. Terčový prostor se zde nazývá **zrcadlovým prostorem**.

V roce 1990 demonstrovali fyzici Brian Greene a Ronen Plesser, že zatímco některé výpočty prováděné v původním prostoru mohou být neobyčejně komplikované, či dokonce nemožné, stejné výpočty provedené v zrcadlovém prostoru se velmi výrazně zjednoduší a přitom poskytují správné výsledky.

V posledních desetiletích na poli zrcadlité symetrie velmi usilovně pracují jak matematici, tak fyzici. Zkoumala se řada souvislostí mezi topologickými modely sigma, zejména variantou topologické struny, maticovými modely obsahujícími integrály přes grupy $SU(N)$ pro velmi velká N a mnoho dalšího, ve snaze porozumět kalibračním teoriím pro velká N na základě teorie strun, skýtající netriviální topologickou informaci.



Brian Greene (1963)

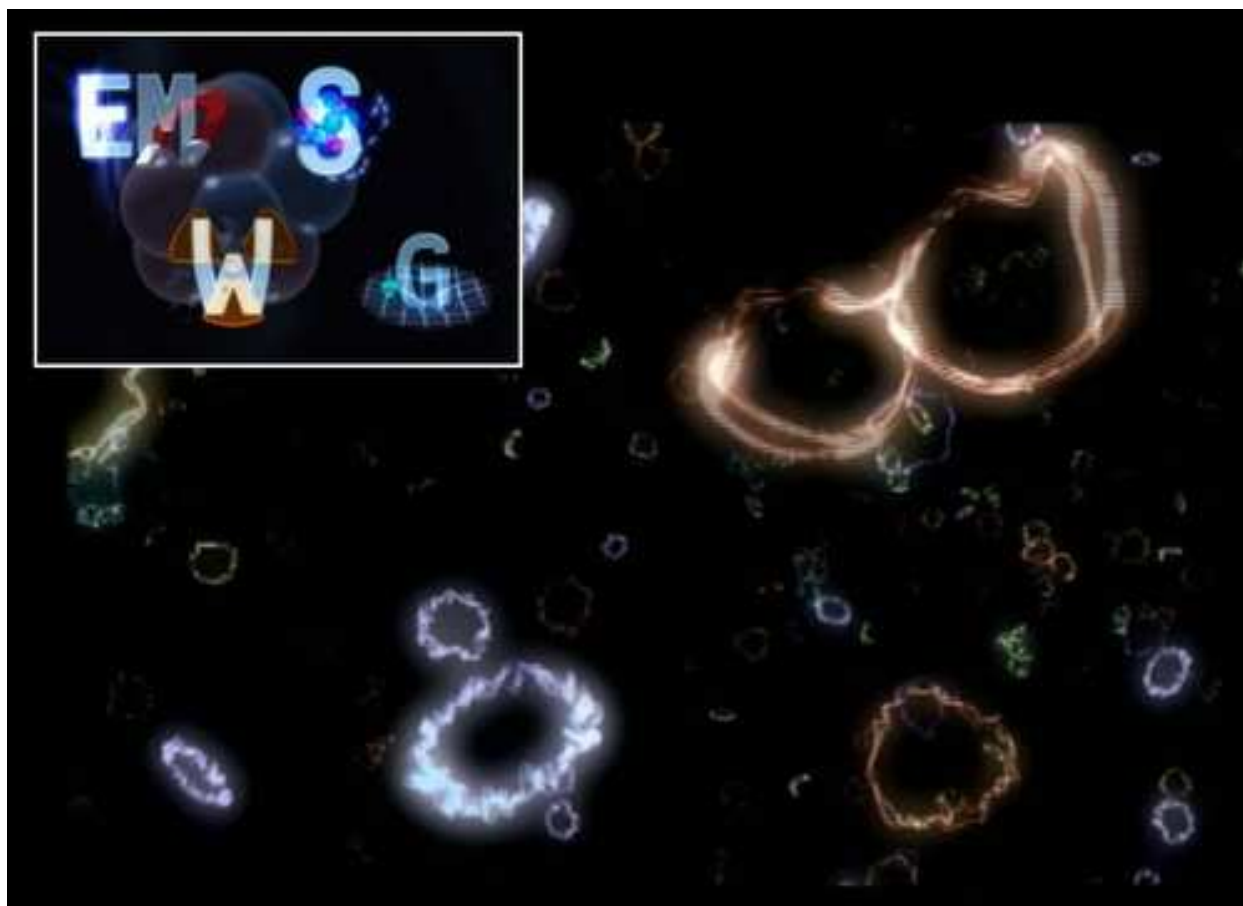


M. Ronen Plesser (1963)

2) Teorie strun

Jedním z výchozích pojmů fyziky je pojem **hmotného bodu** - idealizovaného objektu, jehož hmotnost (i ostatní parametry) jsou soustředěny do jediného geometrického bodu prostoru. Trajektorie, kterou probíhá hmotný bod v prostoru je křivka, jejíž každý bod lze charakterizovat prostorovými souřadnicemi a časem. Dynamika hmotného bodu v klasické mechanice je dána Newtonovými rovnicemi, v relativistické mechanice je popsána pohybem po světočáře ve čtyřrozměrném rovinném prostoročase STR, nebo v zakřiveném prostoročase OTR. V kvantové mechanice je dynamika částice popsána Schrödingerovou rovnicí; trajektorie, spojující počáteční a koncový stav částice v prostoru, jsou východiskem i při kvantování pomocí Feynmanových intergrálů přes trajektorie.

V klasické mechanice byl pojem hmotného bodu pouhou **idealizací** skutečných těles, výhodnou pro analýzu jejich pohybu. Speciální teorie relativity však posílila důležitost pojmu hmotného bodu: žádný elementární (fundamentální) objekt nemůže mít konečné prostorové rozměry, neboť žádný signál či interakce se nemůže šířit nadsvětelnou rychlostí. Při srážce dvou těles nenulových rozměrů nemohou všechny části reagovat ihned, z čehož plyne, že těleso je složeno z elementárnějších objektů: **⇒ elementární objekt musí být bodový**. Bodový charakter fundamentálních objektů - zdrojů pole - však vede k závažným problémům v teorii pole: při limitních přechodech k nulovým rozměrům vznikají matematicky **divergující výrazy** vedoucí k **nekonečným hodnotám**. Těchto divergencí je třeba se zbavit (v podstatě *ad hoc*) metodami **renormalizace** - provést třebas vhodnou kalibrační transformaci tak, aby se výsledky výpočtu shodovaly s experimentálními hodnotami.



Obr. 9.12: V teorii strun jsou částice jednorozměrné útvary v mnohorozměrném světě. Levý horní obdélník symbolizuje stav současné fyziky. Tři interakce jsou propojeny kvantovou teorií: EM – elektromagnetická, S (Strong) – silná a W (Weak) slabá. Poněkud stranou stojí zatím gravitace označená symbolem G, která je popisována pomocí zakřiveného prostoročasu.

Podařilo se však najít způsob, jak se těmto nepříznivým matematickým divergencím vyhnout systematicky - jsou to teorie, v nichž namísto bodů jsou elementárními objekty **jednorozměrné** čáry či smyčky nenulové délky - tzv. **struny**.

Časoprostorová historie struny je popsána funkcemi $x^\mu(\sigma, \tau)$, které zobrazují dvourozměrnou "světloplochu" struny do časoprostoru. Kromě x^μ jsou na světloploše i další pole, popisující další stupně volnosti, jako například stupně spojené se supersymetrií nebo kalibračními symetriemi. Překvapivě, *klasická* dynamika teorie strun (odpovídající klasické teorii pole s nekonečně mnoha poli) je popsána konformně invariantní 2D *kvantovou* teorií pole

$$S = \left(\frac{1}{L_{str}} \right)^2 \int d\sigma d\tau L(x^\mu, \dots) . \quad (9.247)$$

Co povyšuje struny nad vícerozměrné analogie je to, že tato 2D teorie je renormalizovatelná. (Objekty s p dimenzemi, p -brány, mají $p+1$ -rozměrný světoobjem.) Poruchovou kvantovou teorii strun lze formulovat metodou Feynmanova integrálu přes historie. To obnáší zaměstnat Riemannovu plochu s g otvory jako g -smyčkový Feynmanův diagram. Přitažlivými rysy tohoto přístupu je, že (pro orientované uzavřené struny) je právě jeden diagram v každém řádu poruchové teorie, reprezentující elegantní (ač komplikovaný) matematický výraz, který je ultrafialově konečný. Hlavním nedostatkem je, že nedává žádnou radu, jak jít za poruchovou teorii.

Abychom měli naději být realističtí, šest dimenzí se musí svinout do malé geometrické variety, jejíž rozměry jsou pravděpodobně srovnatelné s L_{str} . Jelikož prostoročasová geometrie je určena dynamicky (tak jako v obecné relativitě), jsou povoleny pouze geometrie splňující tyto dynamické rovnice ($R_{\mu\nu} = 0$). HE teorie, svinutá na konkrétní druh variety, zvaný Calabiho-Yauova varieta, má mnoho kvalitativních vlastností při nízkých energiích, které imitují standardní model: lehké fermiony se sdružují do rodin, jejichž počet je dán topologií CY variety. Těchto úspěchů bylo dosaženo v poruchovém rámci a jsou nutně přinejlepším kvalitativní, protože neporuchové jevy jsou podstatné pro pochopení narušení supersymetrie a jiné důležité detaily.



Eugenio Calabi (1923)



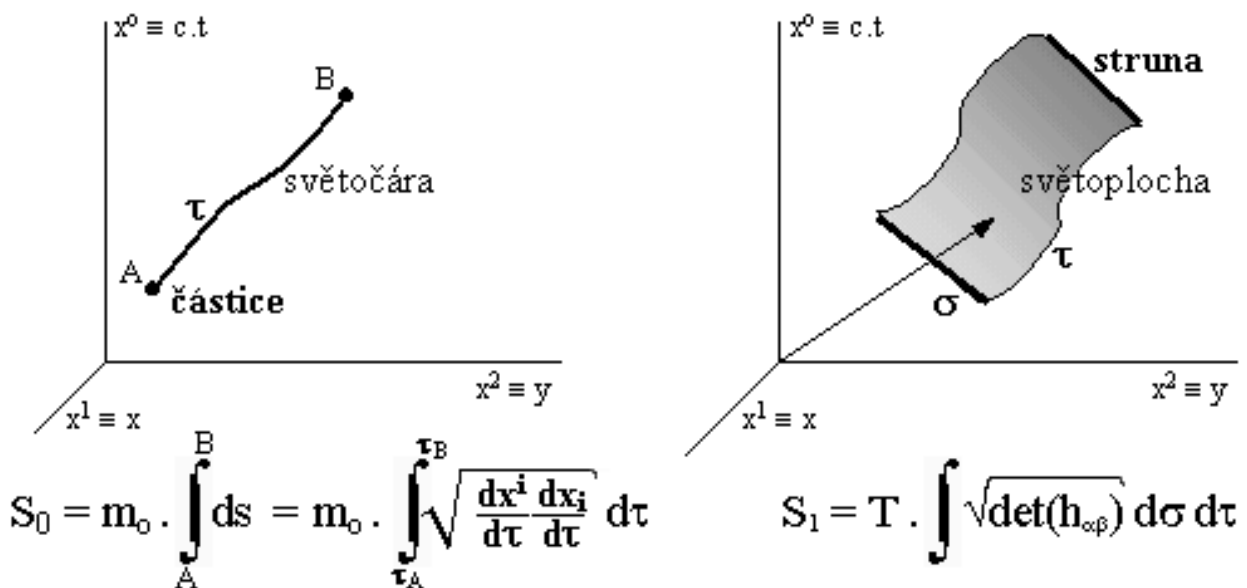
Shing-Tung Yau (1949)

Popis pohybu volné struny

Volná (relativistická) částice o klidové hmotnosti m_0 v prostoročase ($d = 4$) se popisuje integrálem akce

$$S_0 = m_0 \int ds = m_0 \int \sqrt{\frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx_i}{d\tau}} d\tau \quad (9.248)$$

kde s je prostoročasový interval a τ vlastní čas částice. Tato akce S_0 (index "0" zde vyjadřuje, že se jedná o bodovou, tj. 0-rozměrnou částici) je úměrná **délce světočáry** částice (relativistickému intervalu s) - obr. 9.13 vlevo. Variační princip nejmenší akce $\delta S = 0$ pak vede k Lagrangeovým rovnicím, z nichž plynou pohybové rovnice relativistické mechaniky ve STR (2.220), resp. (1.35) v OTR. Tento postup lze zobecnit i na jiný počet dimenzí než $d=4$.



Obr. 9.13: Vlevo: Trajektorie "0-rozměrné" volné částice v prostoročase je 1-rozměrná světočára, kterou lze parametrizovat délkou intervalu s nebo vlastním časem τ . Vpravo: Trajektorií, kterou 1-rozměrná struna proběhne v prostoročase, je 2-rozměrná svět plocha, kterou lze parametrizovat vlastním časem τ a dalším parametrem σ , charakterizujícím polohu bodu na křivce znázorňující strunu.

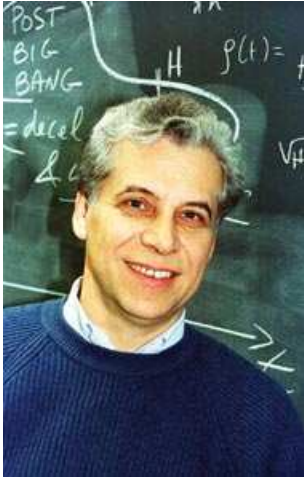
Přirozené zobecnění integrálu akce z hmotného bodu na strunu vede k tomu, že akce struny bude úměrná **velikosti světoplochy**, kterou struna projde při svém pohybu (evoluci) v prostoročase - obr. 9.13 vpravo:

$$S_1 = T \int \sqrt{\det(h_{\alpha\beta})} d\sigma d\tau , \quad (9.249)$$

kde $h_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) je dvourozměrná metrika na světoploše; T popisuje "**napětí**" struny, dané hmotností struny na jednotku délky.

Teorie strun v silné interakci

Představa jednorozměrných objektů - **strun** - se zrodila na konci 60. let při jednom z pokusů o popis silných interakcí. Studium srážek hadronů (především π -mезонů) při vysokých energiích vedlo k tzv. Venezianově modelu, který amplitudy účinných průřezů kvantifikuje pomocí součinů a podílů Γ -funkcí, jejichž argumentem jsou druhé mocniny součtů čtyřhybností interagujících částic a částic výsledných. Ukázalo se, že spektrum Venezianova modelu je identické se spektrem normálních modů "vibrace" jednorozměrného kvantovaného objektu - **relativistické struny**. Feynmanovy diagramy, popisující interakce dvou částic, lze sjednotit do jednoho diagramu, v němž 4 interagující částice (2 vstupující a 2 vystupující) jsou znázorněny jako **otevřené struny** (lineární útvary topologicky ekvivalentní úsečce); stejně tak lze znázornit i výměnné částice zprostředkující interakci. Každá struna přitom může "vibrovat" různým způsobem a podle toho se jevit jako částice určitého druhu (elektron, foton, ...) - částice jsou **vzbuzenými stavy** "vibrace" struny. S touto názornou interpretací Venezianovy formule přišli nezávisle Yoichiro Nambu, Leonard Susskind a Holger Nielsen



Gabriele Veneziano (1942)



Holger Bech Nielsen (1941)

Velikost strun se zde uvažovala v řádu 10^{-13} cm, odpovídající charakteristickému dosahu silné interakce.

Podrobná matematická analýza ukázala, že kvantová teorie bosonové struny je konzistentní (např. ve smyslu konformní invariance) jen tehdy, je-li dimenze prostoročasu $d = 26$. To dramaticky převyšuje pozorovaný počet dimenzí $d = 4$ našeho prostoročasu. Tento nesoulad je možné vyřešit hypotézou o "svinutí" neboli **kompaktifikaci** přebytečných dimenzí do malých uzavřených (kompaktních) variet, jak to bylo zmíněno výše v souvislosti se zobecněnými Kaluzovými-Kleinovými unitárními teoriemi.

Dalším nedostatkem původní teorie strun je, že ve spektru volné bosonové struny (které obsahuje pouze transversální módy) základní stav odpovídá částici se záporným kvadrátem hmotnosti, tj. částici s imaginární hmotností - **tachyonu**. Druhý excitovaný stav je již příznivější - odpovídá kvantu s nulovou klidovou hmotností a se spinem 2, které lze ztotožnit s gravitonem, viz níže.

V polovině 70. let byla vytvořena **kvantová chromodynamika** (byla stručně zmíněná výše), která silné interakce interpretuje pomocí kvarků a gluonů, jež na sebe působí prostřednictvím tzv. "barevného náboje". Velký úspěch kvantové chromodynamiky odsunul dosavadní strunové modely na více než 10 let do pozadí.

Někteří fyzikové si ale v té době zjednodušeně představovali, že kvarky v hadronech jsou spojeny strunami (gluonovými trubicemi), které je drží pohromadě jako "gumová vlákna".

Základní principy teorie strun

Vlastnosti a základní principy strunové teorie si ukážeme nejprve na příkladu teorie bosonových strun, která má mnoho společných vlastností s teorií superstrun. Uvažujme jednodimenzionální útvar - strunu, která představuje částici a šíří se na pozadí plochého Minkowského prostoročasu M obecné dimenze D . Z matematického hlediska se jedná o vložení Lorentzovské dvourozměrné variety N tvořené světoplochou pohybující se struny do M . Necht' $\xi^a = (\tau, \sigma)$ jsou souřadnice na N a necht' vložení je dáno rovnicemi

$$X^\alpha = X^\alpha(\tau, \sigma). \quad (9.250)$$

Zde X^α jsou souřadnice zadané v Minkowského prostoročase a řecké indexy nabývají hodnot $\alpha = 0, \dots, D$, zatímco latinské indexy hodnot $a = 0, 1$.

O podvarietě Σ získané tímto vložení předpokládáme, že je orientovatelná, takže se jedná o tzv. Riemannovu plochu. Topologie Σ je zřejmě řízena charakterem vložení (9.250). Rozeznáváme dva typy bosonové strunové teorie. Jsou-li prostorové řezy E kompaktní, mluvíme o teorii uzavřených strun, v opačném případě pak o strunách otevřených. Budeme se zabývat pouze uzavřenými strunami.

V analogii s účinkem pro volnou částici v relativistické mechanice, který je dán vlastní délkou oblouku světočáry této částice, je účinek pro strunu dán plochou její světoplochy (Nambuova-Gotoova akce)

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} d^2\xi, \quad (9.251)$$

kde α' je konstanta tzv. inverzní strunové tenze a γ je determinant indukovaného metrického tenzoru γ_{ab} na Σ , daného jako

$$\gamma_{ab} = \partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta \eta_{\alpha\beta}. \quad (9.252)$$



Tetsuo Gotō (1950)

Konstanta α' má roli Planckovy konstanty v kvantové mechanice a zejména je parametrem, vůči němuž se provádí mocninný rozvoj. Je-li dán účinek (9.251), lze již konstruovat Feynmanovy diagramy podobně jako v kvantové elektrodynamice, s tím rozdílem, že diagramy jsou nyní nikoli jednorozměrné, ale dvourozměrné, a musíme v nich uvážit všechny možné topologie Riemannových ploch reprezentujících světloplachu. Pomocí vzorce (9.252) lze účinek (9.251) přepsat ve tvaru (Polyakovova akce)

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{|\gamma|} d^2\xi \gamma^{ab} \partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta \eta_{\alpha\beta} . \quad (9.253)$$

Ve vztahu (9.253) pro účinek si lze povšimnout tří význačných principiálních symetrií. První symetrií je invariantnost (9.253) vzhledem k tzv. Poincarého transformaci v D -dimenzionálním Minkowskiho prostoročase. Druhou symetrií je invariance vzhledem k souřadnicovým transformacím na světloplše struny. Konečně za třetí je (9.253) invariantní vzhledem ke konformní transformaci

$$\gamma_{ab} \rightarrow e^{2\phi(\tau,\sigma)} \gamma_{ab} , \quad (9.254)$$

což je tzv. Weylova symetrie.



Alexandr Markovič Polyakov (1945)

Dalším úkolem je odvodit ze zadané akce pohybové rovnice. Variací (9.253) podle metriky na světlošle obdržíme podmínku na vymizení tenzoru energie a hybnosti (energie-impulzu) T_{ab}^{sheet} této světlošly

$$T_{ab}^{\text{sheet}} = \partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \partial_c X^\alpha \partial_d X^\beta \gamma^{cd} \eta_{\alpha\beta} . \quad (9.255)$$

Variace (9.253) podle X^α pak dává vlnovou rovnici pro tyto veličiny

$$\gamma^{\alpha\beta} \nabla_a \nabla_b X^\alpha = 0 , \quad (9.256)$$

kde ∇_a značí kovariantní derivaci podle ξ^a . Jestliže nyní předpokládáme, že světlošly struny má tvar válce, lze na ní zvolit souřadnice $\sigma \in \langle 0; 2\pi \rangle$ a $t \in (-\infty; \infty)$ spolu s plochou metrikou γ_{ab} . Někdy se též ukazuje výhodným zavést izotropní souřadnice ξ^+ a ξ^- vztahem $\xi^\pm = \sigma \pm \tau$. V nich se systém (9.256) redukuje na soustavu jednoduchých dvoudimenzionálních vlnových rovnic, jež je možné separovat a získat řešení

$$X^\alpha = f^\alpha(\sigma - \tau) + g^\alpha(\sigma + \tau) , \quad (9.257)$$

s obecnými funkcemi f^α a g^α řídícími doleva a doprava se pohybující strunové excitace.

Skutečnost, že hustota Lagrangeovy funkce nezávisí na derivacích

γ_{ab} , určuje primární vazbu, kdy je moment konjugovaný k γ_{ab} nulový. Aby tato vazba platila ve všech časech, požadujeme splnění sekundární vazby, kterou lze vyjádřit podmínkou, aby se tenzor energie-impulzu (9.255) rovnal nule. Ačkoli tenzor energie-impulzu strunové světlochy má jednoduché vyjádření pomocí jednotlivých polí, přímé kvantování činí technické obtíže. Tento tenzor má dvě nezávislé složky a pro kvantování sekundární vazby se s výhodou užívá Fourierova rozvoje jeho složek T_{++}^{sheet} a T_{--}^{sheet} v souřadné bázi (ξ^+ , ξ^-). Koeficienty tohoto rozvoje se nazývají Virasorovy koeficienty.

Následujícím cílem v budování teorie strun se přirozeně stává kvantování. Obvyklý postup sestává ze sestavení rozvoje souřadnic X^α do Fourierovy řady a určení jejich netriviálních Poissonových závorek. V tomto stadiu ale stále zůstává jistá kalibrační volnost, jak můžeme uvidět z následující úvahy. Uvažme souřadnicovou změnu v souřadnicích X^α . Pokud tato změna zobrazí body ze světlochy struny opět na tuto světlochu, lze ji chápat jako souřadnicovou transformaci na E , tedy jako nefyzikální stupeň volnosti. Pokud ale změna X^α posouvá body světlochy mimo ni samotnou, jedná se o fyzikální deformaci této světlochy. Jednou z výhodných metod fixování této volnosti je zavedení dvou izotropních souřadnic podél světelného kužele. Přesněji, kalibrace světelného kužele spočívá ve zvolení dvou izotropních směrů v Minkowského prostoročase za souřadnicové křivky nových souřadnic, zpravidla nazývaných X^+ a X^- . Jako kalibraci klademe podmínku, aby v souřadnicích (X^+, X^-, X^I) , kde $I = 1, \dots, D - 2$, souřadnice X^+ závisela pouze lineárně na τ (rovnoměrný přímočarý pohyb), a dále, aby byly splněny vazebné rovnice vyplývající z anulace Virasorových koeficientů. Nyní lze přímočaře kvantovat, a to nahrazením Poissonových závorek komutátory a nahrazením Fourierových koeficientů příslušnými kreačními a anihilačními operátory.



Miguel Angel Virasoro (1940)

Další věcí je, že musíme zaručit platnost sekundárních vazeb. Klasicky jsou tyto vazby vyjádřeny anulováním všech Virasorových koeficientů. Aby sekundární vazba platila i po kvantování, tak dostáváme z analogického požadavku neobyčejně důležitý výsledek, totiž fyzikální stavy (teorie). Jak si za chvíli ukážeme, teorie obsahuje tachyon, dále obsahuje $(D - 2)^2$ nehmotných stavů a nekonečně mnoho hmotných stavů. Zastavme se blíže u nehmotných stavů. Každou obecnou matici $(D - 2) \times (D - 2)$ můžeme rozložit na její stopu, což je skalár, na její symetrickou část, která má $D(D - 3)/2$ komponent, a na antisymetrickou část s $(D - 2)(D - 3)/2$ složkami. Tomuto rozkladu odpovídá nehmotný skalár zvaný dilaton, nehmotná částice se spinem 2, interpretovaná jako graviton, a nehmotná částice s potenciálem tvořeným antisymetrickým tenzorem druhého řádu.

Úvahy doposud prováděné nejsou zajisté obecně kovariantní. Abychom jejich kovarianci zajistili, lze využít tzv. Faddějevova-Popovova přístupu ke kvantování. Jestliže vyšetřujeme algebru tvořenou Virasorovými operátory, zjistíme, že obsahuje určitou anomálii, respektive přídavný člen. Tato anomálie závisí na dimenzi D Minkowského prostoročasu a musí být nulová, protože očekávaná hodnota homogenní části Virasorovy algebry vymizí. Jak zanedlouho poznáme, je tento požadavek splněn pouze tehdy, je-li dimenze prostoročasu rovna 26.

V teorii bosonové struny zjišťujeme, že operátor čtverce hmotnosti stringu má tvar

$$M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + (D-2) \frac{n}{2} \right), \quad (9.258)$$

kde faktor M závisí na výběru jednotkové hmotnosti (např. $M = 8$), α_{-n} resp. α_n jsou kreační resp. anihilační operátory a podle zdvojeného indexu i se sčítá v souladu s Einsteinovou sumační konvencí od jedné do $(D-2)$ (přes ryze prostorové souřadnice). Teorie je lorentzovsky invariantní (relativistická) jen když je dimenze časoprostoru 26.

Působením α_n^i na energeticky nejnižší hladinu dostaneme nulu, ale přesto nám ve výrazu pro m^2 zbude součet členů nutných k hermitičtému

operátorů $M(D-2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}$, což je divergentní suma, která má zápornou

zobecněnou hodnotu. Čtverec hmotnosti základního stavu je tedy záporný, hmotnost imaginární, což odpovídá částici, která se pohybuje nadsvětelnou rychlostí (proto zvaná tachyon) a nebyla nikdy pozorována. A pokud alespoň trochu věříme v kauzalitu a v teorii relativity, nikdy pozorována nebude.



Ludvig Dmitrievič Faddějev (1934)



Viktor Nikolajevič Popov (1937 – 1994)

Můžeme dokonce jednoduše vysvětlit, proč bosonové stringy v jiné dimenzi než 26 nemohou fungovat. Uvažujeme-li energetickou hladinu hned nad tachyonem (nejméně vzbuzenou, v případě otevřených strun jednou, u uzavřených dvakrát), vidíme, že tato má pouze $(D-2)$ -násobnou degeneraci. Uvažujeme-li o takto vzbuzeném stringu s vektorem energie-hybnosti v čistě časovém směru, zdá se nemožné

z těchto stavů vytvořit multiplet grupy $SO(D - 1)$ rotací fixujících tento směr (u ještě vyšších hladin, kde je degenerace vyšší, se to nemožné nezdá). Máme však jednu záchranu: vektor nepůjde namířit do čistě časového směru a tedy argument neobstojí, bude-li tato hladina nehmotná. Požadujeme tedy, aby

$$m^2 = M \left[(D - 2) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \right) + 1 \right] = 0. \quad (9.259)$$

Naším úkolem bude nyní určit dimenzi D , vyhovující této rovnosti.

Riemannova zeta funkce

Definujme ji s parametrem s , obvykle nulovým

$$\zeta_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n + s)^{-x}. \quad (9.260)$$

Pro nás zajímavý součet je $\zeta_0(-1)$. Poznamenejme, že pro $n > 1$ je funkce dobře definována, např. $\zeta_0(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (přesně). Funkci, která je v určitém oboru komplexních čísel dobře definována a jde jednoznačně analyticky rozšířit, prodlužme, všimnuv si, že

$$\zeta_1(x) = \zeta_0(x) - 1, \quad (9.261)$$

(při přechodu od $s = 0$ k $s = 1$ pouze vynecháme první sčítanec). Rozepišme funkci do Taylorovy řady v okolí $s = 0$, zajímaje se o $s = 1$.

$$\begin{aligned} \zeta_0(x) - 1 = \zeta_1(x) &= \\ &= \zeta_0(x) + \frac{\partial}{\partial s} \zeta_s(x) \Big|_{s=0} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \zeta_s(x) \Big|_{s=0} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial s^3} \zeta_s(x) \Big|_{s=0} \dots \end{aligned} \quad (9.262)$$

Derivace zeta funkce podle proměnné s však lze lehce vypočítat:

$$\frac{\partial}{\partial s} \zeta_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+s)^{(-x-1)} (-x) = (-x) \zeta_s(x+1) \quad (9.263)$$

a obecně m -tá derivace je:

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m} \zeta_s(x) = (-x-1)(-x-2)\dots(-x-m+1) \zeta_s(x+m). \quad (9.264)$$

Odečteme-li $\zeta_0(x)$ od obou stran rovnice (9.262) a zohledníme-li poslední vztah pro derivaci, máme

$$\begin{aligned} -1 = (-x) \zeta_0(x+1) + \frac{(-x)(-x-1)}{2!} \zeta_0(x+2) + \\ + \frac{(-x)(-x-1)(-x-2)}{3!} \zeta_0(x+3) + \dots \end{aligned} \quad (9.265)$$

Dosadíme do této rovnice $x \rightarrow 0$. Vzhledem k tomu, že pro $x > 1$ má zeta funkce konečnou hodnotu, kterou zde násobíme číslem jdoucím k nule, vliv má jen první člen. To jest

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \zeta_0(x+1) = 1. \quad (9.266)$$

Dosadíme-li $x \rightarrow -1$, máme

$$-1 = \zeta_0(0) + \frac{1}{2!} (-x-1) \zeta_0(x+2). \quad (9.267)$$

Ale

$$\lim_{x \rightarrow -1} (-x-1) \zeta_0(x+2) = -1, \quad (9.268)$$

a proto

$$\zeta_0(0) = -\frac{1}{2}. \quad (9.269)$$

A nakonec dosazením $x \rightarrow -2$ zbudou v rovnici jen členy

$$-1 = 2\zeta_0(-1) + \frac{2}{2!}\zeta_0(0) + \frac{2}{3!}(-x-2)\zeta_0(x+3), \quad (9.270)$$

což po úpravě dává

$$-1 = 2\zeta_0(-1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad (9.271)$$

a tedy

$$\zeta_0(-1) = -\frac{1}{12}. \quad (9.272)$$

Zajisté, existuje-li limita u bodu -1, chápeme ji přímo jako funkční hodnotu. Všimněme si, že všechny provedené operace byly platné (a sumy konvergentní) alespoň v nějakém kruhu v komplexní rovině.

Rovnice (9.259) je tedy splněna pro dimenzi $D = 26$.

(Argumentace byla trošku zjednodušená, protože první hladina nad základní by nešla namířit časovým směrem, ani kdyby byla tachyonová. Ale intuice radí, že podmínky pro splnění požadovaných komutátorů grupy Poincaré vedou k rovnici (s jedním řešením $D = 26$) a nikoli k nerovnici.)

Východisko z tachyonové zhouby spočívá v tom, že kromě obyčejných rozměrů \mathbf{x}_1 až \mathbf{x}_{24} a \mathbf{x}^- v daném čase \mathbf{x}^+ (počítáme v kalibraci na světelném kuželi – *light-cone gauge* – čili náš "čas" $\mathbf{x}^+ = \frac{\mathbf{x}^0 + \mathbf{x}^{25}}{\sqrt{2}}$)

přidáme antikomutující proměnné, čímž se zbavíme fluktuací v základní hladině, která se stane nehmotnou (jako je třeba foton). Kritický rozměr se změní ze šestadvaceti na deset a struna se stane superstringem.

Podobné triky jako ty, které jsme využili pro výpočet $\sum n$, se však hojně využívají také v kvantové elektrodynamice, teorii silných nebo slabých interakcí a ve standardním modelu. Přinášejí předpovědi, jež jsou v perfektním souladu s experimentem. Užívána je například dimenzionální regularizace, v níž předpokládáme, že časoprostor má

obecnou dimenzi d , zjistíme, že pro určitá d vycházejí konečné výsledky, a ty analyticky prodloužíme na nám zajímavé $D = 4$.

fyzikální oprávnění těchto postupů obecně není známo. Lze si dnes kupříkladu jen obtížně představit, jak v rámci současných teorií ospravedlnit **dimenzionální regularizaci**. Pro některé speciální případy regularizace to známo je, ale konkrétně v kvantové elektrodynamice nikoliv. Dokážeme matematicky napsat regulátory, podle kterých to vyjde v souladu s experimentem, ale nevíme proč.

To vede řadu fyziků k názoru, že QED, či obecněji kvantová teorie pole, je ve skutečnosti jen efektivní teorií, za kterou se skrývá něco hlubšího, co dost možná nově definuje spojitý prostoročas jako nízkoenergetickou limitu čehosi fundamentálnějšího.

Supersymetrická teorie strun - superstruny



Pierre Ramond (1943)



André Neveu (1946)

Jak bylo výše v pasáži o supergravitaci nastíněno, pokusy o sjednocení gravitační interakce s ostatními typy interakcí v rámci kalibračních kvantových teorií pole vedly k pojmu **supersymetrie**. Tato teorie spojuje bosony a fermiony: ke každému bosonu předpovídá "superpartnera" kterým je fermion, a naopak. V roce 1970 teoretický fyzik Pierre Ramond a zhruba ve stejné době nezávisle na něm André Neveu a John Schwarz našli způsob, jak upravit rovnice teorie strun tak, aby kromě bosonů popisovaly i fermiony. Ukázalo se, že hledaným klíčem je dodání nového typu symetrie – konkrétně symetrie záměny bosonů za fermiony a naopak – do teorie strun. Aplikace těchto nových

symetrií, vyjádřených geometricky (komutačními i antikomutačními relacemi v prostoročase) na teorii strun vedla ke snížení potřebné dimenze prostoročasu z původní $d = 26$ na $d = 10$. Vznikla tak **supersymetrická teorie strun**, neboli **teorie superstrun**. Vedle bosonové struny zde jako její partner vystupuje fermionová struna, neboli superstruna, která má další, spinorovou proměnnou.

V tomto případě existuje díky supersymetrii ke každému X^α jeho superpartner, spinor ψ^a definovaný na světoploše struny. Superstruny nemají ve svém spektru tachyon a obsahují bosony i fermiony.

Ve spektru excitací relativistické kvantované struny se vyskytuje částice s nulovou klidovou hmotností a spinem $s = 2$, kterou lze identifikovat s **gravitonem** - kvantem gravitačních vln. To přivedlo J. Sherka a J. Schwarze v r.1974 k myšlence, že i když teorie strun není vhodná pro popis silných interakcí, mohla by se stát vhodným nástrojem k budování **kvantové teorie gravitace**. Přitom však velikost těchto hypotetických strun je nutno z původně uvažovaných 10^{-13} cm radikálně zmenšit na rozměry 10^{-33} cm **Planckovy-Wheelerovy délky**, charakteristické pro kvantovou gravitaci.

Excitace superstrun mohou být "vibrační", "rotační", i excitace "vnitřních stupňů volnosti" - vnitřní symetrie, supersymetrie. Různé kvantové excitace (normální módy superstruny) se interpretují jako spektrum elementárních částic. Toto spektrum se ukazuje být natolik bohaté, že může generovat nejen všechny stavební prvky standardního modelu elementárních částic, ale zahrnovat i kvantovou gravitaci.

Úspěšné dokončení koncepce superstrun by tak představovalo **jednotný přístup** k různorodému světu elementárních částic a všech jejich interakcí.

Všechny interakce strun mají týž původ, jímž je štěpení a spojování strun. Tím se v teorii automaticky objeví silové působení jakožto důsledek dynamických procesů v prostoročase. Protože výsledná teorie musí být zároveň v souladu se speciální relativitou i s kvantovou teorií, neexistuje téměř žádná libovůle a pravidla pro dělení a opětovné spojování strun jsou prakticky jednoznačně určena. Interakce a pohyby strun jsou tudíž elegantně sjednoceny způsobem, který nemá v nestrunové fyzice obdoby.

V běžné částicové fyzice lze v zásadě libovolně přidávat různé druhy interakcí a tedy i odpovídajících vazbových konstant, určujících velikost

a charakter jejich působení. V teorii strun naproti tomu existují jen dvě fundamentální konstanty. První je **napětí struny**, určující energii připadající na jednotku délky struny, druhou je **vazbová konstanta**, charakterizující pravděpodobnost, s jakou se struna rozštěpí. Vazbová konstanta je bezrozměrné číslo související s s možnými interakcemi strun a ve skutečnosti s vlastně nejedná o konstantu v pravém slova smyslu. Je to fyzikální stupeň volnosti odlišující od sebe přípustná řešení teorie. Její hodnota závisí na konkrétních geometricko – topologických vlastnostech vícerozměrného světa, v němž struny žijí. Všechny známé fyzikální konstanty by měly být v principu vyjádřitelné pomocí těchto dvou čísel (např. gravitační konstanta by měla souviset s jejich součinem).

Když se jednorozměrná struna pohybuje a vyvíjí v prostoročase, vytváří přirozeně dvourozměrný povrch určité plochy. Princip, který řídí veškeré interakce strun minimalizuje tento povrch. Takto jednoduchý zákon jednoznačně určuje veškeré pohyby, vývoj i silové interakce mezi strunami. Sjednocují se tím jedním tahem všechny známé částice se silami, jež mezi nimi působí.

Konce otevřených strun popisují nabitě částice. Nehmotná vibrace struny napnuté mezi nimi, pak příslušný boson, zprostředkovávají sílu mezi nimi. Struny tak mohou popisovat jak částice, tak síly mezi nimi. Má-li být teorie strun v souladu se speciální teorií relativity, musí se při jejich interakcích objevovat občas též uzavřené smyčky. Právě tyto smyčky identifikovali roku 1974 Sherk se Schwarzem a nezávisle na nich mladý japonský fyzik Tamiaki Yoneya jako gravitony.



Tamiaki Yoneya (1948)

Ukázalo se tak, že sama konzistence teorie strun vyžaduje, aby zahrnovala též gravitaci. Rozdíl mezi gravitací a ostatními interakcemi je přitom přirozeně vysvětlen topologickými rozdíly mezi otevřenými a uzavřenými strunami.

Podobně jako u dřívějších kvantových teorií pole a vícedimenzionálních unitárních teorií, i zde se nabízejí zajímavé hypotézy **astrofyzikálních** a **kosmologických důsledků** teorie superstrun. Jak uvidíme ihned v následujících kapitolách, zajímavé astrofyzikální aspekty teorie superstrun byly studovány v souvislosti s termodynamikou a kvantovou evaporací černých děr (Hawkingův efekt). Pomocí metod teorie strun se podařilo odvodit vzorec pro entropii černé díry, a to nezávisle na Hawkingově a Bekensteinově přístupu. To umožňuje lépe proniknout jak do podstaty kvantově-gravitačních procesů, tak do úlohy horizontů a černých děr v unitární teorii pole.

Zajímavé mohou být i kosmologické důsledky zobecněné teorie superstrun. V pojetí duálních p-brán by vesmír mohl být 3-dimenzionální bránou (3-bránou), vyvíjející se na pozadí 11-rozměrné variety s vhodnými kompaktifikacemi. A vznik vesmíru velkým třeskem by mohl být způsoben **srážkou** dvou p-brán. Různá řešení teorie superstrun mohou předpovídat **různé vesmíry** s různými vlastnostmi (dimenzemi, hodnotami fyzikálních konstant či spektry hmotností elementárních částic); k reflexi těchto možností a jejich selekci možná řekne své i **antropický princip**.

M-teorie, 11-rozměrná teorie strun

Další vývoj teorie superstrun pokračoval výzkumy M.Grena, J.Schwarze a E.Wittena, kteří našli takové kalibrační grupy, aby teorie superstrun byla plně kovariantní v prostoročase (v duchu OTR). Bylo nalezeno pět takových modelů teorie superstrun, z nichž nejzajímavější se jevíly dvě tzv. *heterotické teorie* s kalibračními grupami $SO(32)$ a $E_8 \times E_8$.

Zbývajícími 3 teoriemi jsou teorie typu I, typu IIA, typu IIB. Obě teorie typu II mají dvě supersymetrie v desetirozměrné řeči, ostatní jen jednu. Teorie prvního typu je založena na neorientovaných strunách otevřených i uzavřených, ostatní pouze na orientovaných uzavřených.

Významnou úlohu v teorii superstrun v té době sehrála analýza matematické (a z toho následně plynoucí i fyzikální) ekvivalence neboli **duality** mezi různými modely superstrun. Tyto duality představují nové typy symetrií, sjednocující různé modely, které mohou mít na první pohled odlišnou formu, avšak vedou k rovnocenným fyzikálním výsledkům.

V polovině 90. let 20. století se lidé poučili, že struny jsou jen první mezi rovnými (jelikož připouštějí poruchový rozvoj), ovšem podobně důležité pro tuto teorii jsou i objekty všech ostatních dimenzí, zvané **p -brány**, kde p označuje dimenzi.

Konkrétně se ukázalo, že heterotická teorie **$SO(32)$** s vazebnou konstantou g je ekvivalentní teorii strun typu I (která má stejnou kalibrační grupu **$SO(32)$**) s vazebnou konstantou $1/g$.

Tomuto vztahu dvou teorií se říká S -dualita a je jím vysvětleno chování tří teorií z pěti při velkém g . Podobně strunová teorie typu IIB je S -samoduální.

Předpokládejme nyní, že teorie A, B jsou S -duální. Označuje-li g vazebnou konstantu a f nějakou veličinu, znamená to, že $f_A(g) = f_B(1/g)$. Tato dualita, jejíž rozpoznání tvořilo první krok druhé revoluce, zobecňuje elektro-magnetickou dualitu Maxwellových rovnic. Vtip je v tom, že Diracova kvantovací podmínka nutí magnetické náboje, aby byly celými násobky převrácené hodnoty kvanta elektrického náboje (při správné normalizaci), což je vazebná konstanta. Krom S -dualit byly objeveny tzv. T -duality, v nichž je svinutí jedné teorie na varietu o typickém rozměru R ekvivalentní svinutí druhé teorie na varietu o typickém rozměru $1/R$ (přesněji L_{str}^2/R , kde L_{str} je délka superstruny). Díky svinutí vzniknou dva nové typy excitací. Struna může mít kvantovaný impuls n/R ve směru svinuté dimenze, což je excitace známá už z obyčejných bodových Kaluza-Kleinových teorií.

Tento impuls přispěje ke kvadrátu energie struny výrazem $\left(\frac{n}{R}\right)^2$.

Jedním důsledkem je, že na krátkých vzdálenostech běžná geometrie přestává fungovat a je nahrazena “kvantovou geometrií”, matematicky popsanou $2D$ konformní teorií pole. Také nás vede k zobecnění

Heisenbergovy relace neurčitosti, podle které je neurčitost $\Delta x > \frac{\hbar}{\Delta p}$, ale

také než strunové měřítko délky L_{str} .

T-dualita spojuje fyziku velkého prostoročasu s fyzikou malého.

Představme si zakřivený prostoročas jako válec. Struna ovinutá kolem tohoto válce má dva druhy energetických stavů. Jedny vznikají z vln této struny, těm budeme říkat **vibrační módy**.

Jestliže je válec tlustý, pak tyto vibrace mají dlouhou vlnovou délku a tudíž malou energii. Energie odpovídající různým počtům vln po obvodu válce leží tedy blízko sebe.

Je-li válec tenký, je vlnová délka vibračních módů malá a tyto stavy mají tedy velikou energii a jednotlivé energetické hladiny budou ležet daleko od sebe.

Struna však také může být okolo válce ovinuta vícekrát.

Jestliže je válec opět tlustý, pak je struna více napjatá a tudíž má i vyšší energii.

Různé počty ovinutí kolem válce nazýváme **navíjecími módy**.

uzavřená struna může m -krát ovinout kružnici, kteréžto obtáčení přidává ke čtverci energie $(2\pi RmT)^2$, kde $T = (2\pi L_{\text{str}}^2)^{-1}$ je napětí struny. Dva

důležité příklady dvojic T-duálních teorií jsou IIA/IIB a HE/HO.

(V posledním případě je ještě třeba přidat tzv. **Wilsonovy smyčky**, narušující symetrii.).

Tyto dvojice jsou také ekvivalentní pro $g = 0$, což je další důvod, proč jsme je spojili v obrázku 9.14. Původní bosonová teorie strun v 26 rozměrech je T-samoduální, což se pro samoduální poloměr projeví zvětšením kalibrační grupy z $U(1)^2$ na $SU(2)^2$.

Energie odpovídající různým navíjecím módům tedy v případě tlustého válce budou ležet daleko od sebe, zatímco u tenkého válce budou hladiny blízko.

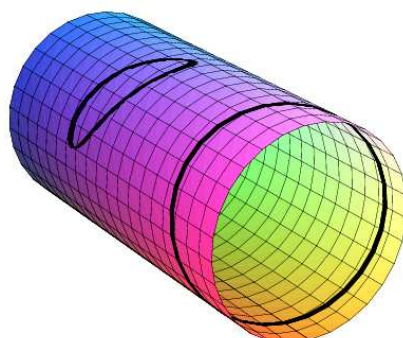
Pro makroskopického pozorovatele však různý původ vibračních a navíjecích stavů není zřejmý.

Oba válce, jak tlustý, tak i tenký, poskytují nakonec stejné energetické hladiny, které strunoví fyzikové interpretují jako částice.

Totožnost mezi energiemi strun ve vesmírech s kruhovou dimenzí o poloměrech R a $1/R$ pramení matematicky z faktu, že energie mají tvar

$$\frac{v}{R} + wR, \quad (9.273)$$

kde v je vibrační číslo a w je navíjecí číslo.



Obr. 9.14: Plášť válce znázorňuje dvě dimenze prostoru zkompaktifikované na kružnici. Struna nalevo má navíjecí číslo nulové, kdežto struna napravo má buď $w = 1$, nebo $w = -1$, v závislosti na své orientaci

Tento výraz se nezmění při kombinované záměně

$$R \leftrightarrow \frac{1}{R}, \quad v \leftrightarrow w. \quad (9.274)$$

V obyčejné kvantové mechanice bodových částic jsou totiž vzdálenost a impuls svázány Fourierovou transformací.

Konkrétně vlastní stav $|x\rangle$ polohy na kružnici o poloměru R lze vyjádřit jako

$$|x\rangle = \sum_v e^{ixp} |p\rangle, \quad (9.275)$$

kde a $|p\rangle$ je vlastní stav impulsu s vlastní hodnotou

$$p = \frac{v}{R}. \quad (9.276)$$

V teorii strun však můžeme zkonstruovat ještě další reprezentaci vlastního stavu operátoru polohy:

$$|\tilde{x}\rangle = \sum_w e^{i\tilde{x}\tilde{p}} |\tilde{p}\rangle, \quad (9.277)$$

kde $|\tilde{p}\rangle$ je vlastní stav operátoru navíjecího čísla s vlastní hodnotou

$$\tilde{p} = wR. \quad (9.278)$$

Z toho je okamžitě vidět, že x je periodická proměnná s periodou $2\pi R$, zatímco \tilde{x} má periodu $2\pi/R$, což znamená, že x je poloha na kružnici o poloměru R , zatímco \tilde{x} je poloha na kružnici o poloměru $1/R$.

Podobně to lze popsat rovněž i z hlediska energie a času.

Budou li nyní vektory $|x\rangle$ a $|\tilde{x}\rangle$ reprezentovat dvě vlnová klubka startující z počátku soustavy souřadné, pak jelikož se stav o energii E vyvíjí s fázovým faktorem Et , okamžitě vidíme, že spotřebovaný čas, a tedy i poloměr, je úměrný

$$t \sim \frac{1}{E} \sim R \quad (9.279)$$

pro módy vibrační, a

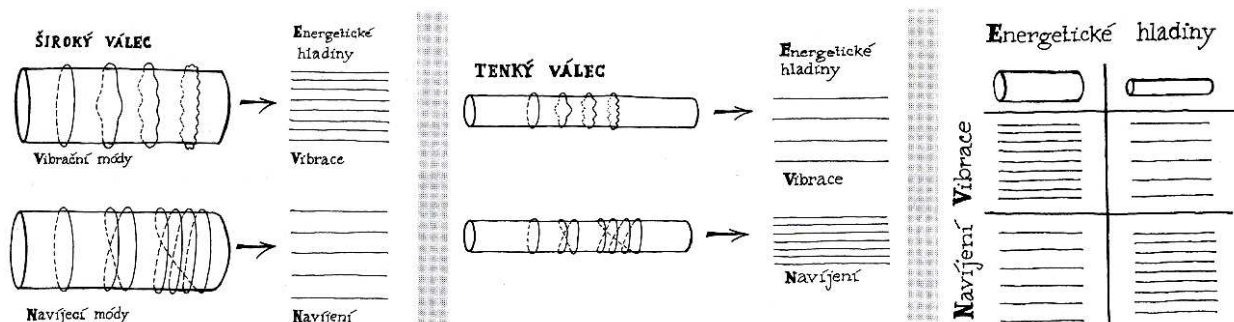
$$t \sim \frac{1}{E} \sim R \quad (9.280)$$

pro módy navíjecí.

Takže subkvantová měřítka prostoročasu mohou nakonec poskytovat stejnou fyziku, jako kosmologická měřítka našeho vesmíru.

Později byla diskutována i tzv. *U-dualita*, vzniklá kombinací S a T-duality. Tím bylo vysvětleno chování tří z pěti superstrunových teorií při velikém g .

Obr. 9.15



Pokusy o objasnění chování zbývajících dvou přinesly další překvapení. Edward Witten nejprve ukázal, že teorie typu IIA pro veliké g vytváří novou, jedenáctou dimenzi, svinutou na kružnici o obvodu úměrném $g^{2/3}$. Limitou pro nekonečné g je tedy teorie v jedenácti-rozměrném prostoročase.



Jens hoppe (1963)



Hermann Nicolai (1952)

Již koncem 80. letech minulého století učinili fyzici Bernard de Wit, Jens Hoppe a Hermann Nicolai pokus o sestrojení jedenácti-rozměrné membránové teorie. Uspěli na základě matematického triku – přepisu vlastností membrány do devíti nekonečně-rozměrných matic, popisujících chování příslušné membrány. Zároveň dokázali, že jejich maticová teorie může být konzistentní kvantovou teorií, tento důkaz se jim však podařilo provést pouze pro konečně-rozměrnou třídu matic. V roce 1996 jejich původní myšlenku rozvinuli strunoví teoretici Thomas Banks, Willy Fischler, Stephen Shenker a Leonard Susskind. Z jejich práce se postupně zrodila nová teorie zvaná **M-teorie**. Studium strunových dualit ukázalo, že všechny stávající teorie superstrun lze **sloučit** do této obecnější teorie (označení "M" pochází z

názvu *membrane*, někteří autoři jej dávají do souvislosti s přívlastky *matrix*, *mystery*, *magic* a pod.).



Thomas Banks (1949)



Willy Fischler (1949)

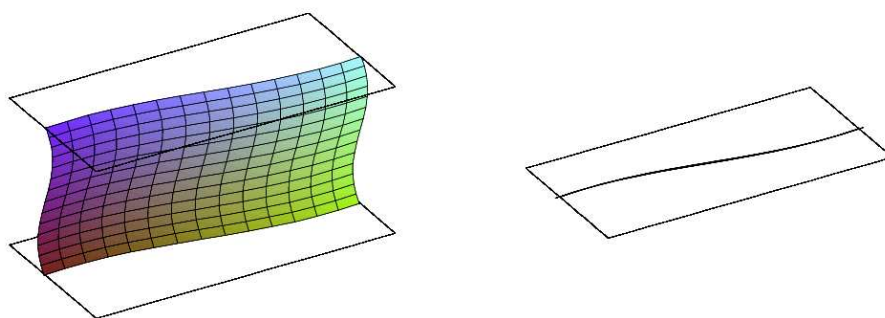


Stephen H. Shenker (1949)

Do roku 1984 byla velmi populární teorie jedenácti-rozměrné supergravitace. Jedenáct je maximální dimenze, ve které lze lokálně supersymetrickou teorii vytvořit. Právě superstruny vzaly 11-rozměrné supergravitaci její prvenství, co se oblíbenosti týče. Jejich nízkoenergetickou limitou jsou supergravitace v dimenzi 10 (a případně nižší), eventuálně interagující se super-Yang-Millsovým polem. Superstruny tedy vysvětlují existenci těchto supergravitačních teorií. Jedenácti-rozměrná supergravitace zůstávala výjimkou, protože nešla odvodit z žádné superstrunné teorie. Mnohým se zdála z estetického hlediska nepřijatelná představa, že by existence 11-rozměrné supergravitace byla náhodou.

A měli pravdu. Nízkoenergetickou limitou M-teorie se ukázala být právě jedenácti-rozměrná supergravitace.

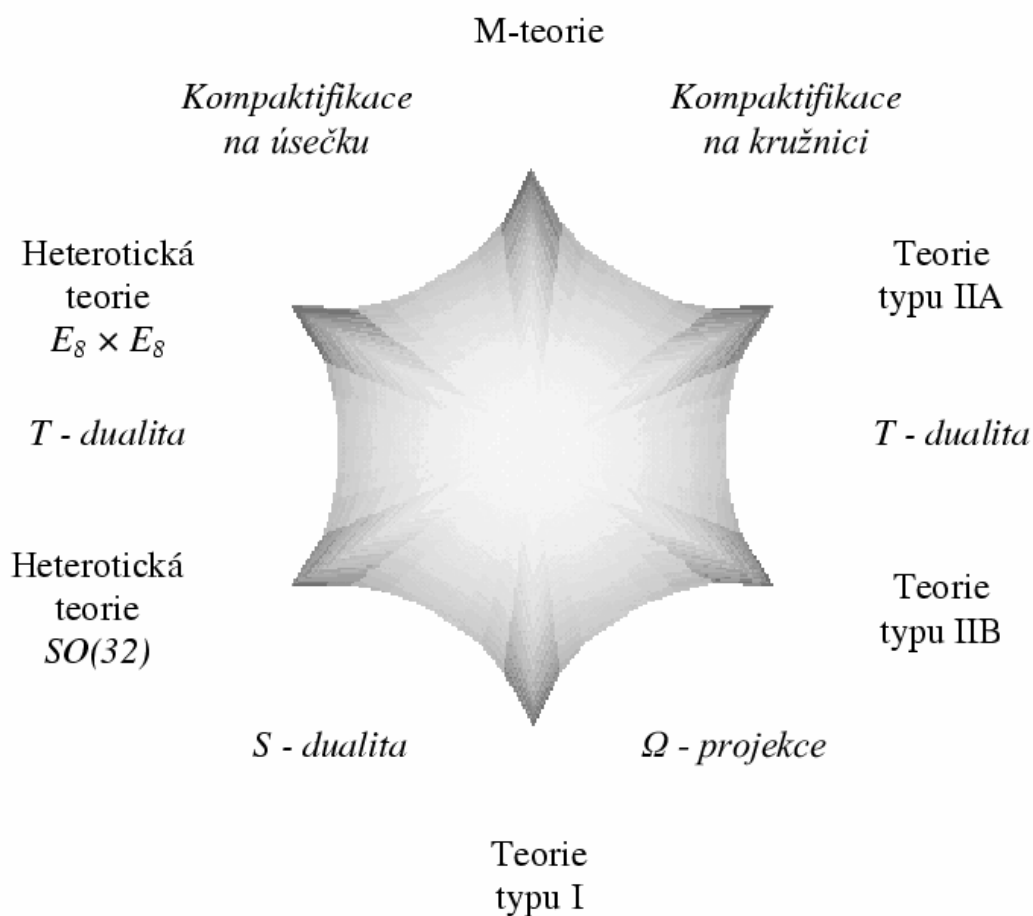
Nejtvrdší oříšek, totiž chování heterotické teorie $E_8 \times E_8$, se dočkal vysvětlení až ve slavném článku Edwarda Wittena a Petra Hořavy. Autoři ukázali, že také tato teorie vytváří jedenáctou souřadnici, jejíž délka je úměrná $g^{2/3}$, avšak souřadnice nemá tentokrát tvar kružnice, alebrž úsečky.



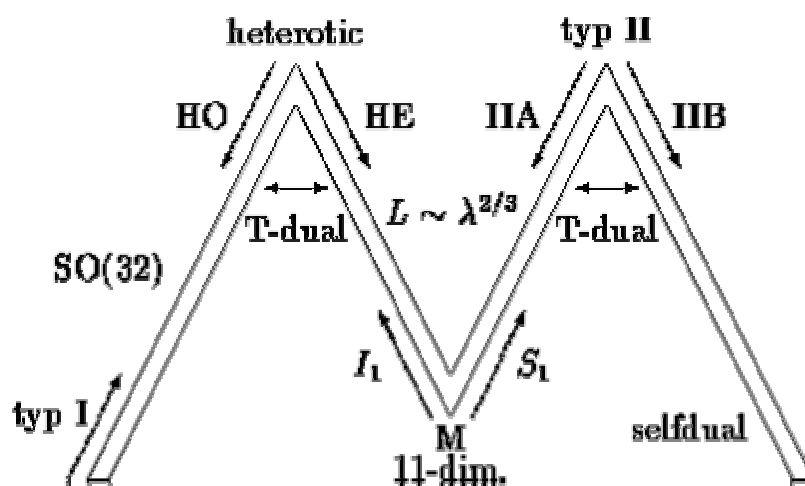
Obr. 9.16: Otevřená membrána napnutá mezi konci světa v heterotické M-teorii se v limitě malých vzdáleností mezi světobránami stává heterotickou strunou $E_8 \times E_8$.

Kalibrační grupa heterotické $E_8 \times E_8$ se skládá z dvou stejných faktorů a je tedy ekvivalentní M-teorii na pásu jedenácti-rozměrného prostoročasu, přičemž každý ze dvou faktorů E_8 kalibrační grupy žije na jedné ze dvou hranic tohoto pásovitého světa.

Petr Hořava pokračuje v pilné práci a přišel s návrhem na řešení záhady kosmologické konstanty. Náš svět je podle něho vhodné popisovat v řeči M-teorie se šesti souřadnicemi svinutými na Calabi-Yauovu varietu a jednou souřadnicí svinutou na úsečku. Na jednom jejím okraji (tj. jednom okraji světa) žije grupa E_8 , která zodpovídá za narušení supersymetrie. Na druhém okraji žije "naše" grupa E_8 , narušená do grupy standardního modelu. Hořava ukázal, že lokálně všude (včetně okrajů světa) zůstává teorie supersymetrická, což by měl být důvod pro vymizení kosmologické konstanty. Svět se jeví supersymetrickým pozorovateli kratšímu, než je délka úsečky. Ovšem globálně teorie supersymetrická není, protože oba okraje světa požadují jiný skok parametru supersymetrické transformace.



Obr. 9.17: M-teorie a všechny superstrunové teorie jsou vzájemně propojeny dualitami.



Obr. 9.18: Šipky znázorňují poruchové rozvoje kolem $g = 0$. S_1 značí kompaktifikaci na dlouhou kružnici, I_1 svinutí na dlouhou úsečku.

Dalším důsledkem dualit a sjednocení superstrunových modelů je rozšíření vlastní dimenze strun z původní $D = 1$ na objekty s jiným (vyšším) počtem p prostorových rozměrů, např. 2-rozměrné objekty - **membrány**. Takovéto vícerozměrné objekty se již nenazývají superstruny, ale **p -brány**: pro $p = 0$ se jedná o bod, pro $p = 1$ je to struna, pro $p = 2$ membrána, atd.

Další zajímavý princip pro M-teorii objevil E. Martinec a D. Kutasov. Zjistili, že všechny známé teorie strun je možné generovat pomocí tzv. (2,1) heterotických strun. Podobně, jako je obvyklá (1,0) heterotická teorie směsí vpravojdoucí 10D superstruny (1) a vlevojdoucí 26D bosonové struny (0), je (2,1) teorie směsí vpravojdoucí $N = 2$ superstruny a vlevojdoucí $N = 1$ superstruny. Liší se v tom, že vede jen ke konečnému množství stavů, protože kritická dimenze $N = 2$ strun je $D = 2$ (obě souřadnice jsou ovšem jistým způsobem zdvojeny) a neobsahuje tedy žádné příčné polarizace. (Parametr N udává stupeň supersymetrie na světlošle. Kromě hodnot 0,1,2 s kritickými dimenzemi 26,10,2 se promýšlela i hodnota 4, která ovšem vede ke zcela nepoužitelné kritické dimenzi $D = -2$.)



Emil J. Martinec (1958)



David Kutasov (1963)

$N=2$ superstruna obsahuje dvě časové a dvě prostorové souřadnice. Kvůli skloubení s $9+1$ souřadnicemi vlevojdoucími je třeba k nim přidat a poté zase odhodit $1+1$ souřadnici. (2,1) teorie tedy generuje teorii pole ve $2+2$ rozměrech. Takovou membránu s 2 časovými souřadnicemi nazvali autoři "M-bránou". Z $2+2$ souřadnic se efektivně $0+1$ nebo $1+1$ odhodí, proto nám zůstane teorie v $1+1$ rozměrech (podle volby okrajových podmínek dostaneme různé teorie strun - bosonovou, teorii

typu II, heterotickou apod.) nebo v 2+1 rozměrech, kandidát pro konzistentní teorii membrán.

Výklad M-teorie by si zasloužil rozsáhlý text a proto zde odkážeme na vynikající práci věnovanou tomuto tématu:

<http://www.sytoprostor.euweb.cz/docs/Text.pdf> .

Zde si uvedeme jen několik základních údajů.

Hamiltonián tohoto kvantového modelu je velmi jednoduchý (maximálně supersymetrická Yangova – Millsova teorie s grupou $U(N)$ v $9 + 1$ dimenzích, redukováná do $0 + 1$ dimenzí) a popisuje N základních částic zvaných **D0-brány**.

Každá D0-brána nese jednu jednotku hybnosti ve směru kolmém na plochu, do níž chceme informaci uložit.

Fyzikální systém s 9 páry matic \mathbf{X} , \mathbf{P} rozměru $N \times N$ (a jejich 16 antikomutujícími partnery, které však pro jednoduchost zanedbejme), jejichž maticovými elementy jsou operátory

$$\begin{aligned} (x^i)_{mn}, (p^i)_{mn}, \quad i = 1, \dots, 9, \quad m, n = 1, \dots, N, \\ \left[(x^i)_{kl}, (p^i)_{mn} \right] = i\hbar \delta^{ij} \delta^{kn} \delta^{lm}. \end{aligned} \quad (9.281)$$

na Hilbertově prostoru tedy popisuje sektor stavů M-teorie s hybností N/R ve směru zvolené dimenze x^- .

Tato dimenze je právě oním směrem kolmým ke zvolené rovině hologramu.

Její hamiltonián vypadá takto:

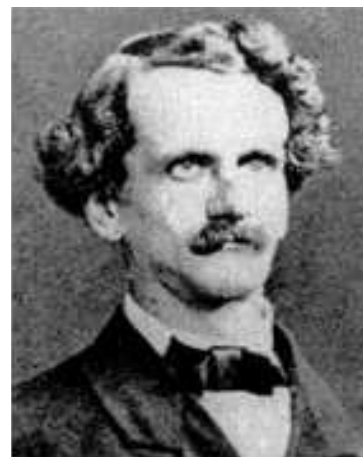
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} = p^- = \frac{p^2 + m^2}{2p^+} = \\ = R \cdot \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \Pi_i \Pi_i - \frac{M_{11}^6}{16\pi^2} [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]^2 - \frac{M_{11}^3}{4\pi} \lambda \Gamma^0 \Gamma^i [\mathbf{X}_i, \lambda] \right). \end{aligned} \quad (9.282)$$

kde \mathbf{X}_i , $i = 1, \dots, 9$ jsou hermitovské matice $N \times N$, Π_i jsou jejich kanonické duály a λ jsou hermitovské fermionové matice jež mají 16 komponent formujících elementy grupy **Spin(9)**.

D -brány (dirichletické brány, kde D označuje dimenzi) jsou zvláštní a velmi důležitou třídou brán. Nesou jméno podle Dirichletových okrajových podmínek pro souřadnice na koncích strun, které na D -bránách mohou končit.



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805 – 1859)



Carl Gottfried Neumann
(1832 – 1925)

Obvyklé otevřené struny mají Neumannovy okrajové podmínky na koncích (derivace je rovna nule), ovšem T-dualita má za následek existenci duálních otevřených strun, které mají Dirichletovy okrajové podmínky (určena hodnota souřadnice na konci struny) pro T-dualizované souřadnice. Obecněji, v teoriích druhého typu můžeme uvažovat otevřené struny s

$$\left. \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = 0, \quad (\mu = 0, 1, \dots, p); \quad x^\mu \Big|_{\sigma=0} = x_0^\mu, \quad (\mu = p + 1, \dots, 9). \quad (9.283)$$

Taková volba pro konstanty x_0^μ naruší Lorentzovu invarianci, díky čemuž lidi tak dlouho odpuzovala. Řešení zdánlivého paradoxu spočívá v tom, že konce strun leží na dynamickém $p+1$ -rozměrném objektu - na D -bráně. D -brány se studovaly už pár let, ovšem jejich význam vysvětlil až Joe Polchinski v roce 1996. Jsou důležité proto, že umožňují studovat excitace brány pomocí renormalizovatelné dvojdimenzionální kvantové teorie pole, namísto světoobjemové teorie D -brány samotné, která renormalizovatelná není. Tímto způsobem se stalo možné počítat neporuchové jevy užitím poruchových metod. Mnohé z dříve

nalezených p -brán jsou D -bránami. Další jsou spojeny s D -bránami symetriemi duality, takže i tyto lze dostat pod matematickou kontrolu. Souřadnice těchto N $D0$ -brán tvoří uspořádanou N -tici, jak jsme zvyklí, ale celou matici $N \times N$, která odpovídá vektorovému potenciálu v Yangově – Millsově teorii s grupou $U(N)$.

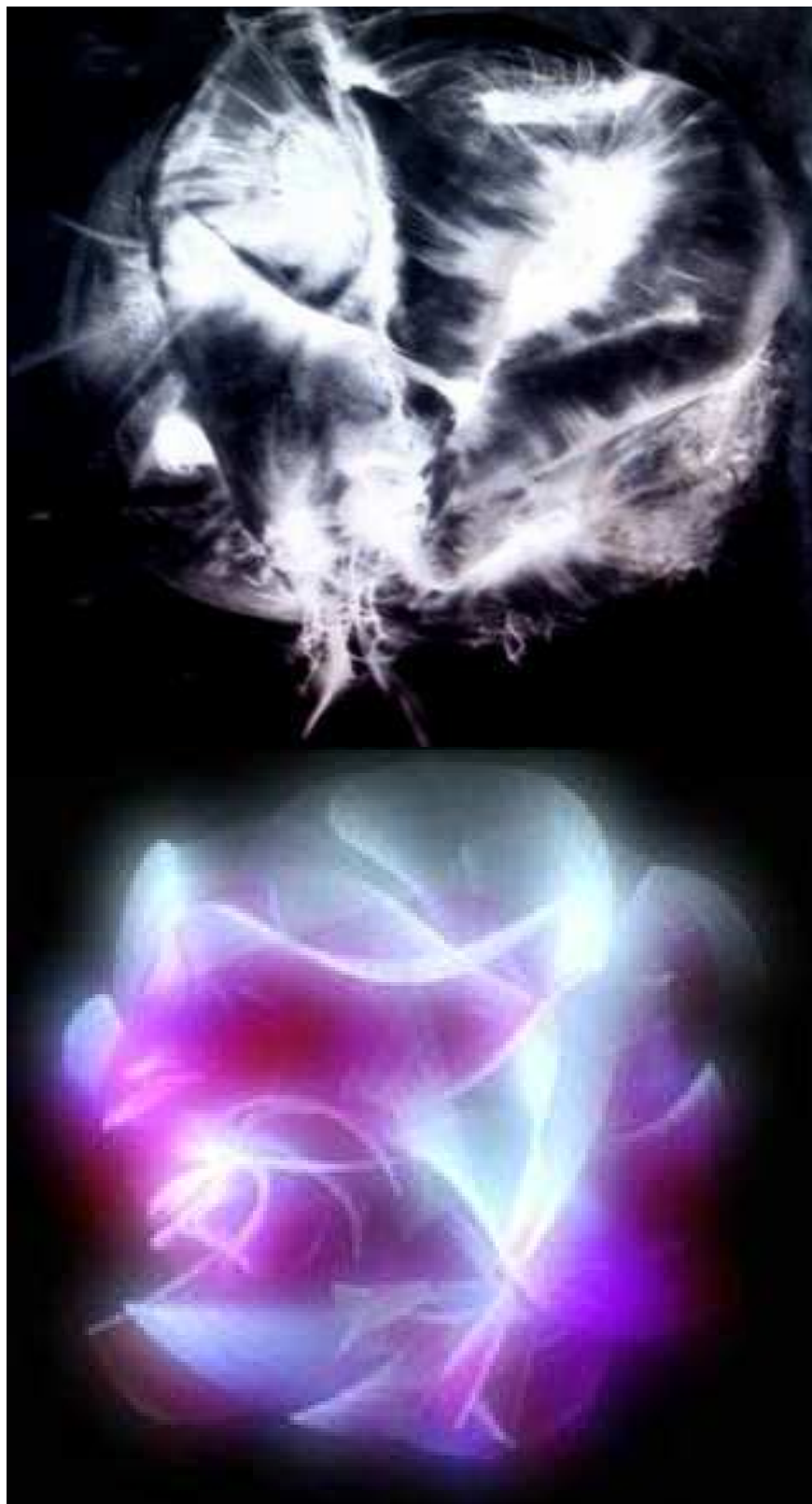


Joseph Polchinski (1954)

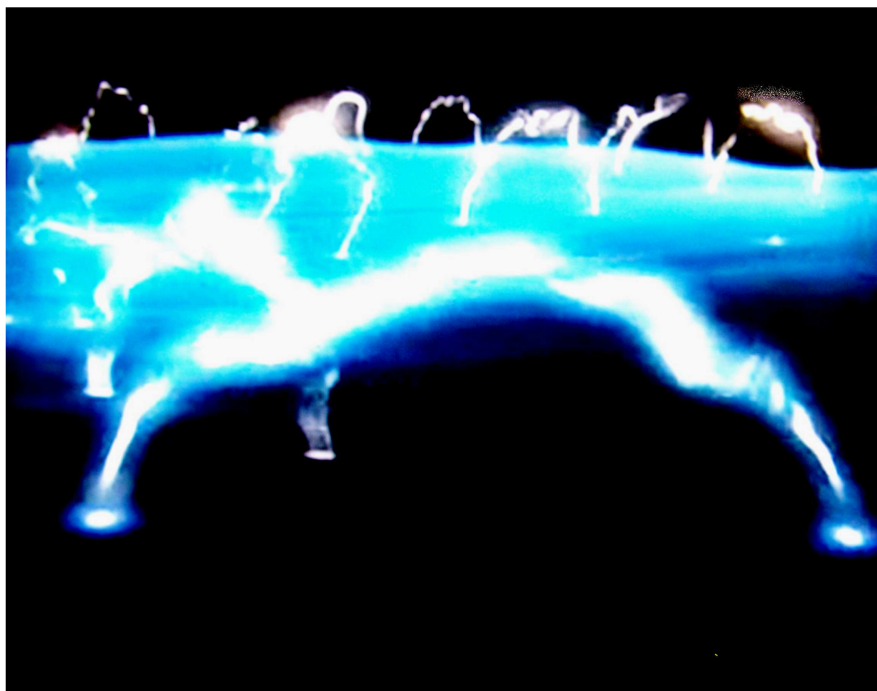
Pokud jsou D -brány daleko od sebe, matici lze s velkou přesností diagonalizovat (vlnová funkce je zanedbatelná v bodě odpovídajícím klasické konfiguraci silně nekomutujících matic díky potenciálnímu členu v hamiltoniánu $\text{Tr}[\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j]^2$ a diagonální elementy nám říkají, jaké jsou klasické polohy těchto částic. Čísla kolem diagonály ve skutečnosti nejsou přesně nulová, ale mohou kolem nuly fluktuovat.

Tyto fluktuace nediagonálních elementů matic představují virtuální efekty, které jsou dimenzionální redukcí vektorových bosonů, ovšem v kontextu maticového modelu jsou nelokálními veličinami a odpovídají za veškeré interakce mezi $D0$ -bránami. Matic souřadnic těchto $D0$ -brán je však o jednu méně, než je prostorových souřadnic (konkrétně jich je 9). Přesto tato teorie popisuje dění v původním prostoru, který má $10 + 1$ dimenzí. Jedna $D0$ -brána má pozici v posledním desátém prostorovém směru zcela neurčitou. Ovšem pokud máme $D0$ -brán velké množství, můžeme do jejich počtu s pomocí Fourierových řad zakódovat i poslední desátou souřadnici.

To tedy znamená, že důvod, proč se cítíme býtí trojrozměrnými bytostmi a nikoli dvourozměrným obrazem je ten, že se skládáme z velkého množství D -brán.



Obr. 9.19: Calabi – Yauova (C – Y) varieta



Obr. 9.20: Otevřené struny ukotvené na membráně C – Y variety

M-teorie ukazuje holografický princip na mnoha místech. Např. příčná velikost objektu složeného z D -brán roste tak, že celková plocha (v případě M-teorie devítirozměrná) je úměrná počtu D -brán. Výpočty vlastností černých děr v M-teorii tento závěr plně podporují. Černá díra se při malé hodnotě vazebné konstanty jeví jako soustava vibrujících strun a brán, na kterých se mohou struny zachytit svými konci.

Strominger a Vafa (a následně mnozí další) ukázali, že D -brán lze použít pro získání počtu kvantových mikrostavů spojených s klasickými konfiguracemi černých děr. Nejjednodušší případ, který byl studován nejdříve, je statická extrémní nabitá černá díra v pěti dimenzích.

Strominger a Vafa spočítali, že pro velké hodnoty náboje souhlasí entropie (definovaná jako $S = \log N$, kde N je počet kvantových stavů, ve kterých systém může být) s Bekenstein-Hawkingovou předpovědí (9.245). Výsledek byl zobecněn i pro černé díry ve 4D, stejně jako pro téměř extrémní (a správně vyzářující) nebo rotující. Posléze bylo propočítáno mnoho dalších černých děr, nejprve téměř extrémních, posléze ale také např. schwarzschildovských.



Andrew Strominger (1955)



Cumrun Vafa (1960)

Ukázalo se, že stupně volnosti reprezentované $D0$ -bránami (jakési základní částice tvořící svět a také v této souvislosti nazývané **partony**) jsou v černé díře skutečně rozptýleny po povrchu, jelikož její entropie (kterou lze interpretovat jako veličinu úměrnou počtu stupňů volnosti či logaritmu počtu možných konfigurací) je úměrná jejímu povrchu, a nikoli objemu, jak jsme zvyklí z klasické termodynamiky.

Zároveň černá díra reprezentuje těleso, v němž je entropie soustředěna nejefektivnějším možným způsobem – plocha jejího horizontu je nejmenším možným povrchem oblasti, ve které se hmota s danou entropií může vyskytovat.

To přivedlo holandského fyzika Gerarda 't Hoofta a amerického fyzika Lennyho Susskinda k hypotéze, že všechny stupně volnosti, v nichž je uložena informace o všem na světě, se dají lokalizovat na povrch prostoru, v němž žijí.

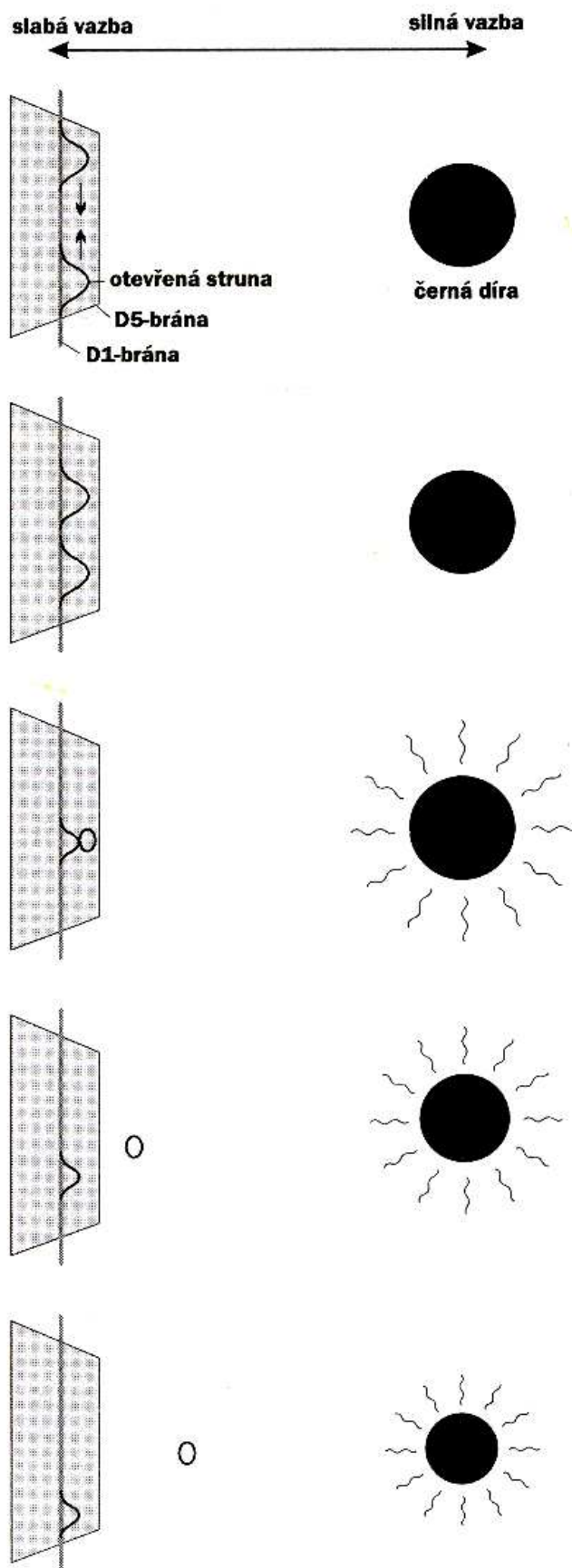
Celá situace je velmi podobná hologramu v tom smyslu, že plocha udržuje informaci o celém prostoru, a proto se uvedenému principu říká holografický.

Díky principu ekvivalence musí tento princip platit nejen pro černou díru, ale úplně všechny fyzikální systémy, neboť dynamika jakéhokoli fyzikálního systému vypadá úplně stejně jako dynamika systému padajícího do ohromné černé díry, jejíž geometrie na horizontu je téměř plochá.

Jsme tudíž vedeni k závěru, že všechny stupně volnosti celého vesmíru (partony) jsou projektovány na dvourozměrnou plochu obklopující vesmír. Hlouběji se tomuto problému budeme věnovat v mé příští knize, věnované m.j. fyzice Blandria.

Obr. 9.21

Černá díra podle Vafy a Stromingera vypadá na krátkých vzdálenostech a při slabé vazebné konstantě jako soustava D1-brán, D5-brán a otevřených strun, které jsou na D-brány připojeny konci (obr. nahoře). Vypařování černé díry lze při slabé vazebné konstantě znázornit jako odtrhávání uzavřených strun z otevřených strun (následující série obrázků).



Z termodynamiky černých děr tak plyne, že by kolem každého objemu měla jít nakreslit myšlená uzavřená plocha taková, že všechny informace o objektech uvnitř by měly jít popsat pouze fyzikou na povrchu této plochy (z toho, že entropie černých děr je úměrná povrchu a ne objemu a že urychlení pozorovatelé vnímají horizonty událostí na prakticky libovolných místech - podle zvoleného zrychlení a polohy pozorovatele - a ty rovněž vyzařují záření obdobné Hawkingovu záření).

Navíc to vypadá, že ne každý pozorovatel může měřit na systému totéž. Velice pěkně to ilustruje například informační paradox černých děr: Z hlediska padajícího pozorovatele se na horizontu nestane nic zvláštního - jde jen o normální bod relativně plochého časoprostoru. Z hlediska vnějšího pozorovatele ale každého padajícího pozorovatele musí spálit Hawkingovo záření. Dá se ukázat, že paradox je nerozřešitelný naší současnou fyzikou - každý pozorovatel který by chtěl narazit na rozpor, by musel nutně zažít Planckovu teplotu.

Z těchto indicií usuzujeme, že k dokončení kvantové gravitace není potřeba nic menšího, než predefinování kvantového stavu tak, aby zahrnoval existenci horizontů událostí a toho, že některé informace jsou pro některé pozorovatele nedostupné a různí pozorovatelé na stejnou otázku mohou dostat různou odpověď, pokud ji v principu nemají jak porovnat.

I z toho, jak s gravitonem zacházejí superstruny je vidět, že jde o něco jiného, než zbylé 3 interakce - graviton je jediná částice tvořená uzavřenou strunou. Dalším problémem by mohlo být, že gravitace obsahuje mnoho stupňů volnosti - stejně jako současné teorie pole, kde mohou být za našich nízkých teplot některé stupně volnosti zamrzlé a částice vypadají jako body. Za vysokých teplot ale může každý bod časoprostoru být nezávislý.

V roce 1996 mladý argentinský fyzik Juan Maldacena ukázal, že i když vypneme gravitaci extrémní Reissnerovy – Nordströmovy černé díry, zachovají si bránové systémy vlastnosti extrémní černé díry z hlediska termodynamiky kolapsarů. Zanedlouho na to ukázal, že podobné závěry platí i pro Reissnerovu – Nordströmovu černou díru, která je pouze

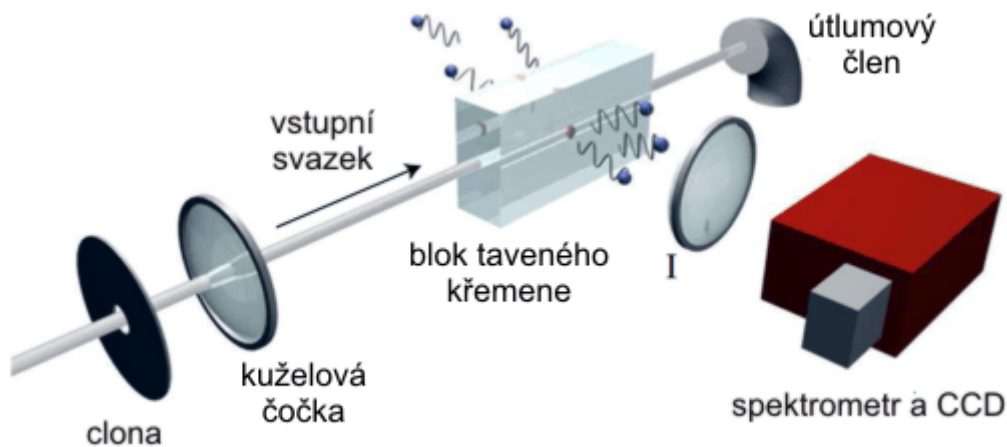
blízká té extrémní.

Horizont černé díry není jedinou hranicí pro šíření elektromagnetického záření. I v laboratorních pokusech se šířením světla existují oblasti, za které se světlo dostat nemůže. Typickým příkladem mohou být experimenty se zpomalováním nebo zastavováním světla. V médiu, kterým se světlo šíří, vznikají „horizonty“, za které se světlo dostat nemůže. Zajímavou, dosud neřešenou otázkou je, zda i na těchto laboratorních horizontech může dojít ke genezi Hawkingova záření. Podle posledních experimentů provedených pracovníky Univerzity v Milánu a italského Národního ústavu pro jaderný výzkum (INFN) se zdá, že ano.



Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846)

Popišme si nyní experiment provedený letos v Milánu, ze kterého se zdá, že z okolí laboratorního horizontu vychází záření obdobné Hawkingovu. Jako zdroj světla posloužil výzkumnému týmu pulzní laser s aktivním prostředím z neodymového skla s délkou trvání pulzu 1 ps, maximální energií pulzu 6 mJ a opakovací frekvencí 10 Hz. Laserový pulz byl po průchodu kruhovou clonou upraven speciální kuželovou čočkou (obr. 9.22). Taková čočka zobrazí bod na přímku podél optické osy a laserový svazek na svazek s prstencovým průřezem. V prvním přiblížení lze říci, že čočka transformuje svazek s Gaussovým průběhem intenzity na tzv. Besselův svazek, u něhož je silně potlačen ohybový jev a který se při prostupu prostředím nerozšiřuje.



Obr. 9.22: Základní experimentální uspořádání, které použila milánská skupina.

Takto upravený svazek vstupuje do aktivního prostředí z taveného křemene, ve kterém dochází ke Kerrově jevu. Elektromagnetická vlna při svém putování prostředím mění index lomu úměrně intenzitě ozáření křemene. Křemenem proto putuje ve směru optické osy porucha indexu lomu δn , celkový index lomu křemene má tvar

$$n(t, z, \omega) = n_0(\omega) + \delta n(z - vt). \quad (9.284)$$

Ve vztahu jsme označili n_0 index lomu pozadí (křemen jeví disperzi, proto je jeho index lomu závislý na frekvenci) a δn poruchu indexu lomu šířící se rychlostí v ve směru osy z (ve směru optické osy, tj. pohybu svazku). V soustavě spojené s šířící se poruchou se nemůže světlo dostat do libovolného místa křemenného média. Z definice indexu lomu $n = c/v$ plyne, že světlo se šíří jen v oblasti, jež vyhovuje nerovnosti

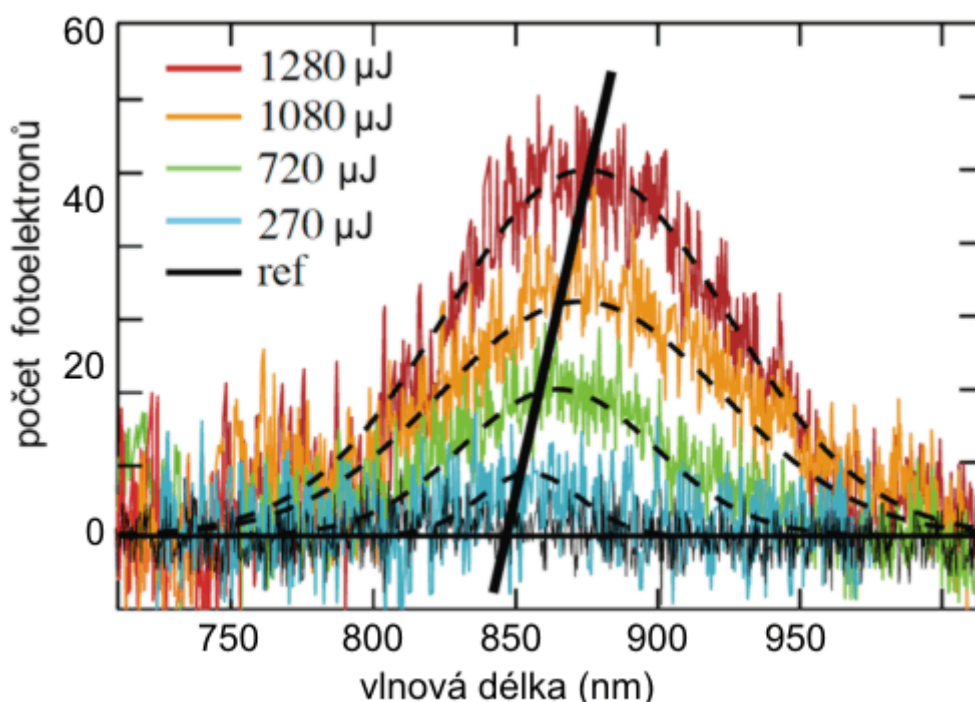
$$n_0(\omega) + \delta n > \frac{c}{v} > n_0(\omega). \quad (9.285)$$

Před pulzem vzniká čelní horizont, za pulzem zadní horizont. Horizonty oddělují oblasti šířícího se elektromagnetického signálu od oblastí, kam signál nemůže proniknout. Poznamenejme, že jde o horizont fázové rychlosti, jiný horizont nazývaný horizont grupové rychlosti, v prováděném experimentu neexistoval. Pokud platí analogie mezi horizontem černé díry a horizontem v popsaném experimentu, mělo by

z oblasti horizontů přicházejí záření černého tělesa, které je modifikováno konečnou geometrií jevu. Výsledkem je, že záření z horizontu by mělo mít jen určitý pás frekvencí daný poslední relací. Po výpočtu vychází, že by mělo být generováno elektromagnetické záření s vlnovou délkou v pásu 800÷900 nm. Vědecký tým se pokusil toto záření zachytit v kolmém směru za pomoci zobrazovací čočky I a CCD kamery se zobrazovacím spektrometrem (viz obr. 9.22).

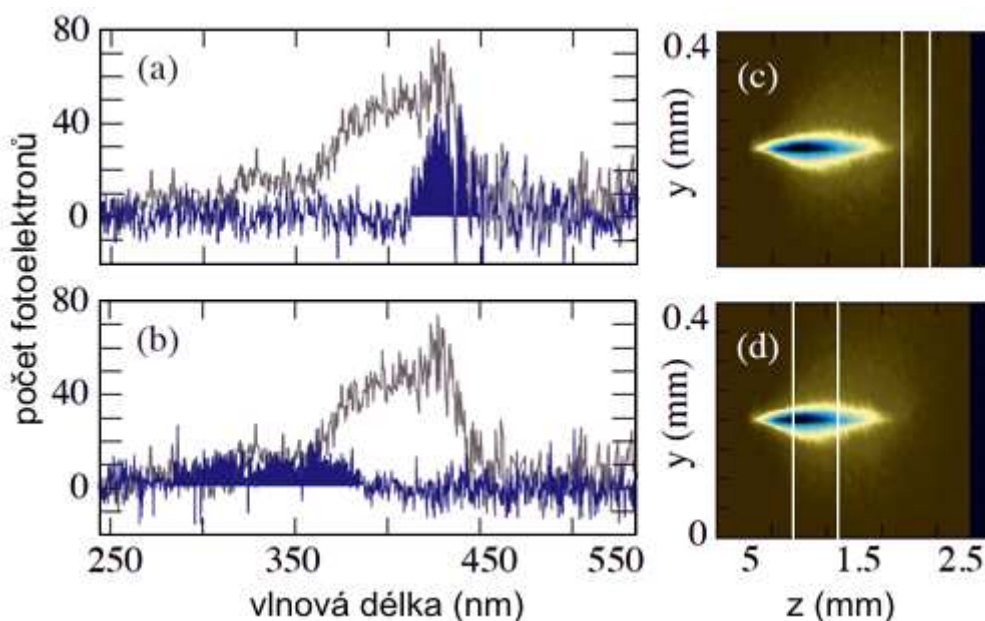
Výsledky experimentu

Milánský tým skutečně našel v hledané oblasti signál. Největším problémem bylo vyloučení všech známých zdrojů elektromagnetického signálu při průchodu laserového svazku prostředím. Postupně byly vyloučeny různé varianty Čerenkovova záření, mixování různých vlnových modů a Rayleighův rozptyl (pružný rozptyl elektromagnetického záření na částicích s menším rozměrem, než má vlnová délka). Nejtěžší bylo ovšem vyloučení fluorescence, která by mohla dát signál v kolmém směru. Byla provedena řada srovnávacích testů, při kterých se zjistilo, že ve sledované frekvenční oblasti nemá tavený křemen žádný fluorescenční pík. Výsledkem je, že naměřený signál odpovídá Hawkingovu záření z obou horizontů, a to frekvenčně, amplitudově i posuvem vlnové délky maxima vyzařování s rostoucí energií Besselova pulzu.



Obr. 9.23: Spektrum měřeného signálu. Různé barvy odpovídají různým energiím jednoho Besselova pulzu. K pořízení spektra bylo použito 3 600 pulzů, jde tedy o integrální spektrum. Čárkovaně je vždy proložena křivka odpovídající měřené hodnotě. Spektra jsou frekvenčně omezena a se zvyšující se energií jeví frekvenční posun (v souladu s teorií). Černě je zobrazeno spektrum referenčního Gaussova pulzu, z něhož je patrné, že v dané oblasti není žádný fluorescenční pík.

Milánská skupina také zkoušela alternativní uspořádání, v němž byla kónická čočka nahrazena normální čočkou s ohniskovou vzdáleností 20 cm, která svazek fokusovala do taveného křemene. Nelineární dynamika Kerrova jevu způsobila vznik filamentu, který se pohyboval křemenem a opět vytvořil přesouvající se poruchu indexu lomu. V tomto uspořádání z výše uvedené nerovnosti vyplynul rozsah vlnových délek emitovaného záření 270÷450 nm. V této oblasti nebyl při experimentech s Besselovým pulzem pozorován žádný signál, což znamená, že zde nedochází k nechtěné fluorescenci. Výsledek modifikovaného experimentu byl opět pozitivní, tj. v uvedené oblasti vlnových délek byl nalezen signál odpovídajících vlastností.



Obr. 9.24: Spektra generovaná v alternativním uspořádání (samostatný filament). Šedé křivky jsou spektra měřená pro dvě různé polohy zcela otevřené vstupní štěrbině spektrometru. Poloha vstupní štěrbině je označena na CCD fotografii filamentu v pravých částech obrázků (c, d). Osa z míří ve směru svazku, osa y je na něho kolmá.

Pokus se skutečně prokáže hlubší souvislost s Hawkingovým zářením by bylo možné sledovat chování horizontu černé díry přímo na laboratorním stole, což je myšlenka velmi fantastická a vzrušující. Spolu s připravovaným experimentem, ve kterém bude hledán stín černé díry ve středu naší Galaxie, může jít o dvě velké události, jež posunou naše znalosti černých děr.

Emergentní struny a Maldacenaova hypotéza

Na podzim roku 1997 Maldacena publikoval ohromující článek, ve kterém odhalil zcela nový typ duality, podle níž má strunová teorie svůj duální popis v řeči kalibrační teorie. Vzhledem ke skutečnosti, že strunová teorie je rovněž teorií gravitační interakce, je toto odhalení nesmírně významné. Dosud formulované kalibrační teorie totiž neobsahují gravitaci, jsou formulovány pouze ve 4 prostoročasových dimenzích a navíc jsou definovány na pozadí pevného prostoročasu, což bychom od teorie gravitačního pole rozhodně neočekávali. Abychom si nastínili alespoň základní rysy Maldaceny myšlenky, musíme si nejprve povědět něco o teorii emergentních strun.



Juan Martín Maldacena (1968)

Počátkem 19. století přišel Michael Faraday s představou siločar pole a považoval je za reálné objekty. Maxwell později prezentoval tyto siločáry jako pouhé pomocné objekty odvozené z rovnic příslušných polí. V teorii strun však původní představa siločar polí jakožto reálných fyzikálních objektů zažívá překvapivou renesanci.

V šesté kapitole jsme si ukázali, že v supravodiči se siločáry magnetického pole stávají diskrétními – každá siločára přenáší jen elementární kvantum magnetického toku. Podobná analogie aplikovaná na QCD vedla na počátku 70. let minulého století Holgera Nielsena k objevu strun. Zakladatelé teorie strun chápali siločáry jako fundamentální objekty kalibrační teorie, napnuté mezi příslušné náboje. Tím byl formulován duální popis, kde siločáry můžeme chápat jako primární objekty a základní zákony předepisují, jakým způsobem se napínají a pohybují. Na druhé straně je možno považovat za primární příslušná pole, přičemž siločáry jsou jen jejich vhodnou vizualizací. Kvantová teorie připouští oba způsoby popisu.

Jak ale mohou být siločáry makroskopických délek (u interakcí nekonečného dosahu) vytvořeny ze strun, jejichž rozměry se pohybují v řádu Planckovy délky? Tato schopnost je příkladem jevu zvaného **emergence**. Tímto pojmem se označuje vznik zcela nových a nečekaných vlastností velkých a složitých systémů. Frekvence kmitů makroskopické struny je typická emergentní vlastnost, protože je určena rychlostí šíření zvuku uvnitř struny. Metodami druhého kvantování lze však s každou vlnou asociovat novou částici. U zvukových vln uvnitř struny jsou to fonony, které přitom rozhodně nepatří mezi částice,

z nichž se skládá materiál struny. Přesto má však fonon všechny atributy částice – hmotnost, hybnost, energii, Fonon patří mezi tzv.

emergentní částice.

Něco podobného platí rovněž i pro kvantové struny – v důsledku jejich vzájemných interakcí se štěpí a zase spojuje ohromné množství strun najednou a je prakticky nemožné sledovat každou strunu zvlášť.

Nezbývá, než k popisu použít nějakou jednodušší emergentní vlastnost velkého souboru strun, která nám umožní dobře popsat, co se děje.

A stane se něco opravdu pozoruhodného – stejně, jako se soubor nějakých částic může chovat jako úplně nová částice (např. fonon), může se i kolektivní soubor velkého množství strun projevovat jako nový druh struny – v takovém případě hovoříme o **emergentní struně**.

Chování emergentních strun je přesně opačné, než chování strun fundamentálních. Čím více spolu fundamentální struny interagují, tím méně mohou interagovat z nich složené struny emergentní. Přesněji řečeno, je-li pravděpodobnost interakce dvou fundamentálních strun úměrná vazbové konstantě g , pak pravděpodobnost interakce emergentních strun je $1/g$.

Ukazuje se, že působení fundamentálních a emergentních strun nelze vzájemně odlišit a celé schéma lze tedy otočit a prohlásit emergentní struny za fundamentální. Jak jsme si řekli v odstavci o M-teorii, tato tzv. S-dualita dokázala spolu s T-dualitou vzájemně propojit 5 různých superstrunových teorií.

Jelikož teorie strun může povstat ze siločar toku polí, a tyto siločáry se stávají fundamentálními objekty teorie, dalo by se říci, že siločáry jsou emergentními strunami. Alexandr Poljakov ukázal, že za jistých okolností by se emergentní struny spojené s kalibračními teoriemi skutečně mohly chovat jako fundamentální struny. Struny vzniklé z kalibračních polí mají při kvantověmechanickém popisu emergentní vlastnost, kterou lze v každém bodě struny popsat jedním číslem o fyzikálním rozměru délky. Toto číslo udává další souřadnici daného bodu struny v dodatečné dimenzi prostoru. Takováto kalibrační teorie by tedy mohla fungovat v prostoročase o 5 dimenzích. Poljakov tak formuloval dualitu mezi kalibrační teorií pole ve čtyřrozměrném prostoročase a teorií strun v pětirozměrném prostoročase.

Maldacena tuto ideu dále rozvinul a upřesnil. Zaměřil se na emergentní struny vznikající jako duální popis **maximální superteorie**, což je

kalibrační teorie s nejvyšší možnou supersymetrií. Zjistil, že strunová teorie popisující příslušné emergentní struny je ve skutečnosti desetirozměrná supersymetrická teorie strun. Z devíti jejích prostorových dimenzí jich čtyři odpovídají Poljakovově konstrukci a jeví zápornou křivost, zbylých pět dimenzí má naopak křivost kladnou. Maldacenaova hypotéza nebyla dosud rigorózně dokázána ve vší její obecnosti, přesto bylo shromážděno velké množství argumentů minimálně pro její aproximativní platnost. V tomto směru již bylo dosaženo značného pokroku.

Například desetirozměrná teorie v nejhrušší aproximaci odpovídá zobecněné verzi OTR doplněné o supersymetrii. Je to dobře definovaná klasická teorie bez kvantových efektů, ve které se dají snadno provádět nejrůznější výpočty.

Nalezení rigorózního důkazu Maldacenaovy hypotézy by nám umožnilo získat přesný popis teorie strun překladem jakékoli otázky do jazyka maximální superteorie, o níž toho dnes víme mnohem víc, než o M-teorii. Nedávno bylo dokonce dosaženo značného pokroku ve snaze přesně definovat tuto kalibrační teorii pomocí aproximativního postupu zvaného **kalibrační teorie na mříži**, o němž budeme podrobně hovořit ve 12. kapitole. Nalezení tohoto důkazu by jistě odstartovalo třetí superstrunovou revoluci, proto je jeho hledání pro současné strunové teoretiky zcela klíčovým úkolem.

Pokud by se nakonec potvrdila pouze přibližná platnost Maldacenaovy hypotézy, potom by byl vztah mezi fyzikou uvnitř černé díry a kalibrační teorií také jen aproximativní. V takovém případě může černá díra informace navždy uvěznit a předat je dál do nového vesmíru, jenž se zrodí z její singularity.

Strunové prostoročasy

Zkoumejme strunu šířící se na pozadí, v němž některá ze strunových polí mají klasické očekávané hodnoty. Rozšíření akce (9.253), kdy bereme do úvahy tři základní pole - graviton, popsany symetrickým tenzorem se složkami $g_{\alpha\beta}$, antisymetrický tenzorový potenciál $B_{\alpha\beta}$ a dilaton Φ , je dáno takto

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int \sqrt{|\gamma|} d^2\xi \left[g_{\alpha\beta}(X) \partial_i X^\alpha \partial_j X^\beta \gamma^{ij} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \alpha' R \Phi(X) + B_{\alpha\beta}(X) \partial_i X^\alpha \partial_j X^\beta \varepsilon^{ij} \right], \quad (9.286)$$

kde ε^{ij} označuje Levi-Civitův tenzor na světlošle a R je skalární křivost počítaná pro metriku γ_{ab} . Protože dilatonový člen je řádu $O(a'^2)$, je akce (9.286) konformně invariantní pouze do řádu $O(a')$, což znamená, že v obecném řádu je ztracena jedna ze základních symetrií strunové teorie. Ve vztahu (9.286) je explicitně vyznačena závislost g_{ab} , B_{ab} a Φ na prostoročasových souřadnicích, a tedy X^α již nejsou volná pole. Z konformní teorie pole vyplývá, že při kvantování interagujících konformně invariantních polí je obecně ztracena konformní invariance. Proto, aby byla zachována konformní invariance, nezbyvá než požadovat, aby byla zachována v každém řádu a' . Odtud vyplývají fundamentální pohybové rovnice, které musí g_{ab} , B_{ab} a Φ splňovat.

$$R_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi + \frac{1}{4} H_{\alpha\gamma\delta} H_\beta^{\gamma\delta} = O(\alpha'), \\ \nabla_\alpha H^{\alpha\beta\gamma} + \nabla_\alpha \Phi H^{\alpha\beta\gamma} = O(\alpha'), \\ \frac{2}{3} \frac{D-26}{\alpha'} + \left(-R + \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi + 2 \nabla_\alpha \nabla^\alpha \Phi + \frac{1}{12} H_{\alpha\beta\gamma} H^{\alpha\beta\gamma} \right) = O(\alpha'). \quad (9.287)$$

V rovnicích (9.287) jsou komponenty $H_{\alpha\beta\gamma}$ antisymetrického tenzoru třetího řádu H , definované vnější derivací z $B_{\alpha\beta}$, dále R a $R_{\alpha\beta}$ jsou skalární křivost a Ricciho tenzor počítané z metriky $g_{\alpha\beta}$. Tyto rovnice jsou strunovou verzí Einsteinových rovnic, a tedy členy obsahující α' lze chápat jako strunové korekce. Zdůrazněme ještě jednou, že rovnice (9.287) byly odvozeny čistě z podmínky zachování konformní symetrie. Po konformní transformaci $g_{ab} \rightarrow \exp\{-2\Phi/(D-2)\}g_{ab}$ je akce systému (9.287) dána vztahem

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{2}{3} \frac{D-26}{\alpha'} \exp\left(-\frac{2\Phi}{D-2}\right) - R + \frac{1}{D-2} \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi + \frac{1}{12} \exp\left(-\frac{4\Phi}{D-2}\right) H^2 \right], \quad (9.288)$$

kde jsme označili $H^2 = H_{\alpha\beta\gamma} H^{\alpha\beta\gamma}$.

Před zakončením tohoto oddílu se zmíníme o další přesné symetrii ve strunové teorii. Nazývá se T-dualitou a jejím základním důsledkem je to, že dva různé prostoročasy jsou popsány jednou a toutéž strunovou teorií. Předpokládejme, že v daném strunovém prostoročase je definováno Killingovo vektorové pole $\zeta = \partial/\partial X^0$ vyjadřující symetrii prostoročasu vůči posunutí ve směru souřadnice X^0 , a tedy lze zvolit adaptované souřadnice, v nichž g_{ab} , B_{ab} a Φ nezávisí na souřadnici X^0 . Pak může být dokázáno, že nová metrika, definovaná vzorci

$$\begin{aligned} \hat{g}_{00} &= \frac{1}{g_{00}}, \\ \hat{g}_{0\alpha} &= \frac{B_{0\alpha}}{g_{00}}, \\ \hat{g}_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta} - B_{0\alpha} B_{0\beta}}{g_{00}}, \end{aligned} \quad (9.289)$$

tvoří spolu s příslušně transformovanými veličinami, potenciálem $\hat{B}_{\alpha\beta}$ a dilatonem $\hat{\Phi}$, strunový (a T-duální) prostoročas ekvivalentní s původním. Výsledkem dvojnásobné T-dualizace je opět výchozí prostoročas.

Kosmologické modely

Začněme nejjednodušším předpokladem o **statičnosti vesmíru**, který je sice **nerealistický**, avšak sehrál důležitou heuristickou úlohu a i nyní má svůj teoretický význam - z něj plynoucí Einsteinův a de Sitterův kosmologický model se často používají pro srovnávání a ilustraci

vlastností složitějších a realističtějších modelů. V homogenním statickém vesmíru, v němž jsou podmínky všude stejné v každém časovém okamžiku, je přirozené zvolit souřadnicovou soustavu tak, aby prostoročasový interval byl **sféricky symetrický** vzhledem k libovolnému bodu. Element prostoročasového intervalu pak bude mít obecný tvar

$$ds^2 = -A(r)c^2 dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.290)$$

kde A a B jsou funkce pouze r , přitom pro malá r musí tento interval nabývat tvar odpovídající plochému prostoročasu speciální teorie relativity.

Přímým výpočtem komponent Ricciho tenzoru R_{ik} a dosazením tenzoru energie-hybnosti

$$T_{ik} = (p + \rho)u_i u_k - p \cdot g_{ik} \quad (9.291)$$

odpovídajícího ideální kapalině, lze Einsteinovy rovnice pro metriku (9.290) převést na soustavu obyčejných rovnic (čárka znamená derivaci podle r)

$$\begin{aligned} \frac{A'}{ABr} - \frac{(1-1/B)}{r^2} &= 8\pi p, \\ \frac{B'}{B^2 r} + \frac{(1-1/B)}{r^2} &= 8\pi \rho, \\ \frac{dp}{dr} &= -\frac{A'(\rho + p)}{2A}, \end{aligned} \quad (9.292)$$

(poslední rovnici lze nejsnadněji obdržet ze zákona zachování $T^{ik}_{;k} = 0$).

Protože $dp/dr = 0$ (homogenita), poslední rovnice (9.292) dává podmínku $A'(\rho + p)$. Pomíneme-li případ prázdného prostoru $\rho = p = 0$, mají Einsteinovy rovnice statické homogenní řešení jen tehdy, když

$A' r) = 0$. To však podle prvních dvou rovnic pole (9.292) vede k podmínce $\rho + 3p = 0$, což pro reálnou hmotu opět znamená $\rho = p = 0$. Einsteinovy rovnice v běžném tvaru (2.321) tedy nepřipouštějí jiné homogenní statické řešení, než prázdný plochý Minkowskiho prostoročas STR; jsou tedy **neslučitelné** s koncepcí homogenního statického vesmíru zaplněného hmotou s konstantní kladnou hustotou ρ .

Aby rovnice (9.292) měly statické homogenní řešení pro realistický případ $\rho > 0, p > 0$, je třeba do nich vnést vhodnou konstantu Λ . V Einsteinových rovnicích lze toto zajistit zavedením dodatečného **kosmologického členu** Λg_{ik} , jak to v r. 1917 navrhl Einstein:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = 8\pi T_{ik} \quad (9.293)$$

kde Λ je nová (dostatečně malá) univerzální přírodní konstanta - tzv. **kosmologická konstanta**, jejíž hodnota by měla plynout ze srovnání příslušného kosmologického modelu s výsledky astronomických pozorování.

Pro statickou homogenní metriku (9.290) vedou zobecněné Einsteinovy rovnice na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{A'}{ABr} - \frac{(1-1/B)}{r^2} + \Lambda &= 8\pi p, \\ \frac{B'}{B^2 r} + \frac{(1-1/B)}{r^2} - \Lambda &= 8\pi \rho, \\ \frac{dp}{dr} &= -\frac{A'(\rho + p)}{2A}. \end{aligned} \quad (9.294)$$

Vzhledem k požadavku homogenity musí být $dp/dr = 0$, takže poslední rovnice (9.294) může být splněna jen tehdy, když $(\rho + p) A' = 0$. Rovnice (9.294) jsou tedy řešitelné ve třech případech, kterým odpovídají následující řešení :

$$\begin{array}{ll}
 A' = 0 & \text{Einsteinův model ;} \\
 \rho + p = 0 & \text{de Sitterův model ;} \\
 A' = 0, \rho + p = 0 & \text{plochý prostoročas STR .}
 \end{array}$$

Einsteinův kosmologický model

V modelech založených na kosmologickém principu musí být trojrozměrný prostor **homogenní a izotropní**, tj. všechny body a všechny směry jsou zde rovnocenné, ničím se neliší. V diferenciální geometrii se ukazuje, že takovým trojrozměrným prostorem je prostor s **konstantní křivostí** (nezávislou na prostorových souřadnicích ani na směru), který je **sféricky symetrický** vzhledem ke každému bodu; libovolný bod proto může být zvolen za počátek $r = 0$ prostorových souřadnic. Délkový element v takovém prostoru se obvykle vyjadřuje ve tvaru

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{kr^2}{a^2}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.295)$$

kde veličina a (s rozměrem délky) udává poloměr křivosti prostoru a parametr $k = 1, 0, -1$ charakterizuje typ geometrie prostoru:

$$\begin{array}{ll}
 k = 1 & \rightarrow \text{prostor s kladnou konstantní křivostí ;} \\
 k = 0 & \rightarrow \text{Eukleidovský plochý prostor ;} \\
 k = -1 & \rightarrow \text{prostor s konstantní zápornou křivostí .}
 \end{array}$$

V případě $A' = 0$ musí být $A(r)$ konstanta, takže příslušnou volbou jednotky času (časové souřadnice) lze dosáhnout $A = 1$; je tak zajištěn požadavek, aby pro malé r interval ds^2 byl stejný jako ve STR. Z první rovnice (9.294) dosazením $A' = 0$ dostáváme pro funkci B řešení

$$B(r) = \frac{1}{1 - r^2 (\Lambda - 8\pi p)} = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad (9.296)$$

kde

$$a^2 \equiv \frac{1}{\Lambda - 8\pi p}. \quad (9.297)$$

Metrika (9.290) má tedy pro Einsteinův kosmologický model homogenního statického vesmíru tvar

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.298)$$

Srovnáním s (9.295) vidíme, že prostorovou část

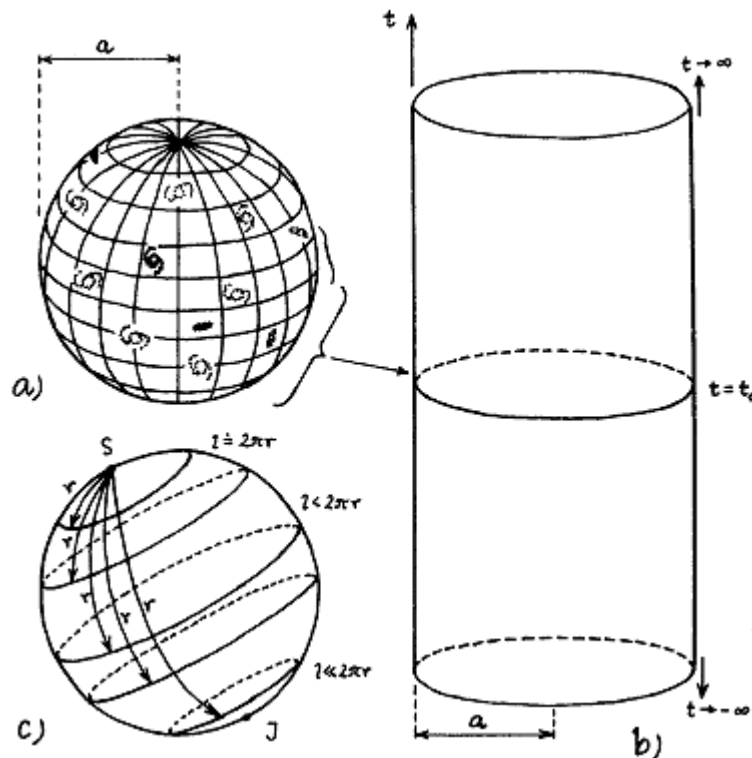
$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.299)$$

tohoto prostoročasového intervalu lze interpretovat jako metriku trojrozměrné hypersféry o konstantním poloměru a , vnořené do fiktivního čtyřrozměrného Eukleidovského prostoru (obr. 9.25). Opět je zde třeba upozornit, že tvarem metriky není jednoznačně určen typ geometrie, protože je možno předpokládat různé globální topologické vlastnosti. Volba sférické geometrie je zde však nejjednodušší a nejpřirozenější. Zavedeme-li v tomto pomocném prostoru souřadnice

$$\begin{aligned} w_1 &= a \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \\ w_2 &= r \cdot \sin \vartheta \cos \varphi = x, \\ w_3 &= r \cdot \sin \vartheta \sin \varphi = y, \\ w_4 &= r \cdot \cos \vartheta = z, \end{aligned} \quad (9.300)$$

dostaneme rovnici sféry $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = a^2$, a element prostorové vzdálenosti má tvar $dl^2 = (dw_1)^2 + (dw_2)^2 + (dw_3)^2 + (dw_4)^2$. Uvažujeme-li nejen prostorovou, ale i časovou dimenzi, je možno celkovou prostoročasovou geometrii Einsteinova vesmíru zobrazit jako geometrii

čtyřrozměrné válcové plochy vnořené do fiktivního (pomocného) pětirozměrného prostoru - obr. 9.25b.



Obr. 9.25. Einsteinův kosmologický model.

a) Geometrii trojrozměrného prostoru v Einsteinově modelu vesmíru si lze představit jako trojrozměrnou hypersféru o konstantním poloměru, vnořenou do fiktivního 4-rozměrného Eukleidova prostoru.

b) Celkovou prostoročasovou geometrii Einsteinova vesmíru je možno zobrazit jako geometrii čtyřrozměrné válcové plochy vnořené do fiktivního pětirozměrného prostoru.

c) Specifické zvláštnosti prostorové geometrie a topologie uzavřeného vesmíru lze názorně ilustrovat na kulové ploše, např. na glóbusu zeměkoule - viz text.

Celkový objem prostoru v Einsteinově vesmíru je (za předpokladu sférické topologie) roven

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = 2\pi^2 a^3 \quad (9.301)$$

"obvod" vesmíru (délka hlavní kružnice trojrozměrné sféry) je

$$L = \int_0^{2\pi} a d\varphi = 2\pi a . \quad (9.302)$$

Einsteinův vesmír je tedy **konečný, prostorově uzavřený**; "vejde" se do něho jen konečné množství hmoty.

Prostorová uzavřenost vesmíru má zajímavé důsledky, které si lze snadno představit pomocí dvojrozměrné analogie na kulové ploše, třebaš na povrchu zeměkoule (obr. 9.25c). Postavíme-li se na pól (který z geometrického hlediska můžeme umístit do kteréhokoli místa kulové plochy) a opisujeme kolem sebe kružnice o stále větším poloměru, zjistíme že poměr délky kružnice ku poloměru bude čím dál menší než 2π a při překročení "rovníku" se délka kružnice s rostoucím poloměrem zmenšuje. Podobně když pozorovatel nacházející se v libovolném místě uzavřeného vesmíru bude v myšlenkovém pokusu vytyčovat kolem sebe kulové plochy, poroste jejich povrch pomaleji než druhá mocnina poloměru a po překročení určité vzdálenosti se velikost plochy začne zmenšovat, i když se vzdálenost (poloměr) zvětšuje. Další charakteristickou vlastností geometrie uzavřeného prostoru je skutečnost, že pozorovatel postupující stále přímo v jednom směru se za určitou dobu vrátí do výchozího bodu (z opačné strany). Totéž platí i pro světelné paprsky: světlo, vyslané z nějakého místa určitým směrem, "oběhne vesmír" a vrátí se do výchozího bodu z opačného směru. Takže když se budeme v uzavřeném vesmíru dívat dopředu, můžeme po určité době v dálce před sebou uvidět svoje vlastní záda. Podobné "duchy" zde vznikají při pozorování každého svítícího objektu, takže některé hvězdy nebo galaxie bychom mohli vidět vícekrát v různých místech oblohy (hledání identických duplicitních objektů v opačných místech oblohy však dosud nebylo úspěšné).

Tento efekt by vedl u Einsteinova kosmologického modelu k Olbersovu fotometrickému paradoxu podobně jako dřívější představa nekonečného statického vesmíru. Každý paprsek z každé hvězdy bude totiž neustále obíhat vesmír, dokud nenarazí na jinou hvězdu nebo se nerozptýlí na mezihvězdné hmotě. V uzavřeném statickém vesmíru, v němž je po nekonečně dlouhou dobu stejná průměrná svítivost hvězd, nebude v noci tma, obloha bude všude stejně jasná.



Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers (1758 – 1840)

Vztahy mezi hustotou, tlakem, kosmologickou konstantou a poloměrem křivosti prostoru v Einsteinově kosmologickém modelu plynou z rovnic (9.294) - (9.297) :

$$8\pi p = \Lambda - \frac{1}{a^2}, \quad (9.303)$$

$$8\pi\rho = \frac{3}{a^2} - \Lambda,$$

Odkud

$$\begin{aligned} \Lambda &= 4\pi(\rho + 3p), \\ \frac{1}{a^2} &= 4\pi(\rho + p). \end{aligned} \quad (9.304)$$

Za předpokladu, že hmota vesmíru sestává z nekoherentního prachu nezpůsobujícího žádný tlak, bude

$$\Lambda = \frac{1}{a^2} = 4\pi\rho, \quad (9.305)$$

a poloměr křivosti prostoru a jeho celkový objem je určen hodnotou kosmologické konstanty :

$$a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}},$$

$$V = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\Lambda^3}}.$$
(9.306)

Celková hmotnost vesmíru je potom rovna

$$M = \rho V = \frac{\pi a}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{\Lambda}}.$$
(9.307)

Takto stanovená hmotnost má však pouze formální význam z hlediska negravitační fyziky jako míra množství hmotných částic zaplňujících vesmír. Při druhém krajním předpokladu, že vesmír je zaplněn pouze zářením pro něž platí $p = r/3$, dostáváme

$$\Lambda = \frac{3}{2a^2},$$

$$4\pi\rho = \frac{3}{4a^2},$$

$$4\pi p = \frac{1}{4a^2}.$$
(9.308)

Učinek sumárního gravitačního pole Einsteinova modelu na testovací částici je dán rovnicí geodetiky (1.33). Dosazením statické metriky (9.290) do rovnice geodetiky tělesa, které je v daném okamžiku v klidu vůči okolní hmotě, dostaneme $d^2x^i/dt^2 = 0$, takže celkové gravitační pole (metrika prostoročasu) v Einsteinově vesmíru nemůže uvést nehybné těleso do pohybu.

De Sitterův kosmologický model

S užitím požadavku, aby pro malá r hledaná metrika přecházela v Minkowskiho tvar, dostáváme

$$\frac{1}{A} = B = 1 - \frac{\Lambda + 8\pi\rho}{3} r^2.$$
(9.309)



Willem de Sitter (1872 – 1934)

Metrika de Sitterova modelu vesmíru tedy je

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.310)$$

kde konstanta a je definována vztahem

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\Lambda + 8\pi\rho}{3}. \quad (9.311)$$

Pro pohyb testovacích částic a šíření světelných signálů, který je obecně dán rovnicí geodetiky (1.33), pro deSitterovu metriku po úpravách (díky sférické symetrii lze bez újmy na obecnosti pohyb vyšetřovat pouze v rovině $\vartheta = \pi/2$) vychází rovnice

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \pm \frac{1 - r^2/a^2}{H} \sqrt{H^2 - 1 + \frac{r^2}{a^2} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{L^2}{a^2}}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{L(1 - r^2/a^2)}{Hr^2}, \end{aligned} \quad (9.312)$$

(H a L jsou integrační konstanty). Rychlost světla v de Sitterově modelu je pro případ čistě radiálního šíření dána vztahem

$$\frac{dr}{dt} = \pm(1 - r^2/a^2). \quad (9.313)$$

Z těchto rovnic je v první řadě vidět, že při $r = a$ se rychlost pohybu částic i souřadnicová rychlost světla stávají nulovými. Integrací od $r = 0$ do $r = a$ zjistíme, že z hlediska pozorovatele ve středu $r = 0$ každá částice i světlo ze středu $r = 0$ do místa $r = a$ dorazí až za nekonečně dlouhou dobu. Pozorovatel v de Sitterově modelu tedy nikdy nemůže získat žádné informace o tom, co se děje ve vzdálenostech větších než a od něj – v de Sitterově modelu existuje **kauzální horizont vesmíru** ve vzdálenosti

$$r = a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda + 8\pi\rho}}. \quad (9.314)$$

Z rovnic pohybu dále plyne, že původně nehybné těleso bude mít radiální zrychlení

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad (9.315)$$

které roste se vzdalováním od počátku lokálních souřadnic (který může být umístěn v libovolném bodě). Jsou-li v de Sitterově vesmíru homogenně a izotropně rozmístěny částice, budou se navzájem od sebe vzdalovat rychlostí úměrnou jejich vzdálenosti. Metrika de Sitterova vesmíru je sice statická (v dané vztažné soustavě nezávisí na čase), avšak v intervalu (9.310) koeficient $u dt$ již není konstantní. Na rozdíl od Einsteinova modelu celkové gravitační pole (metrika prostoročasu) v de Sitterově vesmíru způsobuje rozptylování nebeských těles - jako by každý bod byl odpuzivým centrem. Pro velké vzdálenosti zde neplatí zákon setrvačnosti, tělesa budou od sebe s narůstající rychlostí expandovat. Tato proměnnost vlastních vzdáleností částic bude způsobovat Dopplerovský spektrální posuv světla vysílaného těmito částicemi; v ne příliš velkých vzdálenostech r bude pro tento frekvenční posun přibližně platit **Hubbleův zákon**

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \approx Hr \quad (9.316)$$

kde **Hubbleova konstanta**

$$H = a^{-1} = \sqrt{\frac{\Lambda + 8\pi\rho}{3}} \quad (9.317)$$

Jelikož tedy de Sitterův model zachycuje pozorovaný rudý posuv spektra vzdálených zdrojů ve vesmíru, mohl by být na první pohled považován za realistický kosmologický model. Ve skutečnosti však tento model není konzistentní z fyzikálního hlediska. Základní podmínka z níž de Sitterův vesmír vychází, totiž zní $\rho + p = 0$. Vlastní hustota hmoty ρ je (svou fyzikální povahou) vždy nezáporná. Tlak p sice může být v principu záporný, avšak žádná forma hmoty nevytváří takový záporný tlak, jehož absolutní velikost by se přibližovala hustotě hmoty ρ (v geometrodynamických jednotkách). Podmínka $\rho + p = 0$ může být proto v praxi splněna jen tehdy, když současně $\rho = 0$ a $p = 0$. De Sitterův model tedy odpovídá zcela **prázdnému vesmíru**, který neobsahuje žádné znatelné množství látky ani záření. Existující hvězdy a galaxie je v tomto modelu třeba považovat za "testovací částice", které nijak nepřispívají k celkovému kosmologickému gravitačnímu poli. A to je proti duchu obecné teorie relativity, která gravitaci a geometrii prostoročasu dává do přímé souvislosti s distribucí hmoty. Současné kvantové unitární teorie pole však připouštějí možnost velkého negativního tlaku vedoucího k antigravitačním účinkům. De Sitterovská expanze se podle toho skutečně mohla realizovat ve velmi raném vesmíru (inflační expanze).

Všimněme si nyní ještě obecné povahy kosmologického členu. Když Einstein zavedl kosmologický člen, umístil jej na **levou stranu** rovnice:

$$G_{ik} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \quad (9.318)$$

čímž bylo vyjádřeno, že se jedná o (geometrickou) vlastnost samotného prostoru (prostoročasu).

Fyzikální význam kosmologického členu však jasněji vysvitne po jeho přenesení na pravou stranu Einsteinových rovnic

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} + \Lambda g_{ik} \quad (9.319)$$

tj. z jeho zahrnutí do tenzoru energie-hybnosti hmoty T_{ik} . Uvážíme-li případ vakua $T_{ik} = 0$, je vidět, že Λg_{ik} představuje jakousi imanentní principiálně neodstranitelnou **křivost prázdného prostoru**, která se uplatňuje i bez jakékoliv hmoty a gravitačních vln. Jinými slovy, kosmologický člen vyjadřuje **gravitační účinky vakua**. Jestliže by bylo $\Lambda \neq 0$, znamená to, že vakuum vytváří gravitační pole, jako kdyby bylo (z hlediska běžného přístupu $\Lambda = 0$) zaplněno hmotou s efektivní hustotou a tlakem

$$\begin{aligned} \rho_{\text{kosm}} &= \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}, \\ p_{\text{kosm}} &= -\frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} \equiv -\mathcal{E}_{\text{kosm}}, \end{aligned} \quad (9.320)$$

($\mathcal{E}_{\text{kosm}}$ je efektivní hustota energie této fiktivní hmoty), což odpovídá stavové rovnici $p = -rc^2$.

Kosmologický člen můžeme považovat za projev jakéhosi exotického typu hmoty - **energie vakua**. Ta proniká celým prostorem a spojitě ho vyplňuje určitou **základní hustotou energie**, a to i bez přítomnosti "běžné" hmoty (v látkové formě). Nezředuje se při rozpínání vesmíru, ani se nezhlukuje jako látková hmota, ale zachovává si konstantní hustotu, přispívající k všeobecné hustotě energie, gravitačně ovlivňující dynamiku evoluce vesmíru (po pravdě řečeno, se takto chová standardní "geometricky indukovaný" kosmologický člen - fyzikálně pojatý kosmologický člen by se v zásadě mohl měnit s časem a rovněž v různých oblastech vesmíru by mohl mít jinou hodnotu).

Z hlediska obecné teorie relativity je zavedení kosmologické konstanty jako další nezávislé univerzální přírodní konstanty čistě fenomenologické, i když kosmologický člen může být organickou součástí rovnic pole - zavedení kosmologického členu Λg_{ik} je jedinou

přípustnou úpravou Einsteinových rovnic (2.321) v tom smyslu, že nenarušuje zákon zachování energie $T^{ik}_{;k} = 0$, protože kovariantní 4-divergence tenzoru

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \Lambda g_{ik} \quad (9.321)$$

je identicky rovna nule stejně jako u tenzoru

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R. \quad (9.322)$$

Byly činěny pokusy dát Λ do souvislosti s "fyzikou vakua" kvantové teorie pole: kosmologický člen by měl vznikat následkem polarizace a kvantových fluktuací vakua. Přímočarý výpočet (resp. dimenzionální odhad) dává však nepředstavitelně velkou hustotu energie vakua $\rho_{\text{kosm}} > 10^{22} \text{ g/cm}^3$. Aby vakuum vypadalo jako prázdný prostor, musejí se uplatňovat dalekosáhlé kompenzace mezi vakuovými fluktuacemi různých polí, které většinu fluktuací vyruší.

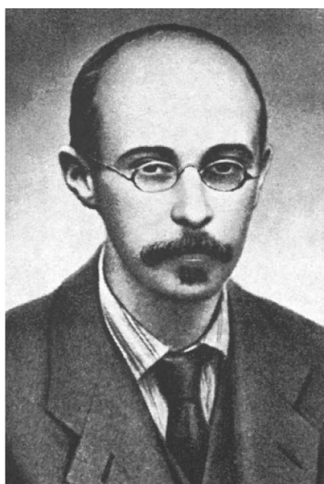
Žádné uspokojivé vysvětlení kosmologické konstanty na základě mikrofyziky zatím neexistuje; určité naděje snad slibují kalibrační unitární teorie pole, kde spontánní narušení symetrie Higgsova skalárního pole by mohlo "generovat" kosmologickou konstantu.

Současná astronomická pozorování nepožadují sice $\Lambda \neq 0$, avšak tuto možnost ani striktně nevyklučují. Studium mimogalaktických objektů pouze čím dál více omezuje hodnotu kosmologické konstanty (nyní $|\Lambda| < 10^{-55} \text{ cm}^{-2}$), aby teorie neodporovala výsledkům pozorování dostupné části vesmíru. Je zřejmé, že laboratorní stanovení tak nepatrné hodnoty Λ je zcela beznadějně. I tak malá kosmologická konstanta by však mohla výrazně ovlivnit stavbu a vývoj vesmíru jako celku. V zájmu objektivnosti je proto třeba na možnost $\Lambda \neq 0$ pamatovat a při studiu globálních vlastností vesmíru kosmologický člen brát v úvahu. V poslední době se navíc ukazuje, že kosmologický člen by mohl hrát významnou roli v nejranějších fázích vývoje vesmíru, kdy se projevovaly efekty kvantové teorie pole a jednotnost fundamentálních

interakcí - kosmologická konstanta mohla být "hnací silou" **inflační expanze vesmíru**, jak bude ukázáno dále.

Friedmanovy dynamické modely vesmíru

Je zřejmé, že reálný vesmír, alespoň v současném stádiu jeho vývoje, nelze popsat žádným z modelů založených na předpokladu stacionarity, protože v Einsteinově modelu není rudý posuv světla od vzdálených galaxií a v de Sitterově modelu zase prostor nemůže obsahovat žádnou látku ani záření. Pro modelování reálného vesmíru je proto třeba vzdát se předpokladu stacionarity (který je neslučitelný se současnými astronomickými poznatky) a vytvořit obecnější kosmologický model.



Alexandr Alexandrovič Friedman (1888 – 1925)

Budeme tedy uvažovat homogenní izotropní vesmír, který obecně nebude stacionární. Metrika trojrozměrného prostoru (tj. prostorová část intervalu) v takovém případě bude mít opět obecný tvar (9.295), avšak poloměr křivosti a zde bude obecně funkcí času :

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{a^2(t)}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.323)$$

Prostoročasovou vztažnou soustavu je přirozené zvolit tak, aby odrážela izotropii prostoru i rozložení a pohybu hmoty. Nejvhodnější je tedy lokálně "souběžná" vztažná soustava pohybující se v každém místě prostoru spolu s hmotou, která je tam obsažena. Lokální rychlost látky v

takové soustavě je tedy všude rovna nule, vztažnou soustavu tvoří samotná hmota vyplňující vesmír. Veškerý pohyb hmoty je vyjádřen deformací vztažné soustavy. Časovou souřadnici je vhodné zvolit tak, aby v každém okamžiku metrika prostoru byla stejná ve všech bodech a ve všech směrech. Aby všechny směry byly ekvivalentní, komponenty g_{0a} metrického tenzoru musejí být v této vztažné soustavě rovny nule. Prostorčasová metrika bude mít tedy tvar $ds^2 = g_{00} dx_0^2 + dt^2$. Koeficient g_{00} je funkcí pouze x_0 , takže vhodnou volbou časové souřadnice lze dosáhnout $g_{00} = -1$ ($= -c^2$). Časová souřadnice x_0 , kterou můžeme označit t , pak udává vlastní čas v každém bodě prostoru. Prostorčasový interval zde bude mít jednoduchý tvar $ds^2 = dl^2 - dt^2$.

Délkový element (9.323) se obvykle upravuje na tvar, v němž je úměrný příslušnému Eukleidovskému výrazu. To lze uskutečnit zavedením nové souřadnice r pomocí transformace $r \rightarrow r/(1+r^2/4a^2)$. Prostorová metrika (9.323) pak má tvar

$$dl^2 = \frac{dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4a^2}\right)^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + k \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4a^2}\right)^2} \quad (9.324)$$

Dále, jelikož poloměr křivosti a může být použit jako přirozená jednotka pro měření vzdálenosti, je výhodné zavést nové bezrozměrné souřadnice $r \rightarrow r/a$, $x \rightarrow x/a$, $y \rightarrow y/a$, $z \rightarrow z/a$, ve kterých má délkový element tvar

$$dl^2 = a^2(t) \frac{dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} = a^2(t) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + k \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4}\right)^2} \quad (9.325)$$

Vzdálenost dl mezi libovolnými blízkými body je tedy úměrná $a(t)$, takže růst nebo pokles $a(t)$ s časem znamená zvětšování nebo zmenšování všech vzdáleností v soustavě - rozšiřování nebo smršťování veškeré hmoty. Prostorčasová metrika homogenního izotropního vesmíru může být tedy napsána ve tvaru tzv. **Robertsonovy-Walkerovy metriky**



Howard Percy Robertson (1903 – 1961)



Arthur Geoffrey Walker (1909 – 2001)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + k \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4}\right)^2} \quad (9.326)$$

Tenzor energie-hybnosti kosmologického "plynu" ve všude lokálně klidové vztažné soustavě má nenulové komponenty pouze $T^0_0 = \rho c^2$, $T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -p$, přičemž v homogenním a izotropním vesmíru mohou být ρ a p funkcemi pouze času t . Einsteinovy rovnice (9.293) pro metriku (9.326) pak vedou po úpravě (včetně vynásobení obou stran c^2) ke dvěma obyčejným diferenciálním rovnicím - **Fridmanovým rovnicím**

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{c^2} T^0_0 = 8\pi G \rho, \quad (9.327)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} p$$

které spolu se **stavovou rovnicí** $p = p(\rho)$ kosmologické kapaliny umožňují určit a , p , ρ jako funkce času t , tj. určit **evoluci vesmíru**. Každá tečka nad a značí derivaci podle času. Obě tyto rovnice spolu souvisejí identitou

$$\frac{d}{dt} \rho c^2 a^3 = -p \frac{d}{dt} a^3 \quad (9.328)$$

kteřá je vyjádřením lokálního zákona zachování energie.

V relativistické kosmologii se místo \dot{a} a \ddot{a} zavádějí veličiny od nich odvozené, které mohou být (aspoň v principu) přímo změřeny z astronomických pozorování. Jako míra relativní rychlosti změny poloměru křivosti, tj. míra expanze (nebo komprese), se používá **Hubbleova konstanta H** .



Edwin Powell Hubble (1889 – 1953)

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (9.329)$$

Veličina H se označuje za "konstantu" pouze v tom smyslu, že je stejná pro všechna místa (nezávisí na souřadnicích); obecně však může být funkcí času. Nynější hodnota Hubbleovy konstanty se odhaduje většinou na $H \in (60;70)$ km s⁻¹/Mpc.

Dále se zavádí tzv. **decelerační parametr q**

$$q = a \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (9.330)$$

charakterizující zpomalování nebo zrychlování expanze nebo kontrakce. Pomocí veličin H a q lze rovnice (9.327) vyjádřit ve tvaru

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - H^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} = (2q-1)H^2 + \Lambda c^2. \quad (9.331)$$

Všimněme si nejprve případu $\Lambda = 0$. Z první rovnice (9.327) je vidět, že o tom, která z variant $k = 1, 0, -1$ se může realizovat, rozhoduje znaménko $8\pi G\rho/3 - H^2$, tj. vztah mezi hustotou hmoty a rychlostí expanze. Příklad $k = 1$ odpovídající **uzavřenému vesmíru** nastává tehdy, když $8\pi G\rho/3 > H^2$, tj. když střední hustota hmoty ve vesmíru je větší než určitá "**kritická hustota**" ρ_{krit}

$$\rho_{\text{krit}} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (9.332)$$

Na základě v současnosti pozorovaných rychlostí vzdalování galaxií (Hubbleovy konstanty) je tato kritická hustota přibližně $8 \cdot 10^{-30} \text{ g/cm}^3$, což odpovídá jen asi 5 atomům vodíku na 1 m^3 .

Jestliže $\rho < \rho_{\text{krit}}$, je $k = -1$ (jedná se o otevřený vesmír), při $\rho = \rho_{\text{krit}}$ máme $k = 0$ (odpovídající Eukleidovskému vesmíru). Druhá rovnice (9.327) ukazuje, že ekvivalentním kritériem charakteru Friedmana vesmíru je hodnota deceleračního parametru q : v uzavřeném vesmíru je $q > 1/2$, v otevřeném $q < 1/2$ a Eukleidovskému vesmíru odpovídá $q = 1/2$.

První rovnice (9.327) pro $k = 1, \Lambda = 0$ má tvar

$$\dot{a}^2 + 1 = \frac{a^2 8\pi G\rho}{3}. \quad (9.333)$$

V případě, že vesmír je zaplněn nekoherentním prachem, tj. $p = 0$, plyne z rovnice (9.328) $\rho a^3 = \text{const.}$; jelikož objem uzavřeného vesmíru je $V = 2\pi^2 a^3$, je součet hmotnosti v celém prostoru konstantní:

$$M = 2\pi^2 a_0^3 \rho_0 = \text{const.} \quad (9.334)$$

kde a_0 a ρ_0 jsou poloměr a hustota hmoty vesmíru v nějakém pevném časovém okamžiku t_0 . Po zavedení nové "časové" proměnné η

substitucí $d\eta = adt$ lze řešení první rovnice (9.327) napsat v parametrickém tvaru

$$\begin{aligned} a &= \frac{4GM}{6\pi c^2}(1 - \cos\eta), \\ t &= \frac{4GM}{6\pi c^2}(\eta - \cos\eta). \end{aligned} \quad (9.335)$$

Grafické znázornění časové závislosti $a = a(t)$ je tedy cykloida, kterou opisuje pevný bod na kružnici o poloměru

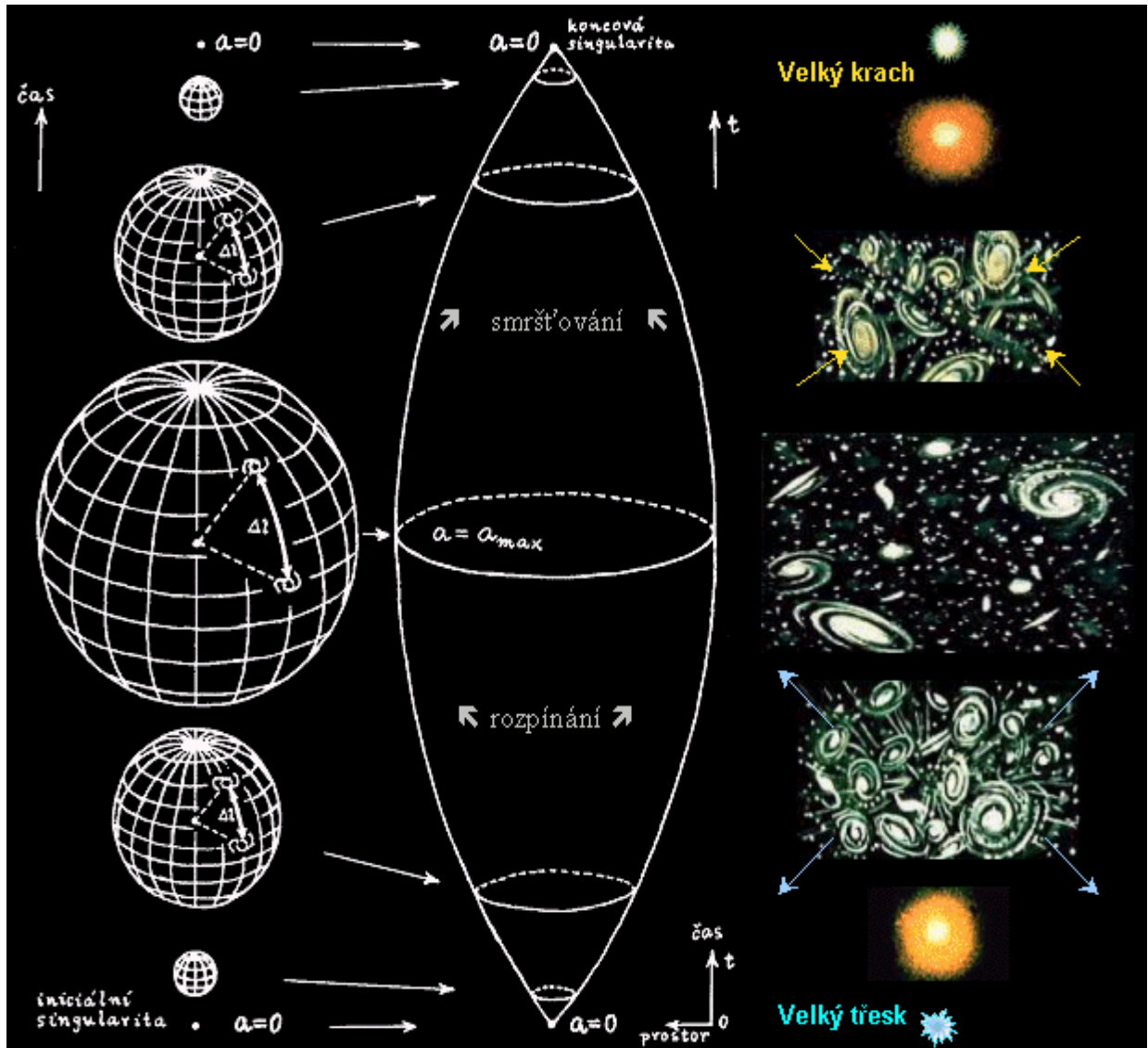
$$a_{\max} = \frac{4GM}{3\pi c^2}. \quad (9.336)$$

při jejím valení po přímce (časové ose t); parametr η je úhel valení. Hustota hmoty se přitom mění podle zákona

$$\rho = \frac{3}{a_{\max}^2 (1 - \cos\eta)^3} = \frac{6H^2}{8\pi G(1 + \cos\eta)} \quad (9.337)$$

Ve Friedmanově modelu uzavřeného vesmíru zaplněného prachem tedy evoluce vypadá tak (obr. 9.26), že na počátku $t = 0$ vesmír vychází ze **singulárního stavu** $a = 0$ s nulovým objemem a nekonečnou hustotou hmoty, postupně se rozšiřuje až do rozměru $a = a_{\max}$, a potom se opět smršťuje do bodu $a = 0$.

Podle levé části obr. 9.26 se evoluce vesmíru často modeluje nafukujícím se a posléze se opět smršťujícím balónkem, na jehož povrchu jsou nakresleny galaxie či kupy galaxií. Při takovém nafukování balónku se všechny body jeho povrchu od sebe **vzdalují** rychlostí úměrnou jejich vzájemné vzdálenosti, ve shodě s Hubbleovým zákonem (9.316).



Obr. 9.26. Časová evoluce uzavřeného vesmíru.

Vlevo: Uzavřený Fridmanovský vesmír si lze představit jako trojrozměrnou sféru, která se postupně "nafukuje" od nulového poloměru (iniciální singularita v čase $t=0$) do jistého maximálního poloměru, a pak se zase smršťuje do bodu (koncová singularita). Veškeré vzdálenosti D_l mezi libovolnými objekty (galaxiemi, resp. kupami galaxií) se při expanzi nebo kontrakci vesmíru zvětšují nebo zmenšují úměrně poloměru křivosti.

Uprostřed: Prostorčasový diagram uzavřeného vesmíru vnořený do fiktivního pětirozměrného prostoru.

Vpravo: Názorné zobrazení rozpínající a smršťující se hmoty během evoluce vesmíru.

Ve stádiích $a \rightarrow 0$, tj. na počátku a na konci evoluce, však předpoklad stavové rovnice nekoherentního prachu není realistický. Naopak, látka se zde nutně stává ultrarelativistickou, takže blíže skutečnosti bude stavová rovnice $p = \rho c^2/3$. Rovnice (9.328) pak dává $\rho a^4 = \text{const.}$ a řešení první rovnice (9.327) zde je

$$a = \tilde{a} \cdot \sin \eta,$$

$$t = \tilde{a} \frac{(1 - \cos \eta)}{c} \quad (9.338)$$

(grafem je polokružnice), kde

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 a_0^4}{3c^4}} = \text{const.} \quad (9.339)$$

Globální charakter evoluce bude stejný jako v předchozím případě - žádný tlak látky vyplňující uzavřený vesmír není schopen singulárním bodům $a = 0$ zabránit.

Jestliže $\rho < \rho_{\text{krit}}$, je $k = -1$ - jedná se o **otevřený vesmír**. Pokud je zaplněn prachem, je řešení první rovnice (9.327)

$$a = \hat{a} (\cos \vartheta - 1),$$

$$t = \hat{a} \frac{\sin \vartheta - \vartheta}{c}, \quad (9.340)$$

kde

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3c^2}} = \text{const} \quad (9.341)$$

Závislost $a = a(t)$ zde má tvar hyperboly (obr. 9.27a) - poloměr křivosti a monotónně roste od nuly (singularita) při $t = 0$ do nekonečna při $t \rightarrow \infty$. Podobný obraz se dostane i při zahrnutí vlivu tlaku; pro krajní případ $p = \rho c^2/3$ je řešení

$$a = \hat{a} \cdot \sinh \vartheta,$$

$$t = \tilde{a} \frac{\cosh \vartheta - 1}{c}, \quad (9.342)$$

Otevřený Friedmanův vesmír má tedy rovněž singularitu, avšak pouze jedinou - **iniciální**.

V mezním případě $\rho = \rho_{\text{krit}}$ bude $k = 0$, vesmír má nekonečně velký poloměr křivosti - jedná se o model s **plochým prostorem** (Eukleidovým). Prostorovočasová metrika zde má jednoduchý tvar

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (9.343)$$

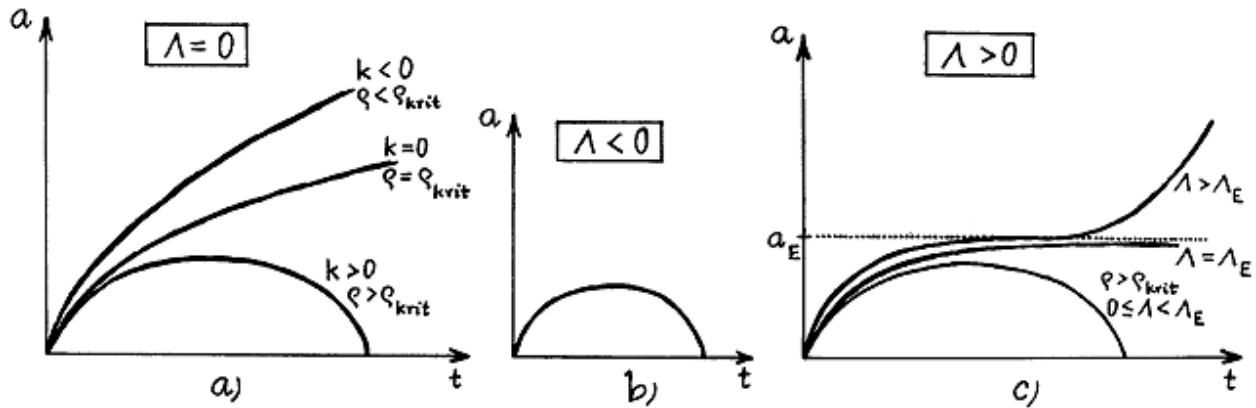
přičemž časově proměnný koeficient $a(t)$ nevyjadřuje zakřivení prostoru, ale jedná se jen o **měřítkový faktor**. Pro případ nekoherentního prachu (tj. malého tlaku - odpovídá pozdním fázím evoluce) rovnice (9.328) dává $\rho a^3 = \text{const.}$ a z první rovnice (9.327) vychází, že vzdálenost mezi každými dvěma body roste podle zákona

$$a(t) = a_1 t^{2/3} \quad (9.344)$$

kde konstanta a_1 závisí na měřítku prostorovočasové vztažné soustavy. V raných stádiích evoluce vesmíru, kdy je třeba uvažovat maximální tlak $p = \rho/3$, je $\rho a^4 = \text{const.}$ a pro expanzi dostáváme časovou závislost tvaru

$$a(t) = a_2 t^{1/2} \quad (9.345)$$

Je třeba upozornit na to, že i když pro $\rho = \rho_{\text{krit}}$ vychází Eukleidova metrika trojrozměrného prostoru, celý čtyřrozměrný prostorčas zde není plochý. Ploché jsou pouze určité speciální řezy (nadplochy) prostorovočasu, odpovídající stejnému vlastnímu času všech částic vyplňujících vesmír.



Obr. 9.27. Evoluce kosmologických modelů (časový průběh poloměru a vesmíru) v závislosti na hodnotě kosmologické konstanty Λ a hustotě rozložení hmoty ρ .
(a_E a Λ_E na obr. vpravo značí hodnoty poloměru vesmíru a kosmologické konstanty odpovídající Einsteinovu kosmologickému modelu)

Při zahrnutí **nenulové kosmologické konstanty** Λ se ve vesmíru objevuje navíc určitá **přídavná síla** (odpudivá pro $\Lambda > 0$ a přitažlivá při $\Lambda < 0$), která urychluje nebo zpomaluje rozšiřování nebo smršťování vesmíru. Tato síla nezávisí na hmotnosti a roste se vzdáleností. Z hlediska globální evoluce vesmíru má **efektivní energie vakua**, generovaná kosmologickým členem, důležitou vlastnost (odlišnou od látkové formy hmoty) - **nezředuje** se ani **nezhušťuje** při rozšiřování či smršťování vesmíru, zachovává si konstantní hodnotu. Řešení rovnic (9.327) pak při $\Lambda \neq 0$ vede k následujícím možnostem :

Pokud je $\Lambda < 0$, vždy převáží nakonec přitažlivost a evoluce vesmíru má průběh podle obr. 9.27b při libovolném ρ .

Pestřejší možnosti evoluce vesmíru vznikají při $\Lambda > 0$ - jsou znázorněny na obr. 9.27c.

Pokud je kosmologická konstanta Λ menší než Einsteinova hodnota (9.305) $\Lambda_E = 4pGr/c^2$, bude pro nadkritickou hustotu $\rho > \rho_{krit}$ evoluce vesmíru probíhat zhruba (kvalitativně) stejně jako pro $\Lambda = 0$.

Při $\Lambda > \Lambda_E$ se $a(t)$ zvětšuje od nuly do nekonečna, avšak v určité fázi se expanze na čas výrazně zpomalí - dochází k jakési "kvazistatické fázi", během níž jsou přitažlivé síly vyváženy odpudivými ("nerozhodný" vesmír); později převládnu síly odpudivé. Doba trvání T_{st} této kvazistatické fáze (během níž se poloměr křivosti vesmíru udržuje přibližně na hodnotě poloměru Einsteinova statického modelu (9.306) $a = a_E$) je tím delší, čím menší je rozdíl $\Lambda - \Lambda_E$:

$$T_{st} \sim \ln \frac{\Lambda}{\Lambda - \Lambda_E}. \quad (9.346)$$

Při $\Lambda \rightarrow \Lambda_E$ se vesmír dostává do stavu Einsteinova statického vesmíru zmíněného v předchozím odstavci. Tento Einsteinův model je však nestabilní, protože sebenepatrnější perturbace hustoty povede k expanzi. Pro $\rho > \rho_{\text{krit}}$ a $\Lambda = \Lambda_E$ existují dvě další řešení:

1. V nekonečně vzdálené minulosti $t \rightarrow -\infty$ bylo $a = a_E$, v budoucnu pak neomezená expanze;
2. Vesmír vyšel v okamžiku $t = 0$ ze stavu $a(0) = 0$, načež expanduje a asymptoticky (v nekonečně vzdálené budoucnosti $t \rightarrow \infty$) dosahuje poloměr $a \rightarrow a_E$.

Pro $\Lambda > 0$ existuje, kromě zmíněných speciálních možností, též řešení, podle něhož při $t = -\infty$ měl vesmír nekonečný poloměr, pak probíhala kontrakce do určité minimální hodnoty a_{min} , načež nastává neohrazená expanze.

Zmíněné zvláštnosti kosmologických modelů s nenulovou kosmologickou konstantou se používají při pokusech o překonání obtíží relativistické kosmologie (vnitřních potíží i nesrovnalostí s výsledky pozorování).

Chaotická inflace a kvantová kosmologie

Teorie chaotické inflace vychází ze situace v časech $t \approx t_h$ při hustotách $\rho \approx \rho_h$, kdy v důsledku silných **kvantově-gravitačních fluktuací** polí i metriky prostoročasu lze předpokládat, že při $t \approx t_h$ všechny hodnoty polí φ (při nichž $V(\varphi) \approx m_h^4$) byly zhruba stejně pravděpodobné; rozložení pole φ ve vesmíru bylo tedy víceméně chaotické. Proto existovaly i oblasti prostoru, v nichž pole φ bylo shodou okolností dostatečně silné a přitom téměř homogenní. Pokud rozměry D_l oblastí, v níž je pole φ homogenní, jsou větší než velikost horizontu v de Sitterově modelu s hustotou energie $V(\varphi)$, tj.

$$\Delta l \approx \sqrt{\frac{3hc}{8\pi G V(\varphi)}} = H^{-1}. \quad (9.347)$$

a pole φ se mění s časem dostatečně pomalu, pak vnitřní část této oblasti se bude **exponenciálně rozpínat** podle zákona

$$a \sim a_0 e^{Ht} \quad (9.348)$$

nezávisle na situaci vně této oblasti, tj. podle inflačního scénáře. Pole, které vyvolává inflační expanzi, se nazývá **inflatonové**. Takovým inflatonovým polem může být skalární pole φ s kvadratickou závislostí potenciální energie na velikosti pole

$$V(\varphi) = \frac{m^2 \varphi^2}{2}. \quad (9.349)$$

Z matematického hlediska lagrangián skalárního pole spolu s kosmologickou metrikou (9.326) vede k vázaným rovnicím pro gravitaci a pole

$$\ddot{\varphi} + 3\varphi \frac{\dot{a}}{a} + \frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad (9.350)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = +\frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(V(\varphi) + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \right),$$

kde $V(\varphi)$ je efektivní potenciál. Skalární pole φ Higgsova typu, používané v unitárních kalibračních teoriích přispívá do lagrangiánu v nejjednodušším případě členy

$$L_\varphi = \frac{(\varphi_{;i})^2}{2} - \frac{m^2 \varphi^2}{2} - \frac{\lambda \varphi^4}{4} \quad (9.351)$$

kde m je hmotnost a $\lambda > 0$ je (samo)vazbová konstanta pole φ . Tenzor energie-hybnosti tohoto skalárního pole bude mít nenulové pouze diagonální složky rovné

$$T_0^0 = -\varepsilon \quad (9.352)$$

$$T_\beta^\alpha = p \delta_\beta^\alpha$$

kde

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m^2 \varphi^2}{2}, \\ p &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{m^2 \varphi^2}{2}.\end{aligned}\tag{ 9.353 }$$

Pokud se pole φ mění dostatečně pomalu tak, že $\dot{\varphi}^2 \ll m^2 \varphi^2$, efektivní stavová rovnice bude $p = -\varepsilon$, což povede k "deSitterovskému" stádiu doprovázenému **exponenciální expanzí**.

Za přítomnosti takového pole k nastartování inflace automaticky dojde tehdy, je-li počáteční hustota energie pole větší než plyne z výše uvedených vztahů (pro oblast Planckovské velikosti musí být počáteční energie inflatonového pole větší než trojnásobek Planckovy hmotnosti).

Koncepce chaotické inflace nevyžaduje téměř žádné apriorní počáteční podmínky. Kromě univerzálnosti kvantových fluktuací stačí předpokládat alespoň jedno výchozí pole φ (dostatečně slabě interagující s ostatními poli), které nemusí být jednoduchým skalárním polem, může se jednat i o pole fermionové, nebo dokonce o fluktuující pole křivosti prostoročasu. Krom toho má tato koncepce ještě další význačný pozitivní rys: jako jediná nabízí určitou možnost řešit i nejfundamentálnější kosmologický problém - problém iničiální singularity a vzniku vesmíru. Za úplnou lze považovat jen takovou kosmologickou teorii, která zahrnuje i **proces vzniku vesmíru**. Podle kvantové teorie gravitace jsou v malých měřících $\Delta l \approx l_h$ kvantové fluktuace metriky a fyzikálních polí velmi velké. Existuje proto možnost, že v důsledku těchto fluktuací se utvoří oblast zaplněná pomalu se měnícím skalárním polem φ . Jestliže velikost Δl této oblasti je větší než velikost horizontu v de Sitterově modelu s hustotou energie $V(\varphi)$, pak vnitřní část této oblasti se bude exponenciálně rozpínat nezávisle na vnější situaci, jak bylo již výše uvedeno. Přitom pravděpodobnost toho, že kvantové fluktuace (jež jsou velké pouze při hustotě energie vznikajícího vesmíru $\rho \approx \rho_h$) povedou ke vzniku inflačně expandujícího vesmíru, je značná pouze při splnění podmínky

$$m_h^{-2} \approx \sqrt{\frac{3hc}{8\pi G V(\varphi)}} = H^{-1}, \quad (9.354)$$

neboli $V(\varphi) \approx m_h^4$; pravděpodobnost kvantového vzniku vesmíru při $V(\varphi) \ll m_h^4$ je podstatně nižší. Za předpokladu, že kvantový vznik vesmíru probíhá mechanismem tunelování přes bariéru, byla by pravděpodobnost vzniku vesmíru

$$P \sim e^{-\frac{k\rho_h}{\rho}}, \quad (9.355)$$

kde k je nějaká konstanta. S poklesem hustoty pod ρ_h tedy pravděpodobnost kvantového vzniku vesmíru rychle klesá. Vzhledem k podmínce $\Delta l \approx m_h^{-1}$ z toho plyne, že pokud popsáním mechanismem vzniká Fridmanovský vesmír, bude to nejpravděpodobněji vesmír uzavřený, startující svou inflační expanzi z charakteristické velikosti $l \approx l_h \approx 10^{-35}$ m.

Podle této koncepce tedy vesmír nikdy nemusel být v singulárním stavu, ale v důsledku kvantově-gravitačních fluktuací spontánně vznikl "z ničeho" - z vakua zaplněného virtuálními částicemi a poli. Objevuje se tak nástin úplné kosmologické teorie jednotně vysvětlující vznik vesmíru, jeho evoluci i strukturu hmoty jej zaplňující. Všechny detaily **kvantové kosmologie** nejsou zatím zdaleka ještě rozpracovány. Například není jasné, co vlastně znamená kvantový popis vesmíru jako celku. V základech kvantové teorie totiž leží proces měření, který předpokládá určitý vnější přístroj, resp. vnějšího pozorovatele, provádějícího měření. Z kvantové fyziky se zde proto extrapolují jen nejzákladnější koncepce - spontánnost, náhodnost, nepředvídatelnost, fluktuace.

Spontánní kvantový vznik vesmíru z "ničeho"
(z kvantové fluktuače vakua)

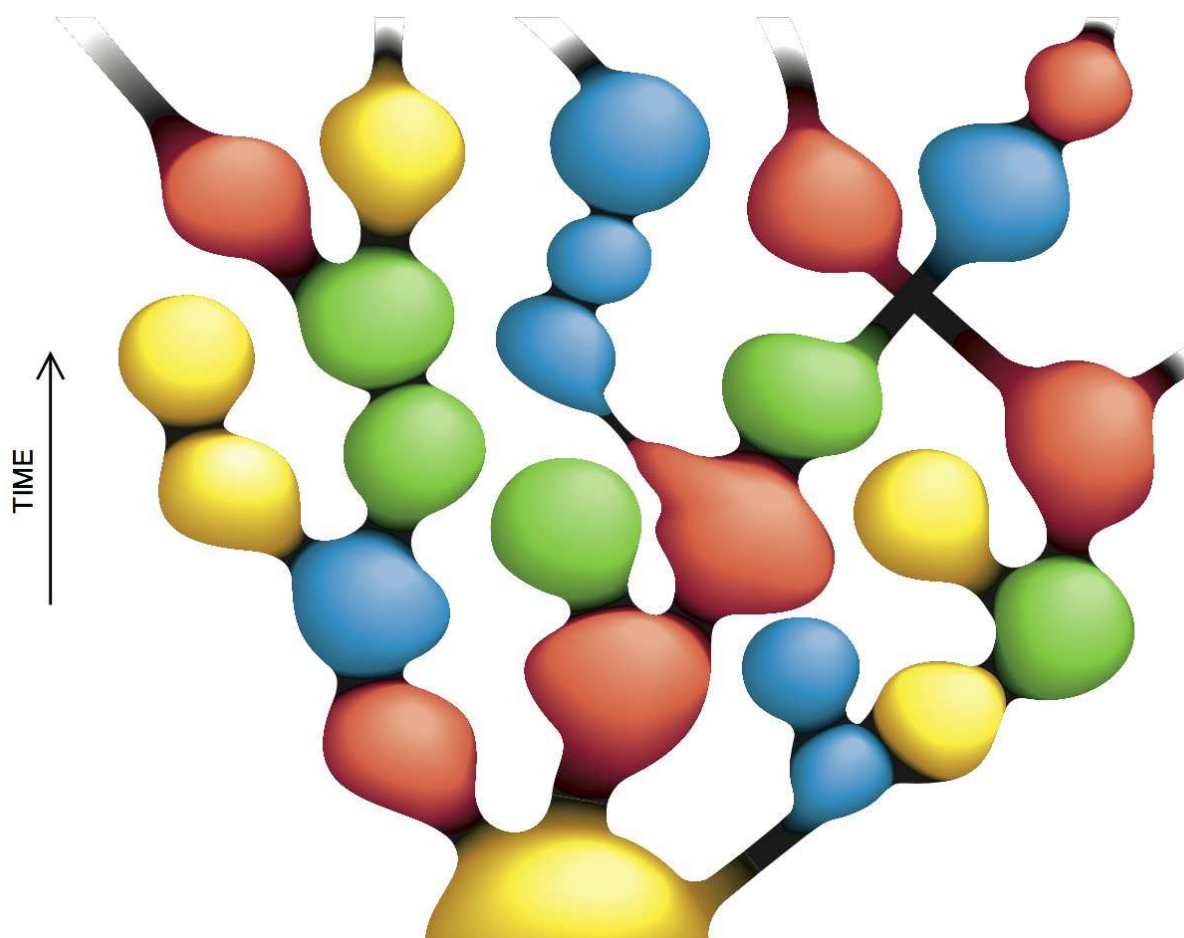


Obr. 9.28: Spontánní kvantový vznik vesmíru inflační expanzí dostatečně velké kvantové fluktuače.

Představa spontánního kvantového vzniku vesmíru vede ještě k dalším zajímavým důsledkům. Dostatečně silné kvantové fluktuače podobné té, jež vedla ke vzniku "našeho" vesmíru, mohly totiž nezávisle nastat i jinde. Z prvotního vakua, které dalo vzniknout našemu světu, by se tak mohlo vynořit mnoho dalších vesmírů, každý se svými specifickými různými fyzikálními zákony. Vznikla by tak celá řada různých rozpínajících se "bublin" - řada nezávislých vesmírů s různou globální strukturou prostoročasu i vlastnostmi hmoty. Taková předpokládaná množina spontánně vznikajících vesmírů z kvantových fluktuač vytváří jakýsi "**fraktálový strom**" nových a nových světů (o fraktálech blíže pojednáme v 10. kapitole).

Pokud skutečně existují takovéto "mnohočetné" vesmíry, pak to, co jsme dosud nazývali **univerzum**, může být výsledkem jednoho velkého třesku (či kvantové fluktuače) z mnoha jiných, podobně jako je naše Slunce jen jedna z mnoha hvězd vzniklých podobným způsobem v Galaxii. Pro Vesmír by pak místo dosavadního názvu "univerzum" bylo přiléhavější označení "**multiverzum**".

Obr. 9.29



Kvantové fluktuace vakua možná všude a neustále "chrlí" nové a nové vesmíry s nejrůznějšími vlastnostmi. Celý Vesmír se tedy podle těchto koncepcí jeví jako kypící "pěna" rozpínajících se "bublin" - samostatných vesmírů, z nichž každý se řídí svými **vlastními** zákony fyziky. Paralelní vesmíry žijí "svým vlastním životem". Náš celý viditelný vesmír je jen malou oblastí v jedné z těchto bublin. Jinak jen velmi málo bublin má fyzikální a geometrické vlastnosti vhodné pro vytvoření složitějších struktur - galaxií, hvězd, planet a nakonec života.

Ve světle podobných koncepcí se ukazuje, že tradiční (a zdálo by se samozřejmý) kosmologický požadavek, aby se vesmír jako celek během expanze stal homogenní a izotropní, není nutný - stačí, aby tyto vlastnosti vykazovaly jednotlivé "minivesmíry", nebo alespoň metagalaxie v níž žijeme.

Vznik vesmíru z "ničeho" se může zdát zvláštní a nepřijatelný, odporující všem našim poznatkům. Avšak definice "ničeho" je zde odlišná od běžného významu tohoto slova. V kvantové fyzice "*nic*" = "*vakuum*" znamená prostor, v němž neustále po kratičkové okamžiky elementární částice začínají a končí svou existenci ve **vakuových fluktuacích**. V jakési "*prostorochasové pění*", v reji vakuových fluktuací, nepřetržitě vznikají a zanikají maličké submikroskopické "vesmíry". Naprostá většina z těchto vznikajících "bublinkových" vesmírů vzápětí splaskne a zanikne, avšak podle zákonitostí kvantové pravděpodobnosti jednou za čas vznikne tak velká fluktuace, která je schopna dalšího vývoje - inflační expanze. Vedle "našeho" vesmíru tak mohly vznikat i jiné vesmíry v topologicky jiném prostoru.

Když to shrneme, scénář inflační expanze velmi raného vesmíru řeší tak říkajíc "jednou ranou" několik nejdůležitějších problémů současné kosmologie: Proč je vesmír ve velkých měřítcích tak dokonale homogenní a izotropní, proč je průměrná hustota hmoty ve vesmíru tak blízka kritické hustotě, proč v jinak homogenním rozložení hmoty ve vesmíru vznikly fluktuace se spektrem vhodným pro vznik pozorovaných galaxií, a proč není vesmír zaplněn magnetickými monopóly a dalšími "exotickými" částicemi.

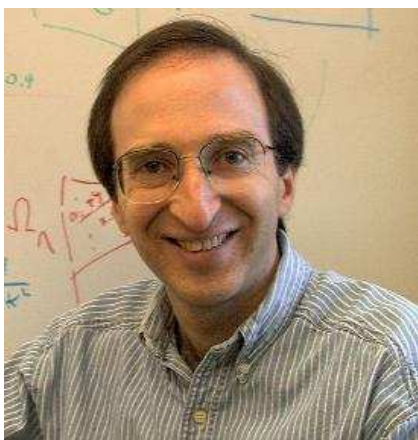
Koncepce inflačního vesmíru však přináší též nový důležitý poznatek metodologického (či dokonce filosofického) charakteru. V kosmologii bylo doposud vždy nutno většinu pozorovaných vlastností vesmíru (homogenitu a izotropii, počáteční rychlost expanze, měřítko nehomogenit pro vznik galaxií, entropii na jeden baryon a pod.) "zabudovávat ručně" do daného modelu jakožto počáteční podmínky. V inflačním modelu jsou však počáteční podmínky **bezvýznamné**, protože inflační expanze efektivně "smazává" veškeré detaily vesmíru, který byl před inflační fází. Lavinovitě narůstající expanze téměř dokonale vyhlazuje vesmír. Jakmile inflace začne, zahradí veškeré stopy dřívějšího stavu - zanechá jen rozsáhlý horký, hustý a hladký raný vesmír. Podle inflačního modelu tedy struktura vesmíru není produktem počátečních podmínek, ale je výlučně důsledkem fundamentálních zákonů fyziky - zákonů gravitace a kvantové teorie pole. Poprvé se tak

setkáváme s fyzikální teorií, která kromě dynamiky evoluce řeší (nebo lépe řečeno obchází) **problém počátečních podmínek**.

Temná energie a akcelerovaná expanze vesmíru

Podle standardního kosmologického modelu je expanze vesmíru **brzděna** přitažlivými gravitačními účinky hmoty a tudíž se musí **zpomalovat** - a to jak v uzavřeném vesmíru (kde posléze přejde v kontrakci), tak i v otevřeném vesmíru (kde se rozšiřování bude zpomalovat, avšak nikdy se zcela nezastaví). Nyní víme, že ke zpomalování expanze vesmíru rozhodujícím způsobem přispívá svou gravitací nezářící temná hmota. Kosmologická konstanta v Einsteinových gravitačních rovnicích podle dosavadních představ mohla snad sehrát rozhodující roli při inflační expanzi vesmíru na samém počátku, avšak pro další evoluci vesmíru ji nebylo třeba uvažovat.

Přesná měření vzdáleností supernov v poslední době však ukázala, že vzdálené supernovy typu Ia jsou méně jasné, než by odpovídalo jejich kosmologickému červenému posuvu ve vesmíru, jehož rozpínání se vlivem gravitačních účinků hmoty zpomaluje. Tato měření provedly v letech 1988-89 dvě skupiny astronomů, které vedli A. Reiss a S. Perlmutter. Z takto změřeného vztahu mezi kosmologickým rudým posuvem a vzdáleností supernov bylo s překvapením vypořádáno, že expanze vesmíru se nezpomaluje, ale naopak **zrychluje!**



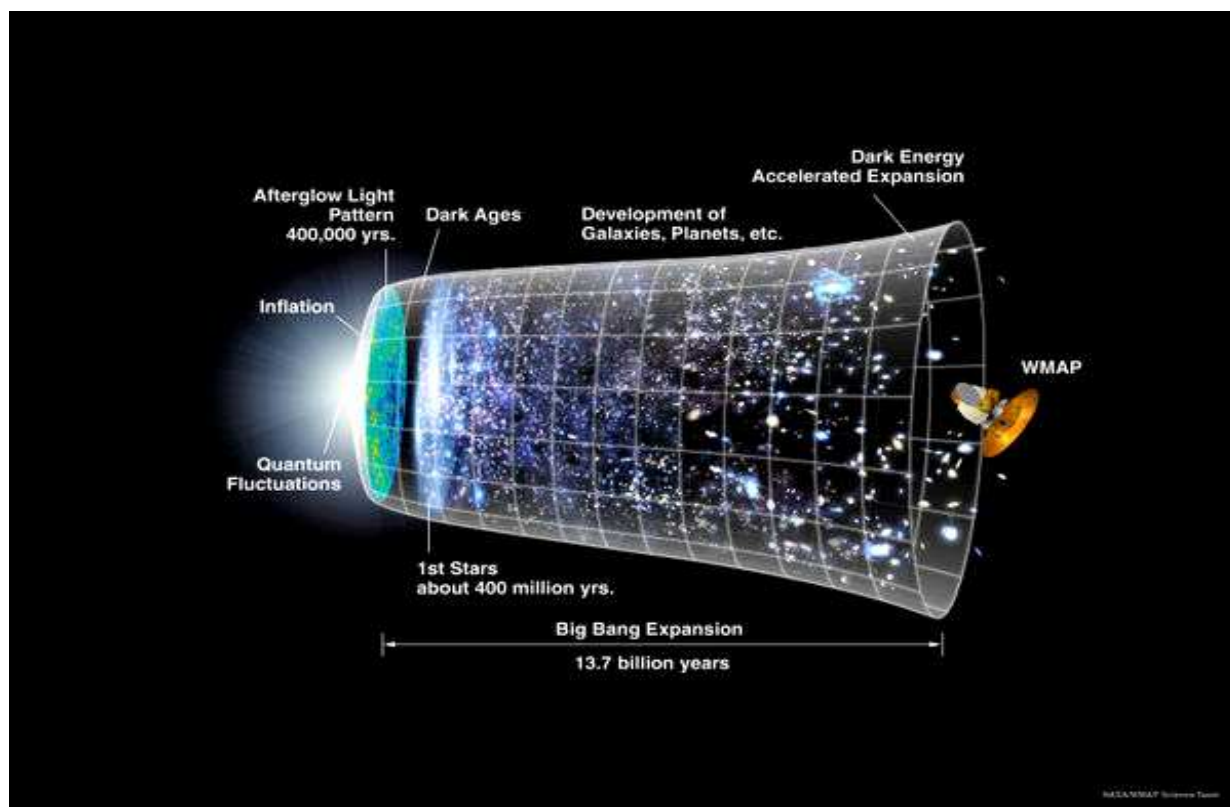
Saul Perlmutter (1959)



Adam Guy Riess (1969)

Supernova typu Ia vzniká v těsné dvojhvězdě z obří hvězdy a bílého trpaslíka, kde dochází k přenosu látky z obra na bílého trpaslíka, jehož hmotnost roste, posléze překročí Chandrasekharovu mez ($1,4 M_{\odot}$) a bílý trpaslík se zhrouťí do neutronové hvězdy, což se projeví jako výbuch supernovy typu Ia. Výchozí hmotnost a proto i množství uvolněné energie je pokaždé **prakticky stejné**, takže z relativní pozorované jasnosti lze stanovit **vzdálenost** takové supernovy typu Ia, a to nezávisle na spektrometricky změřeném **kosmologickém rudém posuvu** $z = (l - l_0)/l_0$ záření ze supernovy (l_0 je vlnová délka určité spektrální čáry v okamžiku t_0 vyslání paprsku, l je vlnová délka téže čáry v okamžiku t zachycení paprsku). V předešlém odstavci byla pro popis evoluce vesmíru zavedena **měřítková (expanzní) funkce** $a(t)$ udávající, jak se s časem t mění vzdálenosti v expandujícím vesmíru. Pro dva časové okamžiky t_0 a t platí mezi hodnotami měřítkové funkce a a kosmologického červeného posuvu z jednoduchý vztah $z = (a - a_0)/a_0$, kde a_0 charakterizuje rozměry vesmíru v době t_0 vyslání paprsku a a rozměry vesmíru v době t jeho zachycení. Z toho $a = (1 + z)a_0$, takže z naměřeného kosmologického rudého posuvu můžeme stanovit, jak se změnilo rozměry vesmíru od doby, kdy byl vyslán dnes zachycený světelný paprsek. Pečlivým rozborem záření z většího počtu různě vzdálených supernov lze zjistit vztah mezi kosmologickým rudým posuvem a vzdáleností supernov, z čehož lze "vystopovat", jakým způsobem se vesmír rozpíná. A právě tato měření ukazují na časovou závislost $a(t)$ podobnou křivce $\Lambda > \Lambda_E$ na obr. 9.27c, podle níž se rychlost expanze vesmíru v současné době **zvyšuje**.

Obr. 9.30



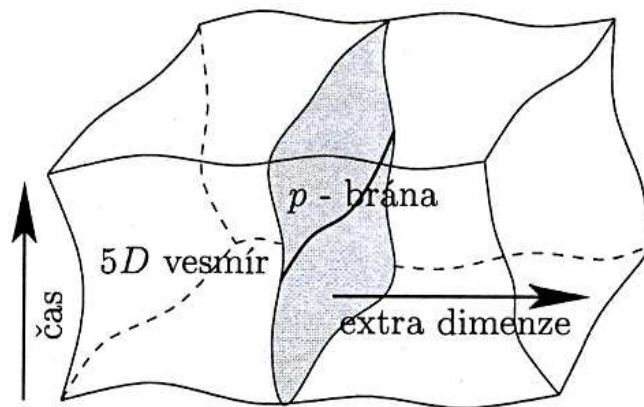
Byla vyslovena hypotéza, že toto zrychlující se rozpínání je způsobeno všeprostopující vakuovou tzv. "**temnou energií**" se **zápornou hustotou energie** natolik velkou, že svými repulsivními účinky překonává gravitační působení veškeré hmoty ve vesmíru. Tato záhadná skrytá či temná energie je někdy označována jako "páté skupenství" či "kvintesence" (viz níže). Taková vakuová temná energie by generovala **kosmologickou konstantu** $\Lambda > 0$ v Einsteinových rovnicích (9.293) obecné teorie relativity, vedoucí k **zápornému tlaku**, který by na kosmologických vzdálenostech vyvolával "antigravitační" **odpuzování**, působící opačně než gravitace běžné hmoty.

Pokud hustota temné energie je časově konstantní nebo klesá pomaleji než hustota běžné hmoty (tj. pomaleji než $1/a^3$ pro látku, popř. $1/a^4$ pro záření), odpovídá scénář evoluce vesmíru křivce $\Lambda > \Lambda_E$ na obr. 9.27c po skončení počáteční inflační expanze a nástupu expanze Fridmanovské trvalo dlouhou dobu období **decelerace**, kdy gravitační účinky hmoty (zářící+skryté) převládaly nad odpudivými silami temné energie a rozpínání se zpomalovalo. Po náležitém snížení hustoty

hmoty nastalo období určitého **zvratu** ("nerozhodný vesmír") a vesmírná expanze posléze přešla ze stádia decelerace k **akceleraci**.

Bránová kosmologie

V tomto odstavci budeme hovořit o bránových světech. Ve své nejjednodušší verzi tento termín v souvislosti s relativistickou kosmologií poukazuje na fyzikální obraz prostoročasu, v němž je náš čtyřrozměrný prostoročas časupodobnou nadplochou v pětirozměrném prostoročasu M_5 . Fyzikální hmota je omezená na náš vesmír M_4 . Situaci znázorňuje obr. 9.31.



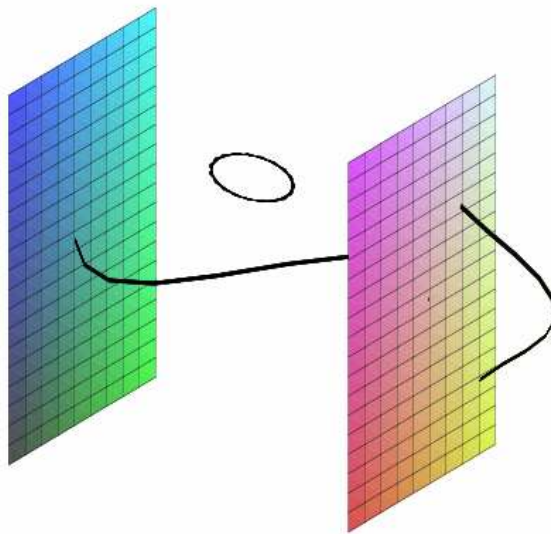
Obr. 9.31: Schematické znázornění 3-brány v pětidimenzionálním prostoročasu. S vývojem 3-brány v čase vzniká čtyřrozměrná nadplocha, na obrázku znázorněná šedou barvou.

Obecněji p -bránou nazýváme p -dimenzionální prostorupodobnou podvarietu nějakého D -dimenzionálního ($D > p + 1$) prostoročasu M_D , který budeme dále nazývat prostor světů (v angličtině bulk). Toto je dosti obecná definice; dále se omezíme na fyzikálně opodstatněný případ, kdy dimenze prostoru světů je rovna $D = p + 2$. Souřadnice x^a ($a = 1, \dots, p + 2$) na prostoru světů sestávají z časové souřadnice t , prostorových souřadnic x^μ ($\mu = 1, \dots, p$) na p -bráně a z jedné transverzální (tzv. extra) souřadnice Z .

Podle teorie strun jsou konce otevřených strun fixovány na časupodobné p -dimenzionální plochy. Matematická formulace spočívá v položení Dirichletových hraničních podmínek na příslušné souřadnice

konců otevřené struny. Odtud též pochází název D -brány, kde D poukazuje na povahu těchto bran, tj. na souvislost s Dirichletovými podmínkami. Protože v dalším výkladu budeme uvažovat pouze D -brány, bude písmeno D vynecháno a symbol p -brána znamená p -dimenzionální D -bránu.

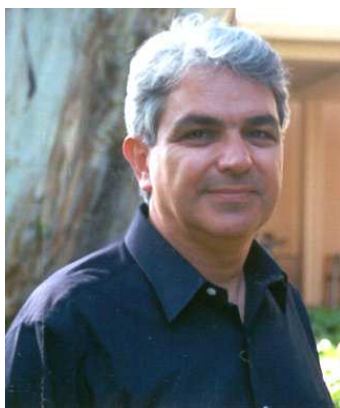
Náš 4-rozměrný prostoročas je vložen jako časupodobná nadplocha do 5-rozměrného prostoročasu. Samotný 3-rozměrný prostor je pak 3-bránou. V obecném D -rozměrném prostoročase může být obecně libovolný počet p -brán, z nichž alespoň jedna, náš vesmír, zahrnuje standardní model čističové fyziky (jako dobře ověřenou teorii elementárních částic). Sektor otevřených strun generuje fyzikální pole vázaná na p -bránu, neboť struny jsou přiloženy svými konci na světoplochu brány. Uzavřené struny se mohou šířit v prostoru světů. Protože ve spektrech uzavřených strun se nachází graviton, není gravitace omezena na p -bránu, nýbrž naopak zprostředkovává interakce mezi nimi, viz obr. 9.32.



Obr. 9.32: Otevřené struny musí být vždy oběma koci ukotveny na D -bránách, v hyperprostoru (prostoru světů) se mohou volně pohybovat pouze uzavřené struny, jako jsou např. gravitony.

Historicky prvním modelem bránového světa byl model Arkani-Hameda, Dimopoulosa a Dvaliho, kteří studovali $(4 + d)$ -dimenzionální plochý prostor světů, v němž d dimenzí má toroidální geometrii. Pozoruhodný pokrok přinesly práce Randallové a Sundruma. V nich byl nalezen zakřivený prostor světů tvořený řezem anti-de Sitterova (AdS)

prostorů času.



Nima Arkani-Hamed (1972) Savas Dimopoulos (1952) Georgi (Gia) Dvali (1964)

5-dimenzionální akce, s níž budeme dále pracovat, je dána analogicky jako v 4-dimenzionální gravitaci výrazem

$$S = - \int d^5 x \sqrt{-g^{(5)}} \left(\frac{R}{2\kappa_5^2} + \Lambda_5 \right) + S_{\text{pole}} , \quad (9.356)$$

v němž κ_5 je 5-dimenzionální gravitační vazebná konstanta, Λ_5 je kosmologická konstanta v prostoru světů a S_{pole} představuje akci veškerých dalších polí. Gravitační vazebnou konstantu lze v jednotkách $\hbar = c = 1$ vyjádřit i pomocí fundamentální (tj. definované v prostoru světů) Planckovy škály M_5 jako

$$\kappa_5^2 = \frac{8\pi}{M_5^3} . \quad (9.357)$$

Einsteinovy rovnice v prostoru světů, které získáme variováním akce (9.356), jsou

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\kappa_5^2 T_{ab} + g_{ab} \Lambda_5 , \quad (9.358)$$

kde tenzor energie-impulzu je definován prostřednictvím variace akce polí vzhledem k metrice stejně jako v klasickém případě.

Přijměme zjednodušující podmínku, že všechna hmota je soustředěna na bráně. Předpokládejme dále, že 5-dimenzionální metrika v prostoru světů má reflexní symetrii v extra dimenzi, $Z \rightarrow -Z$, a metrika bránového světa disponuje časovou reflexí a prostorovou paritou, tj. $t \rightarrow -t$ a $x^I \rightarrow -x^I$, ($I = 1,2,3$).

Protože prostor světů by neměl záviset na souřadnicích na bráně, lze jeho metriku zapsat ve tvaru

$$ds^2 = e^{2A(t,z)} [dt^2 - D^2(t, z)d(x^I)^2] - C^2(t, z) dz^2 . \quad (9.359)$$

Pokud navíc požadujeme, aby 5-dimenzionální metrika byla statická a splňovala Poincarého ($SO(3, 1)$) symetrii, můžeme ji psát ve tvaru

$$ds^2 = e^{2A(Z)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dZ^2 . \quad (9.360)$$

Studujeme-li expandující bránu, lze 5-dimenzionální metriku psát jako

$$ds^2 = a^2 b^2 (dt^2 - dZ^2) - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right), \quad (9.361)$$

s obvyklými hodnotami $K = \pm 1$ nebo $K = 0$ v závislosti na tom, zda je 3-brána (naš prostor) topologicky 3-sféra, hyperbolický prostor, nebo zda je plochý. Metrika (9.361) je konzistentní s homogenitou a izotropií na bráně lokalizované v $Z = 0$. Funkce a a b závisí pouze na souřadnicích t a Z .

Kovariantní popis gravitace bránových světů

Uvažujme (3+1)-dimenzionální nadplochu v 5-rozměrném prostoru světů. Označme n její normálové vektorové pole. Snadno se ukáže, že projekční tenzor, daný jako

$$h = g - n \otimes n , \quad (9.362)$$

je metrikou na zadané nadploše. Připomeňme si definici vnější křivosti

$$K_{ab} = h_a^c h_b^d \nabla_c n_d. \quad (9.363)$$

V diferenciální geometrii se odvozuje vztah mezi křivostí variety a křivostí do ní vložené nadplochy. Tento vztah je znám jako Gaussova rovnice a je dán takto

$$R_{abcd}^{(4)} = h_a^j h_b^k h_c^l h_d^m R_{jklm} - 2K_{a[c} K_{d]b}. \quad (9.364)$$

V Gaussově rovnici (9.364) je 4-dimenzionální Riemannův tenzor konstruován z metriky h_{ab} stejným způsobem, jako je Riemannův tenzor prostoru světů konstruován z metriky g_{ab} .



Delfino Codazzi (1824 – 1873)

Dalším důležitým vztahem je Codazziho rovnice, která vztahuje čtyřdivergenci vnější křivosti s Ricciho tenzorem prostoru světů

$$\nabla_b^{(4)} K_a^b - \nabla_a^{(4)} K = n^c h_a^b R_{bc}. \quad (9.365)$$

Lze ukázat, že pokud je na zadané nadploše lokalizován tenzor energie-impulzu T_{ab} a prostor světů má reflexní symetrii $Z \rightarrow -Z$, pak je vnější křivost vyjádřena jako

$$K_{ab} = \kappa^2 \left[-T_{ab} + \frac{1}{3}(T - \sigma)h_{ab} \right]. \quad (9.366)$$

Definujme skok funkce $[f]$ předpisem

$$[f] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [f(Z + \varepsilon) - f(Z - \varepsilon)]. \quad (9.367)$$

Z rovnice (9.366) vyplývá, že skok vnější křivosti je

$$|K_{ab}| = -\kappa_5^2 \left(T_{ab} - \frac{1}{3} h_{ab} T \right). \quad (9.368)$$

Rovnice (9.368) tvoří navazovací podmínky na zadané nadploše.

Tenzor energie-impulzu $T_{ab} = \tau_{ab} - \sigma - h_{ab}$ jsme rozložili na část od povídající klasickému tenzoru energie-impulzu τ_{ab} a část, která odpovídá tenzi brány σ . Využitím (9.364), (9.365), (9.368) a 5-dimenzionální prostorupodobné varianty tzv. elektrické části Weylova tenzoru $E_{ab} = C_{abcd} n^c n^d$ pak získáme 4-dimenzionální Einsteinovy gravitační rovnice

$$G_{ab}^{(4)} = 8\pi G \tau_{ab} - \Lambda_4 h_{ab} + \kappa_5^4 \pi_{ab} - E_{ab}, \quad (9.369)$$

kde π_{ab} je tenzor definovaný jako

$$\pi_{ab} = \frac{1}{12} b \tau \tau_{ab} - \frac{1}{4} \tau_{ac} \tau_b^c + \frac{1}{8} h_{ab} \tau_{cd} \tau^{cd} - \frac{1}{24} \tau^2 h_{ab}. \quad (9.370)$$

Mezi tenzí brány, Newtonovou gravitační konstantou G , efektivní kosmologickou konstantou bránového světa Λ_4 a fundamentální kosmologickou konstantou v prostoru světů Λ_4 platí vztahy

$$8\pi G = \frac{\kappa_5^4}{6} \sigma, \quad (9.371)$$

$$\Lambda_4 = \frac{\kappa_5^2}{2} \left(\Lambda_5 + \frac{\kappa_5^4}{6} \sigma^2 \right).$$

V teorii bránových světů se tedy Einsteinovy rovnice (9.369) liší od své verze známé z klasické relativistické kosmologie, a to o dodatečné zdrojové členy. Je to tenzor π_{ab} , kvadratický v tenzoru energie-impulzu a reprezentující korekce při vysokých energiích. Gravitační vliv prostoru světů na bránu je popsán elektrickým Weylovým tenzorem, který vystupuje v roli efektivního tenzoru energie-impulzu. Bianchiho identity a zákony zachování implikují diferenciální identitu

$$\kappa_5^4 \nabla^a \pi_{ab} = \nabla^a E_{ab}, \quad (9.372)$$

která platí na bráně. Odvozené Einsteinovy rovnice (9.369) jsou obecné a platí pro libovolnou nadplochu bez předpokladu speciálních symetrií.

Randallové-Sundrumův statický bránový svět typu II



Lisa Randall (1962)



Raman Sundrum (1963)

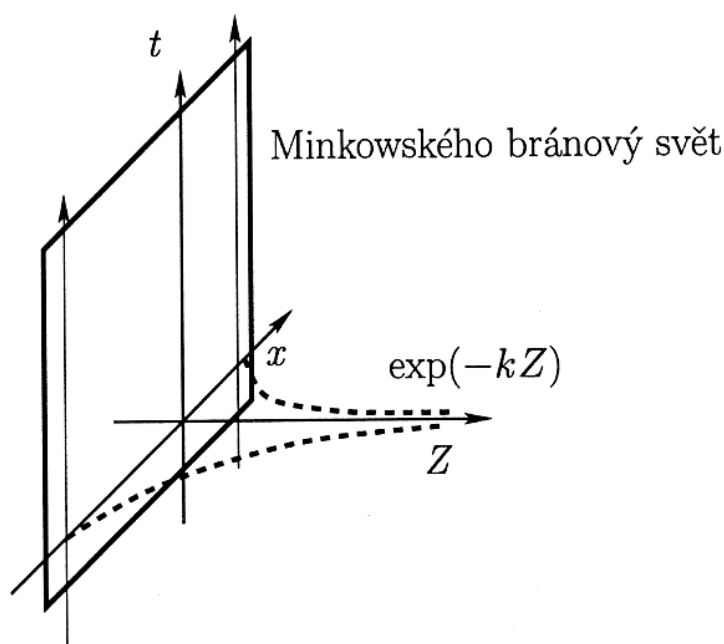
Nyní se budeme zabývat případem bránového světa, který byl poprvé publikován v pracích Randallové a Sundruma. Jedná se o vložení Minkowského bránového světa, popsaného metrikou (9.360), do 5-dimenzionálního AdS, viz obr. 9.33.

Budeme předpokládat, že prostor světů je vyplněný pouze vakuovou negativní energií, tj. $\Lambda_5 < 0$. Fyzikálním zdrojem metriky je bránový svět umístěný v $Z = 0$, popsaný bránovou tenzí σ . Tento model je obvykle nazýván Randallové-Sundrumův bránový svět typu II. Einsteinovy 5-dimenzionální rovnice lze odvodit z akce, která je v tomto jednoduchém případě součtem Einsteinovy-Hilbertovy akce a bránové akce

$$S = S_{\text{EH}} + S_{\text{Brána}} = -\int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} \left(\frac{R}{2\kappa_5^2} + \Lambda_5 \right) + \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} (-\sigma) . \quad (9.373)$$

Einsteinovy rovnice se redukují na soustavu dvou rovnic

$$3A'' = \kappa_5^2 \sigma \delta(Z) \quad , \quad 6(A')^2 = -\kappa_5^2 \Lambda_5 . \quad (9.374)$$



Obr. 9.33 - Vnoření Minkowského bránového světa do 5-dimenzionálního AdS v Poincarého souřadnicích.

Vyloučíme-li exponenciálně rostoucí řešení, je výsledná metrika dána formulí

$$ds^2 = e^{-2k|Z|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dZ^2 , \quad (9.375)$$

kde konstanta

$$k = \sqrt{-\frac{\kappa_5^2}{6} \Lambda_5} . \quad (9.376)$$

Integrací druhé z rovnic (9.374) podle Z od $-\varepsilon$ do ε a využitím reflexní symetrie obdržíme vztah

$$\Lambda_5 = -\frac{\kappa_5^2}{6} \sigma^2. \quad (9.377)$$

Získané řešení (9.375) je singulární pro $Z = \pm\infty$.

Souřadnicová transformace $\exp \{-kZ\} = y$ a přeškálování $\bar{x}^\mu = kx^\mu$ převádí (9.375) do tvaru

$$ds^2 = k^{-2} \left(y^2 \eta_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu - \frac{dy^2}{y^2} \right). \quad (9.378)$$

Je zajímavé, že singularita v $y = 0$ může být považována za horizont 3-brány, který má nulový poloměr. Tenzor energie-impulzu má tvar

$$T_{\text{II}b}^a = \frac{6k}{\kappa_5^2} \delta(Z) \delta_\nu^\mu \delta_\mu^a \delta_b^\nu, \quad (9.379)$$

což přesně odpovídá skutečnosti, že hmota je s kladnou konstantní hustotou lokalizovaná na bráně. V tomto případě jsou metrické fluktuační v extra směru nulové, tj. $\delta g^{ZZ} = 0$, a tenzor energie-impulzu lze odvodit z rovnice

$$T_{\text{Brána}}^{ab} = \frac{2}{\sqrt{-g^{(5)}}} \frac{\delta \left(\sigma \sqrt{-g^{(5)}} \right)}{\delta g_{ab}} \Bigg|_{\delta g^{ZZ}=0} \delta(Z). \quad (9.380)$$

5-dimenzionální akce příslušející bránové tenzi je dána rovnicí

$$S_{\text{II}} = \frac{6k}{\kappa_5^2} \int d^4x \int_{-\infty}^{\infty} dZ \sqrt{-g^{(5)}} \delta(Z). \quad (9.381)$$

Všimněme si, že uvedené navazovací podmínky jsou podmínkami jemného ladění, neboť celá hmotová akce (9.381) je určena pouze charakteristikami prostoru světů - fundamentální (definovanou v prostoru světů) Planckovou škálou M_5 a kosmologickou konstantou v prostoru světů A_5 . Jak vyplývá z (9.381) a (9.377), efektivní kosmologická konstanta 3-brány je nulová.



Erich Justus Kretschmann (1887 – 1973)

Oproti souřadnicovým singularitám v $Z = \pm\infty$ existuje fyzikální singularita v $Z = 0$, což odpovídá hmotě, kterou jsme přidali na bránu. To je patrné z Kretschmannova skaláru, daného výrazem

$$R_{abcd}R^{abcd} = 8k^2 \left\{ 3k^2 + [k - 2\delta(Z)]^2 \right\} . \quad (9.382)$$

Randallové-Sundrumův bránový svět typu I

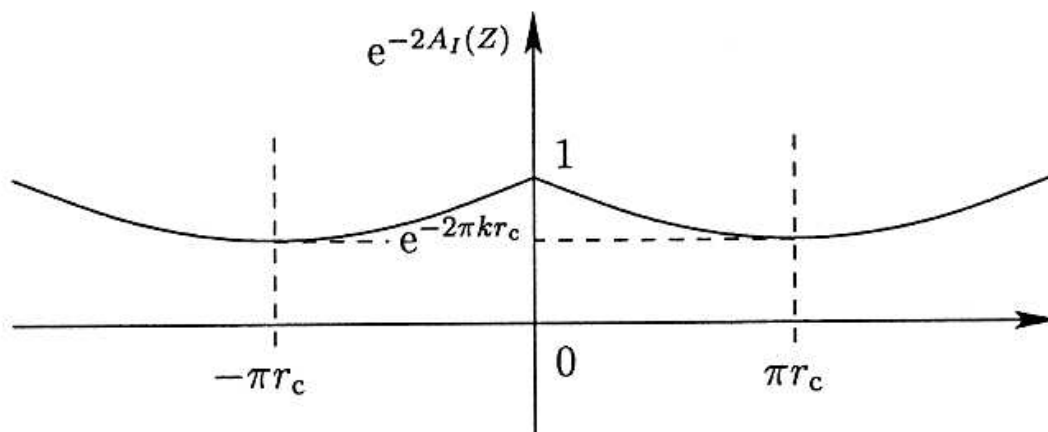
Na rozdíl od Randallové-Sundrumova modelu typu II, kde Z leželo v intervalu $-\infty \leq Z \leq \infty$, v Randallové-Sundrumově bránovém světě I je extra souřadnice Z kompaktní. Tedy kromě reflexní symetrie $Z \rightarrow -Z$ navíc předpokládáme i její periodičnost, viz obr. 9.34. Nyní přidáme hmotu nejenom na bránu v počátku $Z = 0$, ale i na druhou bránu, která je umístěna v $Z = \pi r_c$, kde r_c je poloměr kompaktifikace. Ke vzorci (9.381) tak analogicky dostáváme

$$S_I = S_I|_{Z=0} + S_I|_{Z=\pi r_c} = \frac{6k}{\kappa_5^2} \int d^4x \int_{-\pi r_c}^{\pi r_c} dZ \sqrt{-g^{(5)}} [\delta(Z) - \delta(Z - \pi r_c)]. \quad (9.383)$$

Odpovídající tenzor energie-hybnosti nabývá tvaru

$$T_{Ib}^a = \frac{6k}{\kappa_5^2} [\delta(Z) - \delta(Z - \pi r_c)] \delta_\nu^\mu \delta_\mu^a \delta_b^\nu. \quad (9.384)$$

Zatímco brána v $Z = 0$ má kladnou hustotu hmoty, brána v $Z = \pi r_c$ ji má zápornou.



Obr. 9.34: Metrická funkce $\exp\{-2A_I(Z)\}$ pro Randallové-Sundrumův kompaktifikovaný model typu I.

Metrika Randallové-Sundrumova bránového světa je

$$ds^2 = e^{-2kr_c\varphi} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - r_c^2 d\varphi^2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (9.385)$$

Kretschmannův skalár je dán výrazem

$$R_{abcd}R^{abcd} = 8k^2 \left\{ 3k^2 + [k - 2(\delta(Z) - \delta(Z - \pi r_c))]^2 \right\}, \quad (9.386)$$

Bránová akce (9.383) je určena pouze fundamentálním měřítkem a kosmologickou konstantou v prostoru světů. Dále je jemné nastavení

manifestováno skutečností, že hmotové akce obou brán mají stejné velikosti, ale opačné znaménko

$$\frac{S_I|_{Z=0}}{V_4} = -\frac{S_I|_{Z=\pi r_c}}{V_4} = \frac{M_5^3}{8\pi}, \quad (9.387)$$

kde V_4 je (formální) objem každé brány, $V_4 = \int d^4x$, a gravitační vazebná konstanta je vyjádřena pomocí fundamentální škály energie M_5 . To je také důvodem, proč má brána v počátku $Z = 0$ pozitivní tenzi, zatímco brána v $Z = \pi r_c$ má negativní tenzi. Efektivní kosmologická konstanta vymizí na obou bránách.

Newtonovská gravitace z Randallové-Sundrumova modelu typu II

Standardním postupem při odvození Newtonova gravitačního zákona je uvažovat linearizovanou teorii gravitace. V tomto odstavci budeme postupovat analogicky, tj. budeme se zabývat malými fluktuacemi na pozadí bránové metriky vzniklé přidáním bodové hmoty na bránu. Předpokládáme-li malé perturbace $h_{\mu\nu}$, omezené na bránový svět, můžeme psát

$$ds^2 = \left[e^{-2kr_c\phi} \eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}(x, Z) \right] dx^\mu dx^\nu - dZ^2. \quad (9.388)$$

Využijme časté kalibrace, kdy je stopa a divergence tenzoru $h_{\mu\nu}$ nulová, tj. $h^\mu{}_\mu = 0$ a $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$. Variace Einsteinových rovnic

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta \left(-\kappa_5^2 T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \quad (9.389)$$

v této kalibraci nabývá tvaru

$$\left(e^{2k|Z|} \partial^\rho \partial_\rho - \partial_Z^2 \right) h_{\mu\nu} - 4k \delta(Z) h_{\mu\nu} + 4k^2 h_{\mu\nu} = 0. \quad (9.390)$$

Po separaci proměnných $h_{\mu\nu}(x^\rho, Z) = \psi(Z)\Phi(x^\rho)$ obdržíme rovnice

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi(x^\rho) = -m^2 \Phi(x^\rho) \quad , \quad m^2 \geq 0, \quad (9.391)$$

$$\left[-\frac{m^2}{2} e^{2k|Z|} - \frac{1}{2} \partial_Z^2 - 2k\delta(Z) + 2k^2 \right] \psi(Z) = 0. \quad (9.392)$$

Pokud se budeme zabývat statickým rotačně symetrickým případem nulového módu, tj. $m = 0$, vidíme, že ψ splňuje Laplaceovu rovnici a je dáno

$$\psi(r) = -\frac{B}{r} \quad (9.393)$$

kde integrační konstanta B je rovna $G m_1 m_2$, abychom obdrželi správný výraz pro newtonovskou gravitační sílu mezi dvěma částicemi.

Pro funkci $\psi(Z)$ získáme při $m = 0$ řešení

$$\psi(Z) = \psi_0 e^{-2k|Z|}, \quad (9.394)$$

kde ψ je integrační konstanta.

Na závěr se stručně zmiňme o nenulových módech, kdy $m \neq 0$ (tzv. Kaluzovy-Kleinovy módy). Tehdy obdržíme korekci řádu r^{-3} k Newtonově gravitačnímu zákonu.

Kalibrační hierarchie z Randallové-Sundrumova modelu typu I

Pojednání o Randallové-Sundrumově bránovém světě typu I by nebylo úplné, kdybychom se nezmínili o tzv. problému kalibrační hierarchie, který je znám ze standardního modelu elementárních částic vycházejícího z principu spontánního narušení symetrie.

Například u elektroslabých interakcí proběhlo toto narušení při energiích kolem energetické škály $M_E \sim 10^3$ GeV. Naproti tomu efekty strunové teorie jsou zcela signifikantní při škálách energie okolo

Planckovy energie, což je přibližně $M_P \sim 10^{19}$ GeV. Dostáváme o 16 řádů vyšší hodnotu, než je energie při spontánním narušení symetrie.

Standardní částicový model doposud ztroskotával při objasnění takové energetické diskrepance. Na ilustrativním příkladu se podívejme, jak lze problém hierarchie vysvětlit v rámci Randallové-Sundrumova modelu typu I.

Předpokládejme že žijeme na bráně lokalizované v $Z = \pi r_c$ a provedme dimenzionální redukci Einsteinovy gravitace na 3-bráně z 5-rozměrné gravitace na 4-rozměrnou gravitaci v $Z = \pi r_c$. Píšeme-li

$$ds^2 = g_{ab}^{(5)} dx^a dx^b = e^{-2k|Z|} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dZ^2 \quad (9.395)$$

postupně dostáváme

$$\begin{aligned} S_5 &= -\frac{M_5^3}{16\pi} \int d^5 x \sqrt{|g^{(5)}|} R = \\ &= -\frac{M_5^3}{16\pi} \int d^4 x \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} \int_{-\pi r_c}^{\pi r_c} dZ e^{-2k|Z|} (R^{(4)} + \dots) = \\ &= -\frac{M_5^3}{16\pi} (1 - e^{-2k\pi r_c}) \int d^4 x \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} (R^{(4)} + \dots) = \\ &= -\frac{M_P^3}{16\pi} \int d^4 x \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} (R^{(4)} + \dots) = S_4 + \dots \end{aligned} \quad (9.396)$$

Při odvození (9.396) jsme použili $g^{(5)} = \exp(-8k|Z|) \det g_{\mu\nu}$ a

$$R = e^{2k|Z|} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \dots = e^{2k|Z|} R^{(4)} + \dots \quad (9.397)$$

Porovnáním získáváme vztah

$$M_P = \frac{1}{k} (1 - e^{-2k\pi r_c}) M_5^3 . \quad (9.398)$$

Rovnice (9.398) nám dává velmi důležitý výsledek, podle něhož M_P

závisí pouze slabě na r_c v limitě, když je součin kr_c velký.

Obdobně jako rovnici (9.398) lze odvodit i další důležitý vztah mezi hmotovým parametrem m_0 , definovaným ve fundamentálním 5-dimenzionálním prostoru světů, a odpovídající fyzikální hmotou m , měřenou pozorovatelem na 3-bráně,

$$m = e^{-k\pi r_c} m_0 . \quad (9.399)$$

Ze vztahu (9.399) vidíme, že pokud je hodnota m_0 blízko Planckovy škály, potřebujeme $kr_c \approx 50$, aby jí z hlediska pozorovatele na bráně odpovídala fyzikální hmota m s korektní hodnotou elektroslabé škály M_E . Odtud vyplývá, že nastavením r_c na dostatečnou hodnotu lze obdržet velmi vysokou hierarchii mezi elektroslabou a Planckovou škálou. Ačkoli exponenciála ve vzorci (9.398) má velmi malý vliv na určení Planckovy škály energie, hraje podstatnou roli v určení viditelných hmotných škál (9.399).

Je zapotřebí důrazně upozornit, že předložené vysvětlení není skutečným řešením, neboť vyžaduje splnění podmínky jemného ladění. Nicméně se problém hierarchie stává mnohem jasnějším.

Friedmannův bránový svět

Zabývejme se situací, kdy je bránový svět představován prostoročasem typu FRW a je vložen do AdS. Bránový svět FRW je nejpřirozenější volbou, která odráží skutečnost, že náš vesmír expanduje. Protože o kosmologii FRW bylo pojednáno v předchozích kapitolách, zmíníme se především o odlišnostech, kterými se vyznačuje bránový svět FRW od standardní kosmologie FRW.

Předpokládejme metriku prostoru světů ve tvaru (9.361). Ačkoli pro jednoduchost uvažujeme ploché prostorové řezy (tj. parametr K v (9.361) je 0), lze výsledky přímočaře zobecnit i na případy $K = \pm 1$.

Rozložíme-li celkovou hustotu energie ρ na část pocházející z hmoty ρ_m a na bránovou tenzi a zavedeme-li kosmický čas $ab dt = d\tau$, po dosazení do (9.369) a úpravě obdržíme

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m \left(1 + \frac{\rho_m}{2\sigma} \right) + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{\mu}{a^4}, \quad (9.400)$$

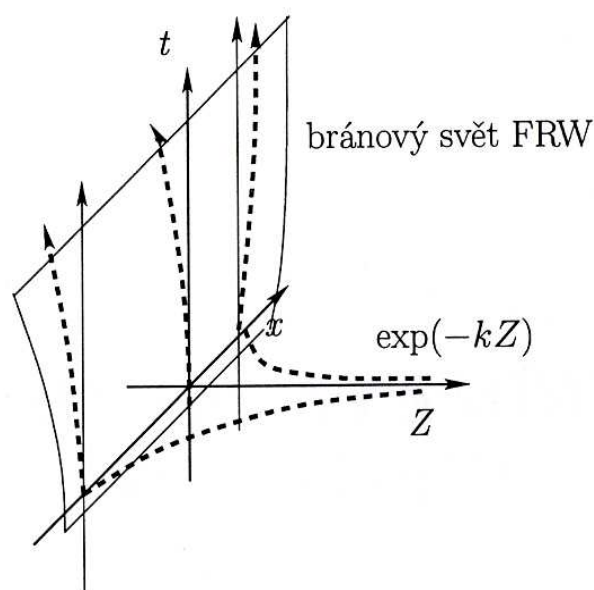
$$\frac{dH}{d\tau} = -4\pi G (\rho_m + p_m) \left(1 + \frac{\rho_m}{\sigma} \right),$$

kde H je Hubbleova konstanta $H = a^{-1}(da/d\tau)$. Vztahy (9.400) jsou bránové verze Friedmannovy a Raychaudhuriho rovnice. Veličina μ v (9.400) je integrační konstanta a člen μ / a^4 popisuje temné záření. Vlastnosti tohoto členu lze vyvodit z detailní analýzy rovnic v prostoru světů.

Nejdůležitější změna ve Friedmannově rovnici spočívá v přítomnosti členu úměrného ρ_m^2 , pocházejícího z tenzoru π_{ab} . To znamená, že v režimu, kdy je hustota hmoty podstatně vyšší než bránová tenze, $\rho_m \gg \sigma$, je Hubbleova konstanta úměrná ρ_m , a nikoli $\sqrt{\rho_m}$, jak je tomu v klasické kosmologii FRW. Míra expanze je ve scénáři bránových světů vyšší. Pouze pokud je hustota energie hmoty zanedbatelná vůči bránové tenzi, dostáváme obvyklou úměru $H \sim \sqrt{\rho_m}$. Tato důležitá modifikace Friedmannovy rovnice není omezena jen na Randallové-Sundrumův bránový svět, ale platí v širší třídě řešení. Navazovací rovnice (9.368) pak reprodukuje standardní zákon zachování

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (9.401)$$

Na závěr pojednání o kosmologii FRW shrňme základní myšlenku bránového světa FRW. Podle klasické kosmologie FRW náš vesmír expanduje do "ničeho". Pokud je obraz bránových světů správný, je z fundamentálního hlediska naprosto přijatelné tvrzení, že náš vesmír expanduje do AdS prostoru světů. Bránový svět FRW je znázorněn na obr. 9.35.



Obr. 9.35 - Vložení bránového světa FRW do 5-dimenzionálního AdS v Poincarého souřadnicích.

Ekpyrotický model vesmíru

Ekpyrotický model navrhli v roce 2001 Neil Turok, Paul Steinhardt, Burt Ovrut a Justin Khoury jako alternativu k inflačnímu modelu. Název znamená „z ohně pocházející“.



Neil Geoffrey Turok (1958)



Paul J. Steinhardt (1954)



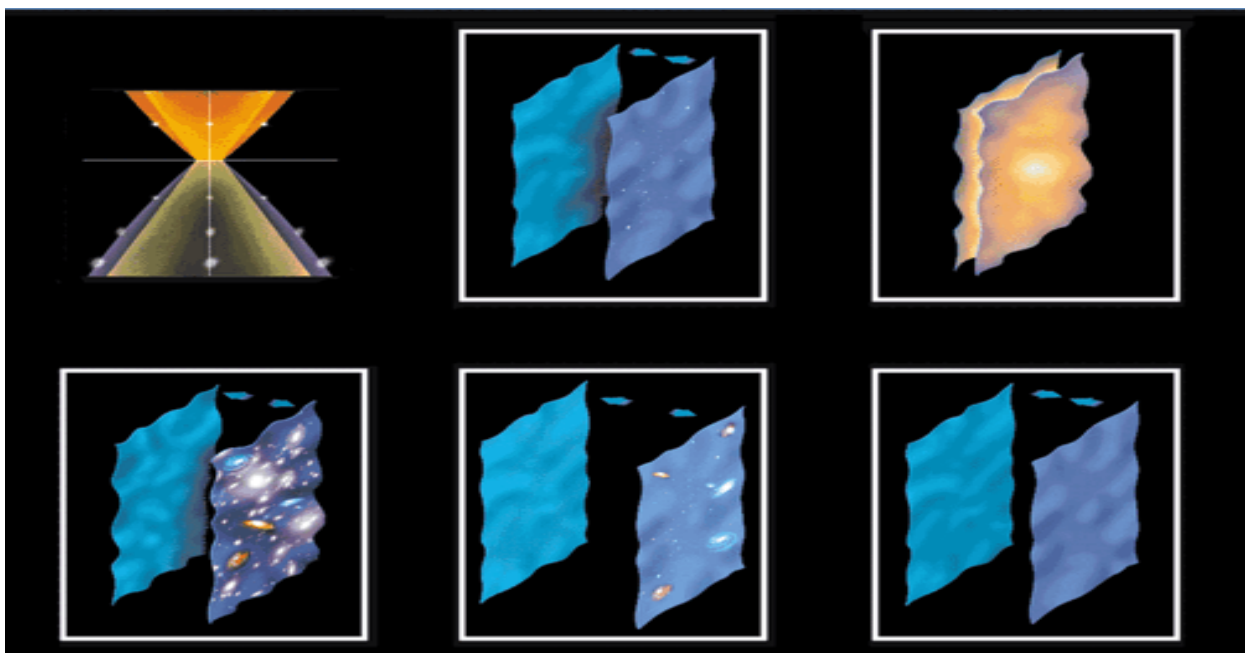
Burt Ovrut (1942)



Justin Khoury (1976)

Základem modelu je tvrzení, že Vesmír představuje méněrozměrný objekt ve vícerozměrném světě (bránu). Počátek Vesmíru je ztotožněn se setkáním dvou brán v místě největší kvantové fluktuace. Základní přírodní konstanty (gravitační, Planckova, rychlost světla) mohou být v různých bránách různé. Po doteku dojde v „naší“ bráně k prudké expanzi a následné tvorbě galaxií. Pokračující expanze zředí látku v bráně a gravitační síla působící i v dimenzi kolmé na náš Vesmír přitáhne opět druhou bránu a dojde k dalšímu dotyku. Výsledkem je jednoduchý model dvou oscilujících brán, který předpovídá, že při doteku brán vzniknou gravitační vlny, jejichž amplituda roste směrem ke krátkovlnné části spektra.

Obr. 9.36



Kvantování gravitace

Poruchová metoda nám dává odpověď na jakoukoli fyzikální otázku v podobě nekonečné řady. Protože prvních pár členů mívá tu vlastnost, že každý další je mnohem menší než předchozí člen, lze získat velmi dobrý odhad výsledku sečtením jen několika prvních sčítanců. Zatímco u kalibračních teorií pole tento postup dobře funguje, u gravitace před objevem teorie strun vedl tento postup vždy k nesmyslným nekonečným hodnotám počítaných veličin a parametrů. V teorii strun odpovídá první člen poruchového rozvoje klasické OTR bez zahrnutí kvantových efektů. O druhém členu, který při všech nestrunových pokusech o kvantování gravitace již divergoval, lze v teorii strun snadno dokázat, že je rovněž konečný. Teprve v roce 2001 se podařilo rigorózně dokázat, že rovněž třetí člen dává konečné výsledky. Tento neobyčejně obtížný důkaz je dílem mnohaletého heroického úsilí Erica D'Hokera a Duong H. Phonga. Tito autoři v současné době pracují na důkazu, že rovněž i čtvrtý člen poruchového rozvoje kvantové gravitace je konečný, a tento důkaz je již téměř před dokončením.



Eric D'Hoker (1955)



Duong Hong Phong (1951)

Před nedávnou dobou se podařil veliký pokrok v tomto směru Stanley mandelstamovi a především Nathanu Berkovitsovi, který formuloval několik předpokladů strunové teorie, při jejich splnění lze dokázat, že všechny členy poruchového rozvoje kvantové gravitace jsou v teorii strun konečné. Otevřeným problémem zatím zůstává, nakolik snadné je tyto dodatečné předpoklady splnit. Dosud také není známo, zda i

v případě konečnosti všech členů poruchového rozvoje nebude nakonec poruchová řada jako celek přesto divergovat. Podobný problém však zůstává nedořešen i u klasických kalibračních teorií, jako je třeba QED. Přestože se v těchto teoriích z výpočetních důvodů obvykle omezujeme nejvýše na 3 členy poruchového rozvoje, jsou získané výsledky ve výborné shodě s experimentem. Není proto důvodu předpokládat něco jiného též u kvantové teorie gravitačního pole.



Stanley Mandelstam (1928)



Nathan Jacob Berkovits (1961)

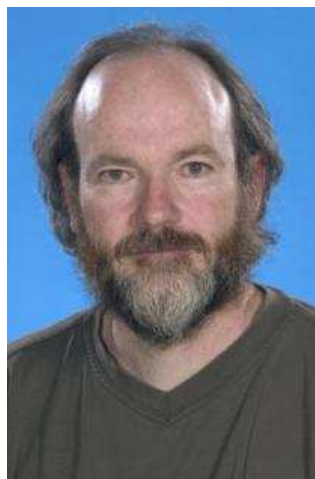
Supersymetrické sjednocení a ještě dál

Při pohledu na graf vazebních konstant vyvstávají okamžitě dvě otázky: Setkají se všechny tři konstanty při jedné jediné energii? A co se bude dít při vyšších energiích? Pokud by elektrický náboj dále rostl, znamená to, že v počátečních fázích Velkého třesku měly částice enormní elektrický náboj, snad dokonce nekonečný. To by ale vedlo k mnoha problémům. Již v roce 2006 publikovali Sean Robinson a Frank Wilczek možné řešení. Pokud se do výpočtů zahrne kvantová gravitace, pak při extrémně vysokých energiích (nad 10^{18} GeV) začnou náboje všech tří interakcí prudce klesat, a proto budou mít v nejrannějších fázích vesmíru všechny tři kvantové interakce velmi malé vazební konstanty. Předložené výpočty byly mnoha vědci kritizovány a byly v nich nalezeny zásadní chyby. Na sklonku roku 2010 byly publikovány dva

nové články na obdobné téma. První shrnuje výpočty Davida Tomse z Univerzity v Newcastlu a druhý výpočty čínsko-japonské skupiny vědců (Hong-Jian He, Xu-Feng Wang, Zhong-Zhi Xianyu). V obou článcích je opět prováděn výpočet závislosti vazebních konstant na energii. V úvahu je brán vliv kvantové gravitace. Oba články prokazují, že základní myšlenka Robinsona a Wilczeka byla správná a korektní výpočty skutečně vedou na prudký pokles vazebních konstant nad Planckovou energií 10^{19} GeV. Všechny tři vazební konstanty (náboje) se stanou pro vyšší hodnoty energie nulové. V raném vesmíru by podle těchto výpočtů elektron o svůj náboj přišel. Pokud se výpočty potvrdí, bude to znamenat výrazný posun v řešení mozaiky jednotné teorie všech čtyř interakcí.



Sean Patrick Robinson (1977)



David John Toms (1966)



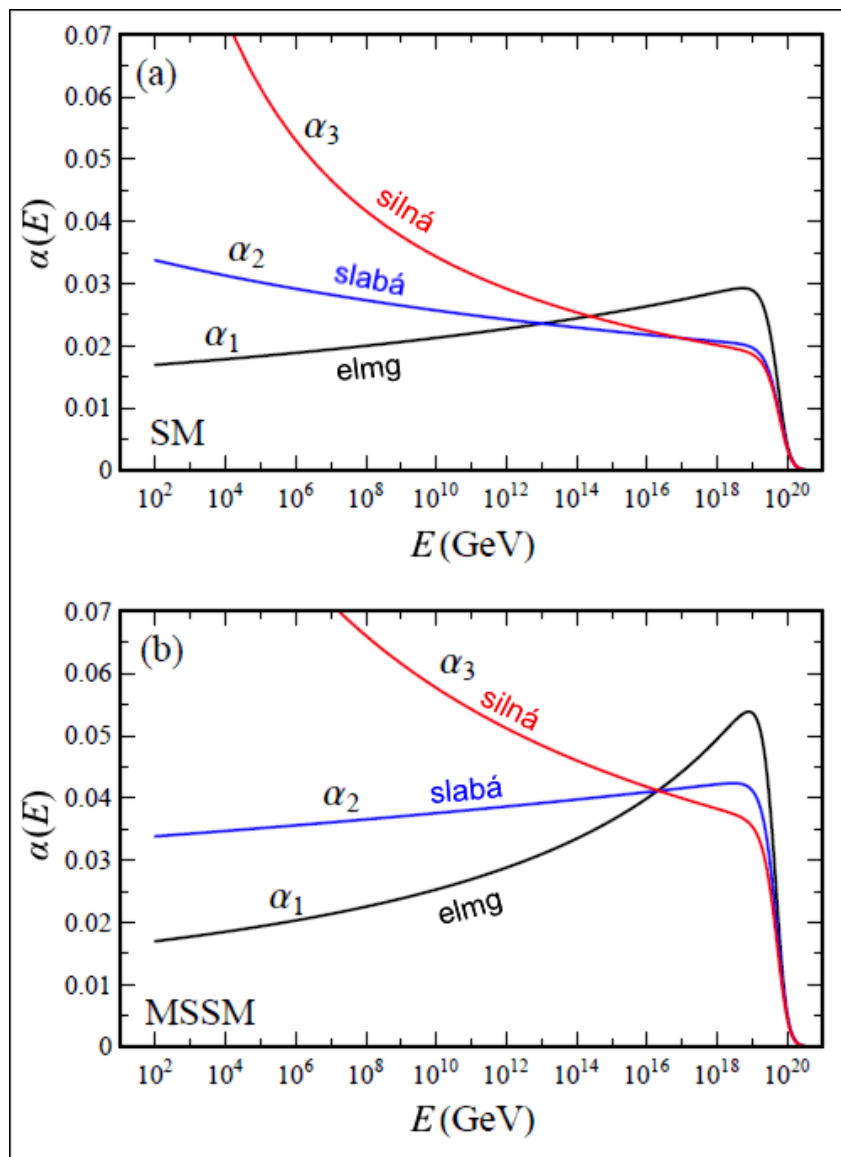
Hong-Jian He (1979)



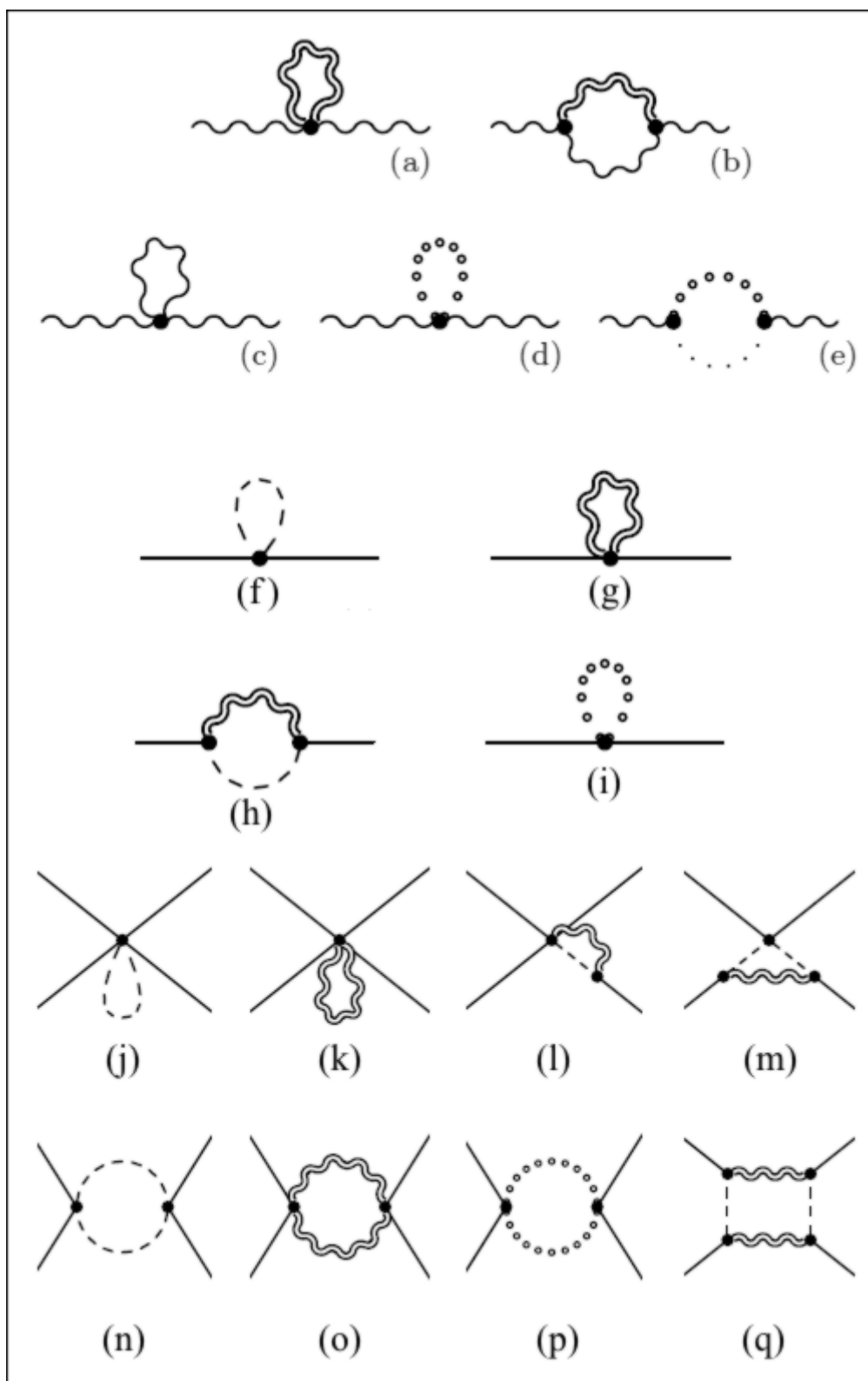
Zhong-Zhi Xianyu (1988)



Xu-Feng Wang (1988)



Obr. 9.37: Výsledky výpočtů čínsko-japonské skupiny. Nad Planckovou energií hodnoty všech tří vazebních konstant prudce klesají. Stínění elektrického náboje (jeho růst s energií) se změní v antistínění. Za to je zodpovědná celá řada exotických Feynmanových diagramů, které nejsou běžné v nízkoenergetické limitě. Na horním obrázku je výpočet v rámci standardního modelu (SM). Pokud se do výpočtu zahrne i supersymetrie (MSSM – Minimální supersymetrický model, dolní graf)), protnou se dokonce všechny tři průběhy vazebních konstant v jediném bodě.



Obr. 9.38: Exotické Feynmanovy diagramy, které se uplatňují při vysokých energiích. Vlnovkou jsou značeny fotony, dvojitou vlnovkou gravitony, plnou čarou skalární pole, čárkovaně fluktuace skalárního pole, kolečky pole gravitonových duchů a tečkovaně pole fotonových duchů (pole duchů se do teorie přidávají proto, aby platily určité symetrie, nejde však pravděpodobně o reálná fyzikální pole).

Konifold – rozpárání prostoru

V roce 1987 učinili Sing-Tung Yau se svým studentem Tian Gangem důležité matematické pozorování, že C-Y variety lze vzájemně transformovat mezi jednotlivými topologicky odlišnými formami protržením a opětovným sešitím vzniklého otvoru dle jistého vzorce, kterému matematici říkají **flop**.



Tian Gang (1958)

Roku 1992 dokázali fyzici Brian Greene, Paul Aspinwall a Edward Witten, spolu s matematiky Victorem Batyrevem a Davidem Morrisonem, s pomocí rozvinutých metod zrcadlité symetrie, že prostor C-Y variety se může skutečně rozpárát a opět bezpečně slepit do jiné topologické formy, aniž by to mělo katastrofální důsledky na jeho integritu. Struny obepínající trhlinu v průběhu probíhající transformace dokážou ochránit zbytek vesmíru před katastrofálními účinky trhliny po nezbytně nutnou dobu. Práce těchto autorů ukázala, že když se C-Y varieta trhá, mohou se měnit jednotlivé hmotnosti částic – vibrační módy strun. Zprvu se však zdálo, že fyzikální veličiny, jako je počet rodin částic a druhy částic v každé rodině se touto transformací nezmění. V průběhu vesmírné inflace se pravděpodobně C-Y varieta rozpárala a znovu sešila hned několikrát, jak se postupně měnila energetická bilance vesmíru.



Paul S. Aspinwall (1964)

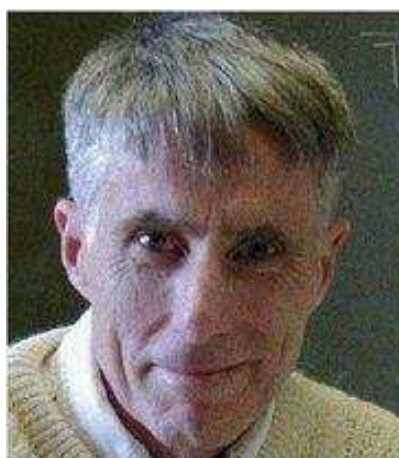


David R. Morrison (1955)



Victor Batyrev (1961)

Pozdější práce Bryana Greena a Davida Morrisona, inspirované pracemi matematiků Herberta Clemense, Roberta Friedmana, Milese Reida, Philipa Candelase, Michaela Greena a Tristana Hübsche však přinesla překvapení. Třírozměrný prostor se může protrhnout a zase spravit také tím, že v něm naroste dvourozměrná sféra, což vede k daleko drastičtější změně topologie, než se do té doby uvažovalo. Tato nová transformace dostala název **konifold**. Tímto způsobem se může C-Y varieta transformovat do zcela odlišného C-Y tvaru. Fyzika vesmíru se tak v ranných fázích po jeho zrodu pravděpodobně velmi bouřlivě měnila, než hustota jeho energie poklesla natolik, že se C-Y varieta přestala trhat a kvantově zamrzla v nějakém konkrétním stabilním tvaru odpovídajícím jednomu z mnoha možných lokálních energetických minim, určujícím veškerou fyziku současného vesmíru.



C. Herbert Clemens (1941)



Robert David Friedman (1956)



Miles Reid (1948)



Philip Candelas (1952)



Tristana Hübsch (1958)

Význam české školy teoretické fyziky pro vývoj strunové teorie

Teorie superstrun je v současné době ve stádiu intenzivního rozvoje. Kromě průkopníků J.Schwarze, M.Greena, E.Wittena, na ní pracuje několik tisíc fyziků (především mladší generace) a řada výzkumných skupin. Z našich fyziků se teorii superstrun velmi aktivně a úspěšně věnují zejména P.Hořava a L.Motl, M. Schnabl, M. Fabinger, J. Klusoň a další.

Matematicky konzistentním formalismem strunové teorie je samozřejmě M-teorie, jejímž spoluzakladatelem je rovněž náš krajan prof. Luboš Motl. Jedná se o grupový uzel $U(N)$, což není nic jiného, než naše stará známá C-Y varieta. Každý prostorový rozměr je definován jedním z devíti párů matic $N \times N$, kde N je počet nula-brán, což je rank kalibrační grupy. Důvod, že M-teorie, objev největšího mozku teoretické fyziky, prof. Edwarda Wittena spolu s naším slavným krajanem, prof. Petrem Hořavou, má o jeden rozměr více než-li teorie superstrun, tkví právě v U-dualitě, protože počet rozměrů je spjat skrz rank grupy s mírou kvantového rozmazání prostoročasu.



Petr Hořava



Luboš Motl



Michal Fabinger



Martin Schnabl

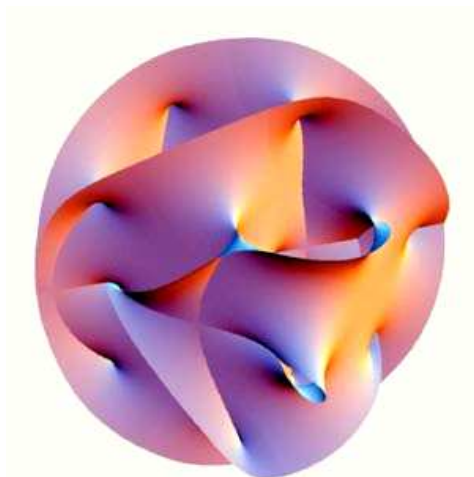


Josef Klusoň

Důsledkem U-duality je právě rovnoprávnost objektů libovolné prostorové dimenze a rovněž objev dalšího strunového velmistra, prof. Cumruna Vafy, tzv. F-teorie – 12-rozměrné duální teorie, který umožnil konstruovat velké nové třídy neporuchových vakuí superstrun typu IIB. Závěr je takový, že v teorii superstrun existují matematicky konzistentní prostoročasy s libovolnou mírou kvantového rozmazání (označovanou tzv. vazebnou konstantou), přičemž topologický tvar může nabývat jakéhokoli matematicky konzistentního tvaru.

Hodnota vazebné konstanty je exponenciálou skalárního pole, tzv. dilatonu. Toto pole tvoří samotnou strukturu našeho prostoročasu a samozřejmě zásadním způsobem závisí na jeho topologii. Brány nejsou nic jiného než uzly uvázané na tomto skalárním poli. Za těmito pojmy se skrývá mohutný matematický aparát, klasifikující možné kondenzáty dilatonu, K-teoretické grupy příbuzné grupě homotopií C-Y variety (uzlu). Topologie C-Y variety (přesný tvar kompaktifikovaných rozměrů

společně s našimi rozměry) přesně determinuje počet rodin elementárních částic.



Obr. 9.39: 3-dimenzionální model 11-ti rozměrné C – Y variety

Dr. Martin Schnabl studuje mechanismus uvazování vakuových uzlů. Např. na uvázání skalárního pole inflatonu se můžeme dívat, jak ukázal před 20 lety prof. Andrei Linde, právě jako na velký třesk, fluktuaci jedné nestabilní U-duální brány (jednoho libovolně rozměrného a libovolně kvantově rozmazaného, jakkoli matematicky konzistentně uvázaného uzlu).



Ashoke Sen (1956)

Dr. Schnabl již analyticky dokázal dvě ze tří důležitých hypotéz prof. Ashoke Sena. První domněnka vztahuje potenciál na tachyonovém poli a napětí brány (vazebná konstanta determinující napětí brány, (10^{42} kg) visící na jednorozměrné bráně, je exponenciálou skalárního pole).

Tachyonové vakuum Dr. Schnabl definoval pomocí tzv. Bernoulliho čísel, jenž mají úzký vztah k Riemannově zeta funkci, která definuje strukturu prvočísel.



Daniel Bernoulli (1700 – 1782)

Platonisticky přemýšlejícího strunaře potěší podobný netriviální vztah mezi atomy čísel a atomy vaku. Bernoulliho čísla se samozřejmě hojně objevují v topologické teorii strun (teorii strun zaměřující se pouze na topologické stupně volnosti). Rovněž sílí poznání, že Riemannova zeta funkce definuje vlastní hodnoty v maticových formulacích topologické teorie strun.

Dodejme, že tachyonovými uzly se ve svých pracích zabývá také náš další krajan Dr. Josef Klusoň. Druhá doměnka říká, že existuje jedna nestabilní brána vyplňující prostoročas (přesněji algebraickou grupovou vakuovou varietu) a méně rozměrné brány jsou pouhými jejími fluktuacemi, jakými si defekty v jejím kalibračním poli.

Třetí Seanova doměnka, kterou Dr. Schnabl dokázal spolu s Dr. Ianem Ellwoodem říká, že na pravém tachyonovém vakuu nejsou uvázané žádné uzly. V tachyonovém poli tedy neexistují žádné brány s žádnými kalibračními symetriemi. Nejsou-li uvázané žádné uzly, nemáme žádné elementární částice, protože elementární částice jsou reprezentací kalibrační grupy vakuového uzlu.



Ian T. Ellwood (1977)

Vakuový uzel je bodem v abstraktní krajině, kde je lokálně nejnižší energie. Uzel je v celku stabilně usazený, protože už existuje v konkrétním topologickém tvaru nějakých 14 miliard let. Pokud by se uzel nalézal v bodě mimo minimum energie, z něhož by spadl řádově v Planckově čase na základní hladinu, tak by se při pádu a jakémkoli následném pohybu v modulární krajině nepředstavitelně divoce převazoval. Důležité je to, že potenciálnímu minimu na tachyonové krajině odpovídá naopak právě divoká kondenzace (uzlování) vakua, to se děje například přiblíží-li se brána k antibráně (opačně orientované bráně) blíže než na planckovskou délku, poté pár brána - antibrána anihiluje. Dochází k topologicky netriviální operaci: rozvázání uzlu. Spolu s tím se odpovídajícím způsobem mění kalibrační symetrie. Pokud je na původním páru brána - antibrána uvázaný nějaký tachyonový uzel, tak se při anihilaci nemůže úplně rozvázat a výsledkem je brána nižší dimenze (podle K-teoretické grupy klasifikující všechny možné náboje brán). Tím se dostáváme ke druhé domněnce.

Kvantově rozmazaný uzel generující prostoročas je holograficky duální k hrdlu černé brány (hrdlo černé díry libovolného rozměru). Strukturu hrdla můžeme studovat prostřednictvím tzv. automorfních forem grupové variety definující celou krajinu. Zbývá už jen dokázat, že partiční funkce černé díry (definovaná pomocí topologické partiční funkce) přesně koresponduje se strukturou prvočísel.

Náš zatím nejmladší strunař Michal Fabinger studuje vliv Casimirova jevu na dynamiku červých děr a vývoj p-brán včetně kosmologických. V posledních letech se rovněž věnuje výzkumu multidimenzionálního Hallova jevu.



Edwin Herbert Hall (1855 – 1938)

Vakuová degenerace strunové teorie

V teoriích s mnoha dimenzemi vede kompaktifikace vyšších dimenzí k mnoha odlišným řešením. Jen málo z nich se však přibližuje našemu reálnému světu. Některé vlastnosti geometrie vícerozměrného prostoru totiž musí být zafixovány, jinak se geometrie začne samovolně vyvíjet a destabilizuje prostoročas. Buď se objeví smrtonosné singularity, nebo naopak sbalené dimenze narostou do makroskopických rozměrů.

Strunaři to označují jako **problém stabilizace modulů**. Moduly obecně rozumíme soubor konstant, které popisují geometrii a topologii dodatečných dimenzí. Tento problém se podařilo vyřešit v průběhu 90. let minulého století, kdy Joseph Polchinky a Raphael Bousso ukázali, že ke stabilizaci geometrie a topologie C - Y variety, která by se jinak spojitě měnila, je možno využít brány. Protože brán může být vždy jen diskrétní počet a protože brány mohou nést jen jednotkové hodnoty nábojů, dostáváme tím diskrétní jednotky toků.

Polchinski s Boussem tak začali studovat teorie strun, ve kterých je kolem dodatečných dimenzí sbaleno veliké množství jednotek elektrického a magnetického toku. Podařilo se jim sestrojít teorie s kvantově zmraženými parametry. Tato stabilizace geometrie pochází z kvantových efektů, které přímo nesouvisejí se strunovou teorií, ale jsou poměrně dobře známy ze supersymetrických kalibračních teorií. Velmi příjemným vedlejším efektem této konstrukce byla skutečnost, že pokud se spolu s bránami použijí též antibrány, vytvoří to teorii strun s kladnou kosmologickou konstantou, která předpovídá pozorovanou

zrychlenou expanzi vesmíru, což se do té doby žádné strunové teorii nepodařilo.



Raphael Bousso (1972)

Protože nevíme, jak vypadá podklad M-teorie v podobě konkrétního tvaru C-Y variety, zabývají se strunoví teoretici prvními členy poruchového rozvoje strunové teorie podle počtu děr ve světlošpe struny. Tyto vyšší členy v rozvoji odpovídají většímu počtu děr ve světlošpe. Předpokládá se, že tento výpočet dá hodnoty blízké tomu, co by mohl poskytnout výpočet podle pravé M-teorie (pokud bychom znali přesný tvar C -Y variety). Pro uskutečnění takového výpočtu v 11-ti rozměrném prostoročase je potřeba provést volbu brán, na nichž jsou upevněny konce strun, neboli provést volbu vakuového stavu. Existuje naděje, že se tak podaří nalézt nejnižší vakuový stav odpovídající základnímu stavu M-teorie (nejnižšímu energetickému stavu C-Y variety). Existuje však nekonečně mnoho tříd podkladových prostorů, které dávají možné bezrozporné volby a každá z těchto tříd přináší velký počet parametrů určujících rozměry a tvar podkladového prostoročasu - modulů.

Pro nalezení neznámé dynamiky M-teorie je zapotřebí nalézt mechanismus, který dává různé energie vakuovým stavům odpovídajícím různým hodnotám modulů. Zobrazení energetické funkce v závislosti na mnoha modulových parametech se nazývá **krajinou** (landscape) **superstrunové teorie**.

Již ve druhé polovině 80. let minulého století byl vytvořen hrubý odhad počtu stabilních strunových vakuů v řádu 10^{1500} . Drtivá většina těchto vakuů však obsahovala zápornou kosmologickou konstantu, což je

v příkrém rozporu s pozorováním současné zrychlené expanze prostoru. V roce 2003 našli fyzici Shamit Kachru, Sandip Trivedi a manželé Renata Kallošová a Andrej Linde mechanismus, který dává různé hodnoty energií pro různé hodnoty modulů, což dovolí fixovat jejich hodnoty nalezením minima energie jako funkce modulů. Tento mechanismus byl nazván podle iniciál příjmení autorů **KKLT mechanismem**.



Shamit Kachru (1970)



Sandip Trivedi (1963)



Renata Kallosh (1943)



Andrej Dmitrievič Linde (1948)

Vyjdeme-li z C-Y variety, abychom kompaktifikovali šest z deseti prostorových rozměrů podkladu pro superstrunovou teorii, přidává KKLT mechanismus další vrstvy struktury zahrnující brány a toky. Tyto toky jsou vícedimenzionálním zobecněním magnetických polí ukotvených na topologii C-Y variety. tato práce je nesmírně komplikovaná dokonce i na poměry teorie strun.

Bohužel, KKLT mechanismus dává modulům velmi rozsáhlý soubor hodnot, z nichž každá představuje lokální minimum, ve kterém mohla C-Y varieta kvantově zamrznout. Řádový odhad množství těchto stabilních vakuových stavů (možných vesmírů) nyní dělá 10^{1000} , což je stále ještě otřesně veliké číslo.

Výzkumy z posledních let naznačují, že snad bude možné z tohoto počtu možných kompaktifikací C-Y variety vyloučit tzv. **non kahlerovské kompaktifikace**, čímž by se počet možných vakuí neuvěřitelně zredukoval na „pouhých“ 10^{500} .



Errich Kähler (1906 -2000)

Vybereme-li z tohoto souboru pouze ty stavy, jejichž vlastnosti souhlasí se současně známými experimentálními hodnotami různých fyzikálních parametrů našeho vesmíru, mělo by se podařit tento ohromný počet možných vakuí ještě dále zredukovat. Např. se předpokládá, že kosmologická konstanta by měla mít v každém z možných stavů vakua jinou hodnotu. Existence 10^{500} různých stabilních vakuí tak přirozeně vede k existenci 10^{500} různých hodnot kosmologické konstanty.

Spektrum těchto hodnot je tedy diskrétní a teoretici jej proto nazývají **diskretum**. Pouze „malé množství“ těchto různých stabilních vakuových stavů strunové teorie s kladnou kosmologickou konstantou by mělo mít hodnotu kosmologické konstanty blízkou nule, jak to pozorujeme v našem vesmíru, a jak to také vyžaduje antropický princip. Konfrontace M-teorie se známými hodnotami přírodních konstant našeho vesmíru by dle optimistických odhadů mohla nakonec zredukovat počet kandidátů na strunové vakuum našeho vesmíru až na

nějakých 10^{100} různých možností. To je však stále příliš mnoho na to, aby byla M-teorie za současného stavu věcí schopna učinit jakoukoli předpověď týkající se konkrétního vesmíru. Zbývá zkrátka ještě příliš mnoho možných stavů (převyšují dokonce počet částic ve vesmíru) které povedou k nejednoznačným v předpovědích výsledku jakéhokoliv nového pozorování.

Ačkoli je superstrunová teorie mnohými fyziky považována za nejnadějnějšího kandidáta na **úplnou unitární teorii pole**, sjednocující všechny 4 typy interakcí, na toužebně očekávanou "**teorii všeho**", řada fyziků zůstává k teorii superstrun zdrženlivější. Poukazují na nejednoznačnost jejích závěrů, neprůhlednost a přílišnou matematickou komplikovanost, především pak na obtížnost, ba nemožnost experimentálního ověření v dohledné budoucnosti.