

## Smyčková kvantová gravitace

### Standardní model

Fyzika elementárních částic udělala nepochybně v posledních desetiletích nesmírný experimentální a technický pokrok. Počet částic pozorovaných v ohromných urychlovačích se stále rozmnožuje a zároveň se na teoretické úrovni podařilo uskutečnit dalekosáhlé sjednocení fyzikálních představ o struktuře hmoty a o základních interakcích v přírodě. Takzvaný *standardní model* obsahuje jen poměrně málo základních kamenů: *leptony* a *kvarky*, z nichž se skládají těžší částice. K tomu přistupují *intermediální částice* zprostředkující čtyři známé síly či interakce. Tak standardní model uspokojuje současné potřeby fyziky elementárních částic a dává jí teoretickou výzbroj k vysvětlení světa od nejmenších dnes dostupných velikostí ( $\sim 10^{-18}$  m) až do měřítká metrů.

Teoretickým základem standardního modelu je *kvantová teorie pole* (KTP), podle níž jsou základními veličinami spojité funkce v prostoru a v čase - "pole". Pole příslušející elementárním částicím se pohybují prostorem a časem, a částice se objevují jako kvanta energie příslušného pole - jsou tedy lokalizovány jen přibližně, kdežto v klasické teorii byly částice bodovými útvary. Obrazně lze říci, že v kvantové teorii pole jsou částice rozpuštěny do vlnových balíčků. Starý spor mezi "atomisty" a "energetisty" o diskrétní či spojitou povahu hmoty, který byl na začátku našeho století dočasně rozhodnut ve prospěch prvních, je tak v kvantové teorii pole vyřešen opačně.

### Gravitace jako "zdánlivá síla"

Co však do standardního modelu začlenit nelze, je čtvrtá základní interakce - *gravitace*. Protože je ve srovnání s jinými silami přírody daleko nejslabší, hraje zdánlivě roli jen ve velkých rozměrech, v planetárním systému či v celém vesmíru, a její teorie je od kvantové teorie pole naprosto odlišná. *Obecná teorie relativity* (OTR) vykládá gravitační sílu pomocí křivosti čtyřrozměrného prostoročasu. Zakřivené a zrychlené pohyby způsobené gravitací vznikají podle ní podobně, jako

když se koule valí po nerovné podložce a "sama od sebe" sleduje její křivost. Z tohoto hlediska je gravitace "zdánlivou silou". Podle Einsteinových rovnic platných v obecné teorii relativity, zakřivuje prostoročas každý druh energie, která je v něm rozložena. Obecná teorie relativity je klasická teorie, jež nezná pojem zprostředkujících částic. Částice gravitace analogické fotonům - gravitony - v ní proto nevystupují.

Co se týče experimentů, není gravitace vůbec patrná ani v těch největších urychlovačích. Sjednocená teorie proto není potřebná pro výklad žádného dosud pozorovaného jevu a graviton také zatím nikdo nikde nepozoroval. Pro porozumění experimentálním skutečnostem jsou standardní model a obecná teorie relativity úplně dostatečné. Zatím je to spíše estetická potřeba harmonie a úplnosti, která teoretické fyziky už po mnoho desetiletí podněcuje, aby hledali jednotnou teorii čtyř základních interakcí, popřípadě kvantovou teorii gravitace. Taková teorie může nabýt fyzikálního významu tam, kde je gravitace velmi silná: v blízkosti černých děr, v centru galaxií, v raném vesmíru.

Při snahách o kvantovou teorii gravitace se nejprve zdálo rozumné považovat křivost prostoru - tj. jeho odchylku od plochého prostoru v každém místě - za dynamické pole na nezměnitelném, plochém pozadí. Kvantový formalismus by nám měl ukázat, jaká je energie těchto odchylek "zabalená" v gravitonech. Avšak gravitony jako balíčky energie působí zpětně na prostor a dále jej zakřivují. Jak lze matematicky dokázat, na rozdíl od jiných případů "samointerakce" není běžný formalismus kvantové teorie pole schopen tuto komplikaci vyřešit pro případ obecné teorie relativity. Výsledky běžné kvantové teorie pole jsou nepoužitelné, protože dávají fyzikálním veličinám nekonečné hodnoty. Nástroje kvantové fyziky, které jsou jindy velmi úspěšné, vyvolávají závažné problémy, jako jsou absurdní nekonečna, pravděpodobnosti větší než 1 ("jevy jistější než jisté") a další.

## **Kvantování prostoročasu**

Kvantová teorie a Einsteinova obecná teorie relativity byly každá zvlášť skvěle experimentálně potvrzeny - ale žádný pokus nezkoumal situaci, kdy obě teorie předpovídají významné efekty. Potíž tkví v tom, že ke kvantovým jevům dochází téměř výhradně v malých rozměrech,

zatímco účinky obecné teorie relativity se projevují při obrovských hmotnostech, takže je těžké spojit obě tyto mimořádné podmínky dohromady.

S touto mezerou v experimentálních údajích je spojen obrovský problém: Einsteinova obecná teorie relativity je veskrze klasická, tedy nekvantová. Pro logickou souvislost fyziky jako celku je potřebná teorie, která nějakým způsobem spojí kvantovou mechaniku s obecnou teorií relativity. Touto dlouho hledanou teorií je kvantová teorie gravitace. Protože se obecná teorie relativity zabývá geometrií časoprostoru, bude kvantová teorie gravitace navíc i kvantovou teorií časoprostoru.

Fyzici vyvinuli pozoruhodnou sbírku matematických postupů k přechodu od klasické teorie na kvantovou. Mnoho teoretických fyziků a matematiků pracovalo s využitím těchto technik v obecné teorii relativity. Rané výsledky přinášely zklamání. Podle výpočtů z 60. a 70. let se zdálo nemožné obě teorie úspěšně spojit. Vypadalo to, že je nutné požadovat něco zcela nového, například nové postuláty či pravidla, která nejsou ani v kvantové teorii ani v obecné teorii relativity, nebo nějaké nové částice či pole, případně zcela nové entity. Správné dodatky nebo nová matematická struktura by snad umožnily vyvinout teorii kvantového charakteru, která by úspěšně aproximovala obecně-relativistické chování v nekvantovém režimu. K zachování úspěšných předpovědí kvantové teorie a obecné teorie relativity bylo zapotřebí, aby se nové prvky celkové teorie projevovaly jen při experimentech v mimořádných podmínkách, kdy jsou silné jak účinky kvantové teorie tak obecné teorie relativity. V tomto směru byla vyzkoušena celá řada teorií, jako například tzv. teorie twistorů, nekomutativní geometrie a supergravitace.

## Planckova délka

Mezi nejdůležitější fyzikální konstanty patří nepochybně:

gravitační konstanta  $G = 6 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ ,

rychlost světla ve vakuu  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,

Planckova konstanta  $\hbar = 1 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .

Čtenář si může snadno ověřit, že součinem mocnin těchto konstant lze sestavit jedinou veličinu o rozměru délky

$$L_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^2}} \approx 10^{-35} \text{ m}, \quad (9.398)$$

což je Planckova délka, ke které jsme důsledněji dospěli v předchozím oddílu. M. Planck ji zavedl ve snaze dospět k přirozené soustavě jednotek. Později se však ukázalo, že tato veličina má význam nejmenší délky, o níž má smysl ještě hovořit. Ukázali jsme, že při Planckově délce naroste křivost natolik, že se body ocitnou uvnitř černé díry. Pokus o měření tak malých vzdáleností proto principiálně nedospěje k svému cíli. Představa o zakřiveném, ale spojitém prostoročase tak ztrácí smysl. Planckova délka je považována za veličinu, u níž končí platnost obecné teorie relativity a fyzikální procesy začnou být ovládány kvantovou teorií gravitace.

Na úrovni reality v Planckově škále existuje přesná a bohatá diskretní struktura. Tato vzdálenost je o 20 řádů menší, než jsme schopni detekovat v dnes nejlepších urychlovačích částic. V tomto měřítku Einsteinova obecná teorie relativity, která se zabývá vztahy prostoročasu, hmoty a energie, již neplatí, protože její veličiny nabývají nekonečných hodnot a její geometrie obsahuje singularity. Jak pronesl John Archibald Wheeler, obecná teorie relativity sama v sobě obsahuje semínko sebedestrukce - meze své platnosti. Toto omezení je na druhé straně výhodou, protože fyzikové se nemohou vyhnout hledání lepší a úplnější teorie pro zákony přírody na fundamentální úrovni reality. Fyzika potřebuje teorii kvantové gravitace, která by vysvětlila chování vesmíru na všech jeho úrovních, od kvarků až po kvasary. Proto teoretičtí fyzikové hledají novou "teorii všeho", která by obsahovala všechny fundamentální zákony přírody.

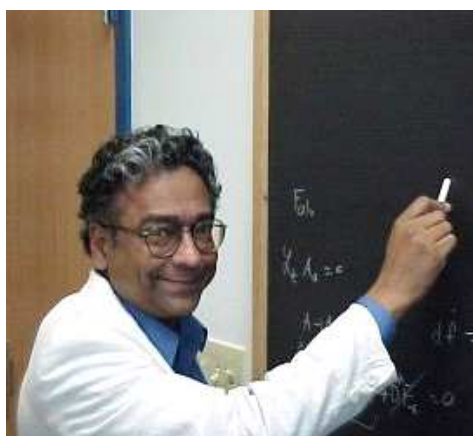
Mnoho pokusů v této oblasti učinili částicoví fyzikové, když předpokládali plochý prostoročas na pozadí. Matematik a fyzik Oxfordské university Roger Penrose tento postup kritizoval. Pokud z Einsteinovy krásné teorie odstraníme život tím, že použijeme lineární rovnice a plochý prostoročas, nemůžeme nic nového získat tím, že se teorii gravitace pokusíme spojit s kvantovou teorií. Rovnice popisující chování gravitace za kvantových podmínek nejsou řešitelné, přestože mají smysl a jsou konsistentní. Jsou jako palác, který nemá žádné dveře.

Relativističtí fyzikové většinou přistupují k tomuto problému z geometrického hlediska. John Archibald Wheeler již v 50. letech 20. století vyslovil hypotézu, že v nejmenším měřítku prostoročas není spojitý, ale spíše "pěnovitý". Je jasné, že kvantová gravitace vyžaduje zásadní změny našeho pohledu na vesmír. Naše představivost opět bude muset překročit hranice běžného vnímání světa kolem nás.

### Diskrétní povaha prostoru

Na počátku 80. let minulého století se Abhay Ashtekar z Pennsylvánské státní univerzity, Ted Jacobson z Marylandské univerzity a Carlo Rovelli, nyní působící na Marseilleské univerzitě, rozhodli znovu prověřit, zda je možné pomocí standardních metod souvisle spojit kvantovou mechaniku s obecnou teorií relativity. Věděli, že negativní výsledky ze 70. let mají důležitou mezeru. Při těchto výpočtech se předpokládalo, že geometrie prostoru je spojitá a hladká, bez ohledu na to, v jak malém rozměru ji zkoumáme - přesně tak se nahlíželo na hmotu, dokud nebyly objeveny atomy. Bylo zřejmé, že pokud je tento předpoklad nesprávný, nelze se spolehnout ani na staré výpočty.

Výše jmenovaní teoretici začali zkoumat, jak provádět výpočty bez toho, aby předpokládali, že je prostor hladký a spojitý. Zásadně nepředpokládali nic, co by se vymykalo experimentálně důkladně ověřeným principům obecné teorie relativity a kvantové teorie. V základech svých výpočtů se drželi dvou základních principů obecné teorie relativity.



**Abhay Ashtekar (1949)**



**Theodore A. Jacobson (1954)**



**Carlo Rovelli (1956)**

První z nich je známý jako nezávislost na pozadí. Tento princip říká, že geometrie časoprostoru není dána jednou provždy. Naopak, podle tohoto pravidla se vyvíjí a je dynamickou veličinou. K nalezení této geometrie je třeba vyřešit rovnice, které zahrnují všechny účinky hmoty a energie. Jak jsme se mohli přesvědčit v předchozím oddílu, teorie strun ve své dnešní podobě není nezávislá na pozadí; rovnice popisující struny jsou přizpůsobeny předem určenému klasickému (tedy nekvantovému) pozadí.

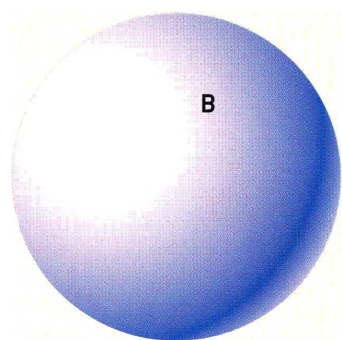
Druhý princip, známý pod názvem invariance diffeomorfismu se vztahuje k souřadnicím. K výpočtům v zakřiveném časoprostoru se používá systém souřadnic, zobecněný na čtyři rozměry zakřiveného časoprostoru. Tento princip říká, že rovnice teorie jsou stejné v libovolném dobře se chovajícím systému souřadnic, který si vybereme. Jde o velice silný princip, který byl hlavním vodítkem Einsteinovi při jeho původním vývoji obecné teorie relativity.

Pečlivým spojením těchto dvou principů za použití standardních metod kvantové mechaniky byl vyvinut matematický jazyk, který umožnil provést výpočty potřebné ke zjištění, zda je prostor spojitý či zda má diskrétní povahu. Tyto výpočty prozradily, že prostor je kvantován. Byly položeny základy nové teorie smyčkové kvantové gravitace, LQG (loop quantum gravity).

výpočty zopakovali mnozí fyzikové a matematici, kteří při tom použili řadu nejrůznějších metod. Během let se studium LQG stalo živým polem vědeckého výzkumu s přispěvateli z celého světa. Díky společnému úsilí byla získána důvěra v takový obraz časoprostoru, jaký bude popsán v následujících řádcích.

Teorie smyčkové kvantové gravitace je kvantovou teorií struktury časoprostoru v nejmenším měřítku jeho velikosti. Proto se k jejímu vysvětlení musíme zaměřit na to, co předvídá pro malou oblast nebo objem. Když se zabýváme kvantovou fyzikou, je nezbytné přesně specifikovat, jaké fyzikální veličiny se mají měřit. K tomuto účelu bereme v úvahu oblast, která je vyznačena svou hranicí  $B$  (viz obrázek 10.1). Tato hranice může mít materiální povahu, nebo může být určena samotnou geometrií časoprostoru, jako je tomu v případě horizontu černé díry.

Obr. 10.1

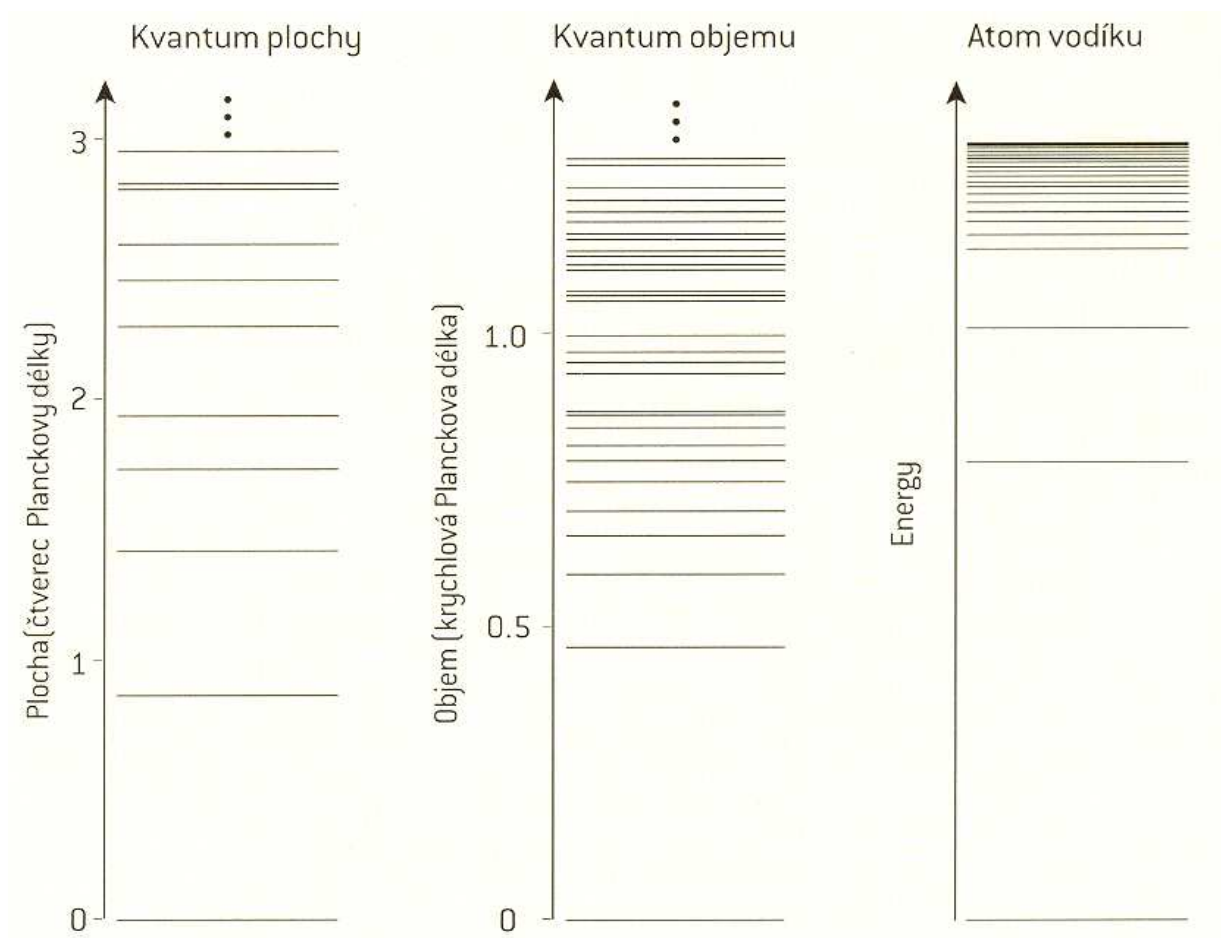


Ústřední předpověď LOG teorie se vztahuje k objemům a plochám.

Podle klasické nekvantové fyziky by mohl být objem vyjádřen libovolným kladným reálným číslem. Teorie LOG však říká, že existuje nenulový absolutní minimální objem cca.  $L_p^3 = 10^{-99} \text{ cm}^3$ , a tento objem omezuje soubor větších objemů na diskrétní řadu čísel. Podle této teorie je tedy v každém krychlovém centimetru prostoru  $10^{99}$  atomů objemu. Základní kvantum objemu je tak nepatrné, že v jednom krychlovém centimetru je těchto "atomů" objemu více, než kolik je krychlových centimetrů v celém viditelném vesmíru.

Podobně musí být plocha povrchu alespoň  $10^{-66} \text{ cm}^2$  (čtverec Planckovy délky), další plochy jsou pak jejím násobkem. Diskrétní spektrum povolených kvantových ploch a objemů (obr. 10.2 uprostřed) je značně podobné diskrétním kvantovým energetickým hladinám atomu vodíku (obr. 10.2 vpravo).

Obr. 10.2



## Kvantování prostoru

Z předchozí části víme, že někteří teoretičtí fyzici pracujících v oblasti elementárních částic zkouší vyvíjet a zobecňovat standardní model, aby tak dostali "teorii všeho" včetně gravitace - *teorii strun*. Stejně jako standardní kvantová teorie pole se teorie strun odehrává na daném prostorovém pozadí, většinou plochem, které má však ve všech variantách teorie více než čtyři rozměry. Relativisté se naopak snaží nejprve kvantovat samotnou obecnou teorii relativity. Zatímco teoretikové strun vyzbrojují prostor dodatečnými rozměry, aby získali konečné, dobře definované výsledky, tato skupina si z neúspěchu dosavadních snah o kvantování gravitace vyvodila jiné poučení. Podle nich by bylo rozštěpení prostoru na ploché pozadí a "dynamické vlnění" vzhledem k obecné teorii relativity krokem zpět. Nemůže proto jít



o dobré východisko ke kvantové teorii gravitace. Namísto toho se hledá kvantová teorie prostoru jako celku. Otázkou je, na jakém pozadí má být matematické lešení teorie vystavěno. Prvním návrhem byl již v šedesátých letech "prostor všech geometrií třírozměrného prostoru" (J. Wheeler, B. DeWitt). Kvantová teorie by měla předpovědět rozložení pravděpodobnosti, kde se právě nachází v tomto abstraktním prostoru reálný prostor, v němž žijeme. To by vedlo k časovému vývoji vesmíru nebo nějakého jeho podsystemu, např. galaxie, který by byl postižen jistým stupněm kvantové neurčitosti. Tak by se zároveň vytvořil most ke kvantové kosmologii. Bohužel je "superprostor trojrozměrných geometrií" nekonečněrozměrná obluda, a proto se na této cestě daleko nedospělo, dokud nepřišel A. Ashtekar s nápadem použít pro popis geometrie prostoru nové proměnné. Fyzikálně znamená výběr určitých proměnných pouze volbu jedné z mnoha možností (srovnatelnou s užitím různých soustav jednotek nebo různých souřadnic). Ale při výpočtu to působilo takové zjednodušení, že se během minulých desetiletí podařilo redukovat nekonečné rozměry a sestavit formálně konzistentní kvantovou teorii trojrozměrných geometrií. Je to kvantová teorie na varietě místo na prostoročase. Varieta je jak víme hladký souvislý útvar, původně bez metriky, takže pojem vzdálenosti dvou bodů zde neexistuje předem. Vzdálenost, obsah, objem, jsou ve zde spíše dynamické veličiny teorie, která předpovídá, s jakou pravděpodobností tyto veličiny nabývají jistých hodnot.

## **Kvantová pěna**

Skutečně se podařilo zkonstruovat kvantový operátor objemu a obsahu a důsledky jsou nedožírání. Teorie předpovídá, že možné hodnoty obsahu a objemu jsou v měřítku Planckovy délky diskrétní. Tak se dostáváme od obecné teorie relativity, již se řídí pohyb galaxií, k výpovědi o nejmenších možných velikostech. Jako jiné kvantové teorie pole generují diskrétní kvanta (totiž elementární částice) v prostoru, který je pokládán za spojitý, v kvantové teorii gravitace vzniknou "kvanta prostoru" na abstraktní, hladké varietě bez metrické struktury. Podle této teorie neexistují menší vzdálenosti než Planckova délka, mluví se proto o "kvantové pění". Tento výsledek, bude-li potvrzen, může mít velký význam i pro jiné kvantové teorie pole, ačkoliv vychází z kvantování

samotné obecné teorie relativity. Energie libovolných kvant je totiž nepřímou úměrná vlnové délce příslušného vlnového balíčku. Nemohou-li být vlnové délky menší než určitá dolní mez, protože kratší délka neexistuje, pak je energie omezena shora a kvanta s nekonečnou energií jsou předem vyloučena. Přestože problém odstranění těchto kvant byl většinou řešitelný i v jiných teoriích, vyžádal si matematicky ne zcela regulerní dodatečnou úpravu teorie - renormalizaci.

### Ashtekarovy proměnné

Na rozvinutí shora zmíněných myšlenek o diskrétní povaze prostoročasu, založil profesor Abhay Ashtekar, ředitel Střediska pro gravitační fyziku a geometrii na Pennsylvánské státní univerzitě, své výpočty kvantové gravitace. Teorie vznikla a rozvíjela se od počátku 80. a let 20. století zásluhou práce A. Ashtekara L. Smolina, C. Rovelliho, J. Baeze, Ch. Ishama, M. Bojowalda a dalších průkopníků. Ústřední pilíř mostu mezi obecnou teorií relativity a kvantovou teorií položil Abhay Ashtekar v roce 1986. Byl inspirován článkem o pohybu elektronu v gravitačním poli, který napsal Amitabha Sen, tehdy student na Univerzitě v Chicagu.



**John Carlos Baez (1961)**



**Christopher Isham (1966)**



**Amitabha Sen (1960)**

Ashtekar vyvinul nový geometrický jazyk, v němž bylo možno Einsteinovy rovnice pole formulovat odlišným, avšak matematicky ekvivalentním způsobem. Tento matematický aparát brzy získal všeobecné uznání. S jeho pomocí zformulované rovnice elektroslabé interakce a Maxwellovy rovnice byly snadněji použitelné a rovnice

gravitační interakce získaly příznivější tvar. Ashtekarův matematický aparát umožnil elegantním způsobem popsat body, oblasti, pohyb a síly bez dříve nezbytné metriky. Další veličiny již byly v učebnicích označovány jako "Ashtekarovy proměnné".

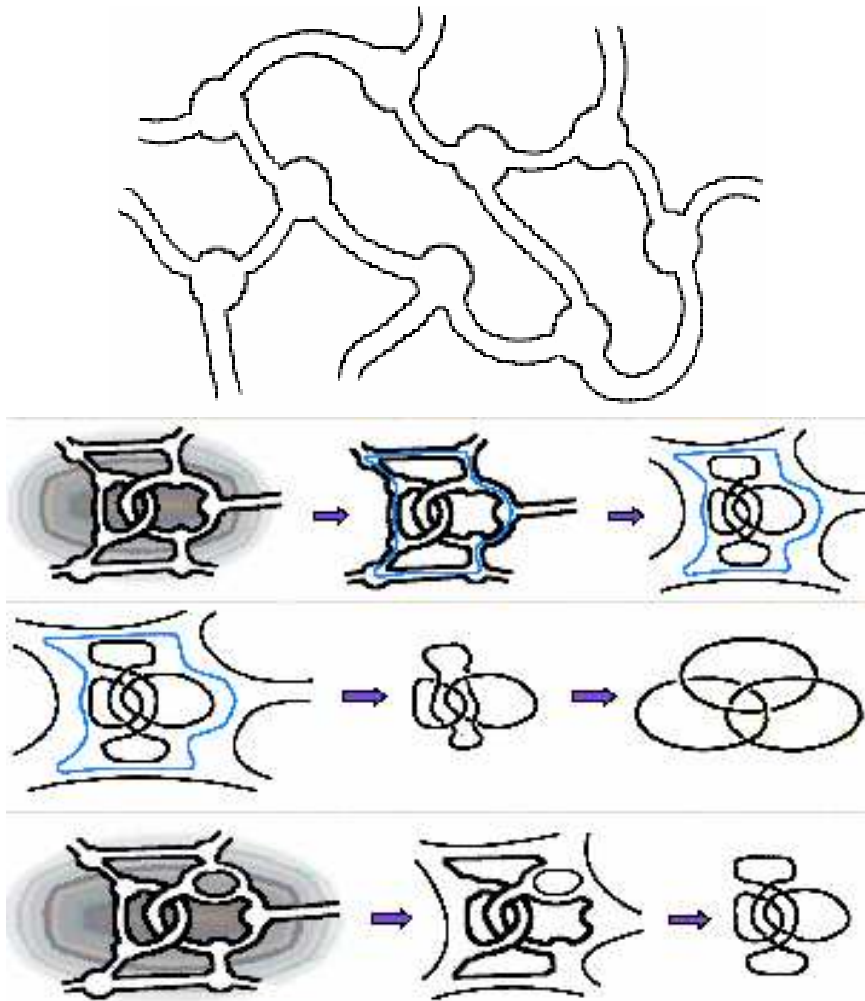
Matematici dobře vědí, že alternativou k uvažování o geometrii v jazyce polí křivosti v každém bodě prostoru je studium holonomie okolo smyček v prostoru. V zakřiveném prostoru si lze podél každé uzavřené smyčky přenést libovolný soubor vektorů, které během přenosu udržujeme kolineární s původními vektory. Po objetí smyčky je pro splynutí přenášených vektorů s původními obecně zapotřebí operace otočení, známá jako **holonomie smyčky**. Lze ji vypočítat pro každou smyčku v daném prostoru, čímž získáme tzv. **holonomii prostoru**. Po náročné a podrobné práci byla Ashtekarova verze Einsteinových rovnic pole rozšířena takovým způsobem, že tyto rovnice bylo možno kvantovat. Lee Smolin a italský fyzik Carlo Rovelli v letech 1988 až 1990 vykonali rozhodující průkopnickou práci a od roku 1992 oba začali spolupracovat s Ashtekarem. Na této úrovni popisu již prostor není homogenní, ale má jemnozrnnou strukturu. Skládá se z malých kroužků a je tvořen bezpočtem vzájemně propojených prstenců ("smyček") o průměru Planckovy délky. Takto se zrodila "smyčková kvantová gravitace" (*loop quantum gravity*).

Pokud bychom atom zvětšili na velikost naší Galaxie, pak kvantová smyčka by nebyla větší než lidská buňka. Proto není překvapením, že se nám prostoročas jeví zcela spojitý.

Klíčovým zdrojem inspirace byla tzv. Willsonova smyčka v mřížkové kalibrační teorii (lattice gauge theory) kvantové chromodynamiky, o níž budeme ještě podrobněji hovořit v závěrečné kapitole. Tuto teorii nezávisle na sobě vypracovali americký fyzik Kenneth Wilson a ruský fyzik Alexander Polyakov. Kvantová chromodynamika nepoužívá spojitý prostor, ale algebraickou strukturu svazu. Ve fyzice jsou takovými katastrofami nekonečné hodnoty veličin a absurdní matematické výrazy. K tomu však dochází pouze v kvantových teoriích, které jsou založeny na spojitém prostoročasu.

Po měsících nadšení se ovšem objevilo postupné zklamání. Matematika začala být nejasná a ve výpočtech se znovu objevily nekonečné hodnoty některých veličin. Smyčky proto nelze považovat za fundamentální reprezentaci reality. Mohou být užitečným popisem, podobně jako

Wheelerova kvantová pěna, avšak nepodařilo se dosáhnout správných matematických základů. V teoretické fyzice často se měnící paradigma vyžaduje nové matematické nástroje. Newtonova mechanika a teorie gravitace potřebovala diferenciální a integrální počet. Maxwellova elektrodynamika potřebovala parciální diferenciální rovnice, Einsteinova obecná teorie relativity potřebovala diferenciální geometrii a kvantová mechanika potřebovala Hilbertovy prostory a operátorovou algebru. Abhay Ashtekar proto nejdříve pomocí nových proměnných vyjádřil metriku 3-rozměrného prostoru pomocí formalismu  $SU(2)$  (nebo  $SO(3)$ ) symetrií kalibračního pole. Jeho spolupracovníci pak ukázali, že Hilbertův prostor kvantovaného  $SU(2)$  kalibračního pole lze generovat tzv. **spinovými sítěmi**, vycházejícími z *twistorové teorie* kterou navrhl nezávisle na Ashtekarových proměnných již o desetiletí dříve R. Penrose.



Obr. 10.3: Grafy twistovaných pásů vnořených do  $S^3$  topologie

V dalších pěti obtížných letech Ashtekar se svými spolupracovníky Jerzym Lewandowskim, Johnem Baezem, Chrisem Ishamem, Thomasem Thiemannem a dalšími společně vytvořili nástroje pro kvantovou geometrii, v níž důležitou roli sehraává teorie uzlů (*knot theory*). Hlavními pojmy jsou spinové sítě a grafy, jako spoje a průsečíky smyček, a spiny, které představují typ a počet těchto spojů. Ashtekarovi a jeho kolegům se podařilo odstranit nepříjemná nekonečna. Vzniklý matematický formalismus je natolik účinný, že jej lze použít nejen v obecné teorii relativity, ale také v teorii supergravitace. Podle Rovelliho se tak podařilo dosáhnout prvního úspěšného spojení obecné teorie relativity a kvantové teorie.



Jerzy Lewandowski (1948)



Thomas Thiemann (1967)

## Kanonické kvantování

Nejobvyklejší a nejpřímočařejší způsob přechodu od klasické teorie k teorii kvantové je metoda kanonického kvantování. Použitím této metody na mechaniku hmotných částic vzniká kvantová mechanika. Při takovém kvantování (nazývaném někdy "prvotní") se hmotným částicím přiřazují vlny pravděpodobnosti tvořící pole. Při použití kanonické metody na fyzikální pole (popř. mechaniku kontinua) se naopak objevují částice jako kvanta excitací těchto soustav - ať již se jedná o kvazičástice (fonony) existující jen na pozadí mechanického kontinua, nebo především o reálné částice (jako jsou fotony, fermiony a pod.)

existující na pozadí "vakua" příslušných polí. Tato metoda se označuje jako **druhotné kvantování**.

Při kvantování fyzikálního pole se zpravidla rovnice pole převedou na vlnovou rovnici, takže pole (v nějaké konečné oblasti prostoru) může být vyjádřeno jako **superpozice rovinných vln**; tím je pole popsáno diskrétní řadou proměnných - amplitud a frekvencí vln. Na základě těchto amplitud se definují kanonické proměnné pole - zobecněné souřadnice  $q_A$  a hybnosti  $p_A$ , pomocí nichž se vyjádří hamiltonián jako suma nezávislých členů tvaru jednorozměrného harmonického oscilátoru odpovídajícího jednotlivým vlnám s příslušnými vlnovými vektory a polarizacemi. Při kvantovém přechodu se kanonické proměnné (zobecněné souřadnice  $q_A$  a hybnosti  $p_A$ ) stávají operátory s komutační relací  $[\hat{P}_A, \hat{Q}_A] = -i\hbar$ . Použití těchto komutačních vztahů pro stanovení vlastních hodnot hamiltoniánu vede k **diskrétním** energetickým úrovním pole  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ .

Použití této kanonické metody kvantování na elektromagnetické pole je všeobecně známé (kvantová elektrodynamika) a vede k představě volného elektromagnetického pole jako souboru částic - **fotonů**, z nichž každý má energii  $\hbar\omega$  a hybnost  $\hbar\omega/c$ . Analogický postup kvantování pro slabé gravitační pole v rámci linearizované teorie, provedený v letech 1930-36, vede k existenci **gravitonů** jako kvant gravitačního pole. Gravitony jsou částice s nulovou klidovou hmotností a **spinem 2**, které jsou příčně polarizovány (realizují se pouze maximální spinové hodnoty +2 a -2). Pro obecný případ nelineární tenzorové teorie pak bylo kvantování rozpracováno Diracem.

Bylo vyvinuto několik variant kanonického kvantování gravitačního pole. Tyto modifikace se liší jednak způsobem zavedení času (jako čas se bere buď přímo souřadnice  $x^0$ , nebo čas vzhledem k určitým nerotujícím "normálním" vztažným soustavám), jednak volbou a vztahy mezi zobecněnými souřadnicemi a hybnostmi (vzhledem k singularitě lagrangiánů existují mezi  $p$  a  $q$  určité vazbové rovnice umožňující snížit počet nezávislých kanonických proměnných).

## Spinová síť a smyčková kvantová gravitace

Kanonické kvantování OTR začíná rozkladem prostoročasu na trojrozměrnou prostorovou varietu  $\Sigma$  a na čas tak, že struktura je  $\Sigma \times R$ . Pak se definují kanonické proměnné gravitačního pole na  $\Sigma$ .

Na první pohled jsou indukované metriky na  $\Sigma$  a kanonicky sdružené veličiny přirozené proměnné.

Sdružené impulsy jsou průměty kovariantní derivace normálového vektoru k  $\Sigma$  (vnější křivost vložené podvariety  $\Sigma$ ). V těchto proměnných je však hamiltonovská vazba velmi složitá a nazývá se Wheelerovou – DeWittovou rovnicí.

V Ashtekarově nových proměnných se vazba výrazně zjednoduší.

V tomto formalismu fungují složky konexe  $A(x)$  jako konfigurační proměnné a sdruženými impulsy jsou triády  $E(x)$ , tj. ortonormální báze v tečných prostorech bodů variety  $\Sigma$ .

Konfigurační proměnné jsou veličiny, které hrají roli gravitační síly v geodetické rovnici.

V dalším postupu jsou konfigurační a impulsové proměnné prohlášeny za operátory kanonickými komutačními relacemi.

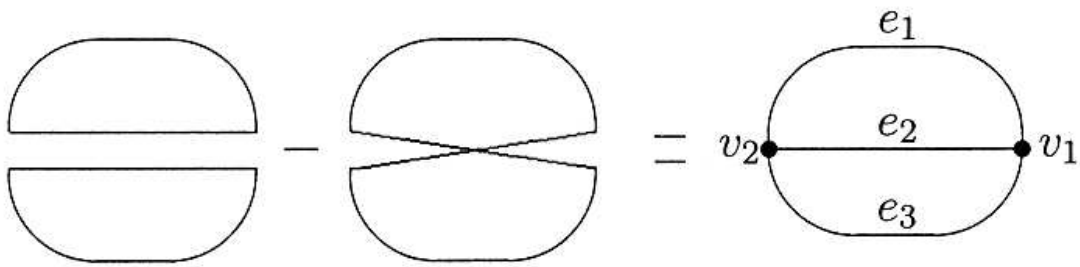
Kvantové stavy gravitačního pole v konexní reprezentaci jsou funkcionály konexe, formalismus ale vyžaduje regularizaci.

Výsledkem je, že fyzikální stavy nezávisí na konexi v každém bodě (tj. na poli  $A(x)$ ), nýbrž na operátoru paralelního přenosu vektorů po uzavřených křivkách (smyčkách)  $\gamma$ , tj. na holonomii  $h[A, \gamma]$ .

Z toho se vyvodil název smyčková kvantová gravitace.

Ortonormální báze v Hilbertově prostoru s vhodně definovaným skalárním součinem se skládá z funkcí holonomií křivek, které jsou spojené v uzavřené síti obsahující tzv. hrany a vrcholy.

Obr. 10.4 znázorňuje nejjednodušší případ tvorby spinové sítě.

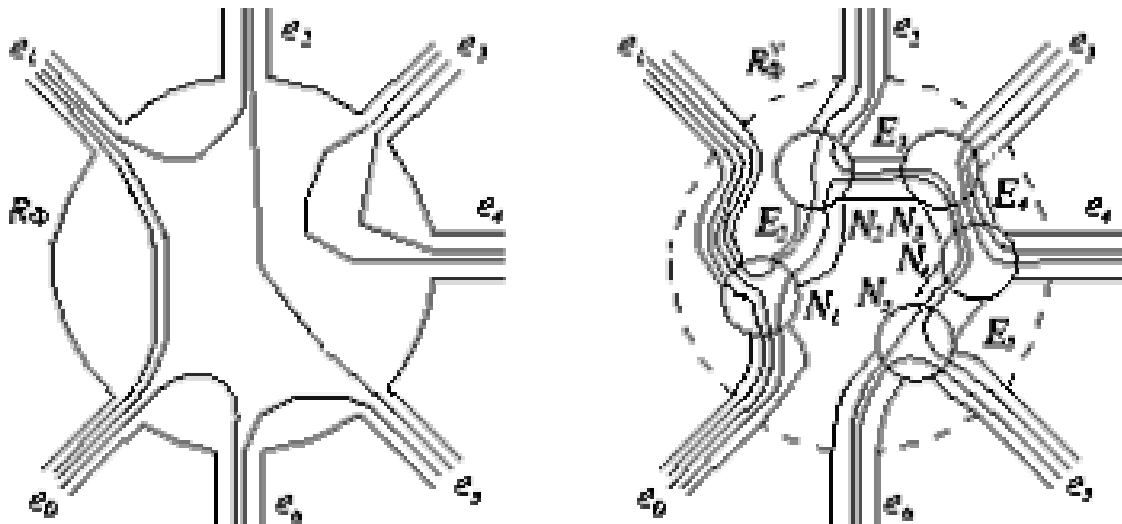


Obr. 10.4: Vytvoření sítě ze dvou smyček a osmičky. Výsledná síť má dva vrcholy  $v_i$  a tři hrany  $e_i$ .

Důvodem je lineární závislost mezi dvěma smyčkami a osmičkou. Tento konkrétní bázevý vektor je funkcí tří holonomií

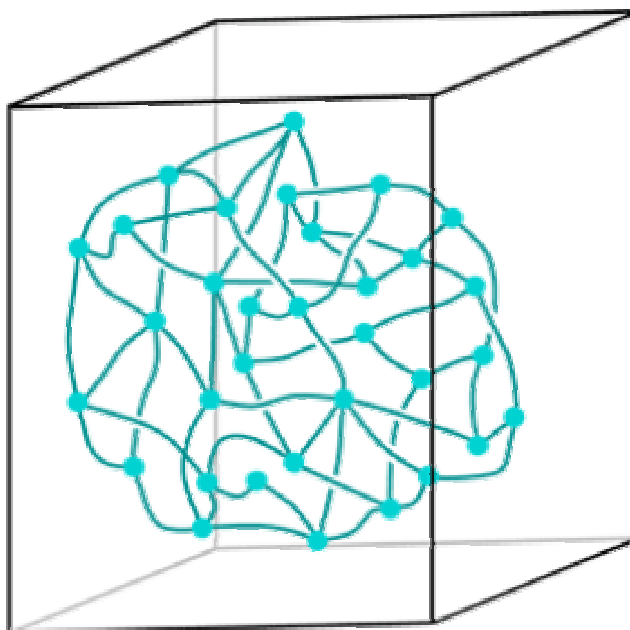
$$\psi(h[A, e_1], h[A, e_2], h[A, e_3]). \quad (9.399)$$

Velkou výhodou této konstrukce je skutečnost, že každý takový funkcionál, i když je síť rozsáhlá, má jen konečně mnoho argumentů (na rozdíl od nekonečného počtu stupňů volnosti pole  $A(x)$ ). Operátory holonomie působí na triády tak, že zachovávají ortonormalitu. Z toho důvodu se síť, na které je definovaný stavový funkcionál, nazývá **spinovou sítí**.



Obr. 10.5: Konstrukce virtuálních uzlů a virtuálních spojení mezi  $n$ -mocnými uzly, tvořících „barevnou“ spinovou síť. Rozdílné uzlové rozklady dávají odlišné ortogonální báze.





Obr. 10.6.: Spinová síť

V duchu OTR kvantuje tato procedura zároveň s gravitačním polem i geometrii prostoru.

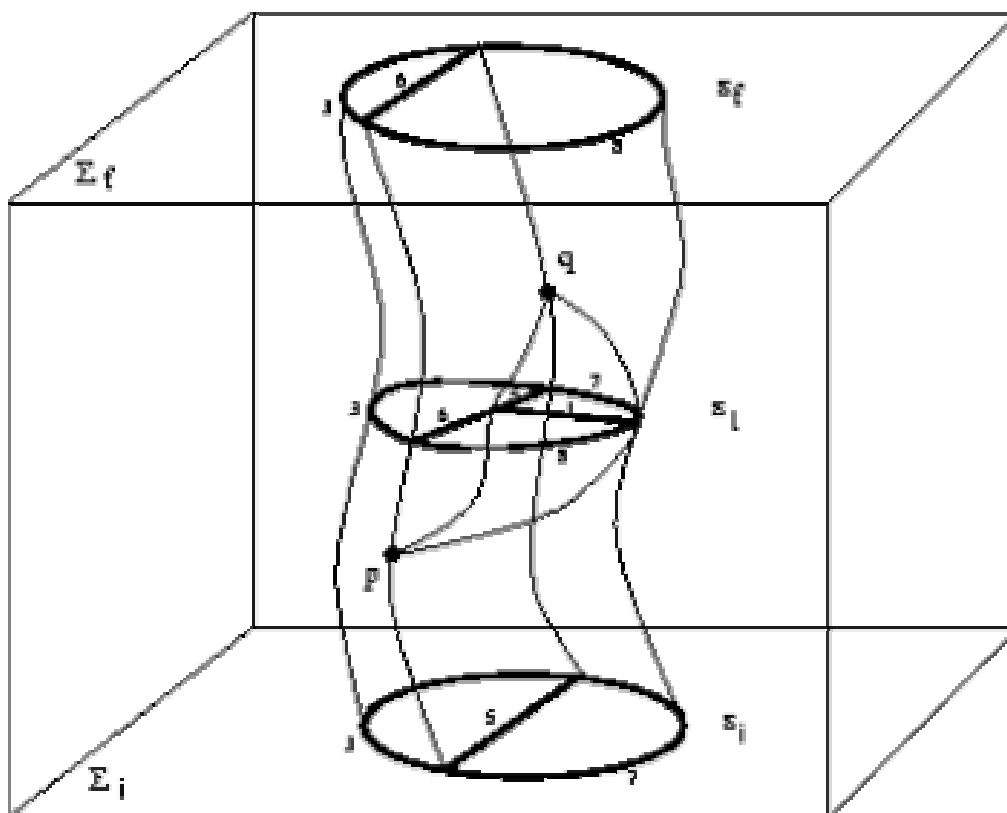
K tomu se dospěje následujícím způsobem: Z klasického výrazu pro objem trojrozměrné oblasti  $R$

$$V = \int_R d^3x \sqrt{|\det g^{(3)}|} \quad (9.400)$$

kde  $g^{(3)}$  je trojrozměrná indukovaná metrika, a z klasického výrazu pro obsah plochy  $G$

$$S = \int_G d^2x \sqrt{|\det g^{(2)}|} \quad (9.401)$$

kde  $g^{(2)}$  je dvojrozměrná indukovaná metrika, dostaneme pomocí triád operátory  $\hat{V}$  a  $\hat{S}$ .

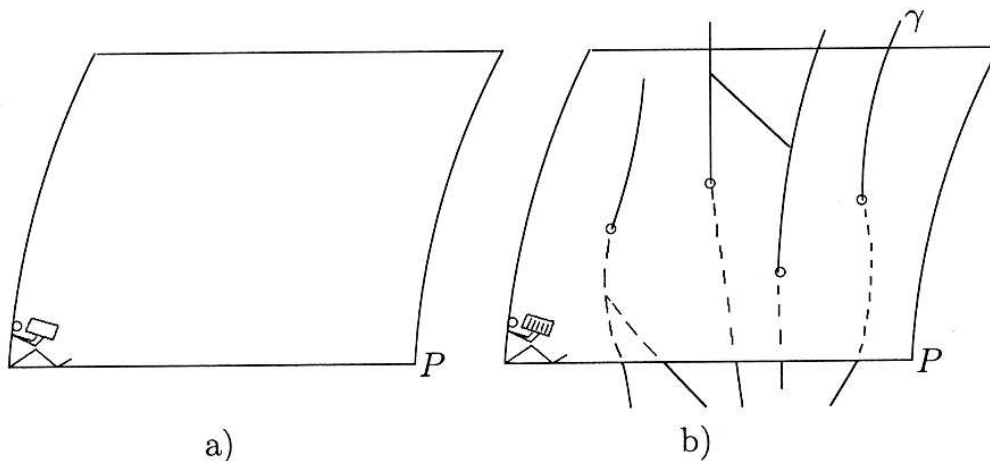


Obr- 10.7:: Obsah plochy je ve smyčkové kvantové gravitaci určen spojením topologické kvantové teorie pole s Crane-Yetterovým difeomorfně invariantním modelem kvantové teorie pole.

Základní veličiny jsou tedy reprezentovány kvantovými operátory. Konstrukce operátoru délky je v rámci teorie také možná.

Takové kvantování geometrie vede k tomu, že varieta  $\Sigma$  má význam pouhé pomocné konstrukce, nikoliv fyzikálního prostoru.

Teprve tehdy, když známe stav gravitačního pole ve tvaru superpozice funkcí spinových sítí, nabude oblast  $G$  vlastního obsahu plochy. Obr. 10.8 znázorňuje mechanismus vzniku plošného obsahu pro případ jednoho bazového stavového vektoru.

**Obr. 10.8:**

a) Plocha  $P$  s operátorem plošného obsahu.

b) Operátor počítá průnik grafů  $\gamma$  s plochou  $P$ .

Ploše  $P$  ve varietě  $\Sigma$  je přiřazen operátor, který „umí počítat“.

Když je stav gravitačního pole zadán funkcí na základě jednoho grafu, operátor sčítá příspěvky jednotlivých křivek, které protínají plochu  $P$ .

Z teorie vyplývá, že příspěvky jsou úměrné

$$l_P^2 \sqrt{j_i \left( j_i + \frac{1}{2} \right)}, \quad (9.402)$$

kde  $j_i$  je  $1/2$  počtu jednotlivých smyček podél  $i$ -té křivky.

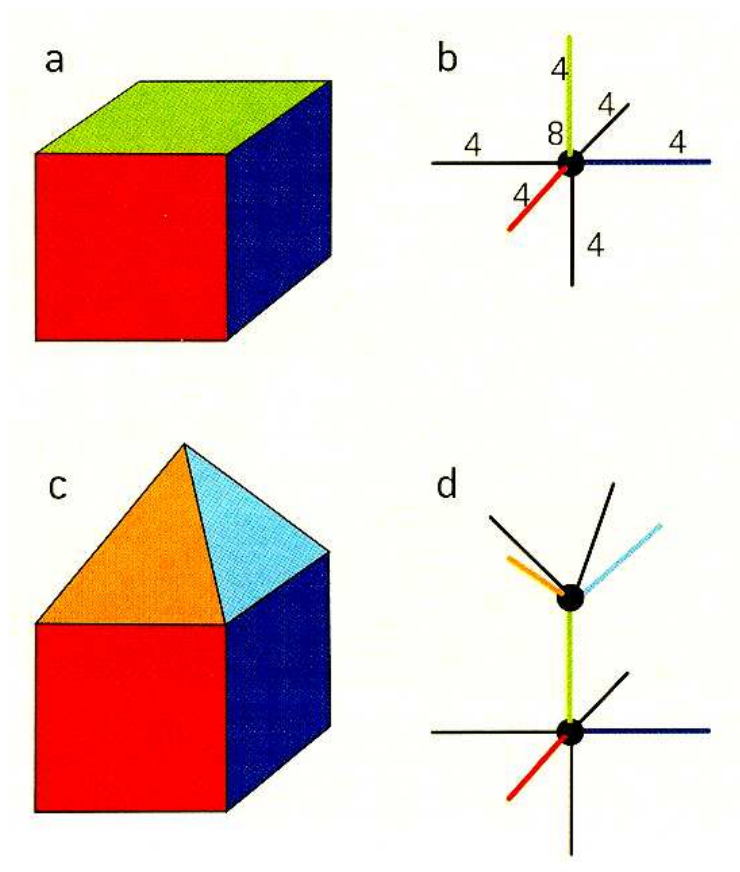
V případě objemu oblasti  $R$  se skládá očekávaná hodnota z příspěvků uzlů sítě uvnitř  $R$ .

Nejdůležitějším výsledkem je, že geometrie je diskrétní v měřítku Planckovy délky – v teorii existují jakési atomy prostoročasu.

Diagramy zvané spinové sítě, se využívají ke znázornění kvantových stavů prostoru v nepatrném měřítku. Některé z těchto diagramů odpovídají objemům mnohostěnů. Například krychle (a) na obr. 10.9 sestává z objemu uzavřeného šesti čtvercovými stěnami. Příslušná spinová síť (b) obsahuje tečku neboli uzel, který představuje objem, a šest čar, které představují příslušných šest stěn. Úplná spinová síť má u uzlu číslo, které udává objem krychle, a číslo u každé čáry udává plochu odpovídající stěny (c). Na našem obrázku činí objem uzlu 8 krychlových

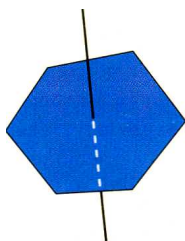
Planckových délek a plocha každé z šesti stěn činí čtyři čtvereční Planckovy délky. (Pravidla LQG omezují povolené objemy a plochy na specifická množství; na čarách a uzlech jsou povoleny jen určité kombinace čísel).

Obr. 10.9

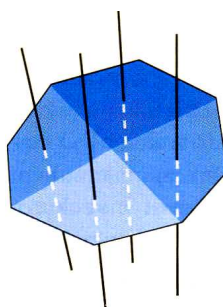


V případě jehlanu usazeného na horní stěně krychle by čára představující tuto plochu ve spinové síti spojovala uzel krychle s uzlem jehlanu (*d*). Čáry odpovídající čtyřem volným stěnám jehlanu a pěti volným stěnám krychle by vycházely z příslušných uzlů.

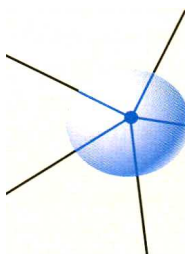
Obr. 10.10



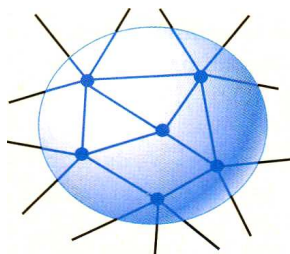
e) Jedno kvantum plochy



f) Větší plocha



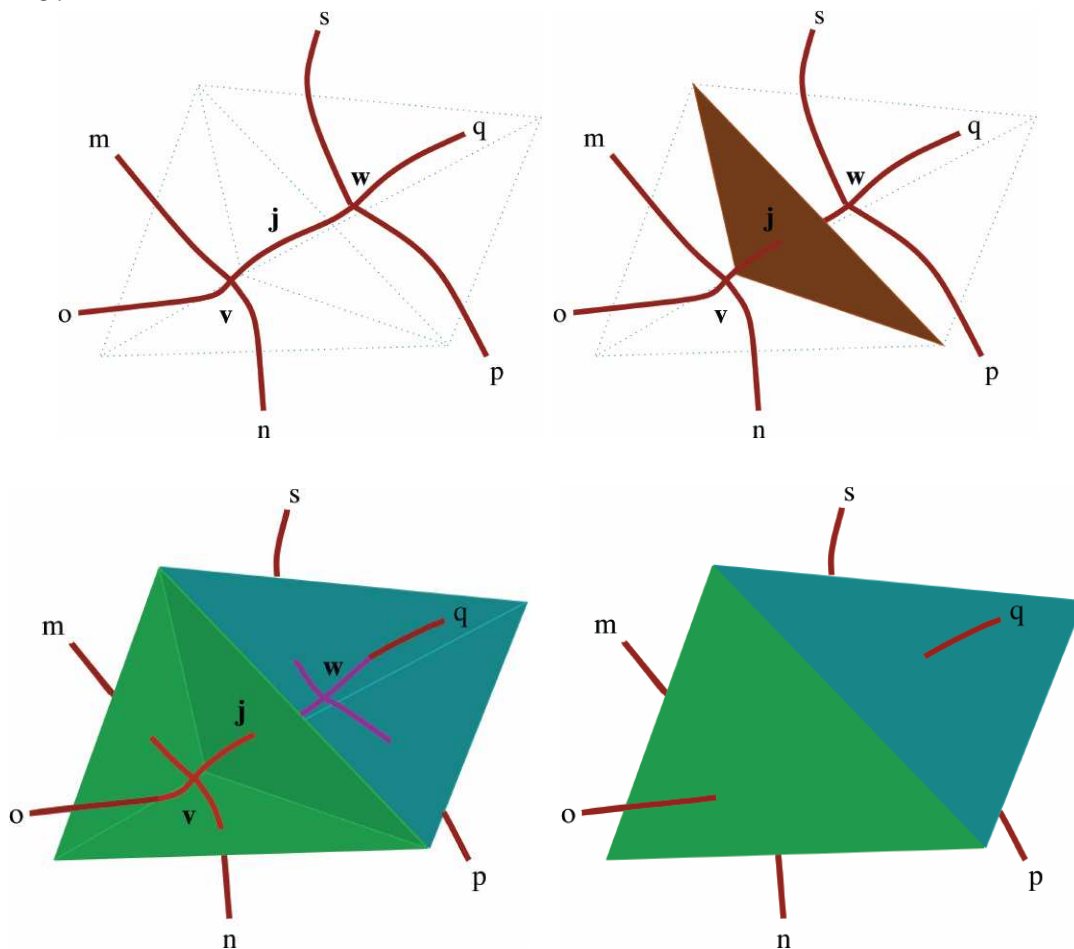
g) Jedno kvantum objemu



h) Větší objem

Obecně je ve spinové síti jedno kvantum plochy znázorněno jedinou čarou ( $e$ ), zatímco plochu složenou z mnoha kvant představuje mnoho čar ( $j$ ). Podobně je jediné kvantum objemu znázorněno jediným uzlem ( $g$ ), zatímco většímu objemu odpovídá více uzlů ( $h$ ).

Obr. 10.11



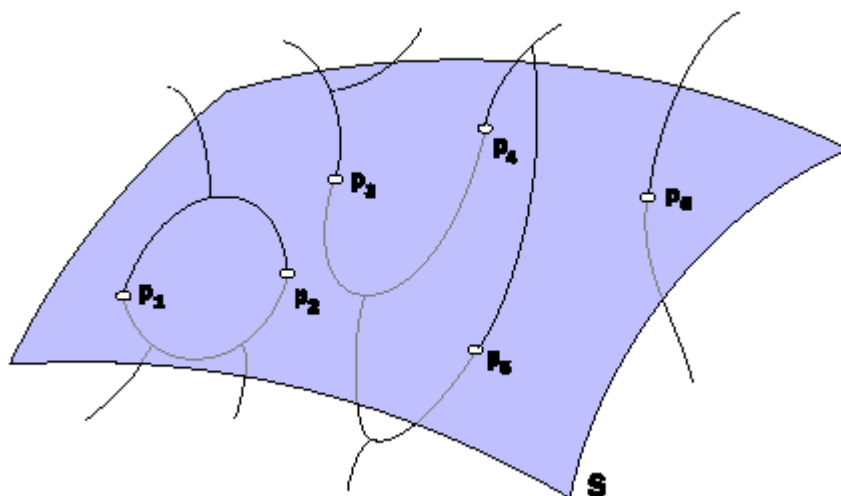
Spinová síť je tedy množina vrcholů (bodů) spolu se spojnicemi (hranami), které jsou označeny nějakou ireducibilní reprezentací grupy - v tomto případě  $SU(2)$  - a ve vrcholech jsou spojeny pomocí nějakých singletů  $SU(2)$ . Tato "kostra", vnořená do časoprostoru (avšak potenciálně existující nezávisle na něm), slouží jako model časoprostoru, který se tímto stává diskretním. Například dvourozměrný povrch nějaké plochy je koncentrován v průsečících této plochy s hranami spinové sítě, a každý průsečík zhruba řečeno přispívá celočíselným násobkem (přesněji  $\sqrt{j(j+1)}$ ) renormalizované Planckovy plochy.

Spinové sítě jsou fundamentálnějším pojmem než mnohostěny: každé uspořádání mnohostěnu může být znázorněno ve spinové síti, ale platné spinové sítě představují kombinace objemů a ploch, které nemohou být zakresleny jako mnohostěny. Takové spinové sítě bychom mohli najít v prostoru zakřiveném silným gravitačním polem, nebo v rámci kvantových fluktuací geometrie prostoru v Planckově měřítku.

### Vznik obsahu a objemu v kvantové geometrii

Obsah dvojrozměrné plochy  $S$  jakožto útvaru v třírozměrné varietě není definován. Fyzikální stav gravitačního pole je charakterizován spinovou sítí. Obsah plochy je určen stavem jako součet určitých výrazů, které jsou v tomto stavu přiřazeny hranám, přes všechny průsečíky hran sítě s danou plochou (na obrázku 10.12 jsou to průsečíky  $p_1, \dots, p_6$ ). V jiném stavu mohou být síti přiřazena čísla, počet průsečíků, a tedy i plošný obsah úplně jiný.

Obr. 10.12

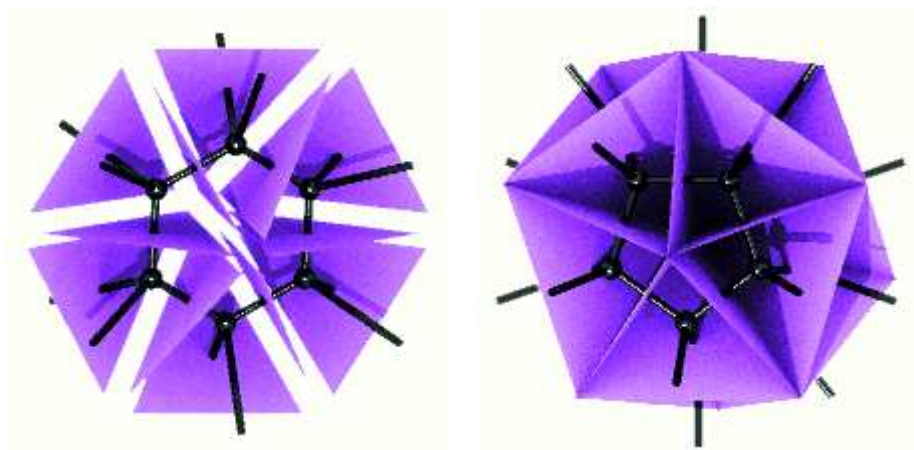


Co zjistíme při měření objemu oblasti? Jaké výsledky umožňuje jak kvantová teorie tak invariance diffeomorfismu? Pokud je geometrie časoprostoru spojitá, mělo by být výsledkem měření objemu jakkoli malé či velké oblasti kladné reálné číslo, které by se mohlo zcela libovolně přibližovat nulovému objemu. Je-li však geometrie zrnitá (diskrétní), pak by se měl výsledek měření skládat jen z diskrétní sady čísel a nemůže nabýt menší hodnoty, než jakou má nejmenší možný

objem. Tato otázka je podobná otázce, jakou energii mají elektrony, které obíhají kolem atomového jádra. Klasická mechanika předpokládá, že elektron může nabývat libovolných hodnot energie. Naproti tomu kvantová mechanika připouští výskyt jen určitých hodnot energie (energie mezi těmito hodnotami se nevyskytují) – viz obr. 10.2. Rozdíl je stejný jako mezi měřením něčeho, co spojitě plyne, jako voda v pojetí 19. století, a něčím, co se dá počítat, jako jsou atomy v této vodě.

Protože podle teorie LQG je i prostor složen z podobných "atomů", existuje jen omezený soubor čísel, která můžeme při měření objemu získat. Objem tak přichází v přesně vymezených kvantech. Prostor není spojitý, ale vyskytuje se jen ve specifických kvantovaných jednotkách plochy a objemu.

Obr. 10.13



Jak tyto kvantové stavy plochy a objemu vypadají? Skládá se prostor z mnoha malých krychliček nebo koulí? Není to tak jednoduché, můžeme však nakreslit grafy, které představují kvantové stavy objemu a plochy.

Abychom viděli, jak tyto diagramy fungují, představme si, že máme kus prostoru ve tvaru krychle, jak je ukázáno na obrázku 10.9. V našem obrázku jsme znázornili takovou krychli jako tečku s šesti vyčnívajícími čarami, které představují šest stěn krychle. K tečce potřebujeme připsat číslo, abychom upřesnili množství objemu, a na každou čáru napíšeme číslo, kterým specifikujeme velikost plochy, kterou daná čára představuje.

V dalším kroku předpokládejme, že na vrchní stěnu krychle postavíme čtyřboký jehlan, tedy útvar ve tvaru pyramidy. Tyto dva mnohostěny, sdílející společnou stěnu, budou vyznačeny jako dvě tečky (dva objemy)



spojené jednou z čar (společnou stěnou obou útvarů). Krychle má pět dalších stěn (dalších 5 vycházejících čar) a jehlanu zbývají ještě čtyři další stěny (další 4 vycházející čáry). Je zřejmé, o co složitější diagram bychom dostali, kdybychom ve svém příkladu pracovali i s jinými mnohostěny, než jen s krychlemi a jehlanami, přičemž každý objem by se stal bodem neboli uzlem a každá stěna povrchu mnohostěnu by byla znázorněna čarou, přičemž by tyto čáry spojovaly body stejně, jako společné stěny spojují mnohostěny v prostoru. Matematici nazývají takové diagramy grafy.

Nyní přišel čas, abychom ve své teorii opustili kresby mnohostěnů a zaměřili se pouze na grafy. Matematici, kteří popisují kvantové stavy objemu a plochy, nám poskytují soubor pravidel, která říkají, jak mohou být uzly a čáry spojené a jaká čísla jim lze v diagramu připsávat. Každý kvantový stav odpovídá jednomu diagramu a každý stav, který se řídí příslušnými pravidly, odpovídá jednomu kvantovému stavu. Teorie grafů je pohodlným zkráceným zápisem pro všechny možné kvantové stavy prostoru.

Grafy jsou lepším znázorněním kvantových stavů než mnohostěny. Zvláště proto, že některé grafy jsou pospojovány podivným způsobem, který nemůže být snadno převeden do úhledného obrázku s mnohostěny. Kupříkladu v zakřiveném prostoru nám v žádném obrázku nebudou mnohostěny na sebe přesně navazovat, ale graf můžeme pořád snadno nakreslit. Můžeme vzít graf a z něho spočítat, nakolik je prostor zakřiven. A protože právě zakřivení prostoru je tím, co vytváří gravitaci, formují právě takto grafy samotnou teorii gravitace.

Pro jednoduchost si často kreslíme grafy ve dvou rozměrech, ale je lepší si je představit v trojrozměrném prostoru, neboť právě ten znázorňují. Právě tady však na nás číhá koncepční past: čáry a uzly grafu nežijí v určitých místech prostoru. Každý graf je definován jen způsobem, jakým jsou jeho prvky pospojovány a jaký vztah mají k dobře definovaným hranicím, jako například k hranici B z obrázku 10.1. Spojitý trojrozměrný prostor, který v našich představách grafy vyplňují, jako samostatná entita *neexistuje*. Vše, co existuje, jsou spojnice a uzly grafu, ty *jsou* prostorem a způsob, jakým se spojují, definuje jeho geometrii.

Těmto grafům se říká spinové sítě, protože velké množství z nich se vztahuje k veličině zvané spin. Roger Penrose z Oxfordské univerzity na

počátku 60. let jako první vyslovil domněnku, že by spinové sítě mohly hrát roli v teoriích kvantové gravitace. V roce 1994 se ukázalo, že přesné výpočty jeho intuici potvrzují.

Jednotlivé uzly a hrany diagramů představují extrémně malé oblasti prostoru: uzel obvykle zaujímá objem jedné krychlové Planckovy délky, a hranou je obvykle ploška o obsahu jedné čtvereční Planckovy délky. V zásadě však neexistuje žádné omezení pro velikost a složitost spinových sítí. Kdybychom mohli nakreslit podrobný obrázek kvantového stavu našeho vesmíru, tedy geometrii jeho prostoru, jak je zakřivená a deformovaná gravitací galaxií, černých děr a všeho ostatního - dostali bychom obrovskou spinovou síť nepředstavitelné složitosti, která by obsahovala asi  $10^{184}$  uzlů.

Spinové sítě popisují geometrii prostoru. Ale co se vší hmotou a energií, která se v tomto prostoru nachází? Jak znázorníme částice a pole zaujímající polohy a oblasti v prostoru? Částice odpovídají určitým typům uzlů, které si znázorníme tak, že k některým uzlům přidáme navíc zvláštní značky. Pole, například elektromagnetické, jsou znázorněna přídatnými značkami na hranách grafu. Částice a pole pohybující se prostorem znázorňujeme těmito značkami, které se diskretními kroky pohybují v grafech.

Matematika vytvořená speciálně pro tento účel umožňuje nahlédnout za scénu téměř všech jevů ve vesmíru a může objasnit samotné základy naší reality. Pomocí smyčkové kvantové gravitace se Ashtekar přiblížil k naplnění Einsteinova snu a snad také k zodpovězení základních otázek fyziky, které se týkají záhad velkého třesku a černých děr.

Kvantová gravitace tedy přináší další revoluční pohled na vesmír: prostoročas je kvantován podobně jako hmota.

Otázka, proč se žádný objekt nemůže vtěsnat do polovičního objemu, než jaký má nejmenší buňka prostoru, z pohledu těchto "prostorových atomů" ztrácí význam. Vychází totiž z nesprávného předpokladu absolutního prostoru, v němž jsou umístěny všechny objekty od elementárních částic až po kupy galaxií. Prostor a čas však nejsou zcela fundamentálními entitami, ale jsou složeny ze základnějších struktur. Ashtekar přirovnává spinové sítě, matematicky popsané jako grafy, ke stavebnici z jednorozměrných vláken podobných polymerům. Pokud bychom mohli přírodu pozorovat s největším možným zvětšením, prostor a čas by se rozpustil a vystoupila by spinová síť, přesněji řečeno

kvantově mechanické superpozice všech možných konfigurací těchto entit. Mezi těmito grafy je "prázdkno". Spinové sítě neexistují v nějakém prostoru, ale samy prostor vytvářejí. Nejsou ničím jiným, než abstraktně definovanými vztahy, které určují, jak se spojují hrany dohromady a jak se vzájemně protínají.

Skutečnost, kdy prostor není homogenní, si lze demonstrovat na příkladu obrazu na plazmové obrazovce, který se rovněž skládá z malých pixelů, které z větší vzdálenosti nelze rozpoznat. Na jediné stránce této knihy by se mělo protínat  $10^{68}$  kvantových vláken.

Koncové body těchto otevřených grafů představují fermiony (tedy kvarky a leptony), z nichž je složena veškerá hmota, a Higgsovy bosony, které hmotě dávají její hmotnost. Bosony, které zprostředkovávají silové interakce mezi fermiony, jako fotony, vektorové bosony W a Z, gluony a gravitony, jsou projevem určitých excitovaných stavů spinové sítě, jako jsou změny "barvy" nebo váhy hran grafů. Podle Ashtekara něco představuje geometrii a něco jiného představuje pole. Hmota může existovat pouze tam, kde je geometrie excitována. Fyzikálně nemá smysl se ptát, co leží mezi hranami těchto grafů. Gravitony a další bosony nejsou fundamentálními entitami, ale pouze produktem spinových sítí. Naše obvyklá představa kauzality nemá ve spinových sítích žádný smysl. Dokonce čas je důsledkem variací excitovaných stavů a spojníc ve spinových sítích. V jistém smyslu tedy čas je stejnou iluzí jako prostor.

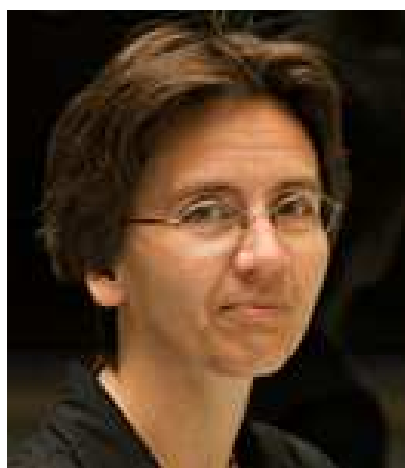
Celá říše reality pochází ze superpozic fluktuujícího pletiva spinových sítí na submikroskopické úrovni. My sami a všechno, co víme, jsou pouze obrazce ve spinových sítích.

## **Spinová pěna**

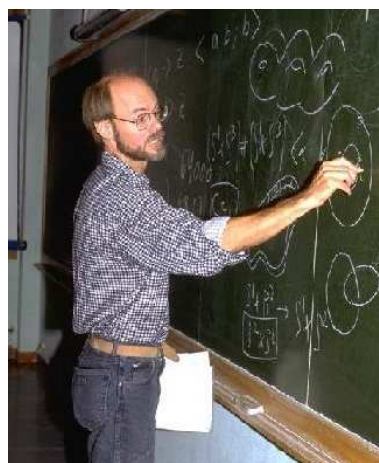
Další jednotící myšlenkou, je zdůraznění významu kauzality. Nejenže prostoročasová geometrie OTR určuje kauzální vztahy, platí to i naopak – kauzální vztahy mohou určovat geometrii prostoročasu, neboť většinu informací potřebných k rekonstrukci geometrie lze odvodit ze znalosti šíření světla. V dnešní době většina odborníků pracujících v oboru kvantové gravitace věří, že sama kauzalita je fundamentální vlastnost a to i tehdy, kdy už pojem klasického prostoru ztrácí smysl. Všechny zatím neúspěšnější přístupy ke kvantové gravitaci proto kombinují 3

základní principy: prostor je emergentní, jeho primární struktura je diskrétní a pro hlubší popis je klíčová kauzalita.

Se zatím nejúspěšnějším modelem tohoto typu přišli Renata Lollová a Jan Ambjørn v podobě modelu s tzv. **kauzální dynamickou triangulací**. Základní kauzální procesy jsou zde reprezentovány jednoduchými stavebními bloky, připomínajícími kostičky dětské stavebnice. Geometrie prostoročasu pak vzniká seskupování velkého množství těchto nepatrných dílků, z nichž každý představuje jeden elementární kauzální děj. Existuje přitom jen pár jednoduchých pravidel, podle nichž lze stavební bloky vrstvit na sebe a také jednoduchý vzorec, kterým lze následně určit kvantověmechanickou pravděpodobnost vzniklého modelu kvantovaného prostoročasu. Autorům se podařilo prokázat, že uvedený pozadově nezávislý model kvantové gravitace generuje klasický prostoročas se třemi prostorovými a jednou časovou dimenzí, který se vynoří z čistě kvantového světa s diskrétní avšak kauzální povahou. Ba co víc, podařilo se dokázat, že vypustíme-li předpoklad o mikroskopické platnosti kauzality, žádná klasická geometrie nevznikne.



**Renate Loll ( 1962 )**

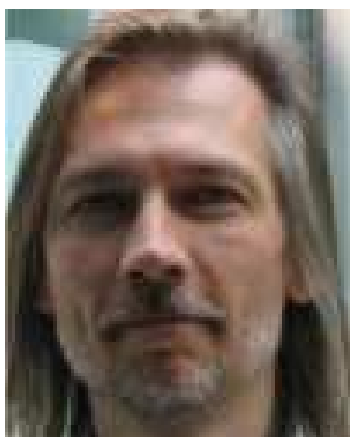


**Jan Ambjørn ( 1964 )**

Podle obecné teorie relativity se geometrie prostoru mění v čase. Záhyby a křivky prostoru se mění podle toho, jak se hmota a energie pohybuje, a samotným prostorem mohou procházet vlny stejně jako po hladině jezera. V LQG jsou tyto děje znázorněny změnami v grafech. Vyvíjejí se v čase řadou určitých "pohybů", při kterých se mění propojenost samotných grafů.

Když fyzici popisují jev v pojmech kvantové mechaniky, počítají pravděpodobnosti různých dějů. My budeme při popisu jevů s pomocí teorie LQG postupovat stejně, ať už půjde o částice a pole pohybující se ve spinových sítích nebo o samotnou geometrii prostoru, která se mění v čase. Thomas Thiemann z *Perimeter Institute for Theoretical Physics* ve Waterloo v Ontariu odvodil přesné kvantové pravděpodobnosti pro pohyby spinové sítě. Těmito pravděpodobnostmi je teorie zcela specifikována: máme k dispozici dobře definovaný postup výpočtu pravděpodobnosti jakéhokoli děje, ke kterému může dojít ve světě, řídicím se pravidly této teorie.

Einsteinova speciální a obecná teorie relativity spojují prostor a čas do jediného celku, zvaného časoprostor. Spinové sítě, které v teorii LQG představují prostor, se představě časoprostoru přizpůsobují přeměnou na tzv. "spinové pěny". Přidáním dalšího rozměru - času - hrany spinových sítí narostou do podoby dvojrozměrných povrchů, zatímco uzly se změní v hrany (viz obr. 10.16). Přejchody, kde se spinové sítě mění jsou nyní znázorněny uzly, kde se čáry stýkají v pění. Pěnový model časoprostoru navrhli poprvé Carlo Rovelli, Mike Reisenberger (Univerzita v Montevideu), John Barrett z Univerzity v Nottinghamu, Louis Crane z Kansaské státní univerzity, John Baez z Kalifornské univerzity a Fotini Makropoulou (Perimeter Theoretical Physics Institute).



**Michael Reisenberger (1969)**



**John W. Barrett (1970)**



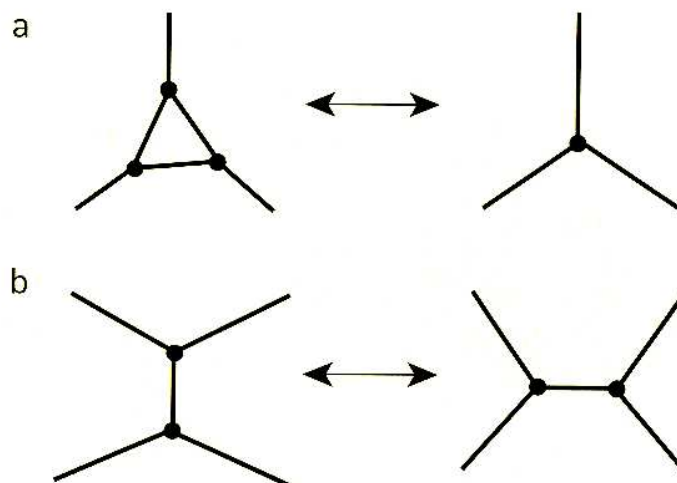
Louis Crane (1960)



Fotini G. Markopoulou-Kalamara (1971)

V časoprostorovém vnímání světa se momentka určitého času podobá řezu časoprostorem. Takovým řezem spinovou pěnou získáme spinovou síť. Protože je prostor definován jako diskretní geometrie spinové sítě - je čas určen sledem vymezených pohybů, které představují síť, jak je ukázáno na obrázku 10.17. Tímto způsobem se čas také stává diskretní veličinou.

Obr. 10.14

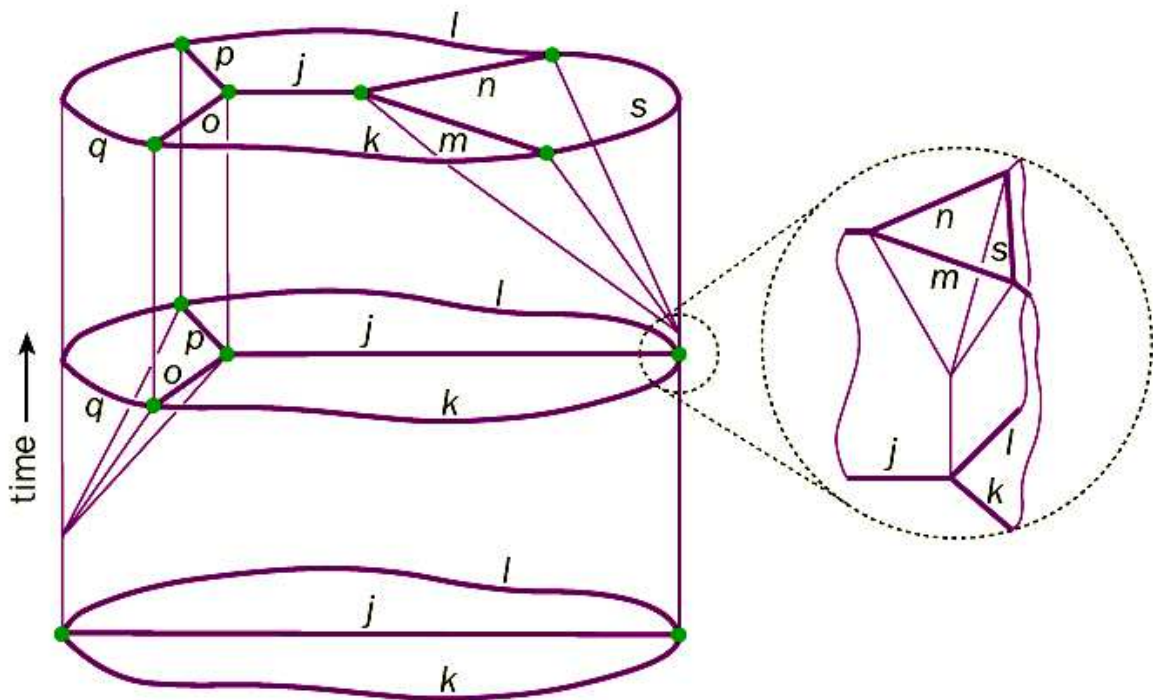


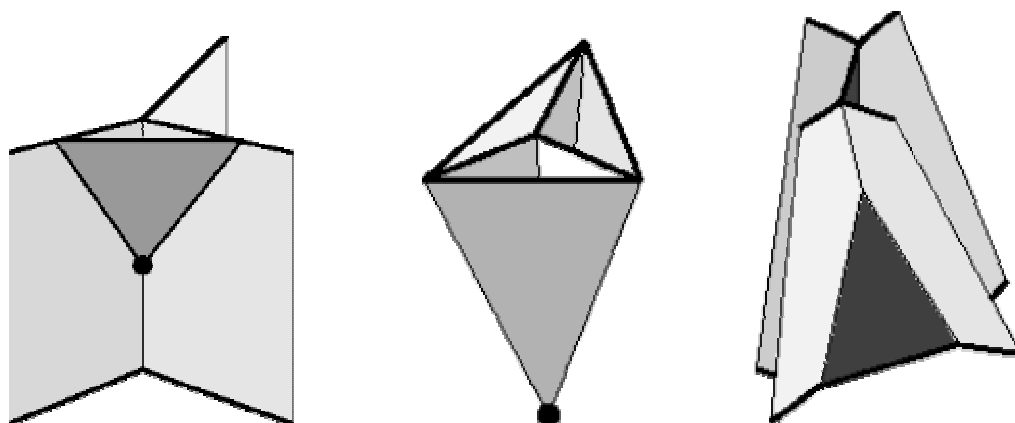
Změny v podobě prostoru, které nastávají například při průchodu hmoty nebo energie a s tím spojeném vysílání gravitačních vln, jsou znázorněny diskretními změnami uspořádání nebo pohyby spinové sítě. V případě (a) na obr. 10.14 se propojená skupina tří objemových kvant slévá v jediné kvantum objemu; může nastat i opačný děj. V případě (b) se dva objemy v prostoru oddělí a nadále jsou spojeny jiným způsobem. V případě mnohostěňů by se dva mnohostěny nejprve spojily splnutím

jedné stěny, aby se vzniklý útvar později znovu rozdělil, přičemž rovina štěpení by se nacházela jinde než rovina, ve které splynuly stěny původních dvou mnohostěňů. K takovým pohybům ve spinové síti dochází nejen při velkorozměrových změnách v geometrii prostoru, ale také při kvantových fluktuacích v Planckově měřítku. Přidáním časového rozměru ke spinové síti, dostaneme spinovou pěnu (obr. 10.16).

Provedeme-li v nějakém časovém okamžiku řez spinovou pěnou, získáme opět spinovou síť; řada řezů v různých okamžicích nám poskytne rámeček filmu zachycujícího evoluci spinové sítě v čase (obr. 10.17). Všimněte si ale, že evoluce, která se na první pohled zdá být hladkou a spojitou, je ve skutečnosti opravdu nespojitá. Všechny spinové sítě, které zahrnují červenou čáru představují navlas stejné uspořádání prostoru. Délka červené čáry nehraje roli - vše, co má pro geometrii význam, je způsob spojení čar a jaké číslo popisuje každou čáru. Právě to určuje, jak jsou kvanta objemu a plochy uspořádána a jak jsou velká.

Obr. 10.15





Obr- 10.16:: Každá spojnice ve spinové síti je asociována s kvantovým číslem plochy, zvaným „spin“, udávaným v jednotkách souvisejících s Planckovou délkou. Spinová síť typu (dole) se třemi spojnicemi nesoucími spiny  $j, k, l$  se vyvíjí ve dvou krocích do spinové sítě nesoucí spiny  $o, p, q, j, k, l, m, n, s$  (nahore).

Iničiační spinová síť má dva uzly, v nichž se potkávají 3 spojnice. Dále pak vertikální linie jejichž uzly definují hrany spinové pěny.

První vrchol – podobný vrcholu Feynmanova diagramu – leží v místě, kde se levá hrana rozvětjuje, v kterémžto bodě je formována intermediální spinová síť se spiny  $o, p, q, j, k, l$ . Hranu na pravém větvení v druhém interakčním uzlu jsme zvětšili.

Povrchy spinové pěny tvoří plochy opsané spojnicemi pohyblivými v čase. Toto rozšíření ukazuje, že k vrcholu jsou připojeny 4 hrany a 6 ploch s asociovanými spiny  $j, k, l, m, n, s$ . Spinová pěna jako taková, pak může být chápána coby nespojitý kvantový prostoročas.

Tak v diagramu na obr. 91 zůstává geometrie na prvních třech obrázcích konstantní, s třemi kvanty objemu a šesti kvanty povrchové plochy.

Potom se geometrie nespojitě mění v jedno kvantum objemu a tři kvanta povrchové plochy, jak ukazují poslední dva snímky. V tomto pojetí se

čas - definovaný spinovou pěnou - vyvíjí řadou náhlých diskretních pohybů, a nikoli spojitým tokem. Ačkoli nám připodobnění k filmovým

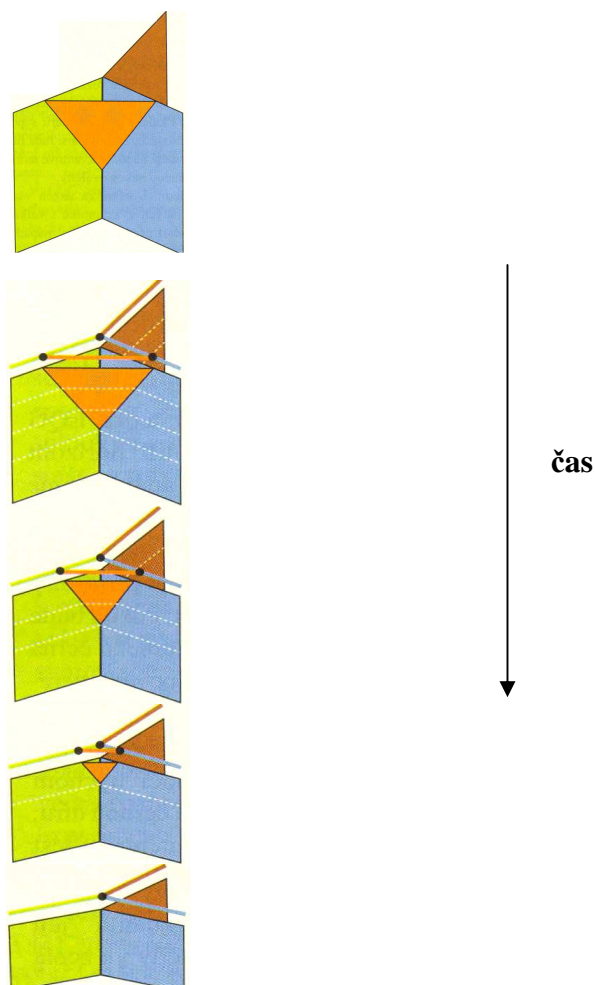
políčkům významně pomůže při vizualizaci celého jevu, mnohem přesnější cestou k chápání evoluce geometrie je představa diskretních

tiků hodin. Při jednom tiku je červené kvantum plochy přítomno, a v dalším tiku vlastně samo zmizení červeného kvanta tento "tik" definuje.

Doba, která uplyne mezi oběma "tiky" je přibližně rovna jednomu Planckovu času, tedy  $10^{-43}$  sekundy. Ale mezi oběma tiky žádný čas *neexistuje*: není tam žádné "mezi", stejně jako není žádná další vodní molekula mezi dvěma sousedícími molekulami vody.



Obr. 10.17



Ani čas tedy neubíhá jako voda v řece, nýbrž jako tikot hodin, přičemž každý "tik" trvá jednu Planckovu periodu:  $10^{-43}$  sekundy. Nebo přesněji, čas v našem vesmíru odměřuje tikot nesčetných hodin - v tom smyslu, že v každém místě spinové pěny, kde dochází ke kvantovému "pohybu", místní hodiny jednou "tiknou".

### Geometrie a topologie prostoročasu

Problém řešení Einsteinových rovnic se značně zjednoduší, když si předepíšeme vysoký stupeň **symetrie**; tím se sníží počet neznámých funkcí (metrických koeficientů) a rovnic. Skutečně, první přesné (a zároveň netriviální) řešení Einsteinových gravitačních rovnic bylo

nalezeno již v r.1916 K. Schwarzschildem pro sféricky symetrický případ.

Pro **centrálně symetrické** rozložení hmoty předpokládáme, že i vzbuzované gravitační pole bude centrálně symetrické. Nejprve budeme uvažovat případ, kdy centrálně symetrické rozložení hmoty se s časem nemění a gravitační pole je statické (níže však uvidíme, že tento předpoklad není nutný, výsledek bude stejný i pro nestatický případ při zachování centrální symetrie). Potom všechny fyzikální veličiny budou funkcí pouze vzdálenosti od středu symetrie. Dále budeme předpokládat, že prostoročas je **asymptoticky rovinný** - v dostatečně velkých vzdálenostech přechází postupně v rovinný Minkowskiho prostoročas.

Vztažnou soustavu v tomto případě je přirozené spojit se středem symetrie a použít sférické prostorové souřadnice  $(r, \vartheta, \varphi)$  s počátkem  $r = 0$  rovněž ve středu symetrie. Element prostoročasového intervalu lze potom hledat ve tvaru

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (9.403)$$

takže metrické koeficienty

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -A(r), \\ g_{rr} &= B(r), \\ g_{\vartheta\vartheta} &= r^2, \\ g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2\vartheta, \end{aligned} \quad (9.404)$$

jsou funkcemi pouze vzdálenosti  $r$  od středu symetrie. Souřadnice tohoto typu se nazývají **Schwarzschildovy souřadnice**. Jsou to v podstatě sférické souřadnice  $(r, \vartheta, \varphi)$  prostorové, kde radiální souřadnice  $r$  je definována jako vlastní délka příslušné kružnice (se středem v centru symetrie  $r = 0$ ) o poloměru  $r$  dělená  $2p$ , popř. odmocnina z vlastní plochy koule dělená  $4p$ . Souřadnicový čas  $t$  je měřen vzhledem ke vzdálené, asymptoticky rovinné oblasti.

Předpokládejme dále, že zdrojové těleso je prostorově omezené a sahá jen do vzdálenosti  $R$ ; při  $r > R$  je již vakuum ( $T^{ik} = 0$ ). Nejdříve budeme hledat tzv. **vnější řešení**, tj. metriku prostoročasu pro  $r > R$  vně tělesa - ve vakuu. Je tedy třeba řešit vakuové Einsteinovy rovnice  $R_{ik} = 0$ .

Christoffelovy koeficienty konexe v metrice ( 9.403 ) jsou

$$\begin{aligned}\Gamma_{rt}^t &= \frac{1}{2g_{tt}} \frac{d}{dr} g_{tt}, \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2g_{rr}} \frac{d}{dr} g_{tt}, \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2g_{rr}} \frac{d}{dr} g_{rr}, \\ \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -rg_{tt}, \\ \Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} &= \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} &= -\sin\vartheta\cos\vartheta, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -rg_{rr}\sin^2\vartheta, \\ \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} &= \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta},\end{aligned}\tag{ 9.405 }$$

Einsteinovy rovnice  $R_{ik} = 0$  pak po úpravě dávají jen dvě nezávislé diferenciální rovnice

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} g_{tt} &= \frac{1}{r} g_{tt} (1 + g_{rr}), \\ \frac{d}{dr} g_{rr} &= -\frac{1}{r} g_{rr} (1 + g_{rr}),\end{aligned}\tag{ 9.406 }$$

které mají řešení

$$g_{tt} = C_1 \left( 1 + \frac{C_2}{r} \right),$$

$$g_{rr} = \left( 1 + \frac{C_2}{r} \right) - 1,$$
( 9.407 )

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty. Konstantu  $C_1$  volíme měřítkem škály časové souřadnice  $t$  (transformací  $t = C_1 \cdot t$  se konstanty  $C_1$  zbavíme). Z limitního přechodu k Newtonovu zákonu ( $g_{tt} \sim (1 - M/r)$  pro  $r \rightarrow \infty$ ) dostáváme, že konstanta  $C_2$  musí být rovna  $-2M$ , kde  $M$  je hmotnost zdrojového tělesa (tj. celková hmotnost uzavřená v kouli o poloměru  $r$  při  $r \rightarrow \infty$ ). Dostáváme tak **přesné řešení** Einsteinových rovnic ve vakuu pro sféricky symetrické gravitační pole; v této tzv. **Schwarzschildově geometrii** má element prostoročasového intervalu tvar

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$
( 9.408 )

v geometrodynamických jednotkách; v běžných jednotkách je to

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$
( 9.409 )

Zatím jsme uvažovali statický případ a předpokládali, že gravitační pole bude statické. Kdybychom tento předpoklad vypustili a připustili možnost závislosti metrických koeficientů ( 9.404 ) na čase při zachování sférické symetrie, tj.  $g_{tt} = -g_{tt}(r,t)$ ,  $g_{rr} = g_{rr}(r,t)$ , z Einsteinových rovnic  $R_{ik} = 0$  dostaneme po úpravě, že

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{rr} = 0$$
( 9.410 )

(takže  $g_{rr}$  nezávisí na čase) a  $g_{tt} = f(t)/g_{rr}$ , kde  $f(t)$  je funkce pouze času. Protože pro  $r \rightarrow \infty$  přechází vyšetřovaná metrika v metriku

Minkowského, kde je  $g_{tt} = -1$  a  $g_{rr} = 1$ , musí být  $f(t) = \text{const.}$  a na čase tedy nezávisí ani  $g_{tt}$ . Dospíváme tak k výsledku, že centrálně symetrické gravitační pole ve vakuu musí být **automaticky statické**, a to i tehdy, kdyby budící těleso např. radiálně pulzovalo (ovšem při zachování přesné sférické symetrie. Získané výsledky můžeme shrnout do následujícího tvrzení:

**Teorém 3.3** (Schwarzschildova-Birkhoffova věta)

V asymptoticky rovinném prostoročase je centrálně symetrické gravitační pole ve vakuu popsáno Schwarzschildovou geometrií s metrickou formou ( 9.408 ) ve Schwarzschildových souřadnicích. Toto pole je tedy **statické** a je určeno jen jediným parametrem - celkovou hmotností  $M$ .

Tento poznatek je velmi důležitý při studiu **gravitačního kolapsu** a vlastností **černých děr** - je to vlastně speciální případ teorému "**černá díra nemá vlasy**".



**George David Birkhoff (1884 – 1944)**

Rozeberme si vlastnosti Schwarzschildovy geometrie; protože nás bude zajímat celé Schwarzschildovo vnější řešení, budeme předpokládat, že budící hmota je soustředěna ve středu  $r = 0$  a všude jinde je vakuum. Podíváme-li se na prostoročasový element Schwarzschildovy geometrie ( 9.408 ), je na první pohled vidět, že není všude regulární. Při  $r \rightarrow 2M$  časová složka metrického tenzoru  $g_{tt} \rightarrow 0$  a prostorová radiální složka  $r \rightarrow \infty$ . Poloměr

$$r_g = 2M \equiv \frac{2GM}{c^2} \quad (9.411)$$

se nazývá **gravitační** neboli **Schwarzschildův poloměr** a příslušná sféra  $r = r_g = 2M$  **Schwarzschildova sféra**. Metrika ( 9.408 ) je samozřejmě singulární rovněž pro  $r = 0$ . Abychom si vyjasnili povahu těchto "singularit" Schwarzschildovy metriky (a uvidíme, že mezi oběma případy je principiální rozdíl), podívejme se nejprve na vlastnosti pohybu testovacích částic ve Schwarzschildově prostoročasu. Pohyb volné testovací částice ve Schwarzschildově poli je dán rovnicí geodetiky ( 1.35 )

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0, \quad (9.412)$$

kde koeficienty konexe  $G_{kl}^i$  vypočítáme ze složek metrického tenzoru v ( 9.408 ):

$$\begin{aligned} \Gamma_{rt}^t &= \Gamma_{rr}^r = \frac{M}{r^2} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}, \\ \Gamma_{tt}^r &= -\frac{M}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right), \\ \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \frac{-r}{1 - \frac{2M}{r}}, \end{aligned} \quad (9.413)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi = 0,$$

ostatní složky jsou buď s nimi symetrické nebo jsou rovny nule. Sférická symetrie nám umožňuje pro rovinu pohybu položit  $\vartheta = \pi/2$  (sledovat pohyb v ekvatoriální rovině), čímž rovnice pro souřadnici  $\vartheta$  odpadá. Zbývající rovnice jsou

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{2M}{r^2} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{M}{r^2} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (9.414)$$

Vydělení první rovnice  $dt/d\tau$  dá

$$\frac{\frac{dt^2}{d\tau^2}}{\frac{dt}{d\tau}} + \frac{\frac{2M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{dr}{d\tau} = 0, \quad (9.415)$$

odkud integrací plyne

$$\ln \frac{dt}{d\tau} + \ln \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \text{const.} \quad (9.416)$$

neboli

$$d\tau = K \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt \quad (9.417)$$

kde integrační konstanta  $K$  souvisí s rychlostí částice (viz níže).

Analogická úprava druhé rovnice dává

$$\ln \frac{d\varphi}{d\tau} + 2 \ln r = \text{const.}, \quad (9.418)$$

z čehož dostaneme rovnici

$$L \equiv r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \text{const.} \quad (9.419)$$

vyjadřující zákon zachování momentu hybnosti  $L$ . Z třetí rovnice ( 9.414 ) pak dostaneme

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{K^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad ( 9.420 )$$

Mějme nyní částici padající radiálně ve Schwarzschildově poli ve směru ke středu  $r = 0$ . V rovnici ( 9.420 ) bude nyní

$$L = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \quad ( 9.421 )$$

takže

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{K^2} + 2\frac{M}{r} - 1 \quad ( 9.422 )$$

V limitě  $r \rightarrow \infty$  dostáváme

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{K^2} - 1 \quad ( 9.423 )$$

takže  $1/K^2 - 1$  je rovno čtverci vlastní rychlosti  $v_\infty$ , kterou by měla částice v nekonečně velké vzdálenosti od středu. Tedy

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = v_\infty^2 + \frac{2M}{r} \quad ( 9.424 )$$

což je shodou okolností stejný výsledek jako v Newtonově teorii. Z této rovnice můžeme vypočítat interval vlastního času  $\tau$ , který potřebuje částice aby se dostala z nějaké (konečné) vzdálenosti  $r = r_2$  do vzdálenosti  $r = r_1$  od středu:



$$\Delta\tau = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{v^2 + \frac{2M}{r}}}$$

$$= \frac{1}{v_\infty} \left[ \sqrt{r_2^2 + \frac{2r_2M}{v_\infty^2}} - \sqrt{r_1^2 + \frac{2r_1M}{v_\infty^2}} - \frac{2M}{v_\infty^2} \ln \frac{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_2 + \frac{2M}{v_\infty^2}}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_1 + \frac{2M}{v_\infty^2}}} \right]$$

( 9.425 )

Tento interval vlastního času je vždy **konečný**, a to i pro  $r_1 = 0$ . Tedy volně padající testovací částice dosáhne jak "kritického" poloměru  $r = 2M$ , tak dokonce i bodu  $r = 0$ , za konečný vlastní čas.

Abychom stanovili tomu odpovídající interval souřadnicového času  $t$  (který je vlastním časem pozorovatele v nekonečnu), použijeme rovnice ( 9.420 ) a ( 9.417 ), což dává:

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^2 - K^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^3$$

( 9.426 )

Limitní přechod  $r \rightarrow \infty$  ukazuje, že  $1 - K^2$  zde má význam souřadnicové rychlosti  $v_\infty$  v nekonečnu. Interval souřadnicového času potřebného pro pohyb ze vzdálenosti  $r_2$  do vzdálenosti  $r_1$  je tedy roven

$$\Delta t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \sqrt{1 - K \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ \frac{2\sqrt{r^3}}{3} + 4M\sqrt{r} + \sqrt{(2M)^3} \ln \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}} \right]_{r_1}^{r_2}$$

( 9.427 )

pro nerelativistické částice  $1 - K^2 = v_\infty^2 \rightarrow 0$

$$\Delta t = r_2 - r_1 + 2M \ln \frac{r_2 - 2M}{r_1 - 2M} \quad (9.428)$$

pro relativistické částice  $1 - K^2 = v_\infty^2 \rightarrow 1$ . Interval souřadnicového času potřebného k dosažení bodu  $r = r_1$  se blíží nekonečnu při  $r_1 \rightarrow 2M$ .

Přicházíme tedy k poznatku, že z hlediska vnějšího pozorovatele se každá částice při přiblížení k poloměru  $r = 2M$  zpomaluje a potřebuje k jeho dosažení **nekonečně dlouhý čas**. Naproti tomu z hlediska pozorovatele padajícího spolu s částicí je poloměru  $r = 2M$  dosaženo za **konečný interval vlastního času**, tímto místem částice volně projde a posléze za konečný vlastní čas dosáhne středu  $r = 0$ . Vypočítáme-li na základě koeficientů konexe (9.413) komponenty Riemannova tenzoru křivosti ve Schwarzschildově prostoročase a přetransformujeme je do vztažné soustavy padajícího pozorovatele, budou (ty z nich, jež jsou nenulové) úměrné  $M/r^3$ , např.

$$R_{\partial\varphi\partial\varphi} = -R_{trtr} = \frac{2M}{r^3}, \quad (9.429)$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = R_{t\varphi t\varphi} = -R_{r\partial r\partial} = -R_{r\varphi r\varphi} = \frac{M}{r^3},$$

takže na Schwarzschildově sféře dosahují hodnot řádu  $1/M^2$ ; podobně skalární invarianty (např.  $R = R_{iklm}R_{iklm} = 48M^2/r^6$ ) tenzoru křivosti, které nezávisí na souřadné soustavě. Křivost prostoročasu, a tedy i gradienty gravitačních sil (slapové síly), jsou na Schwarzschildově sféře konečné (a tím menší, čím je hmotnostní parametr  $M$  větší).

Dospíváme tak k závěru, že singulární chování Schwarzschildova prostoročasového elementu (9.408) pro  $r = 2M$  nemá svůj původ v singulárním charakteru geometrie prostoročasu na Schwarzschildově sféře, ale je způsobeno použitými Schwarzschildovými souřadnicemi, které se zde nehodí. Přejdem k jiné vhodné vztažné soustavě, např. k soustavě spojené s volně padajícími testovacími částicemi, tato pseudosingularita na Schwarzschildově sféře zmizí.

Geometrie samotného prostoročasu je na Schwarzschildově sféře zcela regulární, pozorovatel může přes Schwarzschildovu sféru volně projít během konečného intervalu vlastního času, nezjistí zde lokálně ani nic zvláštního a bude pokračovat dále ve svém pohybu. Zvláštnost prostoročasové geometrie na Schwarzschildově sféře nespočívá tedy v nějakých nenormálních lokálních vlastnostech, ale jak uvidíme dále, má význačnou globální vlastnost - je horizontem událostí.

Jinak je to s druhým singulárním místem v metrice ( 9.408 ) - bodem  $r = 0$ . Zde jak složky tenzoru křivosti ( 9.429 ), tak i jeho skalární invarianty dosahují nekonečných hodnot, jsou zde tedy nekonečně velké gradienty gravitačních sil. Částice, která se dostane do bodu  $r = 0$  již ve svém pohybu nemůže pokračovat dále, je těmito nekonečnými slapovými silami rozdrčena, doslova přestane existovat v rámci daného prostoročasu. Zde se jedná o skutečnou, **fyzikální singularitu** geometrie prostoročasu, kterou nelze odstranit žádnou volbou vztažné soustavy.

Souřadnicovou rychlost  $c_r$  světla v radiálním směru dostaneme, jestliže ve výrazu pro prostoročasový interval ( 9.408 ) položíme  $ds^2 = 0$  při  $d\varphi = d\vartheta = 0$

$$c_r = \left. \frac{dr}{dt} \right|_{ds=0} = 1 - \frac{2M}{r} \quad ( 9.430 )$$

Na Schwarzschildově sféře je souřadnicová rychlost světla v radiálním směru rovna nule. Čas, který potřebuje světlo aby se dostalo z bodu o souřadnici  $r = r_1$  do bodu  $r = r_2$  bude podle ( 9.430 )

$$\Delta t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} = r_2 - r_1 + 2M \ln \frac{r_2 - 2M}{r_1 - 2M}. \quad ( 9.431 )$$

Pro  $r_1 \rightarrow r_g = 2M$  se tento čas blíží nekonečnu pro libovolnou hodnotu cílového  $r_2 > r_1$ . Světlo vyzářené ze Schwarzschildovy sféry  $r = r_g$  potřebuje **nekonečně dlouhý čas** k tomu, aby se dostalo do kteréhokoliv místa více vzdáleného od středu. Z míst o souřadnicích  $r < r_g$  - z pod Schwarzschildovy sféry - se proto žádný objekt nemůže dostat ven,

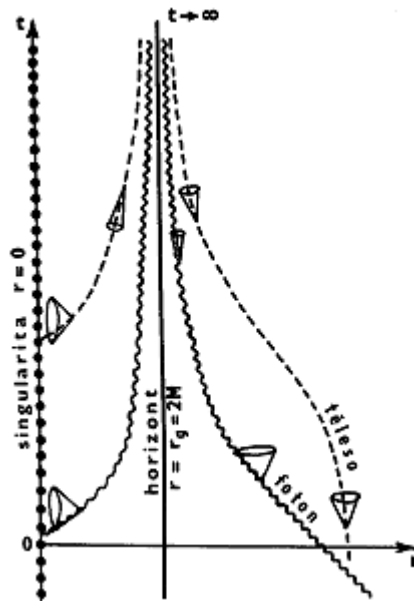
protože se odtud nemůže dostat ani světlo (a žádný objekt se nemůže pohybovat rychleji než světlo). Žádná událost, která probíhá uvnitř Schwarzschildovy sféry, se tedy nijak nemůže projevit vně a nemůže být z vnějšku nijak pozorovatelná. Schwarzschildova sféra je proto **horizontem událostí**, který ve smyslu **příčinnosti** odděluje vnitřní oblast od ostatního prostoročasu.

V oblasti Schwarzschildova horizontu mění složky metrického tenzoru

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - 1, \quad (9.432)$$

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right),$$

svá znaménka: pro  $r > 2M$  je  $g_{rr} > 0$  a  $g_{tt} < 0$ , zatímco při  $r < 2M$  je  $g_{rr} < 0$  a  $g_{tt} > 0$ . Lze říci, že časová  $t$  a radiální prostorová  $r$  souřadnice si v jistém smyslu vzájemně **vymění úlohy**. Uvnitř horizontu úlohu toku času do budoucnosti přejímá neustálé zmenšování  $r$ . Prostorově světelné kužely jsou zde zcela **obráceny dovnitř**, takže každé reálné těleso se zde bude pohybovat tak, že  $r$  se neustále zmenšuje - musí tedy "padat" směrem ke středu  $r = 0$  (obr. 10.18).

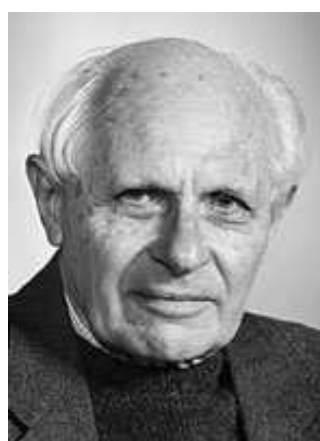


Obr.10.18. Prostorověčasový diagram radiálního pohybu testovacích částic a fotonů ve Schwarzschildově prostoročasu za použití obyčejných Schwarzschildových souřadnic.

Protože zdánlivá singularita na horizontu Schwarzschildovy geometrie je způsobena jen charakterem použité vztažné soustavy (Schwarzschildových souřadnic), nabízí se sledovat Schwarzschildův prostoročas pomocí souřadnic, které nemají tuto nepříjemnou vlastnost. Nejjednodušší co do realizace by byla vztažná soustava spojená s radiálně padajícími testovacími částicemi. Taková soustava sice nemá souřadnicovou singularitu, avšak není vhodná pro studium globálních geometrických vlastností (příliš složité transformační vztahy). Pro sledování geometrických vlastností Schwarzschildova prostoročasu je velmi výhodná tzv. Kruskalova-Szekeresova souřadnicová soustava, která vznikla spojením dříve zavedené Eddingtonovy-Finkelsteinovy smršťující se a rozšiřující se souřadnicové soustavy. Pro tento účel se nejprve zavádí modifikovaná souřadnice  $r^*$



**Martin David Kruskal (1925 – 2006)**



**George Szekeres (1911 – 2005)**



**Sir Arthur Stanley Eddington (1882 – 1944)**



**David Ritz Finkelstein (1929)**

$$r^* \equiv \int \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} = r + 2M \ln|r - 2M| \quad (9.433)$$

$[r \in (0, \infty) \Rightarrow r^* \in (-\infty, \infty)]$  a dále izotropní souřadnice  $p$  a  $q$ :

$$\begin{aligned} p &= t + r^*, \\ q &= t - r^*. \end{aligned} \quad (9.434)$$

Význam těchto souřadnic je ten, že světelné geodetiky směřující ven jsou dány rovnicí  $q = \text{const.}$  a geodetiky směřující dovnitř rovnicí  $p = \text{const.}$  Schwarzschildova metrika v souřadnicích  $(q, r, \vartheta, \varphi)$  má pak tvar

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dq^2 + 2dqdr + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (9.435)$$

tato tzv. smršťující se Eddingtonova-Finkelsteinova souřadnicová soustava dobře (bez pseudosingularity) popisuje pád částic směrem pod gravitační poloměr, nikoliv však v opačném směru. Rozšiřující se Eddingtonova-Finkelsteinova souřadnicová soustava používá místo  $r$  a  $t$  souřadnice  $r$  a  $p$ , takže výraz pro metriku

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dp^2 + 2dpdr + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (9.436)$$

naopak dobře popisuje pohyb částic směrem ven, zatímco při pádu částic pod gravitační poloměr se objevuje pseudosingularita. Pro odstranění pseudosingularit a získání úplné extenze Schwarzschildovy geometrie se nabízí spojit obě tyto soustavy, tj. vyloučit  $r$  a použít souřadnice  $(q, r, \vartheta, \varphi)$ . Prostorčasový element Schwarzschildovy geometrie pak má tvar

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dpdq + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.437)$$

Pro odstranění singulárního koeficientu  $1-2M/r$  je dále třeba provést vhodnou transformaci  $p' = p'(p)$ ,  $q' = q'(q)$ . Takovou transformaci našel Kruskal ve tvaru

$$\begin{aligned} p' &= e^{\frac{p}{4M}}, \\ q' &= e^{-\frac{q}{4M}}. \end{aligned} \quad (9.438)$$

V těchto nových souřadnicích má metrika tvar

$$ds^2 = -\left(\frac{16M^2}{r}\right) e^{-\frac{r}{2M}} dp' dq' + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.439)$$

Abychom dostali tuto metriku v obvyklém tvaru se separovanými časovými a prostorovými členy, zavedeme nakonec místo izotropních souřadnic  $p'$  a  $q'$  časovou  $u$  a prostorovou  $v$  souřadnici:

$$\begin{aligned} u &= \frac{q' - p'}{2}, \\ v &= \frac{q' + p'}{2}, \end{aligned} \quad (9.440)$$

V Kruskalově soustavě jsou tedy souřadnice  $t$  a  $r$  nahrazeny bezrozměrnými časovými a radiálními prostorovými souřadnicemi  $u$  a  $v$  pomocí transformace

$$\left. \begin{aligned} u &= |r = 2M|^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \cosh \frac{t}{4M} \\ v &= |r = 2M|^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \sinh \frac{t}{4M} \end{aligned} \right\} \text{pro } r > 4M,$$

$$\left. \begin{aligned} u &= |r = 2M|^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \sinh \frac{t}{4M} \\ v &= |r = 2M|^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \cosh \frac{t}{4M} \end{aligned} \right\} \text{pro } r < 4M.$$

( 9.441 )

Jsou to tedy ve skutečnosti dvě navazující souřadnicové mapy (podobně jako např. u rovinného zobrazení zeměkoule). Prostorčasový element Schwarzschildovy geometrie má potom v Kruskalových souřadnicích tvar

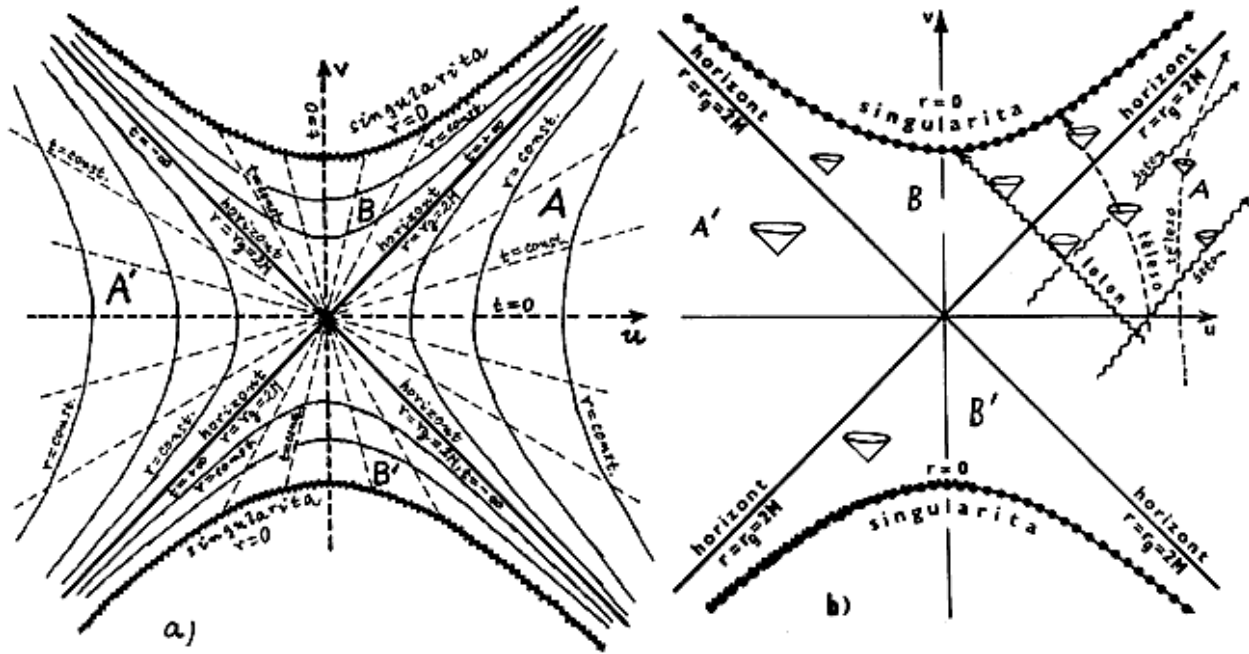
$$ds^2 = - \left( \frac{16M^2}{r} \right) e^{-\frac{r}{2M}} (du^2 - dv^2) + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad ( 9.442 )$$

kde  $r$  jako funkce  $u$  a  $v$  je dáno rovnicí

$$(r - 2M) e^{\frac{r}{2M}} = u^2 - v^2. \quad ( 9.443 )$$

Z ( 9.443 ) je vidět, že metrika Schwarzschildovy geometrie v Kruskalových souřadnicích je regulární všude s výjimkou středu  $r = 0$  (kde se jedná o skutečnou fyzikální singularitu neodstranitelnou žádnou transformací souřadnicové soustavy).





**Obr. 10.19. Kruskalův prostoročasový diagram Schwarzschildovy geometrie.**

a) Souřadnicová síť ve vztahu ke Schwarzschildovým souřadnicím  $r$  a  $t$ .

b) Celková struktura prostoročasu a pohyb testovacích částic a fotonů.  $A$  je vnější asymptoticky rovinná oblast,  $B$  je vnitřní oblast pod horizontem.

Některé základní rysy Schwarzschildovy geometrie v Kruskalových-Szekeresových souřadnicích jsou schématicky znázorněny na

**Kruskalově diagramu** (což je prostoročasový diagram v Kruskalových souřadnicích  $u$  a  $v$ ) na obr. 10.19b, který můžeme srovnávat s

odpovídajícím diagramem ve Schwarzschildových souřadnicích na obr.

10.19. Především singularita  $r = 0$  je zde dána vztahem  $v^2 - u^2 = 1$ , což

popisuje dvě oddělené singularity tak, jak je hyperbolami znázorněno na obr. 10.19. Horizont  $r = 2M$  je zde tvořen dvěma přímkami  $u = \pm v$ .

Vnější oblast  $r > 2M$  je vyjádřena nerovností  $u^2 > v^2$ , což opět popisuje

dvě vnější oblasti. Pro radiální nulové (izotropní) geodetiky  $ds = 0$

dostáváme  $du = \pm dv$ ; tyto radiální světelné geodetiky jsou tedy přímky

pod úhlem  $45^\circ$  k osám Kruskalovy soustavy. Tato vlastnost je velmi výhodná, protože světelné kužely vypadají úplně stejně jako v diagramu

Minkowskiho rovinného prostoročasu STR. Reálná hmotná tělesa se

tedy mohou v tomto Kruskalově diagramu pohybovat pouze pod úhlem

menším než  $45^\circ$  od svislé osy  $v$  (uvnitř prostoročasových světelných

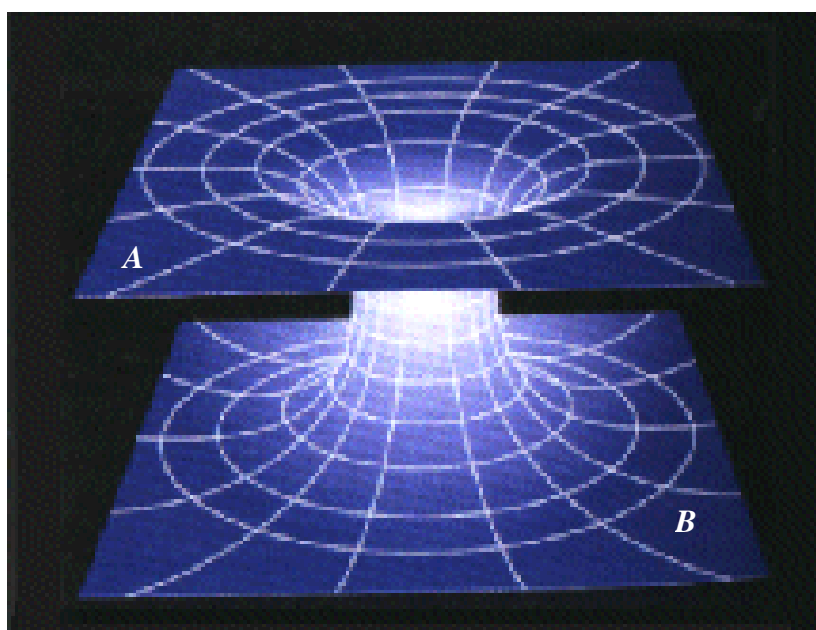
kuželů). Rozbor geometrických vlastností Schwarzschildova

prostoročasu a sledování příčinných vztahů a pohybu hmotných objektů

je zde proto daleko snadnější a názornější než v obyčejných

Schwarzschildových souřadnicích (srovnáme-li obr. 10.18 a 10.19b vidíme, že pohyb testovacích částic i fotonů vypadá daleko přehledněji na Kruskalově diagramu.

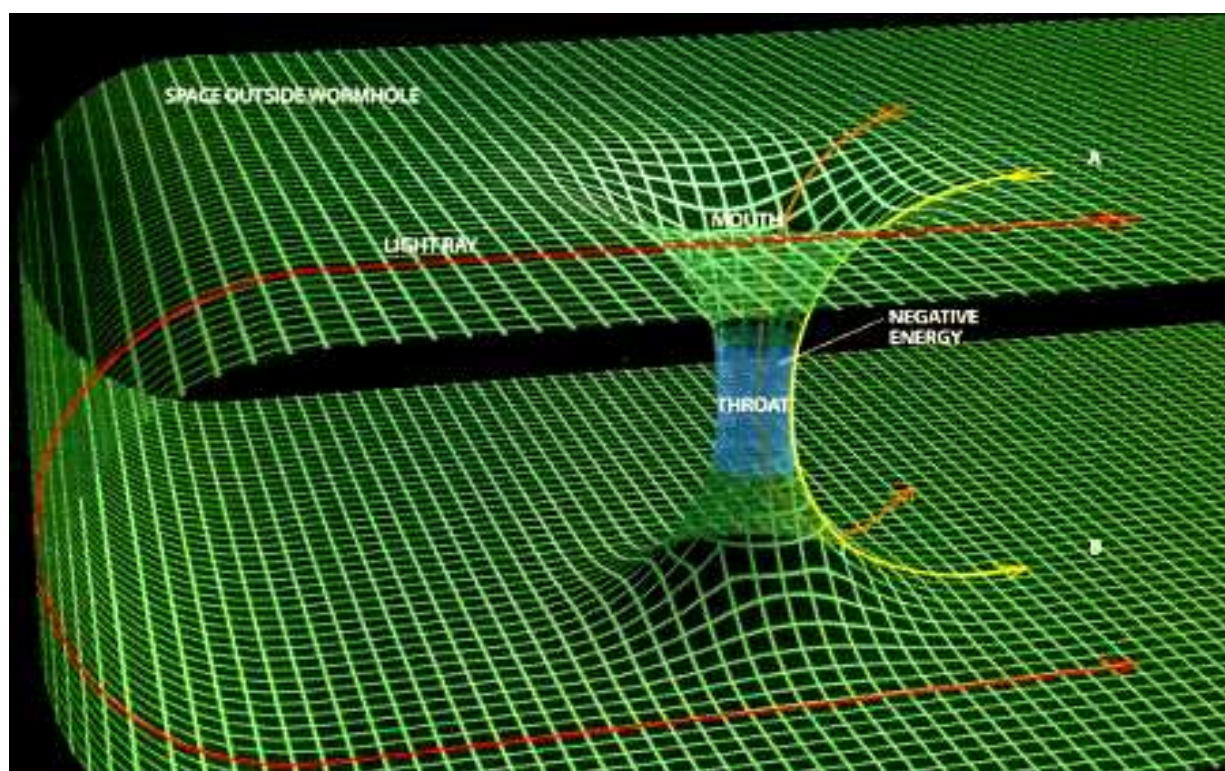
Velmi podivné je to, že z původního Schwarzschildova řešení obsahujícího jen jednu asymptoticky rovinnou vnější oblast  $r \rightarrow \infty$ , jeden horizont  $r = 2M$  a jednu singularitu  $r = 0$ , jsme přechodem ke Kruskalovým souřadnicím dostali prostoročas se dvěma vnějšími oblastmi, dvěma horizonty a dvěma singularitami. Vysvětlení je v tom, že prostoročas získaný přechodem ke Kruskalovým souřadnicím je **úplnou analytickou extenzí** původní Schwarzschildovy geometrie. Skutečný prostoročas  $M$ , který je řešením Einsteinových rovnic pro ostrovní sféricky symetrický případ, je rozsáhlejší varietou, než by se dalo očekávat z původního řešení ( 9.408 ) ve Schwarzschildových souřadnicích. Schwarzschildovy souřadnice jsou schopny obsáhnout jen část této úplné variety, zatímco Kruskalovy souřadnice ji obsáhnou celou.



Obr. 10.20. Znázornění geometrické struktury řezu (prostorové hyperplochy)  $v = t = 0$ ,  $J = p/2$  Schwarzschildovým prostoročasem ve formě vnoření do pomocného trojrozměrného eukleidovského prostoru. Tento pomocný trojrozměrný prostor nemá fyzikální význam (je pouze prostředkem pro znázornění); význam má pouze vnitřní geometrie vnořené plochy, která ukazuje dvě asymptoticky rovinné oblasti  $A$  a  $B$  spojené Einsteinovým-Rosenovým mostem.

Jestliže oblast  $A$  na obr. 10.20 je původní vnější asymptoticky rovinnou oblastí Schwarzschildovy geometrie ("náš vesmír"), objevuje se ještě jedna zrcadlově obrácená asymptoticky rovinná oblast  $B$  na druhé straně diagramu, jakýsi "druhý vesmír". Vezmeme-li si řez Kruskalovým diagramem podél osy  $u$  (tedy řez  $t = 0$  podle obr. 10.19), vidíme, že kulové plochy  $r = \text{const.}$  s ubývajícím  $r$  nejprve normálně zmenšují svoje plochy, avšak ne k nule, ale k minimální hodnotě  $16\pi M^2$ , a potom znovu rostou, jako kdyby se rozšiřovaly do druhého asymptoticky rovinného prostoru. Názorně je tato situace zachycena na obr. 10.20, který je vnořením řezu  $t = 0$  s jedním vynechaným rozměrem do pomocného trojrozměrného prostoru. Úplná geometrie obsahuje v časovém řezu určitý "most", zvaný **Einsteinův-Rosenův most**, spojující dva různé asymptoticky rovinné vesmíry. Jak je jasně vidět z Kruskalova diagramu, Einsteinovým-Rosenovým mostem nemůže nikdo proniknout do druhého (zrcadlově obráceného) vesmíru, protože by se musel pohybovat nadsvětelnou rychlostí aby stačil uniknout singularitě. Za předpokladu obvyklé euklidovské globální topologie; při vhodné topologii by takový most mohl spojovat i dvě různá místa jednoho vícenásobně souvislého vesmíru, jak ukazuje obr. 10.21.

Obr. 10.21



Další zajímavou vlastností Schwarzschildova řešení, která je vidět z Kruskalova diagramu, je to, že v oblasti  $r < 2M$  má geometrie **dynamický charakter**. Sledujeme-li časové řezy (rovnoběžné s osou  $u$ ) Kruskalovým diagramem postupně od velkých záporných hodnot  $v$  až do velkých kladných hodnot  $v$  (tj. v postupu časové evoluce), budeme vidět zpočátku dva nesouvisející asymptoticky rovinné vesmíry, z nichž každý má svou singularitu  $r = 0$ . Jakmile řez přestane procházet dolní (minulou) singularitou, objeví se mezi oběma vnějšími oblastmi Einsteinův-Rosenův most. Tento most se bude rozšiřovat (maximální bude v řezu  $t = 0$ ) a pak zase zužovat, až nakonec při dotyku řezu s horní singularitou zanikne a opět zbudou dva nesouvisející vesmíry se svými singularitami. Lze říci, že most zanikne tak rychle, že jím žádný reálný objekt nemůže proniknout do druhého vesmíru (skončí vždy v singularitě). Geometrie Schwarzschildova řešení má v oblasti  $r < 2M$  dynamický charakter vlivem toho, že zde v důsledku výměny úloh časových a prostorových metrických komponent úlohu časové evoluce přebírá "evoluce" prostorová.

Důsledným rozbořením Schwarzschildovy geometrie se nám tak objevuje úplně jiná globální topologie, než by se dalo očekávat z "nevině vyhlížejícího" Schwarzschildova výrazu ( 9.408 ). Je na první pohled vidět, že topologie nebude eukleidovská v bodě  $r = 0$  kde je singularita; mohlo by se ale zdát, že toto je jediný rozdíl od obyčejných topologických vlastností. Úplná extenze však ukazuje zcela jinou globální topologii - dva různé asymptoticky rovinné "vesmíry" spojené "mostem", který má dynamický charakter.

Ukazuje se výhodným Kruskalův diagram ještě dále "vylepšit" zavedením konformní transformace převádějící oblasti nekonečna do konečných souřadnic. Vhodný transformační vztah bude:

$$\begin{aligned}\chi &= \operatorname{arctg}(v+u) - \operatorname{arctg}(v-u), \\ \eta &= \operatorname{arctg}(v+u) + \operatorname{arctg}(v-u).\end{aligned}\tag{ 9.444 }$$

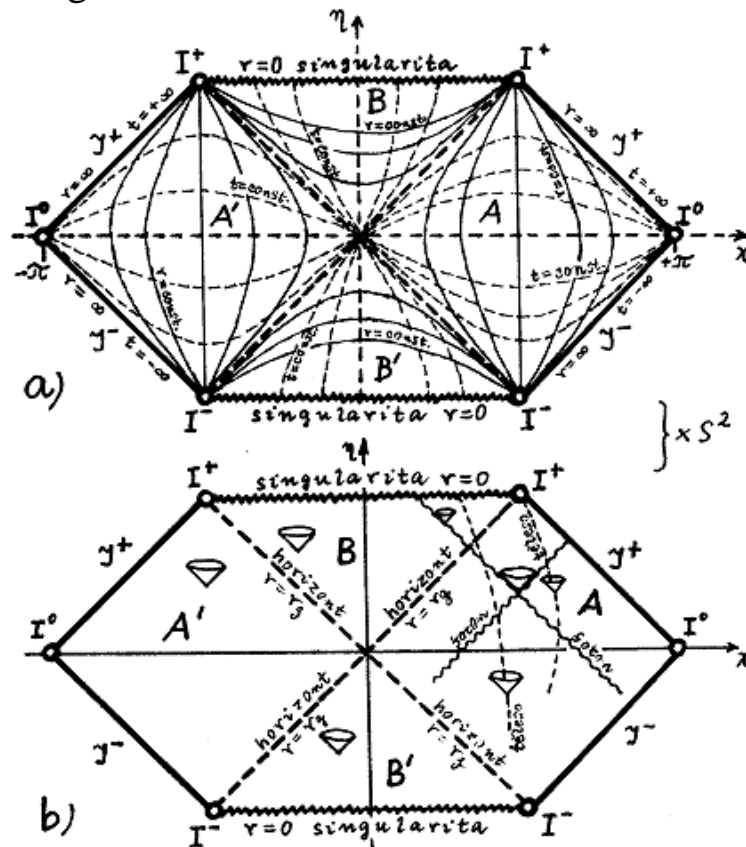
Vzniklá metrika má potom tvar

$$ds^2 = \frac{16M}{r} \frac{e^{\frac{r}{2M}}}{4 \cos \frac{2\eta + \chi}{2} \cos \frac{2\eta - \chi}{2}} (d\chi^2 - d\eta^2) + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (9.445)$$

kde  $r(\eta, \chi)$  je dáno implicitním vztahem

$$(r - 2M) e^{\frac{r}{2M}} = \operatorname{tg} \frac{\eta + \chi}{2} \operatorname{tg} \frac{\eta - \chi}{2} \quad (9.446)$$

Příslušný **konformní Penroseův prostoročasový diagram** úplné analytické extenze Schwarzschildova řešení je znázorněn na obr. 10.22. Vlastnosti geometrie, pohyb částic a příčinné vztahy mezi jednotlivými částmi Schwarzschildova prostoročasu jsou zde vidět ještě názorněji než na Kruskalově diagramu.



**Obr.10.22. Penroseův-Kruskalův konformní prostoročasový diagram úplné extenze Schwarzschildovy geometrie.**

- a) Souřadnicové čáry ve vztahu ke Schwarzschildovým souřadnicím (hyperplochy  $r = \text{const.}$  a  $t = \text{const.}$ ).
- b) Tvary světelných kuželů a radiální geodetiky časového a světelného typu.

Předchozí sféricky symetrický případ je možno poněkud zobecnit při zachování sférické symetrie tím, že budící těleso budeme uvažovat **elektricky nabité**. Pro zachování sférické symetrie musí být distribuce tohoto elektrického náboje též sféricky symetrická, protože gravitační pole je buzeno nejen hmotou zdrojového tělesa, ale i tenzorem energie-hybnosti elektromagnetického pole. Nesymetrické rozložení náboje by vedlo k nesymetrickému elektrickému poli, které by budilo nesymetrické gravitační pole.

Element prostoročasového intervalu bude mít opět stejný sféricky symetrický základní tvar ( 9.403 )

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad ( 9.447 )$$

Rozdíl oproti předchozímu Schwarzschildovu řešení je nyní v tom, že vnější řešení nebude řešením Einsteinových rovnic bez pravé strany, ale pravou stranou zde bude tenzor energie-hybnosti elektromagnetického pole  $T_{ik}^{\text{elmag}}$  ( 2.197 ). V tomto případě se jedná o Coulombovské centrálně symetrické elektrostatické pole o intenzitě  $\mathbf{E} = E(r) \cdot \mathbf{e}_r$ , kde  $\mathbf{e}_r$  je jednotkový bázový vektor radiálního směru.

Protože Schwarzschildova radiální souřadnice  $r$  si zachovává ten význam, že plocha koule se středem v bodě symetrie, mající poloměr  $r$ , je rovna  $4\pi r^2$ , podle Coulombova zákona (Gaussovy věty) je  $E(r) = Q/r^2$ . Tenzor energie-hybnosti tohoto elektrického pole potom je (nediagonální složky jsou nulové)

$$T_{tt}^{\text{elmag}} = -T_{rr} = T_{\vartheta\vartheta} = T_{\varphi\varphi} = \frac{E^2(r)}{8\pi} = \frac{Q^2}{8\pi r^4} \quad ( 9.448 )$$

ten dosadíme do Einsteinových rovnic

$$R_{ik} = \frac{1}{2} g_{ik} R = 8\pi T_{ik}^{\text{elmag}} \quad ( 9.449 )$$

a pro sféricky symetrickou metriku (9.403) dostaneme podobným postupem jako při odvozování Schwarzschildova řešení opět dvě nezávislé diferenciální rovnice

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} g_{tt} &= \frac{1}{r} g_{rr} \left( 1 + g_{rr} - \frac{Q^2}{r^2} g_{rr} \right), \\ \frac{d}{dr} g_{rr} &= -\frac{1}{r} g_{rr} \left( 1 + g_{rr} - \frac{Q^2}{r^2} g_{rr} \right).\end{aligned}\tag{9.450}$$

Řešení této soustavy je

$$\begin{aligned}g_{tt} &= C_1 \left( 1 - \frac{C_2}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right), \\ g_{rr} &= C_1 \left( 1 - \frac{C_2}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1},\end{aligned}\tag{9.451}$$

kde ze stejných důvodů jako ve Schwarzschildově případě musí být integrační konstanty  $C_1 = 1$  a  $C_2 = -2M$ . Konečný výraz pro element prostoročasového intervalu sféricky symetrického gravitačního pole buzeného sféricky symetrickým tělesem o celkové hmotnosti  $M$  a elektrickém náboji  $Q$  má tedy tvar

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),\tag{9.452}$$

v geometrodynamických jednotkách; v jednotkách SI je to

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).\tag{9.453}$$

Tato geometrie se nazývá **Reissnerova-Nordströmova geometrie**.



Hans Jacob Reissner (1874 – 1967)



Gunnar Nordström (1881 – 1923)

Parametr  $M$  zde má opět význam celkové **hmotnosti**, parametr  $Q$  význam celkového **elektrického náboje** měřeného vzdáleným pozorovatelem pomocí Gaussových integrálních toků vektoru  $\mathbf{E}$ , popř. pomocí analýzy pohybu nabitých testovacích částic.

Podle vzájemného poměru hodnot  $M$  a  $Q$  můžeme v Reissnerově-Nordströmově geometrii rozlišovat čtyři význačné případy lišící se globální geometrickou strukturou:

- a) Při  $Q = 0, M \neq 0$  dostáváme Schwarzschildovu geometrii;
- b)  $0 < Q^2 < M^2$ ;
- c)  $0 > Q^2 = M^2$ ;
- d)  $Q^2 > M^2 > 0$ .

Nejprve rozebereme případ  $0 < Q^2 < M^2$ , který je fyzikálně nejzajímavější.

Reissnerova-Nordströmova metrika ( 9.452 ) je značně podobná Schwarzschildově metrice ( 9.408 ), avšak liší se tím, že výraz

$$1 - 2Mr + \frac{Q^2}{r^2} \quad ( 9.454 )$$

je v případě  $0 < |Q| < M$  roven nule pro dva "kořeny"  $r = r_g^+$  a  $r = r_g^-$ :

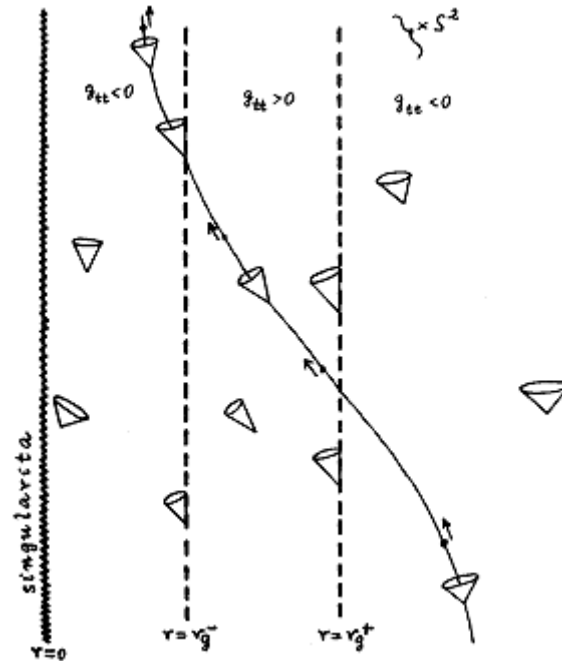


$$\begin{aligned}
 r_g^+ &= M + \sqrt{M^2 - Q^2}, \\
 r_g^- &= M - \sqrt{M^2 - Q^2}
 \end{aligned}
 \tag{9.455}$$

V jednotkách SI jsou to hodnoty

$$\begin{aligned}
 r_g^+ &= \frac{G}{c^2} \left[ M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right], \\
 r_g^- &= \frac{G}{c^2} \left[ M - \sqrt{M^2 - Q^2} \right].
 \end{aligned}
 \tag{9.456}$$

V Reissnerově-Nordströmově geometrii tedy existují **dva** "horizonty", kde metrika ( 9.452 ) není regulární - "**vnější**" **horizont**  $r = r_g^+$  a "**vnitřní**" **horizont**  $r = r_g^-$ . Vnější horizont  $r = r_g^+$  má podobný význam jako Schwarzschildova sféra ve Schwarzschildově prostoročase je to **horizont událostí**, oddělující příčinně vnitřní oblast od vnější; z ( 9.455 ) vidíme, že za přítomnosti elektrického náboje je gravitační poloměr  $r_g^+$  menší než  $r_g = 2M$  ve Schwarzschildově případě. Pod  $r = r_g^+$  jsou světelné kužely obráceny dovnitř směrem k  $r = 0$  (protože  $g_{tt} > 0$ ) a zdálo by se, že každý objekt jež se tam dostane nutně skončí v singularitě  $r = 0$ . Avšak na vnitřním horizontu  $r = r_g^-$  se světelné kužely opět začínají napřimovat (časová složka metrického tenzoru opět mění znaménko:  $g_{tt} < 0$ ) - je zde tedy možný pohyb částice tak, aby se vyhnula singularitě (obr. 10.23). Nemůže se však dostat přes vnější horizont (tj. horizont událostí) zpět do původního prostoročasu, ale nutně do "**jiného vesmíru**", který leží vzhledem k původnímu v absolutní budoucnosti (viz níže).



Obr.10.23: Kerrův prostoročasový diagram Reissnerovy-Nordströmovy geometrie (podobně bude situace vypadat i v Kerrově a Kerrově-Newmanově geometrii). Vnější horizont  $r = r_g^+$  je horizontem událostí (světelné kužely pod ním jsou obráceny dovnitř směrem k  $r = 0$ ). Pod vnitřním horizontem  $r = r_g^-$  se však světelné kužely začínají opět "napřimovat", takže světočára tělesa, které proniklo pod horizont  $r = r_g^+$ , nemusí nutně skončit v singularitě  $r = 0$ .

Singulární chování metriky ( 9.452 ) ve standardních souřadnicích na těchto horizontech je opět jen zdánlivé a může být odstraněno přechodem k vhodnějším souřadnicím podobným Kruskalovým. S pomocí modifikované souřadnice  $r^*$

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} = r + \frac{(r_g^+)^2}{r_g^+ - r_g^-} \ln|r - r_g^+| - \frac{(r_g^-)^2}{r_g^+ - r_g^-} \ln|r - r_g^-|. \quad (9.457)$$

podobně jako při extenzi Schwarzschildovy geometrie zavedeme izotropní souřadnice

$$\begin{aligned} p &= t + r^*, \\ q &= t - r^*. \end{aligned} \quad (9.458)$$

Ty potom za účelem odstranění singulárního koeficientu v metrice dále přetransformujeme:

$$\begin{aligned} p' &= -\exp\left[\frac{r_g^+ - r_g^-}{2(r_g^+)^2}(t - r^*)\right], \\ q' &= -\exp\left[\frac{r_g^+ - r_g^-}{2(r_g^+)^2}(t + r^*)\right]. \end{aligned} \quad (9.459)$$

Po zavedení nových časových a prostorových souřadnic

$$\begin{aligned} u &= \frac{q' - p'}{2}, \\ v &= \frac{q' + p'}{2}, \end{aligned} \quad (9.460)$$

má Reissnerova-Nordströmova metrika tvar

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{4(r_g^+)^4}{r^2} \frac{(r - r_g^+)(r - r_g^-)}{(r_g^+ - r_g^-)^2} \exp\left(-r \frac{r_g^+ - r_g^-}{(r_g^+)^2}\right) (du^2 - dv^2) - \\ &\quad - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (9.461)$$

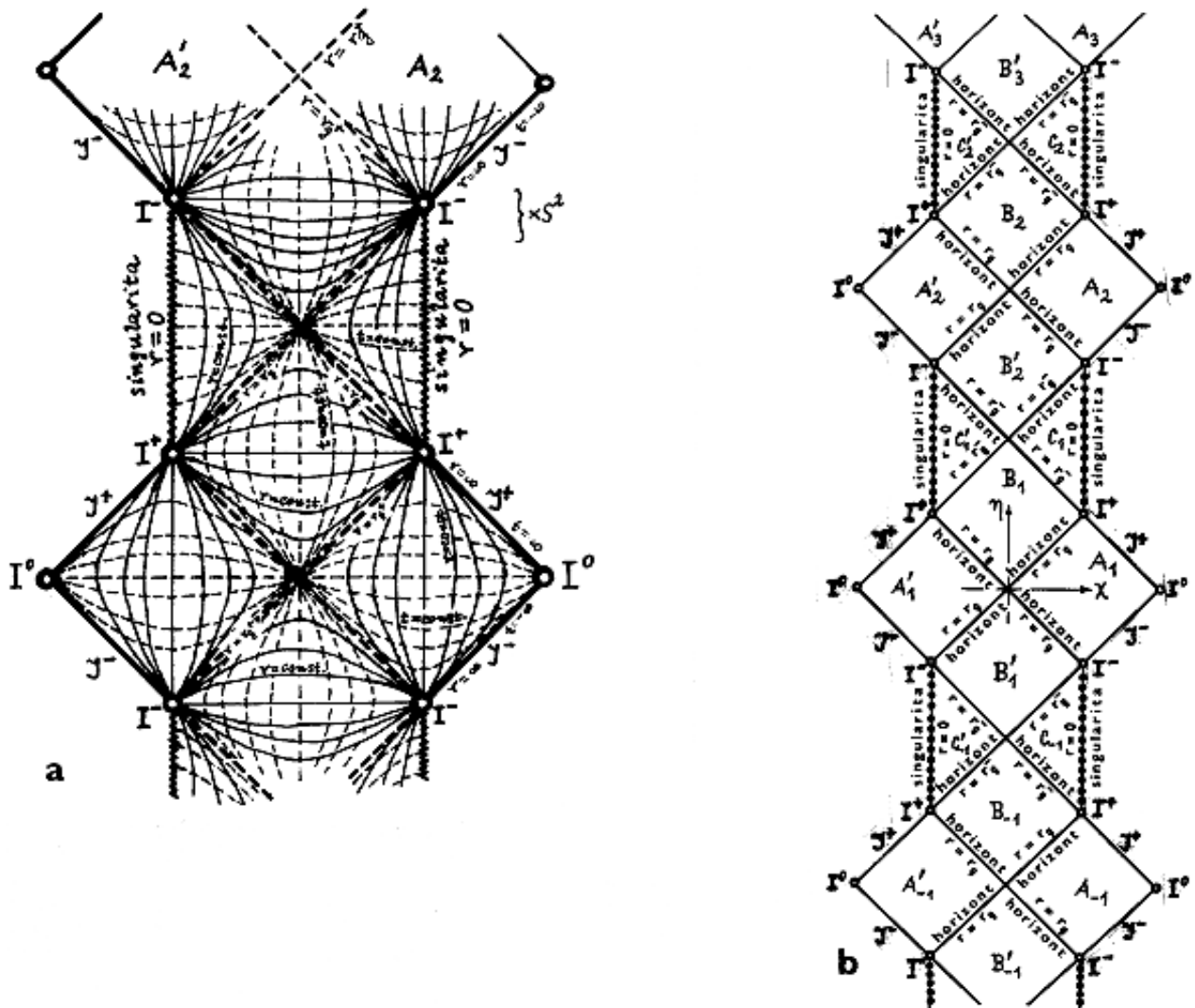
Po **konformní transformaci** za účelem názornější prezentace **asymptotické struktury** bude Reissnerova-Nordströmova geometrie popsána intervalem

$$ds^2 = F(\chi, \eta) (d\chi^2 - d\eta^2) + r^2(\chi, \eta) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.462)$$

kde

$$F(\chi, \eta) = \frac{\frac{(r_g^+)^2 (r - r_g^+)(r - r_g^-)}{r^2 (r_g^+ + r_g^-)^2} \exp\left(-r \frac{r_g^+ - r_g^-}{(r_g^+)^2}\right)}{\cos^2 \frac{\chi + \eta}{2} \cos^2 \frac{\chi - \eta}{2}} \quad (9.463)$$

Prostoročasový diagram konformního obrazu Reissnerovy-Nordströmovy geometrie pro fyzikálně nejpravděpodobnější případ  $0 < |Q| < M$  je na obr. 10.24. Geometrická struktura této úplné extenze Reissnerova-Nordströmova řešení je neočekávaně složitá. Objevuje se zde nekonečné množství periodicky se opakujících "vesmírů" (samostatných asymptoticky rovinných vnějších oblastí  $A_{\dots,-1,1,2,\dots}$ ), horizontů a singularit. Oproti Schwarzschildově geometrii (obr. 10.22), kde singularita jsou prostorového typu (a tedy pro každý objekt v oblasti  $B$  nevyhnutelné), jsou **singularity** Reissnerovy-Nordströmovy geometrie podle obr. 10.24 **časového typu** - jsou takříkajíc "časově omezené" a lze se jim vyhnout.



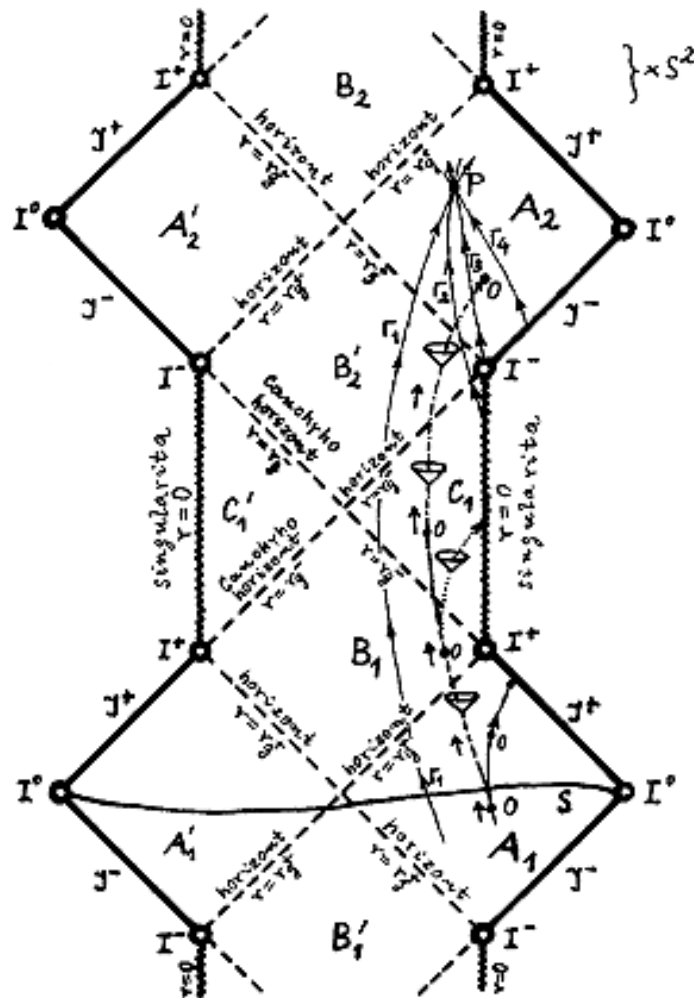
Obr.10.24. Penroseův konformní prostoročasový diagram úplné extenze Reissnerovy-Nordströmovy geometrie pro případ  $Q^2 < M^2$ .

a) Souřadnicová síť - hyperplochy  $r = \text{const.}$  a  $t = \text{const.}$

b) Globální geometrická struktura - nekonečně mnoho periodicky se opakujících vnějších oblastí ("vesmírů")  $A_{\dots,-1,1,2,\dots}$ , vnitřních oblastí  $B_{\dots,-1,1,2,\dots}$  a  $C_{\dots,-1,1,2,\dots}$ , horizontů a singularit.

Sledujme osud pozorovatele (jak je naznačeno na obr. 10.25), který při svém pohybu Reissnerovým-Nordströmovým prostoročasem pronikl pod vnější horizont  $r = r_g^+$ . Protože se dostal pod horizont událostí, nemůže se již nijak vrátit do původního vnějšího prostoru (oblasti  $A_1$ ) a má v podstatě dvě možnosti. Jednak doletět do singularity, kde jeho světočára (a tedy i jeho existence v rámci uvažované variety) definitivně skončí. To však není (na rozdíl od Schwarzschildova prostoročasu) nevyhnutelné, pozorovatel se může **singularitě vyhnout** a pohybovat se dále, až se objeví v druhé asymptoticky rovinné oblasti  $A_2$ , v **druhém**

"vesmíru", který leží vzhledem k výchozímu  $A_1$  v absolutní budoucnosti.



Obr.10.25. Pozorovatel  $O$  pohybující se ve vnější asymptoticky rovinné oblasti  $A_1$  Reissnerova- Nordströмова prostoročasu má tři možnosti.

Bud' to se bude neustále pohybovat v  $A_1$  (plná čára), takže se v limitě dostane do  $I^+$  nebo do  $A^+$ . Pokud však pozorovatel pronikne pod horizont  $r = r_g^+$  (čárkovaná trajektorie) do vnitřní oblasti  $B_1$ , projde i horizontem vnitřním  $r = r_g^-$  do oblasti  $C_1$ , kde má dvě možnosti: buď narazí na singularitu (tečkovaná dráha) kde je pohlčen a zničen, nebo se může vyhnout singularitě (čerchovaná trajektorie) a dostane se do další asymptoticky rovinné vnější oblasti  $A_2$ . Situace v tomto dalším "vesmíru"  $A_2$  přitom není zcela určena počátečními podmínkami na Cauchyho hyperploše  $S$ , jak je vidět např. v bodě  $p \rightarrow A_2$ .

Vidíme tedy, že reálný hmotný objekt pohybující se v Reissnerově- Nordströmově geometrii v rámci světelného kuželu může v principu cestovat mezi jednotlivými vesmíry, aniž by musel projít singularitou (na rozdíl od Schwarzschildovy geometrie, kde Einsteinovým- Rosenovým mostem by se dalo projít pouze nadsvětelnou rychlostí). Je

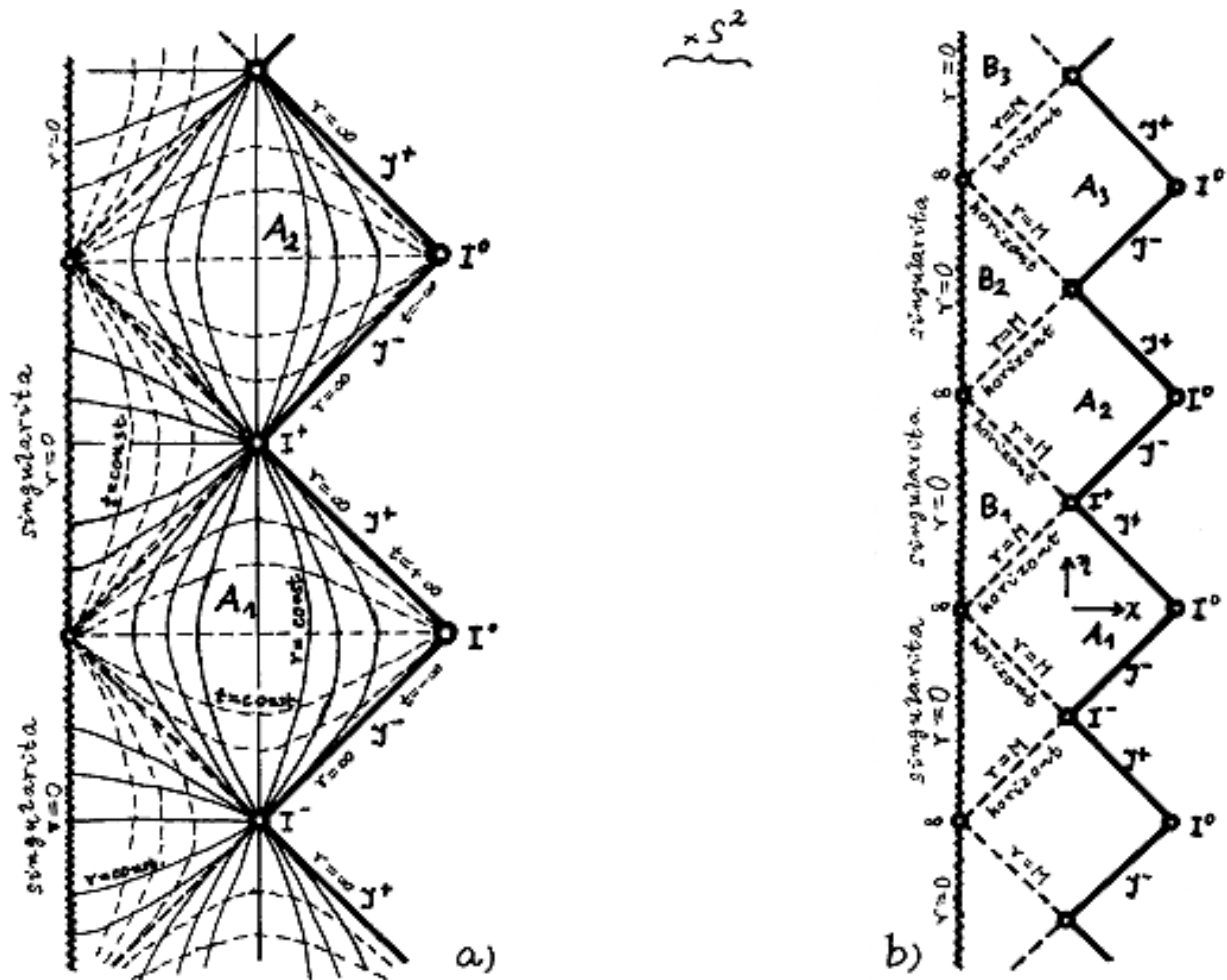
třeba zdůraznit, že toto cestování mezi různými vesmíry je možné pouze teoreticky v krajně idealizovaném modelu asymptoticky rovinného vesmíru bez jiných těles a polí s přesnou Reissnerovou-Nordströmovou nebo Kerrovou geometrií.

Podíváme-li se na **kauzální vztahy** tohoto druhého vesmíru vzhledem k původnímu, vidíme, že vnitřní horizonty  $r = r_g^-$  jsou zároveň Cauchyovými horizonty. Vezmeme-li si nějakou událost  $P$  v oblasti  $A_2$  a sledujeme, čím může být principiálně ovlivňována, vidíme, že sice může být ovlivňována geodetikami (např.  $G_1$ ) přicházejícími z oblasti  $A_1$  (a danými tedy počátečními podmínkami na vhodné Cauchyho hyperploše v  $A_1$ ), avšak mohou tam rovněž "nekontrolovaně" přicházet nové informace geodetikami (např.  $G_2, G_3, G_4$ ) z oblastí nekonečna minulosti  $\Gamma, \dot{A}^-$  a ze singularity, která je odtud "vidět". Tyto informace mohou **narušit** každou předpověď učiněnou na základě počátečních podmínek v oblasti  $A_1$ . Pozorovatel se tedy vynořil v oblasti prostoročasu (jiném "vesmíru"), který není jednoznačně určen počátečními podmínkami na žádné Cauchyho hyperploše v původní oblasti  $A_1$ .

Zkonfrontujme to s deterministickou ideou klasické (nekvantové) fyziky, kterou zformuloval již Laplace: Kdybychom v určitém okamžiku zjistili všechny fyzikální veličiny ve všech místech vesmíru (tj. okamžitý stav vesmíru - úplný soubor počátečních podmínek na Cauchyho hyperploše) a znali fyzikální zákony, kterými se všechny tyto veličiny řídí, mohli bychom neomezeně **předpovídat evoluci vesmíru**, tj. jeho stav kdykoliv v budoucnosti (nebo i minulosti). V úplné extenzi Reissnerovy-Nordströmovy geometrie však toto není splněno, existují zde Cauchyho horizonty (a tedy neexistují globální Cauchyovy hyperplochy) a jsou zde proto oblasti, jejichž stav není jednoznačně určen žádným souborem počátečních podmínek. Pouze ve vnější asymptoticky rovinné oblasti lze jednoznačně "předvídat" budoucnost z parciálních Cauchyho hyperploch. Tedy i v klasické fyzice (na níž je Reissnerova-Nordströmova geometrie jakožto řešení Einsteinových rovnic založena) může být možnost předvídat budoucnost omezena nejen praktickou nedostupností fyzikálních veličin ve všech místech vesmíru v určitém časovém okamžiku, ale principiálně též globální geometricko-topologickou strukturou prostoročasu.

Na obr. 10.25 každý bod oblasti  $B$  mezi  $r_g^+$  a  $r_g^-$  (kde plochy  $r = \text{const.}$  jsou prostorového typu) reprezentuje dvojrozměrnou kulovou plochu,

kteřá je uzavřenou pohlcující plochou. Pozorovatel  $O$  při svém průchodu plochou  $r = r_g^-$  (obr. 10.25) uvidí celou další historii asymptoticky rovinné vnější oblasti  $A_1$ , kterou opouští, za konečný čas. Každé těleso z této oblasti proto bude vidět s neomezeně narůstajícím fialovým posuvem. Z toho plyne, že Cauchyho horizont  $r = r_g^-$  je nestabilní vůči perturbacím počátečních podmínek na výchozí prostorové hyperploše  $S$ . Je jasné, že kosmologické otázky evoluce vesmíru  $A_1$ , který pozorovatel opouští, budou pro něj velmi důležité. Jestliže vesmír  $A_1$  bude v budoucnu třeba kolabovat, nevyhne se tomuto osudu ani pozorovatel  $O$ ; na horizontu  $r = r_g^-$  se setká s nekonečnou hustotou hmoty-energie, tedy nakonec vlastně se singularitou.



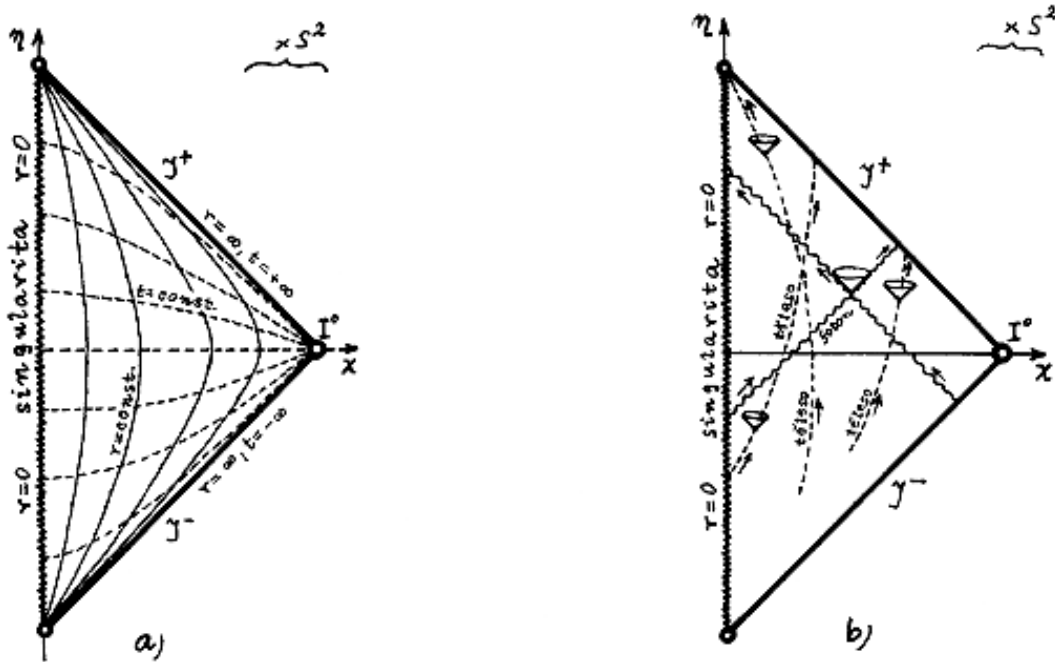
**Obr. 10.26. Penroseův konformní prostoročasový diagram úplné extenze Reissnerovy-Nordströmovy geometrie pro případ  $Q^2 = M^2$ .**

a) Hyperplochy (souřadnicové čáry)  $r = \text{const.}$  a  $t = \text{const.}$

b) Globální geometrická struktura - nekonečně mnoho periodicky se opakujících vnějších oblastí  $A$  a vnitřních oblastí  $B$ .



Pro případ  $Q = M$  má příslušný konformní prostoročasový diagram úplné extenze Reissnerovy-Nordströmovy geometrie tvar znázorněný na obr. 10.26 Je vidět opět nekonečně mnoho periodicky se opakujících "vnějších" oblastí  $A$  ( $M < r < \infty$ ) a vnitřních oblastí  $B$  ( $0 < r < M$ ). Vnější a vnitřní horizonty splývají ( $r_g^- = r_g^+ = M$ ), jedná se o speciální případ **extrémní černé díry**.



**Obr.10.27. Penroseův konformní prostoročasový diagram Reissnerovy-Nordströmovy geometrie v případě  $Q^2 > M^2$ .**

a) Souřadnicové čáry - hyperplochy  $r = const.$  a  $t = const.$

b) Globální geometrická struktura - tvary světelných kuželů a radiální pohyb těles a fotonů. Nejsou zde horizonty, singularita  $r = 0$  je "nahá" (je viditelná z kteréhokoliv světobodu).

V případě  $Q^2 > M^2$  není třeba žádnou extenzi hledat, protože prostoročas je nerozšiřitelný již v původních souřadnicích; je všude regulární kromě bodu  $r = 0$  – neodstranitelné fyzikální singularity prostoročasu.

Konformní prostoročasový diagram pro tento případ je na obr. 10.27. Horizont událostí zde není, jedná se o **nahou singularitu**.

Jestliže těleso, které je zdrojem gravitačního pole **rotuje**, nebude již buzené vnější gravitační pole centrálně symetrické, ale může být pouze **osově symetrické** (pokud je distribuce hmoty-energie v rotujícím tělese symetrická vzhledem k ose rotace). Přesné řešení Einsteinových rovnic (ve vakuu) pro takový axiálně symetrický případ našel R. Kerr v

r.1963; toto řešení bylo potom E. Newmanem zobecněno na případ elektrického náboje.

**Kerrová geometrie** je zobecněním Schwarzschildovy geometrie zhruba řečeno v tom smyslu, že Schwarzschildova geometrie je "kulová", zatímco Kerrova geometrie je obecně eliptická. V tzv. Boyerových-Lindquistových souřadnicích (které jsou eliptickým zobecněním Schwarzschildových souřadnic) má prostoročasový element Kerrový geometrie tvar

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}\right) dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}{r^2 - 2Mr + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \sin^2 \vartheta\right) \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + \frac{4Mr a}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \sin^2 \vartheta d\varphi dt, \quad (9.464)$$

kde  $M$  je celková hmotnost (hmotnostní parametr),  $a = J/M$  je "specifický moment hybnosti" - celkový rotační moment hybnosti  $J$  dělený celkovou hmotností  $M$ .



Charles P. Boyer (1942)



Anders Linquist (1946)

Z výrazu pro prostoročasový element ( 9.464 ) je patrné (a potvrzuje to výpočet složek tenzoru křivosti  $R^i_{klm}$  a jeho skalárního invariantu), že Kerrova geometrie má **fyzikální singularitu** danou vztahem

$$r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta = 0. \quad (9.465)$$

Není to však bodová singularita jako ve Schwarzschildově řešení, ale **prstencová singularita**, která má v rovině kolmé k ose rotace tvar kružnice s poloměrem  $\underline{a}$ .

Podobně jako v Reissnerově-Nordströmově geometrii, jsou i zde tři vyznačné speciální případy lišící se globální geometrickou strukturou prostoročasu:  $a^2 < M^2$ ,  $a^2 = M^2$  a  $a^2 > M^2$ .

Kerrova geometrie má obzvláštní důležitost pro případ  $M^2 > a^2$ , kdy popisuje vnější pole **stacionárních rotujících objektů**, především **černých děr**. Pro rotující černou díru je Kerrova geometrie přesným vakuovým řešením Einsteinových rovnic. Mimo černých děr však nalezení materiálního zdroje přesné Kerrovy geometrie, vedoucí podle Einsteinových rovnic k plynulému přechodu vnitřní metriky k vnější Kerrově metrice, není nikterak snadné. Tvar takového elipsoidního rotujícího zdroje a distribuce hmoty v něm musí splňovat určité velmi speciální podmínky. Kolem rotujících materiálních těles (planet, hvězd, galaxií) je tedy gravitační pole jen přibližně Kerrovské. Když R. Kerr příslušné řešení odvodil, jistě netušil, jak se toto "algebraicky speciální" řešení ukáže důležitým a obecným; ve světle teorému "černá díra nemá vlasy" bude každá stacionární nenabitá černá díra mít Kerrovu geometrii prostoročasu.

V uvažovaném případě  $a^2 < M^2$  existují dvě hodnoty  $r$ , pro něž je ve jmenovateli prostorové části metriky v ( 9.464 )  $r^2 - 2Mr + a^2$  rovno nule:

$$\begin{aligned} r_g^+ &= M + \sqrt{M^2 - a^2}, \\ r_g^- &= M - \sqrt{M^2 - a^2}. \end{aligned} \tag{ 9.466 }$$

Jsou zde tedy opět (podobně jako v Reissnerově-Nordströmově geometrii) přítomny dva horizonty - **vnější horizont** událostí  $r = r_g^+$  a **vnitřní horizont**  $r = r_g^-$  (který je Cauchyovým horizontem), na nichž je metrika ( 9.464 ) pseudosingulární. Každý objekt potřebuje k dosažení horizontu nekonečně dlouhý souřadnicový čas (avšak konečný interval vlastního času) a navíc též nekonečný úhel ( $\varphi \rightarrow \infty$ ) - vlivem strhávání

inerciálních soustav momentem hybnosti musí vykonat nekonečně mnoho oběhů kolem horizontu.

K odstranění této souřadnicové pseudosingularity (tj. k analytickému prodloužení metriky přes tyto plochy) se používá přechodu ke Kerrovým souřadnicím  $(v_+, r, \vartheta, \varphi_+)$  transformací

$$dv_+ = dt + \frac{r^2 + a^2}{r - 2Mr + a^2} dr, \quad (9.467)$$

$$d\tilde{\varphi}_+ = d\varphi + \frac{a}{r^2 - 2Mr + a^2} dr.$$

Tato transformace provádí nekonečné "stlačení" souřadnicového času  $t$  a nekonečné "rozkroucení" úhlové souřadnice  $\varphi$  v okolí horizontu. Metrika (9.464) pak má v Kerrových souřadnicích tvar

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}\right) dv_+^2 + 2drdv_+^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2 + \frac{(r^2 + a^2) - a^2(r^2 - 2Mr + a^2) \sin^2 \vartheta}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \sin^2 \vartheta d\tilde{\varphi}_+^2 - \frac{4Mr a \sin^2 \vartheta}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} dv_+ d\tilde{\varphi}_+, \quad (9.468)$$

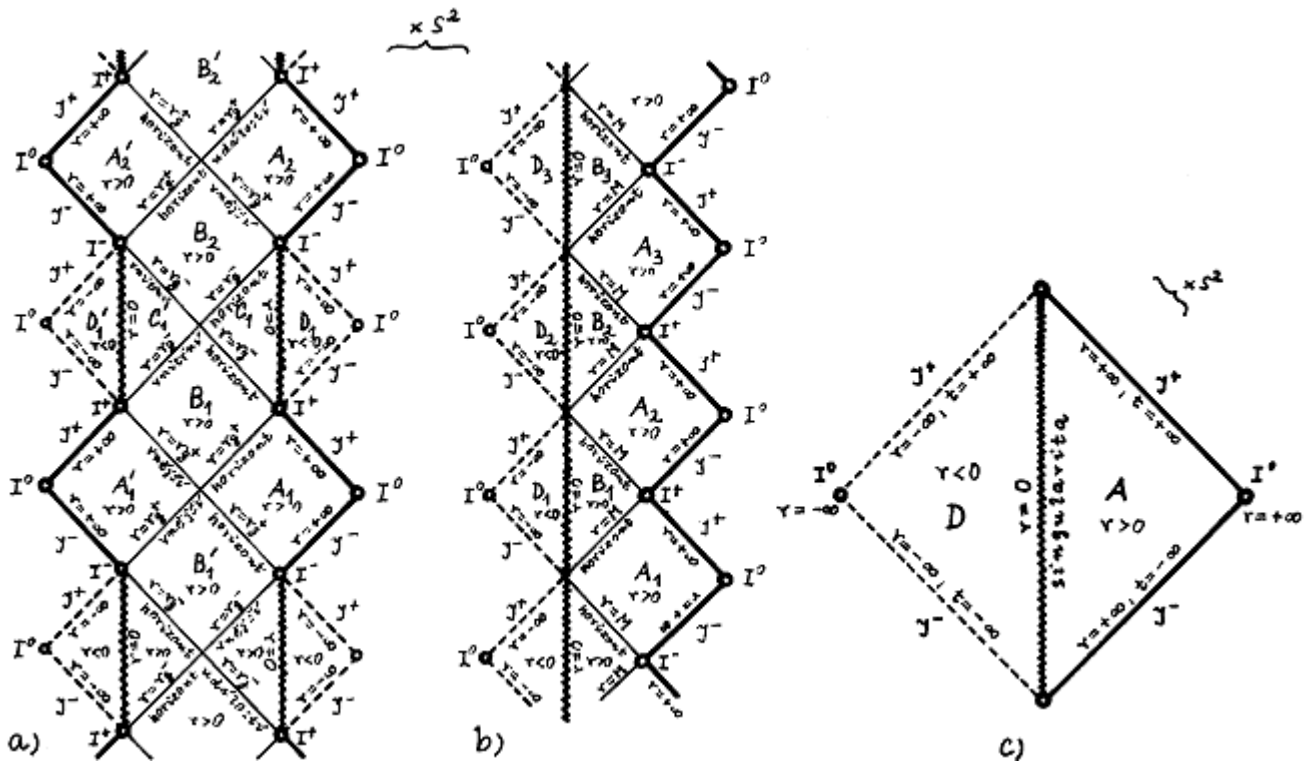
který je již analytický na  $r = r_g^+$  a  $r = r_g^-$ . **Úplná analytická extenze** se získá kombinací této metriky v souřadnicích  $(v_+, r, \vartheta, \varphi_+)$  a analogické metriky v souřadnicích  $(v_-, r, \vartheta, \varphi_-)$  daných transformací

$$dv_- = dt - \frac{r^2 + a^2}{r - 2Mr + a^2} dr, \quad (9.469)$$

$$d\tilde{\varphi}_- = d\varphi - \frac{a}{r^2 - 2Mr + a^2} dr.$$

**Konformní prostoročasový diagram** této úplné extenze Kerrovy geometrie je na obr. 10.28a. Globální struktura je zde podobná struktuře Reissnerova-Nordströмова prostoročasu, poněkud odlišná je však povaha skutečné singularity  $r = 0$ . Ukazuje se, že v Kerrově

prostorově má tato singularita **prstencovou strukturu** a je možno přes ni extrapolovat geometrii do záporných hodnot radiální souřadnice  $r$ .

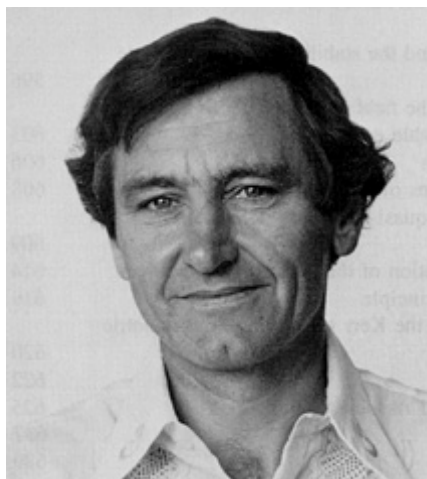


Obr.10.28. Konformní prostoročasový diagram úplné extenze Kerrovy geometrie podél osy symetrie.

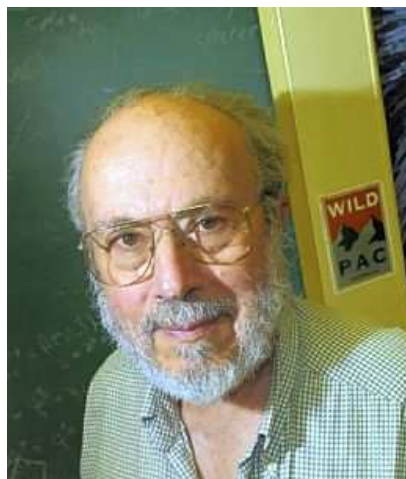
a) Příklad  $M^2 > a^2 > 0$ . b) Příklad  $M^2 = a^2$  (extrémní Kerrova geometrie). c) Příklad  $a^2 > M^2$  (Kerrova nahá singularita).

V případě  $M^2 = a^2$  je  $r_g^+ = r_g^- = M$ , vnitřní a vnější horizont spolu splývají. Úplná extenze této metriky znázorněná na obr. 10.28b má opět podobnou strukturu jako Reissnerova-Nordströmova geometrie při  $M^2 = Q^2$  s tím rozdílem, že je možné analytické prodloužení přes prstencovou singularitu do záporných  $r$ . Kerrova metrika v tomto případě popisuje prostoročasovou geometrii **extrémní** Kerrovy černé díry.

Pro  $a^2 > M^2$  je metrika ( 9.464 ) singulární pouze pro  $r = 0$ , což je skutečná singularita s prstencovou strukturou. Přes vnitřek této prstencové singularity lze řešení analyticky prodloužit do záporných hodnot  $r$  (obr. 10.28c). Žádný horizont zde není a singularita proto může oboustranně "komunikovat" s celým okolním prostoročasem - jedná se o **Kerrovu nahou singularitu**.



Roy Patrick Kerr (1934)



Ezra Ted Newman (1929)

Další zobecnění dostaneme, jestliže budeme uvažovat přítomnost osově symetrického elektromagnetického pole, tj. rotující axiálně symetrický zdroj bude mít **elektrický náboj**, který je rovněž axiálně symetricky rozložen. Geometrie prostoročasu kolem takového objektu se nazývá **Kerrova-Newmanova geometrie**; je to fakticky zkombinovaná Kerrova a Reissnerova-Nordströmova geometrie. Element prostoročasového intervalu (v Boyerových-Lindquistových souřadnicích) má tvar

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left( 1 - \frac{2Mr - Q^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \right) dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}{r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2} dr^2 + \\
 & + \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \left[ a^2 (r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2) \sin^2 \vartheta + (r^2 + a^2)^2 \right] d\varphi^2 + \\
 & + \frac{2a \sin^2 \vartheta}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} (Q^2 - 2Mr) d\varphi dt,
 \end{aligned}
 \tag{9.470}$$

kde  $Q$  je celkový elektrický náboj měřený vzdáleným pozorovatelem (buď pomocí toku vektoru elektrické intenzity  $\mathbf{E}$  uzavřenou plochou, nebo pomocí analýzy trajektorií nabitých testovacích částic). Stejně jako u Kerrova řešení, je i zde geometrie prostoročasu **stacionární a axiálně symetrická**. **Vnější horizont**  $r = r_g^+$  (horizont událostí) a **vnitřní horizont**  $r = r_g^-$  (Cauchyho horizont) mají poloměry

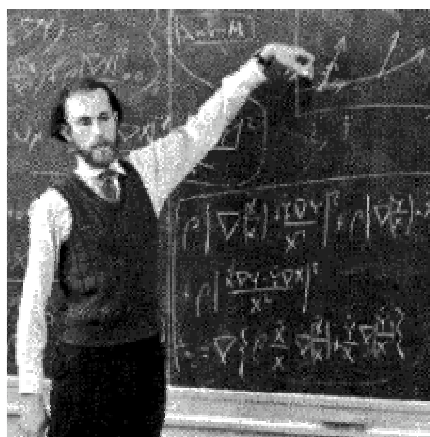
$$r_g^+ = M + \sqrt{M^2 - \frac{J^2}{M^2} - Q^2},$$

$$r_g^- = M - \sqrt{M^2 - \frac{J^2}{M^2} - Q^2}.$$
( 9.471 )

Globální geometrická struktura Kerrova-Newmanova prostoročasu je analogická jako u výše popsané Kerrovy geometrie. Jsou zde opět tři speciální případy:

$a^2 + Q^2 < M^2$  (**černá díra**),  
 $a^2 + Q^2 = M^2$  (**extrémní Kerrova-Newmanova geometrie**),  
 $a^2 + Q^2 > M^2$  (**nahá singularita**).

Carter ukázal, že v okolí prstencové singularity je oblast, v níž  $g_{jj} < 0$ ; zde axiální Killingův vektor  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  nabývá časový charakter, takže se zde objevují uzavřené světočáry časového typu (např. kružnice  $t = \text{const}$ ,  $r = \text{const}$ ,  $J = \text{const}$ ). V těchto oblastech kolem singularity tedy může dojít k **porušení kauzality**.



**Brandon Carter (1942)**

Velký význam Kerrovy-Newmanovy geometrie spočívá v tom, že je nejjobecnějším řešením pro stacionární axiálně symetrický asymptoticky rovinný prostoročas který má horizont událostí, tedy **nejjobecnějším řešením popisujícím černou díru** - v duchu teorému "černá díra nemá vlasy".

Pohyb testovacích částic (obecně nabitých) v obecném Kerrově-Newmanově prostoročase je podstatně komplikovanější než ve Schwarzschildově geometrii. I ve speciálním případě, když pohyb se bude dít jen v ekvatoriální rovině a nebudeme uvažovat elektrický náboj, bude trajektorie testovací částice v blízkosti horizontu (zvláště v ergosféře) rozhodujícím způsobem záviset mimo jiné na tom, zda moment hybnosti částice má souhlasný nebo opačný směr vzhledem k momentu hybnosti  $\mathbf{J}$  (tj. pohybuje-li se částice ve směru nebo proti směru rotace zdroje Kerrova pole).

Pohyb nabitých testovacích částic v důsledku působení elektromagnetických sil již obecně nebude probíhat po geodetikách; na pravé straně rovnice geodetiky bude místo nuly figurovat Lorentzova síla:

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} = \frac{q}{m} F_k^i \frac{dx^k}{d\lambda} \quad (9.472)$$

kde  $q$  je elektrický náboj testovací částice a  $F_{ik}$  je tenzor elektromagnetického pole spolupůsobícího jako zdroj dané Kerrově-Newmanovy geometrie.

Analýza pohybu testovacích částic v Kerrově-Newmanově poli se většinou provádí nikoli ze základní rovnice (9.472), ale pomocí jí ekvivalentních Hamiltonových-Jacobiho rovnic, z nichž se snadněji na základě symetrie stanovují integrály pohybu. Výsledné rovnice pohybu testovací částice s nábojem  $q$ , klidovou hmotností  $m_0$ , energií  $E$  vzhledem k nekonečnu, axiální složkou momentu hybnosti  $L_j$  a složkou  $p_j$  hybnosti odvodil Carter:

$$\begin{aligned} (r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) \frac{dr}{d\lambda} = & \left\{ \left[ (r^2 + a^2) E - L_\varphi a - qQr \right]^2 - (r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2) \cdot \right. \\ & \left. \left[ m_0^2 r + (L_\varphi - aE)^2 + p_\vartheta^2 + \left( a^2 (m_0^2 - E^2) + \frac{L_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \cos^2 \vartheta \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (9.473)$$



$$\begin{aligned} (r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) \frac{d\vartheta}{d\lambda} &= P_\vartheta, \\ (r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) \frac{d\varphi}{d\lambda} &= -aE - \frac{L_\varphi}{\sin^2 \vartheta} + \frac{(r^2 + a^2)E - L_\varphi - qQr}{r - 2Mr + a^2 + Q^2}, \\ (r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) \frac{dt}{d\lambda} &= -a(aE \sin^2 \vartheta - L_\varphi) + (r^2 + a^2) \frac{(r^2 + a^2)E - L_\varphi - qQr}{r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2}. \end{aligned} \quad (9.474)$$

Jelikož gravitační i elektromagnetické pole je stacionární a axiálně symetrické (tj. jak složky metriky  $g_{ik}$ , tak čtyřpotenciál  $A_k$  nezávisí na  $t$  a na  $\varphi$ ), budou při pohybu testovací částice následující veličiny konstantami (integrály) pohybu: energie  $E$  vzhledem k nekonečnu, axiální složka  $L_\varphi$  momentu hybnosti vzhledem k ose symetrie, elektrický náboj  $q$  částice a její klidová hmotnost  $m_0$  (která v každém bodě trajektorie souvisí se čtyřhybností částice vztahem

$$m_0 = \sqrt{-g^{ik} p_i p_k}. \quad (9.475)$$

Další integrál pohybu, který neplyne z uvedených symetrií, našel Carter:

$$C = P_\vartheta^2 + a^2 (m^2 - E^2) + \frac{L_\varphi^2 \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta}, \quad (9.476)$$

protože tuto veličinu v dalším nebudeme potřebovat, do rovnic pohybu (9.474) jsme ji nezavedli.

Teorémy zmíněné v předchozím odstavci předpovídají existenci singularit v řadě fyzikálně reálných situací. Mnohá přesná řešení Einsteinových rovnic mají singularity. Singularity uvnitř černých děr mají tu důležitou vlastnost, že jsou obklopeny horizontem událostí, který je brání "vidět" a znemožňuje jakékoliv ovlivňování ostatního vesmíru danou singularitou.

Vzniká otázka, zda mohou existovat "**nahé**" ("obnažené") **singularity bez horizontu**. Například formálním položením  $Q^2 + J^2/M^2 > M^2$  ve

výrazu ( 9.464 ) pro Kerrovu-Newmanovu geometrii dostaneme tzv. Kerrovu nahou singularitu bez horizontu.

Podle dnešních poznatků je vysoce pravděpodobné, že taková nahá singularita vzniknout nemůže, každá singularita je "oblečena" do horizontu, což R. Penrose metaforicky nazval **principem kosmické cenzury** (uvádíme zde jeho stručné znění):

V původně nesingulárním (tj. vyvíjejícím se z nesingulárních počátečních podmínek na vhodné Cauchyho hyperploše podle zákonů OTR) asymptoticky rovinném prostoročase  $M$  se neobjeví žádná prostoročasná singularita, která by byla vidět z nekonečna - každá singularita, jež zde v průběhu evoluce vznikne (např. gravitačním kolapsem), bude **obklopena horizontem událostí**.

Teorém se podařilo plně dokázat až koncem 80. let minulého století pro případ extrémní Kerrový černé díry. Pod tímto důkazem jsou podepsáni především Bill Press, Steven Detweiler, Subrahmanyan Chandrasekhar, Saul Teukolsky, Bernard Whiting, James Ipser, James Hartle, Dan Wilkins a Werner Israel. Ukázali, že při snaze dosáhnout extrémní Kerrový černé díry budou vznikat stále mohutnější perturbace a oscilace horizontu, odchyloující jej od dokonalé sférické symetrie. V důsledku těchto nestabilit získá horizont nenulový kvadrupólový moment a bude vyzařovat mohutné gravitační vlny, odnášející z černé díry rotační kinetickou energii. Fyzikální princip tak přímo brání vzniku nahé singularity Kerrova typu.

Pro případ Kerrový – Newmanovy nahé singularity je situace komplikovanější a k důkazu platnosti principu kosmické cenzury se tentokrát neobejdeme bez kvantové teorie pole:

Párová produkce částic-antičástic v poli nahé singularity vede k toku kvantového záření z ní, čímž singularita ztrácí hmotnost, rotační moment hybnosti i elektrický náboj. Mechanismus kvantového vyzařování je poněkud odlišný než u černých děr a závisí na konkrétní prostoročasové struktuře nahé singularity (na tom, kam mohou jednotliví partneři v páru částice-antičástice "tunelovat", obr. 10.30). Kvantové vyzařování nahé singularity vede k jejímu "oblékání" do horizontu, tedy k přeměně na černou díru.



**William H. Press (1948)**



**Subrahmanyan Chandrasekhar  
(1910 – 1995)**



**Werner Israel (1931)**



**Steve Detweiler (1950)**



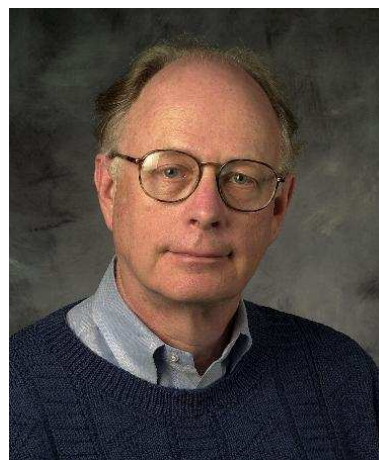
**Saul Teukolsky (1947)**



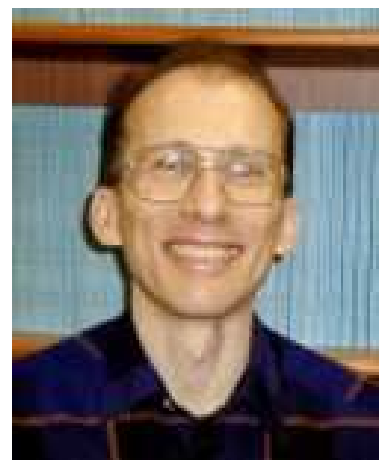
**Bernard Whiting (1953)**



**James R. Ipser (1943)**

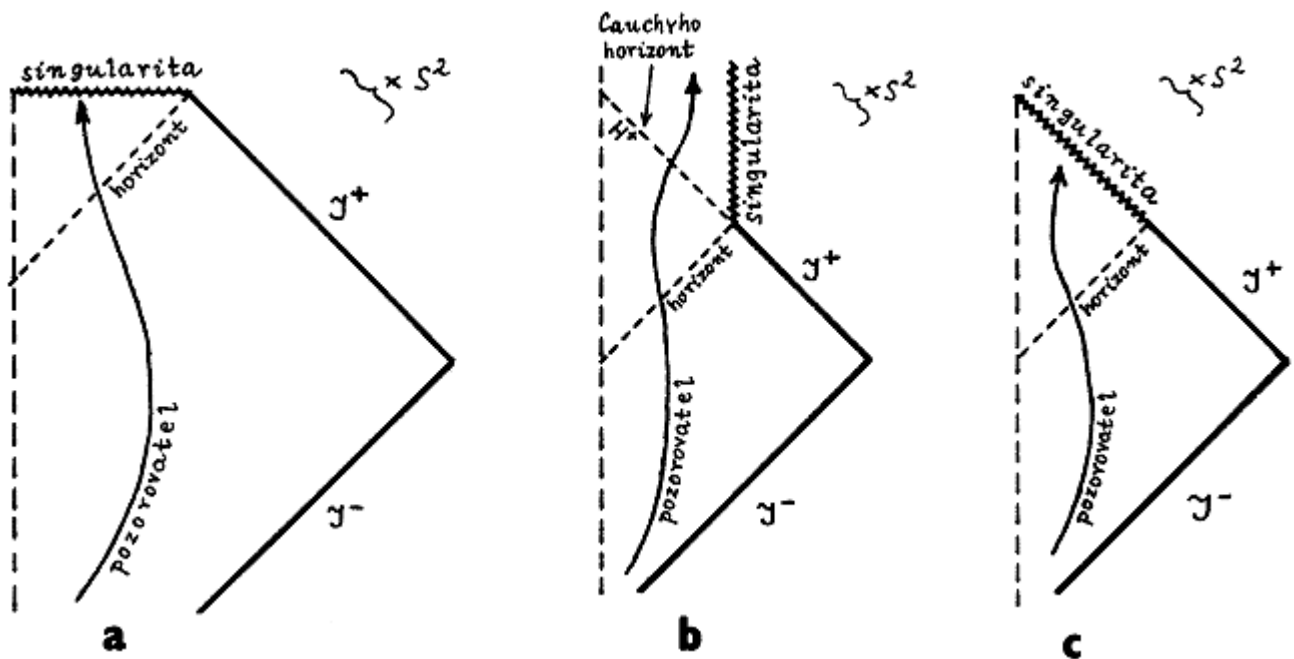


**James Burkett Hartle (1939)**



**Daniel Wilkins (19)**

Pod nahými singularitami podléhajícími kosmické cenzuře jsme zatím rozuměli "globálně" nahé singularity viditelné z nekonečna. Princip kosmické cenzury ve formulaci teorému 3.8 zabraňuje sice singularitám nekontrolovatelně ovlivňovat fyzikální děje "v nekonečnu" (v dostatečné vzdálenosti od singularity), nic však nehovoří o situaci v blízkosti samotné singularity. Jednalo by se tedy o "**lokálně nahou**" singularitu. Rozšířený (objektivně chápaný) princip kosmické cenzury by měl samozřejmě zakazovat i tyto lokálně nahé singularity.



**Obr. 10.29. Nestabilita prostoročasového charakteru singularity ve Schwarzschildově a Kerrově-Newmanově řešení vůči perturbacím ve vztahu k principu kosmické cenzury.**

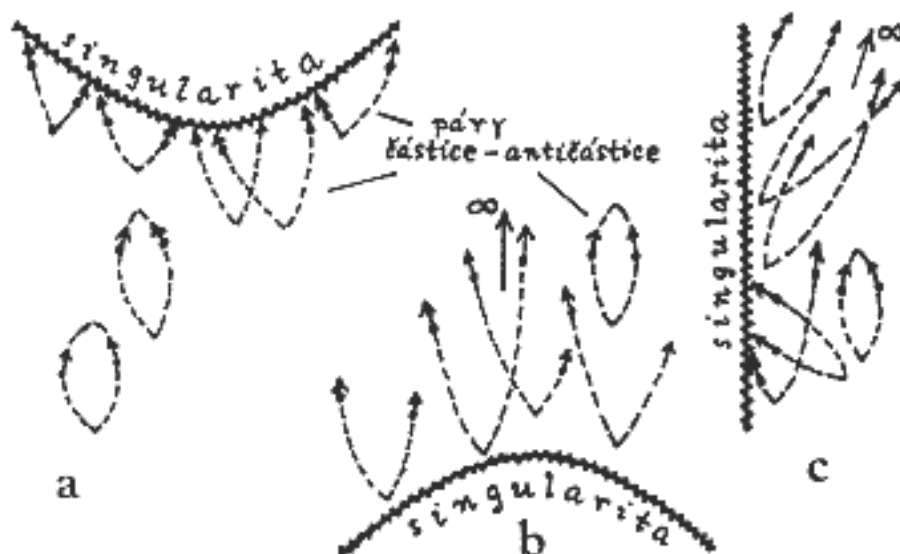
**a)** Pro přesně sféricky symetrický případ (bez perturbace) má v odpovídajícím Schwarzschildově řešení singularita všude prostorový charakter, takže žádný pozorovatel nemůže tuto singularitu uvidět předtím, než se s ní srazí - rozšířený princip kosmické cenzury je splněn.

**b)** Přidání i nepatrného momentu hybnosti nebo elektrického náboje vede ke Kerrově nebo Reissner-Nordströmově řešení, v němž singularita nabývá časový charakter. Pozorovatel pod vnitřním (Cauchyovým) horizontem může takovou singularitu vidět - je lokálně nahá.

**c)** Cauchyho (vnitřní) horizont  $H^+$  z obr. **b**) je však nestabilní vůči perturbacím ve vnější oblasti: signály z nekonečně vzdálených oblastí  $S$  nabudou na  $H^+$  nekonečně velký fialový posuv, takže slabá pole perturbací budou na  $H^+$  divergovat - v místě  $H^+$  tak vznikne singularita křivosti, která bude izotropního typu (nelineární efekty v poli velké křivosti by dokonce mohly vést ke vzniku singularity prostorového typu - srovnej s obr. 4.22). Princip kosmické cenzury by tak byl rovněž splněn.

Podívejme se, jak z tohoto hlediska obstojí singularity s nimiž jsme se setkali u nejjednodušších přesných řešení Einsteinových rovnic. Singularita  $r = 0$  ve Schwarzschildově sféricky symetrickém prostoročase zřejmě vyhovuje rozšířenému principu kosmické cenzury, protože má všude prostorový charakter (obr. 10.29a), takže lokálně nahá singularita zde není (singularitu nelze vidět před srážkou s ní). Schwarzschildova singularita je však nestabilní: dodání i nepatrného momentu hybnosti nebo elektrického náboje vede ke Kerrově nebo Reissnerově-Nordströmově řešení, kde singularita přestává být prostorová, ale je časového typu (obr. 10.29b). Z obr. 10.29b je vidět, že taková singularita je lokálně nahá, protože např. pozorovatel, jehož světočára je vyznačena, ji může vidět aniž se s ní srazí. Na obr. 10.25 jsme dokonce viděli situaci, kdy se pozorovatel může zcela vyhnout pohlčení singularitou a proniknout do dalšího "vesmíru", pro nějž zmíněná singularita bude globálně nahá (bude zde vidět i z nekonečna). Pro strukturu prostoročasu je zde však rozhodující vnitřní horizont  $r = r_g^-$ , který je Cauchyovým horizontem každé prostorové hyperplochy sahající do prostorového nekonečna. Pozorovatel, který prochází tímto vnitřním horizontem  $H^+(S)$ , uvidí celou budoucí historii vnějšího světa zhuštěnou do jediného časového okamžiku.

Pokud budou v počátečních podmínkách na Cauchyho hyperploše  $S$  přítomny nějaké perturbace (obecného charakteru - např. nějaká slabá pole), potom signály ze vzdálených oblastí  $S$  budou u horizontu  $H^+$  dosahovat nekonečně velký "fialový posuv", což povede k divergenci podél  $H^+$ . Vnitřní horizont je tedy **nestabilní vůči perturbacím** v prostorovém nekonečnu, takže v obecném případě (tj. ve skutečnosti) lze v místě  $H^+$  očekávat singularitu křivosti, která bude izotropního typu (obr. 10.29c); nelineární efekty v poli velké křivosti by mohly vést i k singularitě prostorového typu, jak je vyznačeno na obr. 10.22. Zdá se tedy, že v asymptoticky plochých prostoročasech OTR je rozšířený princip kosmické cenzury splněn.



**Obr.10.30. Možnosti kvantové produkce částic a antičástic v silném gravitačním poli v blízkosti singularity.**

a) Pokud je singularita prostorového typu a nachází se v budoucnosti, nemají tyto částice kam odlétnout a jsou vždy pohlcovány singularitou.

b,c) Jestliže se singularita nachází v minulosti nebo je časového typu, existují časové nebo izotropní světočáry, podél nichž tyto částice a antičástice mohou odcházet pryč od singularity.

Charakteristickou vlastností lokálně nahé singularity je její "časová omezenost": existence takové křivky časového typu (světočáry po níž by se mohl pohybovat pozorovatel), na níž existují body *A* a *B* takové, že singularita leží v budoucnosti bodu *A* a v minulosti bodu *B*. Co se tedy týče vřezahrnující kosmologické singularity "velkého třesku", princip kosmické cenzury se na něj vlastně nevztahuje; nejedná se o lokálně nahou singularitu, protože před velkým třeskem žádný pozorovatel neexistoval.

### **Astrofyzikální důsledky smyčkové kvantové gravitace**

K Ashtekarově práci významně přispěl Ashtekarův bývalý doktorand Martin Bojowald, který dnes působí v Ústavu Maxe Plancka pro gravitační fyziku v Postupimi. Ukázal totiž, jak spinová síť mohla zažehnout velký třesk. Martin Bojowald se zabývá aplikacemi Ashtekarova formalismu na kvantovou kosmologii a na singularity v časoprostoru. Spojení mezi velkým třeskem a vnitřkem černé díry však existuje celá řada. Lee Smolin vyslovil hypotézu, že singularita v černé díře je "velký třesk", z něhož se narodí nový vesmír, potomek toho

původního, a díky předpokládané "mutaci" lze pak aplikovat zákony evoluční teorie.

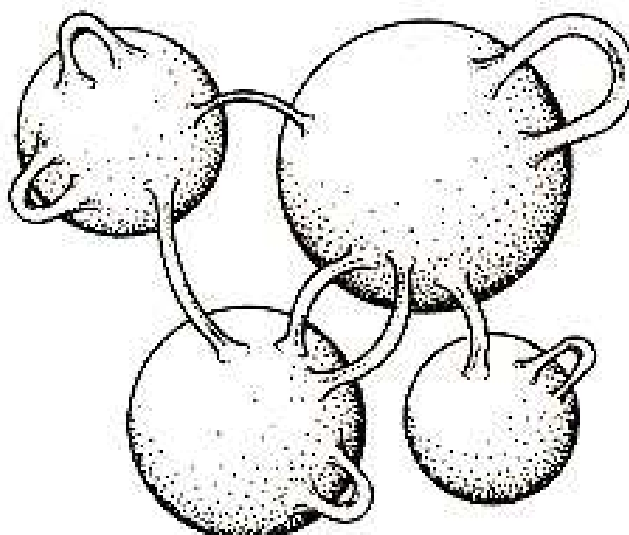


**Lee Smolin (1955)**



**Martin Bojowald (1975)**

Když se nám podaří zkoncentrovat hmotu zcela určitým způsobem, může vzniknout kolapsar jehož prostoročasová geometrie odpovídá např. Reissnerovu – Nordströmovu, či Kerrovu řešení, nebo jejich vzájemné kombinaci (tzv. Kerrova - Newmanova geometrie). Všechna tato řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole obsahují červí díry, jakožto tunely spojující jednak různé oblasti našeho vesmíru (tzv. vícenásobná souvislost prostoročasu) a jednak ústící i do vesmírů jiných.



**Obr. 10.30: Červí díry vážící různé vesmíry samy se sebou tzv. uchy a k jiným vesmírům tzv. hrdly.**

Právě možnost vyfouknutí nového vesmíru skrze uměle nebo přirozeně vytvořenou červí díru vede k velmi lákavé myšlence, že dceřinné vesmíry mohou po vesmírech mateřských zdědit jejich fyziku. To vedlo v minulosti k formulaci velice zajímavé **hypotézy evoluce vesmírů** vyslovené v 80. letech minulého stol. rovněž např. Andrejem Lindem - autorem teorie chaotické inflace - dosud nejpřijímanějšího inflačního scénáře vzniku vesmíru, ale i dalšími autory, nezávisle na sobě. Tato hypotéza v podstatě říká, že vesmíry, jejichž fyzika dovoluje vznik velkého množství černých a potažmo i červích děr, jsou zároveň mimořádně příznivé pro vznik života. Mají dostatečnou hustou hmoty, ale nesmí být zas moc veliká, neboť by pak měly příliš malou životnost a tedy nedostatek času pro tvorbu velkého množství červích děr. Musejí mít také přesně 3 velké prostorové dimenze a jednu časovou, atd.



**Charles Robert Darwin (1809 -1882)**

Zkrátka, pouze vesmír, který má velké předpoklady stvořit inteligentní život, má shodou okolností zároveň nejvyšší „fitness“ v Darwinovském smyslu tohoto slova, tj. nejvyšší schopnost plodit potomky a předávat svoje „geny“ – svoji fyziku – dceřiným vesmírům. To vede k domněnce, že ač je fyzika právě našeho vesmíru (v té změti nepřeborných možností které si vesmír při svém zrodu mohl zvolit) velice málo pravděpodobná, může být tento model přesto v superprostoru tím vůbec nejrozšířenějším, neboť vede k nejvyššímu počtu identických, nebo velmi podobných kopií. A právě jen tento model (či ještě několik málo jeho subspécií) je zároveň jediný slučitelný se vznikem biologického života (srov. antropický princip).

Co se týče energie-hmoty vesmíru, ta s hmotností oné počáteční černé



díry nikterak nesouvisí. Celková energie jakéhokoliv vesmíru (i toho našeho) je nula, takže i kvantová červí díra může na druhém konci expandovat do obřího vesmíru jako je ten náš, aniž by byl při tom porušen nějaký zákon zachování. To, co se z oné červí díry primárně vyfoukne je de facto pouze samotný prostoročas. Hmota se v něm objeví až coby důsledek zákonů zachování celkové energie (tj. klidové a vazebné) v kvantových polích.

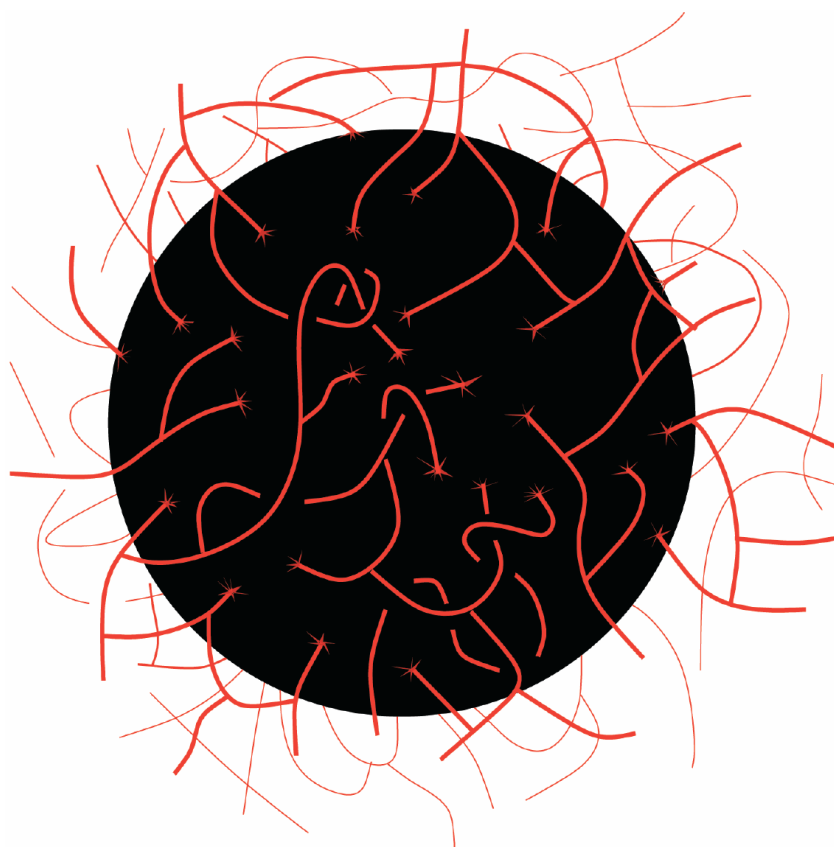
Černé díry jsou ústředním tématem pro testování kvantové geometrie. Zvláště jejich termodynamika je nepochybně klíčovým předmětem studia kvantové gravitace. Ashtekar již v minulosti úspěšně přispěl k jejich lepšímu pochopení v kontextu obecné teorie relativity. Nyní objevil, jak černé díry rostou. Avšak kvantová geometrie je schopna vysvětlit více, například jak se znovu smršťují. V roce 1974 zjistil Stephen Hawking, že černé díry kvantově vyzařují, čímž ztrácejí energii/hmotu.

Již Albert Einstein poukázal, že existuje taková možnost. Počátkem 20. století objevil, že hmota a záření nejsou dvě odlišné entity, ale že se mohou navzájem přeměňovat. Kvanta záření a hmoty jsou v podstatě totéž. Albert Einstein také ukázal, že geometrie je fyzikální entita podobně jako hmota. Proto se záření a hmota mohou přeměňovat v geometrii a naopak.

K matematickému úspěchu teorie se přidává i úspěch "fyzikální" - předpověď entropie čili informace spolykané černými dírami. Entropie by byla spojena s teplotou různou od nuly a to by skutečně znamenalo záření černé díry - v rozporu s naprostou čerností vyplývající z klasické teorie. Toto záření, musí být tedy čistě kvantový jev. J. Bekenstein a S. Hawking toto záření předvídali již v 70. letech minulého století na základě jiných úvah. Spojovali je s vytvářením dvojic částic (částice + antičástice) silnou gravitací v bezprostřední blízkosti černé díry. Známý Hawkingův jev byl tehdy odvozen semiklasickým postupem: Silná křivost prostoročasu (klasická přísada) povzbuzuje záření nějakého přítomného kvantového pole. Takovéto předběžné, v jistém smyslu nedůsledné úvahy nejsou ve fyzice ničím neobvyklým. Pomáhají předvídat výsledky, které jednou přinese dosud neexistující důslednější teorie. Je proto velmi významné, že nová teorie potvrzuje Hawkingův jev na fundamentálnější úrovni.

Základním principem kvantové geometrie je tvrzení, že existují kvanta geometrie. To je přesně ten kousek skládačky, která Stephenu Hawkingovi chyběla, protože uvažoval klasický prostoročas obecné teorie relativity. Ashtekar říká, že Hawking zcela nenaplnil Einsteinovu vizi, protože se kvantově zabýval pouze hmotou a energií. V kvantové geometrii je však také horizont událostí černé díry kvantován. Můžeme si jej představit jako povrch složený z elementárních buněk nul a jedniček. Každá tato nepatrná buňka odpovídá "vláknku" spinové sítě, která protíná horizont událostí. V případě černé díry o hmotnosti Slunce existuje  $10^{77}$  takových vláken a proto  $10^{10^{77}}$  různých kvantových stavů, které představují ohromnou entropii černé díry. Zvláštní lokální charakteristiky této spinové sítě tento horizont událostí definují. Když se černá díra kvantově vypařuje, tato vlákna se postupně ztrácejí. Při Hawkingově radiaci se kvanta horizontu černé díry přeměňují na kvanta hmoty a energie.

Obr. 20.31



Podle Ashtekara jde přesně o naplnění Einsteinovy představy, podle níž geometrie má fyzikální význam. Dokonce se přeměňuje v hmotu.

Tento proces neprobíhá spojitě, ale v celistvých krocích, protože je kvantován. Černá díra se proto nesmršťuje spojitě, ale chová se spíše jako excitovaný atom, který ztrácí energii po kvantech.

Kvantová geometrie má ještě jeden důsledek, který Ashtekar a jeho kolegové teprve zkoumají. Umožňuje se vyhnout singularitám uvnitř černých děr a velkého třesku. Snad také vyřeší známý paradox informace. Martin Bojowald předpokládá, že informace, která dopadá na černou díru, se neztrácí, ale znovu se objevuje v dceřinném vesmíru. Společným jmenovatelem řady problémů se **singularitami** a **nekonečny** v nekvantové i kvantové teorii pole, jsou limitní přechody typu  $r \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0$  a pod., při nichž hodnoty polí (nebo i metriky prostoročasu) často divergují. Tyto limitní přechody jsou umožněny **spojitou povahou** prostoročasu, v němž můžeme chování fyzikálních polí vyšetřovat v principu až do nekonečně malých měřítek geometrického bodu.

V kvantové geometrii s **diskrétní strukturou prostoročasu** neexistují limitní přechody k nulovým prostorovým vzdálenostem a časovým intervalům, takže by neměly vznikat nekonečné divergující hodnoty polí a singularity prostoročasu.

### Smyčková kvantová kosmologie

Aplikace na Friedmannův model vesmíru vede k tomu, že škálový faktor  $a$  je škálovým faktorem triády, a tak záporné hodnoty  $a$  neznamenaají zásadní problém – záporné  $a$  označuje pouze jinou orientaci triády.

I problém singularity má v kvantové geometrii přirozenější řešení.

Ve standardní kosmologii nebylo možné najít Hilbertův prostor vlnových funkcí, které by byly nulové v singulárním bodě  $a = 0$ .

V kvantové geometrii zdědí i škálový faktor  $a$  diskretnost metrických veličin.

Hamiltonovská vazba se dá vyjádřit operátorem objemu, operátory  $\hat{\mathbf{a}}$  a  $\hat{\mathbf{V}}$  mají stejné vlastní funkce  $|n\rangle$

$$\hat{\mathbf{a}}|n\rangle \sim \sqrt{n}|n\rangle, \quad (9.477)$$

$$\hat{V}|n\rangle \sim l_P^3 \sqrt{\frac{|n|-1}{2} \frac{|n|}{2} \frac{|n|+1}{2}} . \quad (9.478)$$

Vlnovou funkcí vesmíru je pak superpozice stavů  $|n\rangle$ , kde koeficienty závisí na hmotném zdroji gravitace, např. na kvantovém skalárním poli  $\Phi$ .

Stavovou funkcí vyhovující hamiltonovské vazbě, je tedy

$$|s, \Phi\rangle = \sum_n s_n(\Phi) |n\rangle , \quad (9.479)$$

kde  $s$  označuje stav geometrie,  $\Phi$  stav skalárního pole.

Hamiltonovská rovnice vazby nabývá tvaru rovnice diferenční namísto rovnice diferenciální.

Problém singularity je řešen tím, že koeficient singulárního stavu  $|0\rangle$  v příslušné rovnici je roven nule, takže singulární stav v řešení vůbec nevystupuje.

Volbou uspořádání operátoru v hamiltonovské vazbě se dá modelovat inflace vesmíru.

Vyhnutí se singularitě je podstatným rozdílem ve srovnání se semiklasickým modelem standardní kvantové kosmologie.

Pro velká  $n$  se oba modely klasickému chování blíží.

Dalším výsledkem smyčkové kvantové kosmologie je existence minimální energie, řádově rovné Planckově energii  $E_p$  v počátečním stavu, když je průměr vesmíru v okolí hodnoty Planckovy délky.

## Perspektiva smyčkové kvantové gravitace

Einsteinova speciální teorie relativity stojí na dvou postulátech: prvním z nich je relativita pohybu, druhým je invariance rychlosti světla (Lorenzova invariance). Až do nedávné doby nebylo příliš známo, že lze sestavit konzistentní teorii s pozměněným druhým postulátem.

Konzistentní teorie s narušenou lorentzovskou invariancí se však před nedávnou dobou podařilo zkonstruovat a nazývají se obecně DSR (Double Special Relativity) teoriemi. Motivace pro tuto konstrukci je

jednoduchá – vyjdeme-li z představy, že Planckova buňka je nejmenším kvantem prostoru a Planckova energie naopak největším kvantem energie, pak se přirozeně vkrádá otázka, jak zachovat invarianci Planckovy délky a Planckovy energie vůči všem pozorovatelům nezávisle, na jejich relativní rychlosti. Tento zjevný problém si poprvé uvědomil až v roce 1999 Giovanni Amelino-Camelia. Vytvořil teorii, podle které se na subkvantových rozněrech relativistický efekt kontrakce délek odchyluje od předpovědí STR a na Planckově délce limitně zcela vymizí.



Andreas Albrecht ( 1957 )



John Moffat ( 1932 )

V roce 2000 Joao Magueijo, Andreas Albrecht, John Moffat a Lee Smolin rozpracovali modifikaci speciální teorie relativity založené na invarianci Planckovy délky. Jejich práce byla založena na staříčké a téměř zapomenuté myšlenkové konstrukci Vladimira Focka. Problém spočíval v tom, kterak zachovat principy STR ale pozměnit její pravidla tak, aby se všichni pozorovatelé shodli nejen na univerzální hodnotě rychlosti světla ale také na univerzální hodnotě Planckovy délky. Konstantní rychlostí se v této konstrukci pohybují pouze fotony s velmi malou energií. Nezávisle na této práci použil Giovanni Amelino-Camelia aparát matematické **teorie kvantových grup** rozvinuté britským matematickým fyzikem Shahn Majidem. Majidovým cílem bylo najít jednotné matematické vyjádření základních pojmů teorie relativity a kvantové teorie. Dospěl k revolučnímu zobecnění klasických symetrií ve formě kvantových grup a následné modifikaci Einsteinovy teorie relativity v kontextu tzv. **nekomutativní geometrie** – objevu matematického fyzika Alaina Connese. Jedním z velkých úspěchů nekomutativní geometrie je, že vede přímo ke standardnímu modelu.

Přepíše-li se Maxwellova elektrodynamika do nejjednodušší možné nekomutativní geometrie, dostaneme WSG elektroslabé sjednocení. Jinými slovy, automaticky se vynoří Higgsovo pole i elektroslabá interakce.



**Shahn Majid ( 1960 )**



**Alain Connes ( 1947 )**

Tento matematický aparát se ukázal nezbytným k úspěšnému vyjádření DSR. Ukázalo se, že v teoriích DSR cestují fotony s vyšší energií nepatrně rychleji, než nízkoenergetické fotony. Pokud se však jejich energie blíží Planckově energii, roste jejich rychlost nade všechny meze. Protože ve velmi ranném vesmíru panovaly obrovské teploty a energie, byla podle DSR rychlost světla mnohem větší. Pokud by se potvrdila platnost DSR, staly by se všechny inflační modely zbytečnými, neboť všechny oblasti vesmíru kdysi mohly být v kauzálním kontaktu, a tudíž mohly snadno synchronizovat svoji teplotu. Roku 2001 se výše jmenované skupině teoretiků za významného přispění polského fyzika Jerzy Kowalskiho-Glikmana a francouzských teoretiků Laurenta Freidela a Etera Livina podařilo prokázat logickou bezespornost celé teorie na modelu třírozměrného prostoročasu. Ukázali, že DSR platí v libovolném světě, který má dva prostorové rozměry, kvantovou gravitaci a obsahuje hmotu. Na Planckovských rozměrech podle této nové teorie existuje absolutní vztažná soustava, umožňující absolutně rozlišit pohyb a klid částic. Úspěchy smyčkové kvantové gravitace z posledních let naznačují, že by se mělo brzy podařit zobecnit DSR i na čtyřrozměrný prostoročas.



Jerzy Kowalski-Glikman ( 1970 )



Laurent Freidel ( 1968 )

Největší výzvou pro LQG bylo objasnit, jak se z kvantového popisu vynořuje klasický prostoročas. V několika posledních letech bylo v tomto směru dosaženo velikého pokroku. Carlo Rovelli se svými spolupracovníky z centra pro teoretickou fyziku v Marseille před nedávnem dokázali, že smyčková kvantová gravitace generuje v nízkoenergetické limitě newtonovskou gravitaci. Na rozdíl od Newtonovy teorie však tato teorie generuje rovněž i gravitony. Výpočty ve vysokoenergetické limitě pak ukazují, že černé díry ve skutečnosti neobsahují vůbec žádné prostoročasové singularity. Kolabující hmota namísto ukončení své světočáry v singularitě projde tzv.

**prostoročasným odrazem**, na jehož konci pronikne do nově vytvořené prostoročasové oblasti (prostorově sériového vesmíru). Informace se tedy doopravdy neztrácejí – pouze přetečou do jiného vesmíru. Stejně metody byly použity rovněž ke studiu velice raného vesmíru. I v tomto případě je iniciační singularita eliminována a teorie předpovídá existenci vesmíru i před velkým třeskem (tehdy hovoříme o vesmírech sériově propojených v čase).

V roce 2006 objevila Fotini Makropoulou nový přístup k problému, jak vytvořit klasickou geometrii z fundamentálnější kvantové teorie. Její myšlenka vychází z představy, že částice musejí být jistým druhem emergentních excitací kvantové geometrie, který se šíří podobně, jako vlny v pevném či tekutém prostředí. Abychom však tímto způsobem zrekonstruovali celý standardní model, je nutno zmíněné emergentní

částice vyjádřit jako čistě kvantové objekty šířící se prostoročasem, jehož kvantový charakter lze zanedbat. Za běžných okolností se při interakci částic s okolím ztrácí informace o jejich kvantovém stavu. Tomuto jevu, známému jako **dekoherence** je velmi obtížné zabránit, o čemž dobře vědí např. konstruktéři kvantových počítačů, jejichž podstata spočívá právě v udržení čistých kvantových stavů, ačkoli jsou v kontaktu s okolím. Díky spolupráci s těmito odborníky, kteří velmi dobře vědí, za jakých okolností lze kvantové systémy v čistých kvantových stavech udržet, Makropoulou zjistila, že obdobné myšlenky je možné aplikovat i na problematiku vynořování částic z dynamického kvantovaného prostoročasu.

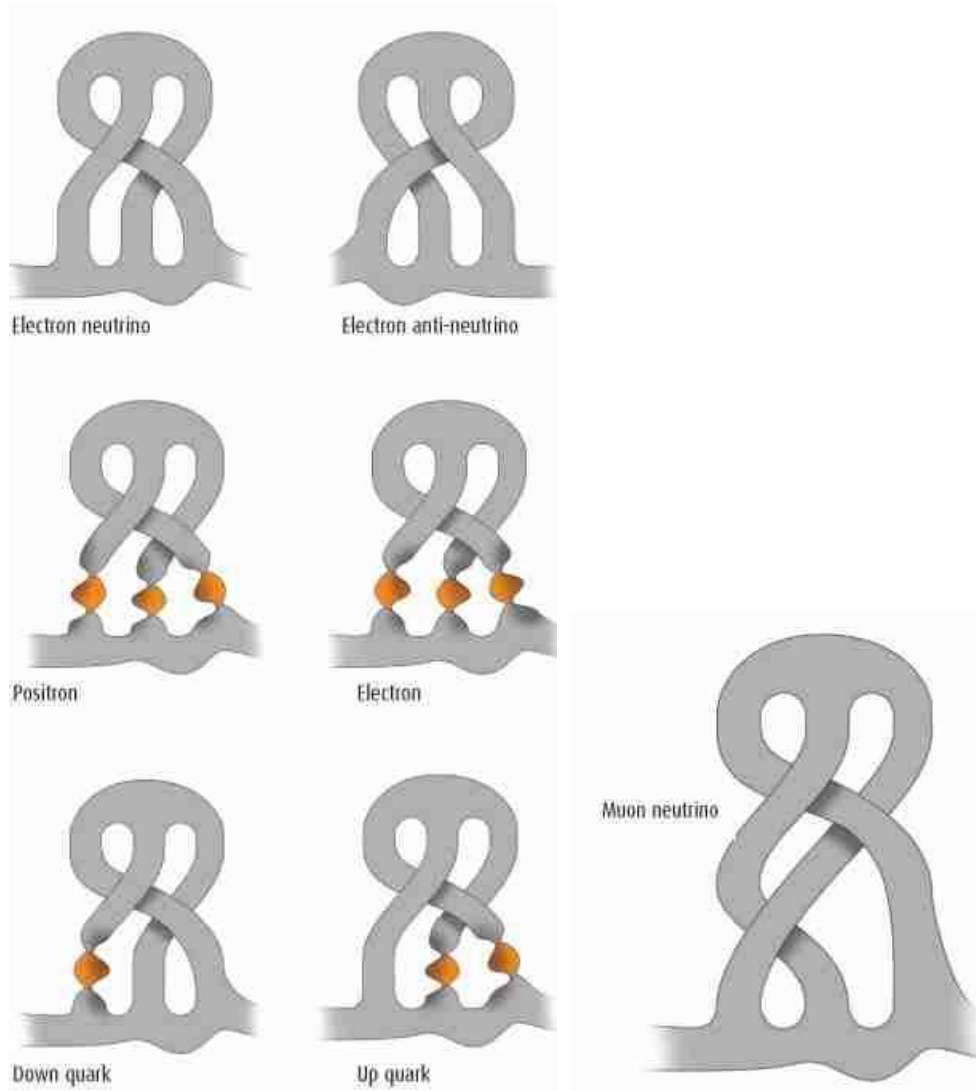
Problém zprvu vypadal obtížně, neboť kvantové geometrie předpovídané LQG jsou velmi komplikované. Stavby částic odpovídají grafům ve třírozměrném prostoru, který vyjma topologie nemá žádnou pevnou geometrii. Ta se odvozuje teprve na základě uvedených grafů. Teorie obsahuje spoustu dodatečných informací, které na první pohled s geometrií přímo nesouvisejí. Důvodem je, že hrany spojující různé vrcholy grafu se v třírozměrném prostoru mohou proplétat, uzlit a propojovat mnoha různými způsoby. Na jaře 2005 publikoval australský fyzik Sundance O. Bilson-Thompson článek, popisující proplétání smyček, které s vysokou přesností zachycují strukturu preonového modelu částic, o němž jsme hovořili v 9. kapitole. V tomto smyčkovém pojetí je preon chápán jako páska a různé druhy preonů odpovídají různým jejím přetočením. Tři takové pásky můžeme do sebe zaplést mnoha různými způsoby, jež přesně odpovídají všem různým částicím standardního modelu. To byl onen chybějící článek, který zbýval LQG k zahrnutí standardního modelu. Různé způsoby zaplétání a propojování hran grafu kvantového prostoročasu odpovídají různým druhům elementárních částic.





Sundance Osland Bilson-Thompson ( 1979 )

Obr. 10.32



Při vyšetřování malých odchylek pozoroval L. Smolin roku 1997, že poruchy mají podobu uzavřených smyček v prostoru a že jejich časový vývoj se shoduje s tím, který nastává u jednoduchých strunových modelů. Budoucnost ukáže, zda některý z uvedených postupů anebo nějaké sjednocení obou povede k úspěchu.

Následující velký cíl spočívá ve spojení známé fyziky nízkých energií s fundamentální fyzikou spinových sítí. Bylo by ohromným úspěchem, pokud by se podařilo celou známou fyziku podrobně odvodit z kvantové geometrie. Technickým mostem mohou být **stínové stavy**. Tím je míněn určitý druh projekce fyzikálních stavů do grafů. Avšak zásadní test kvantové geometrie by měl spočívat v jiném extrému, v popisu velkého třesku a černých děr. Jak jsme si již vysvětlili, kvantová fyzika nemizí velkým třeskem. Klasický prostoročas sice blízko velkého třesku zaniká, avšak spinová síť existuje dále. Představuje v určitém smyslu věčnost. Vesmír tedy nevzniká z "ničeho", protože "nic" jednoduše neexistuje. V tomto smyslu kvantová geometrie poskytuje filozofickou výhodu při řešení zdánlivě neřešitelných problémů. Její síla spočívá v nezávislosti na metrice prostoročasu na pozadí. Hmota a geometrie prostoročasu totiž vznikají společně kvantově mechanicky.

Černé díry a velký třesk jsou velmi exotické stavy. Snad však existuje možnost, jak testovat kvantovou geometrii pozorováním za méně extrémních podmínek. Giovanni Amelino-Camelia z Univerzity *La Sapienza* v Římě navrhl studovat fotony s velmi vysokou energií, které se pohybují vesmírem na velké vzdálenosti, jako jsou výtrysky záření gama nebo záření z roentgenových galaxií.



Giovanni Amelino-Camelia (1965)

V záření se mohou vyskytovat malé odchylky dráhy, které by mohly mít příčinu v rozptylu světelných vln na diskretních uzlech kvantové geometrie. Podobně jako spektrum atomu, také spektrum prostoročasu není spojitě, ale diskretní.

Dokud nejsou k dispozici žádná měření, zůstává kvantová geometrie arénou teoretických fyziků. V současnosti se základy kvantové geometrie zabývají asi dvě desítky výzkumných skupin na celém světě a byly publikovány tisíce odborných článků. Zájem o kvantovou geometrii nadále roste. LQG získává stále větší popularitu a je pouze otázkou času, zda bude plodná nebo nikoliv.

Teorie superstrun interpretuje částice jako oscilující struny a na rozdíl od kvantové geometrie popisuje všechny čtyři silové interakce.

Její nevýhodou však je, že ji lze formulovat pouze v 10-rozměrném nebo 11-rozměrném prostoru. Přitom předpokládá metriku klasického prostoročasu obecné teorie relativity. Dodatečný vícerozměrný prostoročas však není kvantován, což je vlastnost, která je očekávána od úplné kvantové gravitace. Zde kvantová geometrie může zvítězit.

Roger Penrose je přesvědčen, že ze všech formulací kvantové gravitace, je Ashtekarova verze nejslibnější. Teorie superstrun přes všechny své teoretické úspěchy vyžaduje příliš mnoho složitých předpokladů, jako jsou dodatečné rozměry a supersymetrie, pro které nejsou žádné teoretické důvody. Navíc tato teorie neposkytuje příliš mnoho určitých a jednoznačných předpovědí pro budoucí experimenty. Podle Rovelliho nastal čas zkusit alternativní cestu.

## **Předpovědi a testy**

Načrtl jsem, co má teorie LQG vypovídat o prostoru a času v Planckově měřítku, ale v něm nemůžeme časoprostor zkoumat přímo, abychom tuto teorii ověřili. Takové rozměry jsou pro nás příliš malé. Jak tedy můžeme tuto teorii prověřit? Důležitým testem je to, zda je možné odvodit klasickou obecnou teorii relativity jako aproximaci teorie LQG: jinými slovy, pokud jsou spinové sítě podobné vláknům v kusu látky, je tento test analogický zkoumání, zda můžeme určit elastické vlastnosti tkaniny tak, že zprůměrujeme vlastnosti tisíců vláken, z nichž je složena.

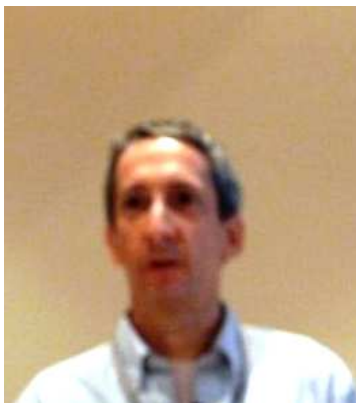
Popisují však spinové sítě po zprůměrování přes mnoho Planckových délek skutečně geometrii prostoru a jeho vývoj způsobem, který se zhruba shoduje, s "hladkou tkaninou" Einsteinovy klasické teorie? Jde o složitý problém, ale nedávno výzkumníci udělali významný pokrok v některých specifických případech, řekněme "v určitých uspořádáních materiálu". Například gravitační vlny s velkou vlnovou délkou, které se šíří v jinak plochem prostoru, mohou být popsány jako vzruchy specifických kvantových stavů, které popisuje teorie LQG.

Dalším plodným testem je zjištění, co může teorie LQG říci k dlouholetým tajemstvím gravitační fyziky a kvantové teorie: termodynamice černých děr, a zvláště jejich entropii, která je vztažena k neuspořádanosti. Fyzikové spočítali předpovědi, týkající se termodynamiky černých děr, s použitím hybridní přibližné teorie, která nahlíží kvantově-mechanicky na hmotu, ale nikoli na časoprostor. Plně kvantová teorie gravitace, jakou je třeba LQG, by měla být schopna tyto předpovědi reprodukovat. V 70. letech usoudil Jacob D. Bekenstein, nyní činný na Hebrejské univerzitě v Jeruzalémě, že černým díram musí být připsána entropie přímo úměrná ploše jejich povrchu. Krátce poté Stephen Hawking odvodil, že černé díry musí vyzařovat na teplotě ( 9.245 ). Analýza entropie příslušných kvantových stavů na horizontu černé díry, provedená za pomoci LQG potvrdila přesně Bekensteinovu a Hawkingovu předpověď.

Významnou předpovědí LQG, je nepatrně rozdílná rychlost šíření elektromagnetického záření různé frekvence ve vakuu, v důsledku diskrétnosti prostoru, který je protkán periodickou strukturou spinových sítí.

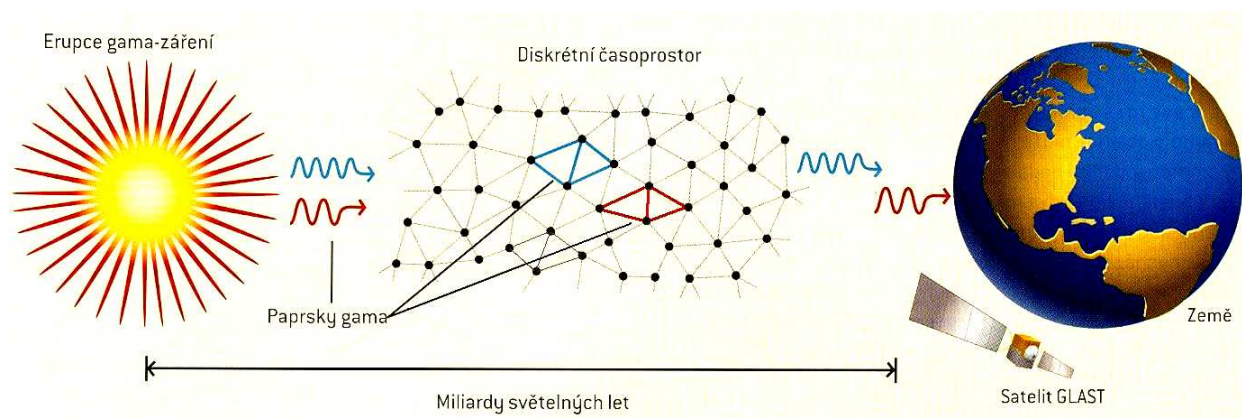
Radiace z dalekých kosmických explozí, při nichž se v důsledku vzájemné srážky neutronových hvězd, kvarkových hvězd, či černých děr uvolní v krátkém okamžiku až  $10^{50}$  J energie záření gama na různých frekvencích, by nám mohla poskytnout způsob, kterak otestovat správnost LQG. Erupce záření gama se odehrávají ve vzdálenostech mnoha miliard světelných let a každý emitovaný foton se musí prodat hustým tkanivem gravitačních smyček spinové sítě vesmíru. Diskrétní povaha prostoru působí, že vysokoenergetické paprsky gama se pohybují nepatrně pomaleji, než paprsky s nízkou energií. Tento efekt je zanedbatelný, ale během dlouhé cesty světla prostorem se neustále

zvětšuje.



**J. Albert**

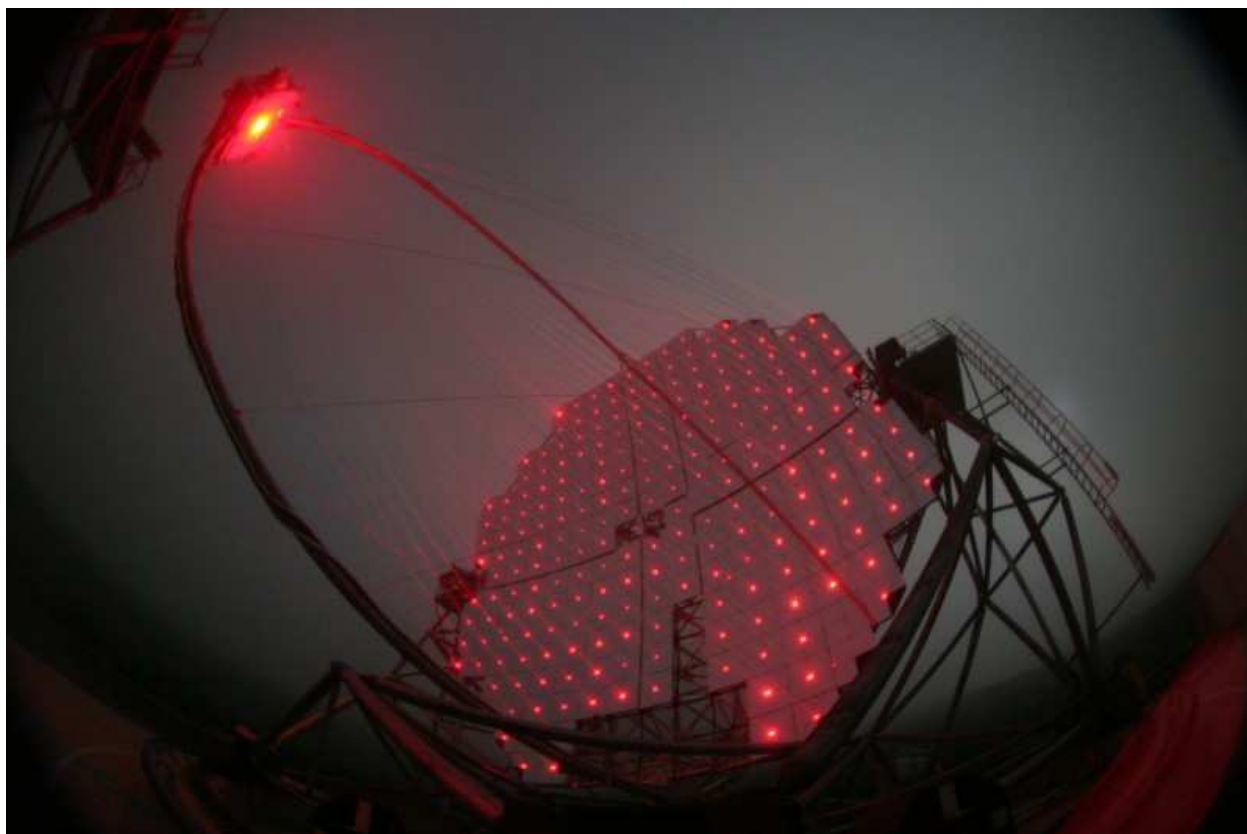
Ještě donedávna chyběla k potvrzení takto slabého efektu dostatečně citlivá technika. V srpnu roku 2007 však výzkumníci pracující na projektu gama teleskopu MAGIC pod vedením J. Alberta, ohlásili první experimentální potvrzení tohoto jevu předpovězeného dosud pouze teoriemi s diskretní strukturou prostoročasu, jako je LQG, či teorie cytoprostoru, o které pojednáme dále. Teleskop studoval metodou Monte Carlo záblesky gama záření z černé díry ve středu galaxie Markarian 501 v rozmezí energií řádově  $10^{10}$  eV až  $10^{17}$  eV a zaznamenal index lomu prázdného prostoru indukovaný kvantovou gravitací. Gama záření o vysoké energii přiletělo z galaxie vzdálené půl miliardy světelných let o 4 minuty později, než nízkoenergetické gama záření. Přitom by všechno gama záření z onoho místa mělo být vyzářeno ve stejný okamžik. Orbitální teleskop Fermi před nedávnem našel prodlevu 20 minut u gama záření ze vzdálenosti 12 miliard světelných let.



Obr. 10.33: Radiace z dalekých kosmických explozí, zvaných erupce záření gama, nám nabízí způsob, kterak otestovat správnost teorie smyčkové kvantové gravitace. Erupce záření gama, odehrávající se ve vzdálenosti mnoha miliard světelných let, emitují během velice krátké doby ohromné množství fotonů tvrdého záření gama. Podle předpovědi teorie kvantové smyčkové gravitace zaujímá každý foton v každém okamžiku malou oblast spojnic ve spinové síti, jenž tvoří prostor, kterým se foton pohybuje (ve skutečnosti se jedná o ohromný počet čar, ale pro jednoduchost jsme jich zde znázornili jen 5). Diskrétní povaha prostoru působí, že vysokoenergetické fotony se pohybují nepatrně pomaleji, než fotony s řádově nižší energií. Tento efekt, ač zcela nepatrný, se během nepředstavitelně dlouhé cesty fotonů od svého zdroje až k Zemi, neustále znásobuje. Pokud fotony dorazí k Zemi s malým leč měřitelným časovým rozdílem odpovídajícím rozdílu v jejich energii, bude to znamenat klíčovou podporu teorii smyčkové kvantové gravitace. Přístroje, uvedené do provozu po roce 2006, mají již pro takový experiment dostačující citlivost a první výsledky vycházejí velice slibně na podporu teorie.



**Obr. 10.34: Gama teleskop MAGIC (Major Atmospheric Gamma-ray Imaging Cherenkov)**



V teoriích kvantujících prostoročas lze mimo to předpokládat, že může být docela slabonce narušena jak Lorentzovská symetrie, tak i izotropie prostoru. Důležité je tedy sledovat nejenom vzdálenost a energii přicházejících fotonů, ale též směr, ze kterého přišly. MAGIC a FERMI zaznamenali u dosud změřených fotonů prodlevy v intervalu 1 sekunda až 20 minut. Zdánlivě si odporující výsledky mohou naznačovat, že v reálném světě je slabě narušeno daleko více symetrií, než jsme dosud předpokládali.

Tyto výsledky samozřejmě vyžadují korekci Einsteinovy teorie relativity, která předpovídá univerzální rychlost šíření světla nezávisle na frekvenci a směru. Několik teoretiků, mezi něž patří Giovanni Amelino Camelia z Římské univerzity, Joao Magueijo z Královské koleje v Londýně a Lee Smolin z *Perimeter Institute for Theoretical Physics* ve Waterloo v Ontariu, vyvinulo upravené verze Einsteinovy teorie, která bere v úvahu vysokoenergetické fotony cestující různými rychlostmi. V těchto teoriích se předpokládá, že univerzální rychlostí ve vesmíru je rychlost nízkoenergetických fotonů.



João Magueijo (1967)

Další možný efekt diskrétního časoprostoru zahrnuje kosmické částice o velmi vysoké energii. Již v roce 1966 učinili fyzici Georgij Zatsepin a Vadim Kuzmin a Kenneth Greisen předpověď, že protony kosmického záření s energií větší než  $3 \cdot 10^{19}$  elektronvoltů budou významně interagovat s reliktním pozadím, za vzniku  $\pi$ -mezonů, v důsledku čehož budou poměrně rychle ztrácet energii. O to větší záhadou bylo, když japonský experiment AGASA (Akeno Giant Air ShowerArray) zachytil více než 10 kosmických částic s energií řádově nad tímto limitem. To by ukazovalo na blízký intragalaktický původ těchto částic, který by byl



ovšem na základě našich soudobých znalostí astrofyziky velmi obtížně vysvětlitelný. Diskrétní struktura prostoru však může zvyšovat energii potřebnou k interakci, a tak umožnit i intergalaktickým protonům z kosmických paprsků o vyšší energii doletět až na Zemi. Pokud se pro výsledky pozorování AGASA nenajde jiné vysvětlení, může to znamenat, že jsme již detekovali diskrétní povahu prostoru.

Kromě toho, že teorie LQG dokáže činit předpovědi týkající se specifických jevů, například vysokoenergetických kosmických paprsků, nám také otevřela okno, skrze které můžeme studovat základní otázky kosmologie, například původ našeho vesmíru. Můžeme teorii použít ke studiu samých prvopočátků času, hned po velkém třesku. Obecná relativita předpovídá, že existoval první časový moment, ale tento závěr nebere v úvahu kvantovou fyziku (protože obecná relativita je nekvantovou teorií). Nedávné výpočty LQG, které provedl Martin Bojowald z Max-Planckova ústavu pro gravitační fyziku v Golmu v Německu ukazují, že velký třesk by mohl být vlastně velkým odrazem po předchozím velkém smrštění vesmíru. Teoretici nyní usilovně vyvíjejí předpovědi pro raný vesmír, které by mohly být ověřeny při budoucích kosmologických pozorováních. Není vyloučeno, že se ještě osobně dožijeme důkazu existence času před velkým třeskem.

Podobně závažná otázka se týká kosmologické konstanty - kladné nebo záporné hustoty energie, která by mohla prostupovat "prázdný" prostor. Nedávná pozorování vzdálených supernov a mikrovlnného kosmického pozadí silně naznačují, že tato energie existuje a že je pozitivní, což urychluje rozpínání vesmíru.



**Hideo Kodama**

Již v roce 1988, přitom Hideo Kodama z Tokijské univerzity odvodil z LQG rovnice popisující přesný kvantový stav vesmíru, který má kladnou kosmologickou konstantu.

V LQG zůstává ještě nevyřešeno mnoho otázek. Je třeba objasnit některé technické problémy a také bychom rádi porozuměli tomu, jak - pokud vůbec - musí být speciální relativita v oblastech extrémně vysokých energií upravena.

A konečně, rádi bychom pochopili, zda má LQG co říci ke sjednocení teorií: jsou různé síly, včetně gravitace, jen různými projevy jediné základní síly? Teorie strun je založena na ideji sjednocení, odborníci pracující na LQG se rovněž pokouší dosáhnout tohoto sjednocení.

LQG zaujímá velmi důležité místo ve vývoji fyziky. Je to, velmi nadějná cesta ke kvantové teorii obecné relativity, protože nečiní žádné zvláštní předpoklady kromě základních principů kvantové teorie a teorie relativity. Pozoruhodný směr, kterým se tato teorie vyvíjí, s předpokladem nespojitého časoprostoru popisovaného spinovými sítěmi a spinovými pěnami, spíše vyplývá z matematiky samotné teorie, než aby byl do ní včleňován zvláštním postulátem.