

Úvod do stacionární teorie Cytoprostoru

1) Základy geometrického kvantování

a) Symetrická grupa

Náš výklad započneme permutacemi.

Permutace je izomorfismem obvykle konečné množiny na sebe.

Nechť p_1, \dots, p_n je permutace čísel $1, \dots, n$.

Této permutaci P přiřazujeme operaci převádějící

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow p_1 \\ 2 &\rightarrow p_2 \\ &\vdots \\ n &\rightarrow p_n \end{aligned} \tag{11.1}$$

což symbolicky píšeme jako

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

přičemž pořadí sloupců na pravé straně je irelevantní.

Nechť nyní Q je permutace

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

Pod operací **kompozice permutací** $Q \circ R$ budeme rozumět zobrazení

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow p_1 \rightarrow q_{p_1} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ n &\rightarrow p_n \rightarrow q_{p_n} \end{aligned} \tag{11.4}$$

tj.

$$Q \circ P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_{p_1} & q_{p_2} & \dots & q_{p_n} \end{pmatrix}. \quad (11.5)$$

Identickou permutaci definujeme jako

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad (11.6)$$

a **permutaci inverzní k P** jako

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \dots & \bar{p}_n \end{pmatrix}. \quad (11.7)$$

Příklad: je-li

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (11.8)$$

Potom

$$Q \circ P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}. \quad (11.9)$$

Množina permutací n prvků tvoří, jak se lze snadno přesvědčit, neabelovskou grupu řádu $n!$ s neutrálním prvkem odpovídajícím identické permutaci a inverzním prvkem odpovídajícím inverzní permutaci.

Tuto grupu nazýváme **symetrickou grupou S_n** .

Pro její studium je nutno zavést několik dalších pojmů.

Permutaci $P: x \rightarrow x$ označíme za **transpozici**, existují-li $x, y \in X$; $x \neq y: P(x) = y, P(y) = x, \forall z \in X \setminus \{x, y\}: P(z) = z$.

Jakoukoliv uspořádanou n -tici (x_1, x_2, \dots, x_n) nazveme **cyklem** permutace P délky $n - 1$, jestliže $\forall i = 1, 2, \dots, n - 1 : P(x_i) = x_{i+1}$, $P(x_n) = x_1$.

Každou dvojici i, j , kde $i < j$, $P(i) > P(j)$ nazveme **inverzí** permutace P .

Libovolnou permutaci lze jednoznačně rozložit na cykly neobsahující společné elementy tj. tzv. **nezávislé cykly**.

Tak např. pro permutace z příkladu (11.8) má tento rozklad tvar

$$\begin{aligned} P &= (1, 2, 3) \circ (5, 6) \circ (4) \\ Q &= (3, 4, 5, 6) \circ (1, 2) \end{aligned} \quad (11.10)$$

Pořadí, ve kterém píšeme nezávislé cykly je irelevantní.

Cykly jednotkové délky jsou triviální a obvykle se explicitně neuvádějí.

Výše uvedený rozklad permutace P proto zapíšeme jako

$$P = (1, 2, 3) \circ (5, 6). \quad (11.11)$$

Libovolnou permutaci lze zkomponovat z cyklů délky 2, tj. transpozic. Např. permutaci P můžeme zkomponovat ze tří transpozic:

$$P = (1, 3) \circ (1, 2) \circ (5, 6). \quad (11.12)$$

Na rozdíl od rozkladu (11.11) zde vystupuje v prvních dvou cyklech tentýž element.

Díky tomu je pořadí transpozic v rozkladu permutace podstatné.

Permutace vzniklá kompozicí sudého resp. lichého počtu transpozic se nazývá permutací **sudou** resp. **lichou**.

Počet transpozic, z nichž je daná permutace složena, není sice určen jednoznačně, avšak jeho sudost či lichost ano.

Operátorem parity permutace P budeme rozumět číslo

$$\varepsilon_P \equiv \begin{cases} 1 & \text{pro sudou permutaci} \\ -1 & \text{pro lichou permutaci} \end{cases} \quad (11.13)$$

Pro tento operátor navíc platí:

$$\varepsilon_P = (-1)^{\text{množství inverzí } P} = (-1)^{\text{suma délek cyklů } P} = (-1)^{\text{množství cyklů liché délky}} = (-1)^k \quad (11.14)$$

kde k je počet transpozic T_i nutných k sestavení permutace

$$P = T_1 \circ T_2 \circ \dots \circ T_k . \quad (11.15)$$

Platnost této rovnosti se dokáže snadno:

Počet inverzí v dané permutaci nazveme **stupněm** této permutace a označíme S_P .

Potom platí:

$$\varepsilon_P = (-1)^{S_P} . \quad (11.16)$$

Zaměňme v permutaci vzájemně prvky a_i, a_j , ($i < j$).

a) Jestliže $j = i + 1$, změní se počet inverzí o jednu a přepóluje se parita permutace.

b) Jestliže $j > i + 1$, potom tuto záměnu můžeme realizovat postupně pomocí $(j - i) + (j - i - 1) = 2(j - i) - 1$ transpozic (tj. lichého počtu záměn dvou sousedních prvků).

Počet inverzí v permutaci se tím změní o liché číslo a tedy operátor parity permutace opět změní znaménko. ☺

Příklad:

Budiž dána permutace $P = (2, 1, 3)$.

Její stupeň $S_P = 1$.

Ukažme, že záměnou jejích protilehlých prvků získáme permutaci sudého stupně.

Lze toho docílit rozkladem permutace na systém transpozic, tj. postupnou záměnou dvojic sousedních prvků:

$$\underbrace{(2, 1, 3)}_{S_P=1} \mapsto \underbrace{(1, 2, 3)}_{S_P=0}; \underbrace{(1, 3, 2)}_{S_P=1}; \underbrace{(3, 1, 2)}_{S_P=2} . \quad (11.17)$$

Záměnu jsme tedy vskutku realizovali pomocí lichého počtu [3] transpozic, které změni stupeň permutace vždy o 1.

Parita výsledné permutace se proto změnila z původní liché na sudou, čímž změnil operátor parity své znaménko.

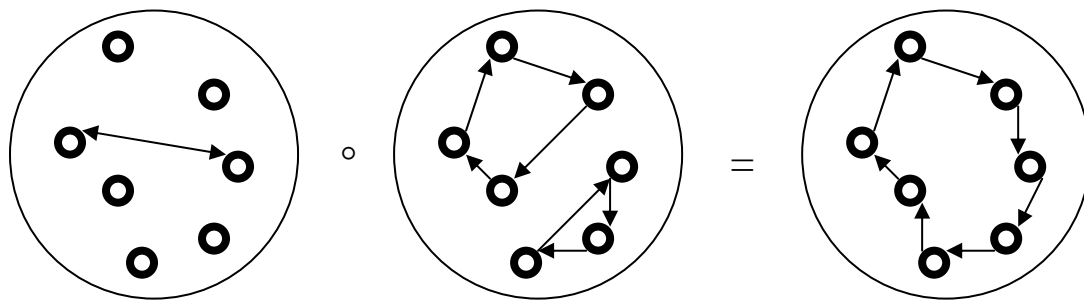
Každou permutaci lze rovněž složit z cyklů a každý cyklus délky n lze rozepsat na kompozici n transpozic.

Např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad (11.18)$$

Můžete si také promyslet, kterak v permutaci, jež obsahuje dva cykly, lze tyto dva cykly „slepit“, složíme-li tuto permutaci s nějakou transpozicí přehazující navzájem dva prvky, každý z jednoho cyklu. A naopak, složíme-li tento cyklus znovu s touto transpozicí, dostaneme opět dva cykly.

Obr. 11.1



Nechť permutace $P \in S_n$ sestává z ν_1 cyklů délky 1, ν_2 cyklů délky 2, atd., až ν_n cyklů délky n .

Potom říkáme, že P má **cyklickou strukturu**

$$(1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \dots, n^{\nu_n}). \quad (11.19)$$

Dvě permutace nazýváme **sduženými**, právě tehdy, mají-li tutéž cyklickou strukturu.

Cyklická struktura tedy charakterizuje třídy.

Z definice čísel ν_j je zřejmé, že

$$\sum_{j=1}^n j \cdot \nu_j = n . \quad (11.20)$$

Každá n -tice celých nezáporných čísel ν_j vyhovujících rovnici (11.20) udává jednu třídu grupy S_n .

Každé takové n -tici tedy odpovídá jedna ireducibilní reprezentace grupy S_n .

Každé cyklické struktuře (11.19) je jedno-jednoznačně přiřazena n -tice čísel

$$\lambda_k \equiv \sum_{j=k}^n \nu_j \quad , k = 1, \dots, n . \quad (11.21)$$

Je zřejmé, že

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 . \quad (11.22)$$

Navíc z formule (11.21) vidíme, že

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = n . \quad (11.23)$$

Každou n -tici celých čísel $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ vyhovujících podmínkám (11.22), (11.23) nazýváme **rozkladem čísla n** .

(V symbolu pro rozklad vypisujeme pouze nenulová λ_k).

Dospíváme tak k důležitému závěru: každému rozkladu $[\lambda]$ čísla n odpovídá právě jedna ireducibilní reprezentace ($D^{[\lambda]}$) grupy S_n .

Každému rozkladu $[\lambda]$ čísla n lze jedno-jednoznačně přiřadit tzv.

Yungovo $[\lambda]$ -polyomino sestávající z n buněk uspořádaných do řádků délky $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tak, že buňky k -tého řádku leží pod prvními λ_k buňkami řádku $(k - 1)$ -ho.



Laurence Chisholm Young (1905 – 2000)

Pro ilustraci jsou v prvních dvou sloupcích tabulky 11.1 uvedeny všechny rozklady čísla $n = 4$ a jim odpovídající polyomina. Rozklady jsme zapsali v běžně užívaném zkráceném tvaru:

$$[2^2] = [2, 2]$$

$$[2, 1^2] = [2, 1, 1] \quad (11.24)$$

atd.

Tab. 11.1

λ	Y-polyomino	Standardní schéma	Yamanouchyho symbol
$[4]$		$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$	$(1,1,1,1)$
$[3,1]$		$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \end{array} \quad \begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \end{array} \quad \begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \end{array}$	$(2,1,1,1) (1,1,2,1) (1,2,1,1)$
$[2^2]$		$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$	$(2,2,1,1) (2,1,2,1)$
$[2,1^2]$		$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$	$(1,3,2,1) (3,2,1,1) (3,1,2,1)$
$[1^4]$		$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$	$(4,3,2,1)$

Omezíme-li se v S_n pouze na permutace, které nechávají nezměněn n -tý element, tj. na permutace typu

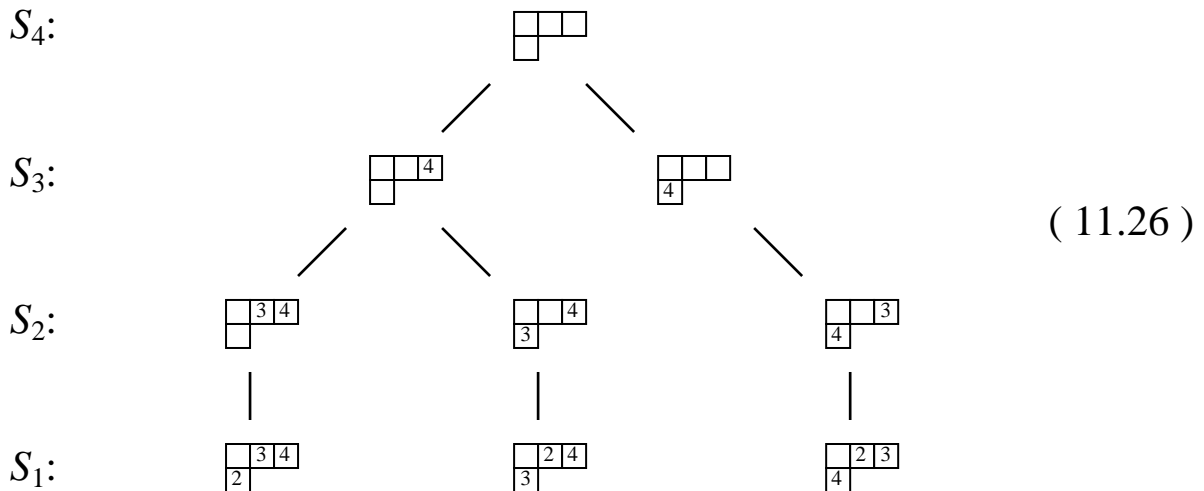
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & n \end{pmatrix}, \tag{11.25}$$

obdržíme podgrupu $S_{n-1} \subset S_n$, přičemž platí: ireducibilní reprezentace grupy S_n odpovídající danému Yungovu polyominu představují direktní součet ireducibilních reprezentací podgrupy S_{n-1} odpovídajících Yungovým polyominům vzniklým z výchozího, oddělením jedné buňky všemi možnými způsoby.

Každému takto vzniklému Y-polyominu odpovídá právě jedna ireducibilní reprezentace grupy S_{n-1} obsažená v uvažované reprezentaci.

Opakovaným užitím této věty můžeme rozložit každou ireducibilní reprezentaci grupy S_n na direktní součet ireducibilních reprezentací libovolné grupy S_m pro $m < n$.

Tak např. pro reprezentaci $D^{[3,1]}$ grupy S_4 tímto postupem dostáváme rozklad:



Číslo n zde značí element opuštěný při přechodu od Y-poliomina grupy S_n k Y-poliominu grupy S_{n-1} .

Uvažovaná reprezentace tedy představuje z hlediska grupy S_m ; $m \leq 4$, reprezentaci:

$$S_4 \equiv \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & & \end{matrix} \tag{11.27}$$

$$S_3 \equiv \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \end{matrix} \oplus \begin{matrix} \square & \square & \square \end{matrix} \tag{11.28}$$

$$S_2 \equiv (\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}) \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (11.29)$$

$$S_1 \equiv \square \oplus \square \oplus \square \quad (11.30)$$

Grupa S_1 je ovšem triviální – sestává z jediného elementu E .
Její jediná ireducibilní reprezentace je jednorozměrná, neboť přiřazuje elementu identity číslo 1.

Oproti tomu je ireducibilní reprezentace $D^{[3,1]}$ grupy S_4 jak vidno trojrozměrná.

Zobecnění naznačeného postupu na libovolnou ireducibilní reprezentaci $D^{[\lambda]}$ grupy S_n je zřejmé: do buněk Y-polyomina rozmístíme čísla 1, 2, ..., n tak, aby v každém řádku rostla zleva doprava a v každém sloupci shora dolů.

Takto zaplněné Y-polyomino $[\lambda]$ představuje tzv. **standardní schéma**.

Nechť r_j udává řádek, ve kterém se v zadaném standardním schématu nachází číslo j .

Yamanouchiho symbol

$$(r) \equiv (r_n, r_{n-1}, \dots, r_2, r_1) \quad (11.31)$$

jednoznačně popisuje odpovídající standardní schéma.

Povšimněme si, že v Yamanouchiho symbolu jsou čísla uspořádána tak, že vpravo od libovolného čísla $k > 1$ se nachází nejméně tolik čísel $(k - 1)$ jako čísel k .

Každému standardnímu schématu odpovídá jeden vektor báze reprezentace $D^{[\lambda]}$ grupy S_n , který současně patří k bázi ireducibilní reprezentace podgrupy S_m ($m < n$), odpovídající Yungovu polyominu vzniklému z uvažovaného schématu vynecháním buněk zaplněných posledními $(n - m)$ čísly.

Počet standardních schémat tedy udává dimenzi ($\equiv n_{[\lambda]}$) reprezentace $D^{[\lambda]}$.

Právě těchto symbolů použijeme k očíslování vektorů báze dané ireducibilní reprezentace grupy S_n .

Řekneme, že dvě Y-polyomina jsou **vzájemně sdružená**, jestliže se od sebe liší pouze záměnou řádků za sloupce.

Polyomino sdružené k $[\lambda]$ označujeme jako $[\lambda^*]$.

Odpovídající reprezentace nazýváme rovněž **sdruženými**.

Snadno se lze přesvědčit, že sdružené reprezentace mají shodnou dimenzi.



Takahiko Yamanouchi (1902 – 1986)

Analogicky zavádíme pojem **sdruženého standardního schématu** a sdruženými pak nazýváme i odpovídající Yamanouchiho symboly.

Každá grupa S_n ($n \geq 2$) má právě dvě jednorozměrné navzájem sdružené reprezentace.

První z nich odpovídá Y-polyominu s jedním řádkem a přiřazuje každé permutaci jedničku (**úplně symetrická reprezentace**)

$$D^{[1^n]}(P) = 1. \quad (11.32)$$

Druhá odpovídá Y-polyominu s jedním sloupcem a přiřazuje každé permutaci její paritu (**úplně antisymetrická reprezentace**)

$$D^{[1^n]}(P) = \varepsilon_P. \quad (11.33)$$

Ostatní reprezentace jsou vícerozměrné.

Při volbě báze prostoru reprezentace $D^{[\lambda]}$ grupy S_n výše naznačeným způsobem mají matice $D^{[\lambda]}(P)$ pro všechny permutace $P \in S_{n-1}$ kvazidiagonální tvar, odpovídající direktnímu součtu ireducibilních reprezentací grupy S_{n-1} .

Díky tomu můžeme zapsat matice libovolné reprezentace $D^{[\lambda]}$ grupy S_n , známe-li matice ireducibilních reprezentací grupy S_{n-1} a matici odpovídající transpozici $T \equiv (n-1, n)$ pro níž platí:

$$\hat{\mathbf{T}}|[\lambda]; r, r, r_{n-2}, \dots, 1\rangle = |[\lambda]; r, r, r_{n-2}, \dots, 1\rangle \quad (11.34)$$

$$\hat{\mathbf{T}}|[\lambda]; r, r-1, r_{n-2}, \dots, 1\rangle = -|[\lambda]; r, r-1, r_{n-2}, \dots, 1\rangle, \quad (11.35)$$

Pokud $(r-1, r, r_{n-2}, \dots, 1)$ není možným Yamanouchiho symbolem. $\forall r = s$, pro něž také $(s, r, r_{n-2}, \dots, 1)$ je možným Yamanouchiho symbolem, platí:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}|[\lambda]; r, s, r_{n-2}, \dots, 1\rangle &= \sigma_{rs} |[\lambda]; r, s, r_{n-2}, \dots, 1\rangle + (1 - \sigma_{rs}^2)^{1/2} \dots \\ &\quad \cdot |[\lambda]; s, r, r_{n-2}, \dots, 1\rangle, \end{aligned} \quad (11.36)$$

kde

$$\sigma_{rs} \equiv (\lambda_r - \lambda_s + s - r)^{-1}. \quad (11.37)$$

Takto zkonstruované matice reprezentace $D^{[\lambda]}$ jsou unitární, reálné a symetrické.

Krom toho platí mezi maticovými elementy sdružených reprezentací jednoduchý vztah

$$D_{(\tilde{r})(\tilde{s})}^{[\tilde{\lambda}]}(P) = \Lambda_{(r)}^{[\lambda]} \cdot \Lambda_{(s)}^{[\lambda]} \cdot \varepsilon_P \cdot D_{(r)(s)}^{[\lambda]}(P), \quad (11.38)$$

kde $\Lambda_{(r)}^{[\lambda]}$ je rovno $+1$ resp. -1 podle toho, zda Yamanouchiho symbol (r) je sudou resp. lichou permutací uspořádané n -tice čísel

$$\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{\lambda_1 \text{ čísel}} \underbrace{(2, 2, \dots, 2, \dots)}_{\lambda_2 \text{ čísel}}. \quad (11.39)$$

Víme že direktní součin $D^{[\lambda]} \otimes D^{[\mu]}$ obsahuje právě jednu reprezentaci $D^{[n]}$ grupy S_n tehdy a jen tehdy, když $[\lambda] = [\mu]$.

Přitom odpovídající Clebsh – Gordanův (C – G) rozvoj má tvar

$$|\phi, [n]; (1)\rangle = (n_{[\lambda]})^{-1/2} \cdot \sum_{(r)} |\psi, [\lambda]; (r)\rangle |\phi, [\lambda]; (r)\rangle . \quad (11.40)$$

Zde a v dalších analogických formulích je třeba rozumět

$$[n] \equiv [n, 0, 0, \dots, 0] , \quad (11.41)$$

kdežto

$$[\lambda] \equiv [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] . \quad (11.42)$$

Z formule (11.39) vidíme, že pro charaktery sdružených reprezentací platí:

$$\chi^{[\tilde{\lambda}]}(P) = \varepsilon_P \cdot \chi^{[\lambda]}(P) . \quad (11.43)$$

Tedy

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_P \chi^{[1^n]}(P) \cdot \chi^{[\tilde{\lambda}]}(P) \cdot \chi^{[\mu]}(P) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_P \chi^{[\lambda]}(P) \cdot \chi^{[\mu]}(P) = \delta_{[\lambda], [\mu]} , \quad (11.44)$$

kde jsme využily známé relace ortogonalit a toho, že

$$\chi^{[1^n]}(P) = \varepsilon_P . \quad (11.45)$$

Formule (11.44) však neříká nic jiného, než že direktní součin

$$D^{[\mu]} \otimes D^{[\tilde{\lambda}]} \quad (11.46)$$

obsahuje reprezentaci $D^{[1^n]}$ (a to právě jednou) tehdy a jen tehdy, když $[\mu] = [\lambda]$.

Přitom odpovídající C – G rozvoj má tvar

$$|\phi, [1^n]; (1)\rangle = \left(n_{[\lambda]}\right)^{-1/2} \cdot \sum_{(r)} \Lambda_{(r)}^{[\lambda]} \cdot |\psi, [\lambda]; (r)\rangle |\phi, [\tilde{\lambda}]; (\tilde{r})\rangle. \quad (11.47)$$

Uvažujme soustavu $N + M$ částic, v níž je interakce prvních N částic se zbývajícími M částicemi zanedbatelná.

Nechť $\psi(1, \dots, N)$ resp. $\phi(N + 1, \dots, N + M)$ je vlnová funkce popisující stacionární stav první resp. druhé skupiny.

Pokud jsou částice první skupiny rozlišitelné od částic skupiny druhé, potom funkce

$$\Psi(1, \dots, N + M) \equiv \psi(1, \dots, N) \cdot \phi(N + 1, \dots, N + M) \quad (11.48)$$

představuje vlnovou funkci stacionárního stavu uvažovaného systému. U nerozlišitelných částic je situace komplikovanější, neboť vlnové funkce se musejí při permutacích proměnných chovat předepsaným způsobem.

Pro analýzu této úlohy zavedeme tzv. **vnější součin reprezentací symetrických grup**:

Nechť $n_{[\lambda]}$ funkcí $\psi_{(r)}^{[\lambda]}$ tvoří bázi reprezentace $D^{[\lambda]}$ grupy S_N , tj.

$$\hat{P} \psi_{(r)}^{[\lambda]}(1, \dots, N) = \sum_{(r')} D_{(r'), (r)}^{[\lambda]}(P) \cdot \psi_{(r')}^{[\lambda]}(1, \dots, N) \quad (11.49)$$

a nechť $n_{[\mu]}$ funkcí $\phi_{(s)}^{[\mu]}$ tvoří bázi reprezentace $D^{[\mu]}$ grupy S_M , tj.

$$\hat{P} \phi_{(s)}^{[\mu]}(N + 1, \dots, N + M) = \sum_{(s')} D_{(s'), (s)}^{[\mu]}(P) \cdot \phi_{(s')}^{[\mu]}(N + 1, \dots, N + M). \quad (11.50)$$

$(M + N)$ proměnných můžeme rozdělit $\binom{M + N}{N}$ způsoby do dvou

skupin tak, že do první skupiny připadne vždy N proměnných.

Každé dvojici funkcí $\psi_{(r)}^{[\lambda]}$, $\phi_{(s)}^{[\mu]}$ přiřadíme $\binom{M + N}{N}$ funkcí

$$\Phi_{(r)(s)k}^{[\lambda][\mu]}(1, \dots, M + N) \equiv \psi_{(r)}^{[\lambda]}(j_1, \dots, j_N) \cdot \phi_{(s)}^{[\mu]}(j_{N+1}, \dots, j_{N+M}), \quad (11.51)$$

kde $k = 1, \dots, \binom{M+N}{N}$; j_1, \dots, j_N jsou proměnné připadající do

první skupiny při k -tém z výše uvedených dělení.

Funkce (11.51) tvoří bázi reprezentace grupy S_{N+M} .

Tato $n_{[\lambda]} \cdot n_{[\mu]} \cdot \binom{M+N}{N}$ -rozměrná reprezentace, kterou nazýváme

vnějším součinem reprezentace $D^{[\lambda]}$ grupy S_N s reprezentací $D^{[\mu]}$ grupy S_M , je reducibilní.

Její ireducibilní komponenty lze určit pomocí Y-polyomin s využitím následujícího postupu definujícího součin Y-polyomin.

- 1) V Y-polyominu $[\mu]$ vyplníme všechny buňky prvního řádku číslem 1, druhého řádku číslem 2, atd.
- 2) Y-polyomina $[\lambda]$ doplníme jednou buňkou označenou číslem 1 všemi možnými způsoby vedoucími k Y-polyominu o $(n_{[\lambda]} + 1)$ buňkách.
K takto vzniklým polyominům připojíme další buňku označenou číslem 1 všemi možnými způsoby (viz však bod 3) vedoucími k Y-polyominu o $(n_{[\lambda]} + 2)$ buňkách atd. až jsou vyčerpány všechny buňky Y-polyomina $[\mu]$ označené číslem 1.
Stejně postupujeme s buňkami označenými číslem 2 atd. dokud není vyčerpáno všech $n_{[\mu]}$ buněk Y-polyomina $[\mu]$.
- 3) Všechna Y-polyomina v nichž je nyní v témže sloupci více než jedna buňka označená stejným číslem vynecháme.
- 4) Pro každé takto obdržené Y-polyomino zapíšeme posloupnost čísel tak, jak v něm postupně figurují čtena zprava doleva a shora dolů.
Polyomino je přípustné jen tehdy, stojí-li v této posloupnosti vlevo od libovolného čísla $k > 1$ alespoň tolik čísel $(k - 1)$ jako čísel k . Nepřípustná polyomina vynecháme.
- 5) Všechna polyomina s identickým rozmístěním čísel je nutno považovat za polyomino jediné.

Pro ilustraci si nyní vypočteme vnější součin polyomin

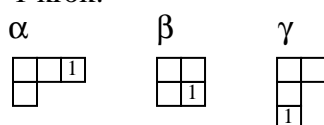


Dle bodu 1. vylníme druhé polyomino

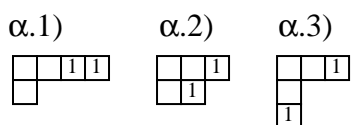


Dle bodu 2. doplňujeme první polyomino ve třech krocích:

1 krok:

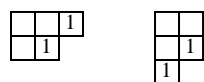


2. krok

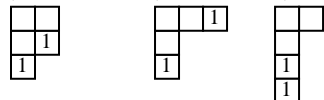


(11.52)

beta.1) beta.2)



gamma.1) gamma.2) gamma.3)



Z nich jsou polyomina $\beta.1)$, $\gamma.1)$, $\gamma.2)$ ekvivalentní polyominům $\alpha.2)$, $\beta.2)$, $\alpha.3)$, takže je dle bodu 5 můžeme vypustit, a dle bodu 3 je polyomino $\gamma.3)$ nepřipustné.

3. krok:

$\alpha.1.1)$	$\alpha.1.2)$	$\alpha.1.3)$	
$\alpha.2.1)$	$\alpha.2.2)$	$\alpha.2.3)$	
$\alpha.3.1)$	$\alpha.3.2)$	$\alpha.3.3)$	(11.53)
$\beta.2.1)$	$\beta.2.2)$	$\beta.2.3)$	

Konfigurace $\alpha.1.1)$, $\alpha.2.1)$, $\alpha.3.1)$, $\beta.2.1)$, jsou nepřípustné dle bodu 4.
Celkem tedy

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \\
 &\oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} .
 \end{aligned}
 \tag{ 11.54 }$$

Jako další jednoduché příklady uveďme několik vnějších součinů úplně symetrických a úplně antisymetrických reprezentací grupy S_n :

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}
 \tag{ 11.55 }$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}
 \tag{ 11.56 }$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}
 \tag{ 11.57 }$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (11.58)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (11.59)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (11.60)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (11.61)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (11.62)$$

Zdůrazněme, že vnější součin dvou úplně antisymetrických reprezentací obsahuje vždy úplně antisymetrickou reprezentaci. Při počítačovém modelování se ukazuje výhodné vyjádřit součin dvou reprezentací v kompaktním tvaru, jenž nazýváme **stopou** tohoto součinu.

Tak například platí:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (11.63)$$

b) Grupy lineárních transformací

Důležitost symetrické grupy je podtržena její souvislostí s grupami lineárních transformací.

Nechť $\{ |\varphi_j\rangle ; j = 1, \dots, n \}$ je báze vektorového prostoru $V^{(n)}$.

Všechny lineární nesingulární transformace tohoto prostoru tvoří grupu **General linear** ($GL(n)$).

Elementu $G \in GL(n)$ odpovídá transformace

$$|\varphi_j\rangle \rightarrow |\varphi'_j\rangle \equiv \hat{G} |\varphi_j\rangle = \sum_{l=1}^n G_l^j |\varphi_l\rangle, \quad (11.64)$$

Kde G_l^j je (l, j) -tým elementem nesignulární matice \mathbf{G} .
Tato transformace převádí obecný vektor

$$|\psi_j\rangle = \sum_{j=1}^n \psi_j |\varphi_j\rangle \quad (11.65)$$

ve vektor

$$|\psi'\rangle = \hat{\mathbf{G}}|\psi\rangle = \sum_{j=1}^n \psi'_j |\varphi_j\rangle \quad (11.66)$$

kde

$$\psi'_j = \sum_{l=1}^n G_l^j \psi_l \quad ; j = 1, \dots, n . \quad (11.67)$$

O n -tici libovolných veličin ψ_j ($j = 1, \dots, n$) říkáme, že představuje komponenty **kovariantního vektoru**, jestliže se při transformaci $G \in \mathbf{GL}(n)$ chová podle vzorce (11.67).

Uvažujme nyní direktní součin N prostorů $V^{(n)}$:

$$V \equiv \prod_{i=1}^N \otimes V^{(n)}(i) . \quad (11.68)$$

Libovolný vektor z prostoru V můžeme vyjádřit jako

$$|\phi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_N=1}^n \phi_{j_1, \dots, j_N} \cdot |\varphi_{j_1}(1)\rangle \cdot \dots \cdot |\varphi_{j_N}(N)\rangle . \quad (11.69)$$

Elementu $G \in \mathbf{GL}(n)$ přiřaďme operátor

$$\hat{\mathbf{G}} \equiv \prod_{i=1}^N \otimes \hat{\mathbf{G}}(i) . \quad (11.70)$$

Přitom

$$\hat{\mathbf{G}}|\phi\rangle = \sum_{j_1 \dots j_N} \phi'_{j_1 \dots j_N} \cdot |\varphi_{j_1}(1)\rangle \cdot \dots \cdot |\varphi_{j_N}(N)\rangle , \quad (11.71)$$

kde

$$\phi'_{j_1 \dots j_N} \equiv \sum_{l_1 \dots l_N} \Gamma_{j_1 \dots j_N}^{l_1 \dots l_N} \cdot \phi_{l_1 \dots l_N} , \quad (11.72)$$

$$\Gamma_{j_1 \dots j_N}^{l_1 \dots l_N} = G_{j_1}^{l_1} \cdot \dots \cdot G_{j_N}^{l_N} . \quad (11.73)$$

O libovolných dvou veličinách $\phi_{j_1 \dots j_N}$ říkáme, že tvoří komponenty **kovariantního tenzoru** N -tého řádu, jestliže se při transformacích $G \in \mathbf{GL}(n)$ chovají podle vzorce (11.72).

V prostoru (11.68) definujeme **operátory transpozic**

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}(im) \cdot |\varphi_{j_1}(1)\rangle \cdot \dots \cdot |\varphi_{j_i}(i)\rangle \cdot \dots \cdot |\varphi_{j_m}(m)\rangle \cdot \dots \cdot |\varphi_{j_N}(N)\rangle &\equiv \\ &\equiv |\varphi_{j_1}(1)\rangle \cdot \dots \cdot |\varphi_{j_m}(i)\rangle \cdot \dots \cdot |\varphi_{j_i}(m)\rangle \cdot \dots \cdot |\varphi_{j_N}(N)\rangle . \end{aligned} \quad (11.74)$$

n^N -rozměrné matice definované elementy (11.74) jsou **bisymetrické**, tj. platí

$$\Gamma_{j_1 \dots j_i \dots j_m \dots j_N}^{l_1 \dots l_i \dots l_m \dots l_N} = \Gamma_{j_1 \dots j_m \dots j_i \dots j_N}^{l_1 \dots l_m \dots l_i \dots l_N} \quad (11.75)$$

a tedy

$$\left[\hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{P}}(im) \right] = 0 . \quad (11.76)$$

Operátory $\hat{\mathbf{G}}$ tvoří reprezentaci grupy $\mathbf{GL}(n)$ v prostoru V .

V témže prostoru vytvářejí operátory $\hat{\mathbf{P}}(im)$ a jejich součiny reprezentaci symetrické grupy S_N .

V obou případech (pro $n, N > 1$) se jedná o reprezentace reducibilní. Jejich rozklad na ireducibilní komponenty velice usnadňují tzv.

Yungovy operátory:

Každému standardnímu schématu (\Leftrightarrow Yamanouchiho symbolu (r)) přiřadíme **symetrizátor**

$$\hat{\mathbf{S}}((r)) \equiv \sum' \hat{\mathbf{P}} \quad (11.77)$$

a **antisymetrizátor**

$$\hat{\mathbf{Q}}((r)) \equiv \sum'' \varepsilon_p \cdot \hat{\mathbf{P}} , \quad (11.78)$$

kde suma \sum' , resp. \sum'' probíhá přes všechny permutace které mění místa pouze symbolů nacházejících se v těchže řádcích, resp. sloupcích schématu.

Pro Yungovy operátory

$$\hat{\mathbf{Y}}((r)) \equiv \hat{\mathbf{Q}}((r)) \cdot \hat{\mathbf{S}}((r)) \quad (11.79)$$

platí

$$\hat{\mathbf{Y}}((r)) \cdot \hat{\mathbf{Y}}((r')) = \delta_{(r)(r')} \frac{N!}{n_{[\lambda]}} \hat{\mathbf{Y}}((r)) , \quad (11.80)$$

$$\sum_{(r)} \frac{n_{[\lambda]}}{N!} \hat{\mathbf{Y}}((r)) = 1 , \quad (11.81)$$

kde $n_{[\lambda]}$ je dimenze reprezentace $D^{[\lambda]}$ grupy S_N (rozklad $[\lambda]$ odpovídá Yamanouchiho symbolu (r)).

Díky tomu můžeme prostor (11.68) vyjádřit jako

$$V = \sum_{(r)} \oplus V_{(r)}, \quad (11.82)$$

přičemž

$$\forall |\psi\rangle \in V: \hat{Y}((r))|\psi\rangle \in V_{(r)}. \quad (11.83)$$

Suma ve formulích (11.81), (11.82) probíhá přes všechna schémata s celkovým počtem buněk rovným N a s počtem řádků nepřevyšujícím n .

Standardnímu schématu s m řádky odpovídá podprostor tenzorů, jejichž komponenty jsou úplně antisymetrické alespoň v jedné m -tici indexů.

Každý z nich však může nabývat pouze n různých hodnot.

Tedy, při $m > n$ je tenzor identity roven nule.

Komutativita (11.76) zaručuje, že $V_{(r)}$ je invariantním podprostorem operátoru \hat{G} .

Je možno ukázat, že $V_{(r)}$ již neobsahuje žádné invariantní prostory a tedy $V_{(r)}$ je prostorem ireducibilní reprezentace grupy $GL(n)$.

Reprezentace grupy $GL(n)$ v podprostorech $V_{(r)}$ a $V_{(r')}$ jsou ekvivalentní právě tehdy, když (r) a (r') přísluší k témuž Y-polyominu.

Ireducibilní reprezentace grupy $GL(n)$ realizované v prostoru kovariantních tenzorů N -tého řádu proto lze jednoznačně (až na ekvivalenci) charakterizovat pomocí Y-polyomin $[\lambda]$ ($\equiv U^{[\lambda]}$).

Je možné ukázat, že: 1) Ke každému Y-polyominu s N buňkami a ne více než n řádky existuje reprezentace $U^{[\lambda]}$.

2) Dimenze reprezentace $U^{[\lambda]}$ je

$${}^n N_{[\lambda]} = \frac{\Delta(l_1, \dots, l_n)}{\Delta(n, n-1, \dots, 1)}, \quad (11.84)$$

kde

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) \equiv \prod_{i < j} (x_i - x_j) \quad (11.85)$$

a

$$l_j \equiv n + \lambda_j - j . \quad (11.86)$$

Jestliže matice

$$\mathbf{U}^{[\lambda_1, \dots, \lambda_n]}(G) \quad (11.87)$$

tvoří reprezentaci $U^{[\lambda_1, \dots, \lambda_n]}$, potom také matice

$$(\det \mathbf{G})^m \cdot \mathbf{U}^{[\lambda_1, \dots, \lambda_n]}(G) \quad (11.88)$$

tvoří pro libovolné celé m reprezentaci grupy $GL(n)$.

Pro $m \geq -\lambda_n$ je tato reprezentace ekvivalentní s výše definovanou reprezentací

$$U^{[\lambda_1+m, \dots, \lambda_n+m]} . \quad (11.89)$$

Pro $m < -\lambda_n$ budeme formuli (11.88) považovat za definici reprezentace (11.89).

Je možné dokázat, že reprezentace

$$U^{[\lambda_1, \dots, \lambda_n]} ; \quad U^{[-\lambda_n, \dots, -\lambda_1]} \quad (11.90)$$

jsou navzájem **kontragradiční**.

Vedle tenzorů kovariantních zavádíme analogicky **tenzory kontravariantní**.

Označme (j, l) -tý element matice $(\mathbf{G}^{-1})^T$ jako G^j_l a definujme

$$\Gamma^{j_1 \dots j_N}_{l_1 \dots l_N} \equiv G^{j_1}_{l_1} \cdot \dots \cdot G^{j_N}_{l_N} . \quad (11.91)$$

O libovolných n^N veličinách ϕ^{j_1, \dots, j_N} říkáme, že tvoří komponenty kontravariantního tenzoru N -tého řádu, jestliže každému elementu $G \in GL(n)$ odpovídá transformace

$$\phi^{j_1 \dots j_N} \rightarrow \phi'^{j_1 \dots j_N} \equiv \sum_{l_1 \dots l_N} \Gamma^{j_1 \dots j_N}_{l_1 \dots l_N} \cdot \phi^{l_1 \dots l_N}. \quad (11.92)$$

n^N -rozměrné matice definované elementy (11.91) tvoří reducibilní reprezentaci grupy **GL**(n).

Její rozklad na ireducibilní komponenty $\bar{U}^{[\lambda]}$ se provádí zcela stejně jako rozklad na komponenty $U^{[\lambda]}$ v případě tenzorů kovariantních. Reprezentace $\bar{U}^{[\lambda]}$ a $U^{[\lambda]}$ jsou vzájemně kontrgradientní a tedy reprezentace

$$U^{[-\lambda_1, \dots, -\lambda_n]} ; U^{[\lambda_1, \dots, \lambda_n]} \quad (11.93)$$

jsou ekvivalentní.

Všechny n -rozměrné unitární, unimodulární matice tvoří grupu **Special unitary** (**SU**(n)).

Omezíme-li se ve formuli (11.87) na $G \in \mathbf{SU}(n)$, obdržíme reprezentaci grupy **SU**(n).

Je možno ukázat, že tato reprezentace je ireducibilní, tj. ireducibilní reprezentace grupy **GL**(n) zůstávají ireducibilními i z hlediska její podgrupy **SU**(n).

Z formule (11.89) však vidíme, že

$$U^{[\lambda_1, \dots, \lambda_n]} ; U^{[\lambda_1+m, \dots, \lambda_n+m]} \quad (11.94)$$

jsou vzhledem k unimodularitě, pro libovolné celé m ekvivalentními reprezentacemi grupy **SU**(n).

Speciálně pro $m = -\lambda_n$ odtud plyne, že ekvivalentními reprezentacemi grupy **SU**(n) jsou

$$U^{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]} ; U^{[\lambda_1-\lambda_n, \lambda_2-\lambda_n, \dots, 0]}. \quad (11.95)$$

Ve skutečnosti existuje jedno-jednoznačné přiřazení mezi Y-polyominy s počtem řádků nepřevyšujícím $n - 1$ a ireducibilními reprezentacemi grupy **SU**(n).

Každému Y-polyominu uvedeného typu odpovídá právě jedna (až na ekvivalenci) ireducibilní reprezentace grupy $SU(n)$ a reprezentace odpovídající různým polyominům jsou neekvivalentní.

Y-polyomina odpovídající rozkladům $[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0]$ a $[\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1 - \lambda_2, 0]$ se navzájem doplňují do obdélníku délky λ_1 a výšky n . Z předchozího plyne, že

$$U^{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 0]} ; \quad U^{[\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1 - \lambda_2, 0]} \tag{ 11.96 }$$

jsou vzájemně kontrgradientní reprezentace grupy $SU(n)$.

Pro direktní součiny ireducibilních reprezentací grupy $SU(n)$ platí

$$U^{[\lambda]} \otimes U^{[\mu]} = \sum_{[\nu]} \oplus U^{[\nu]} \tag{ 11.97 }$$

kde suma probíhá přes všechna Y-polyomina, která jsou obsažena v součinu polyomin $[\lambda]$, $[\mu]$ a která nemají více než n řádků.

Např. pro grupu $SU(3)$ z formule (11.54) plyne

$$U^{[2,1]} \otimes U^{[2,1]} = U^{[4,2]} \oplus U^{[4,1,1]} \oplus U^{[3,3]} \oplus U^{[3,2,1]} \oplus U^{[2,2,2]} . \tag{ 11.98 }$$

Pro grupu $SU(3)$ tak platí:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \otimes \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \oplus 2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \tag{ 11.99 }$$

původní informace

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \tag{ 11.100 }$$

se nám nyní transformuje na

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} . \tag{ 11.101 }$$

V následující kapitole se podíváme na způsob, kterým se v **teorii cytoprostoru** realizuje morfogeneze energie.

2) Úplný systém elementárních částic

V této kapitole se seznámíme s metodu tzv. **grupových plastifikací polyomin** a demonstrujeme si její praktické využití ve fyzice elementárních částic.

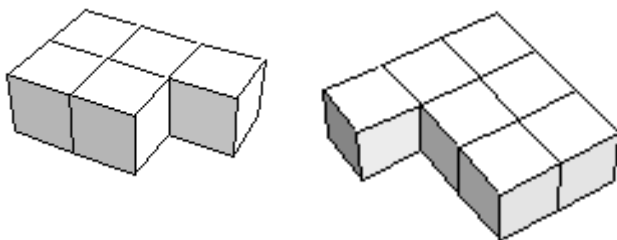
Naším cílem bude ukázat, že standardní model, redukující veškerou přírodu na pouhých 6 druhů kvarků a 6 druhů leptonů ještě nemusí být nejnižším patrem na stromě možných redukcí ve světě elementárních částic. Základní částici veškerého jsoucna – kvantionu – přiřazujeme v **teorii cytoprostoru** plastifikované monomino, čili **1-stereomino** – viz obr. 11.2:

Obr. 11.2



Jako další příklad zde uvádíme několik plastifikovaných polyomin neboli krátce ***n*-stereomin**.

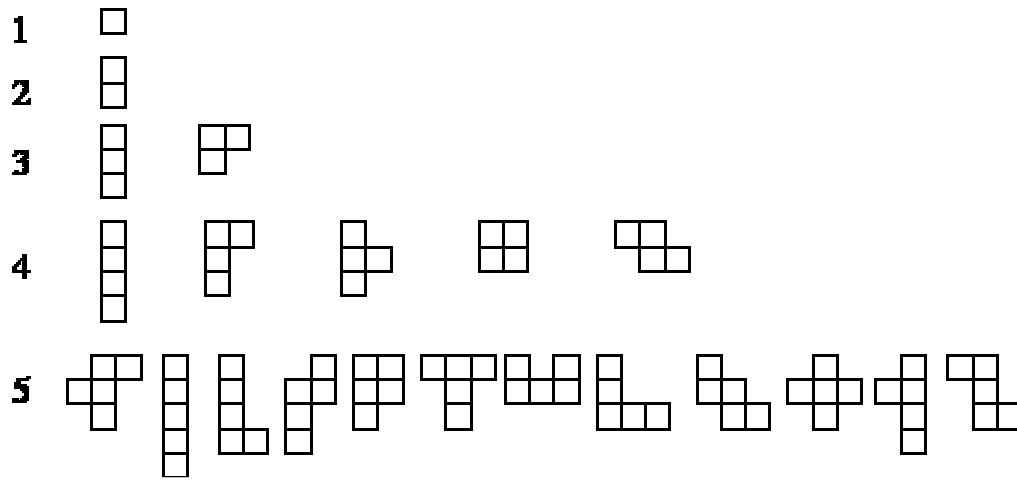
Obr. 11.3



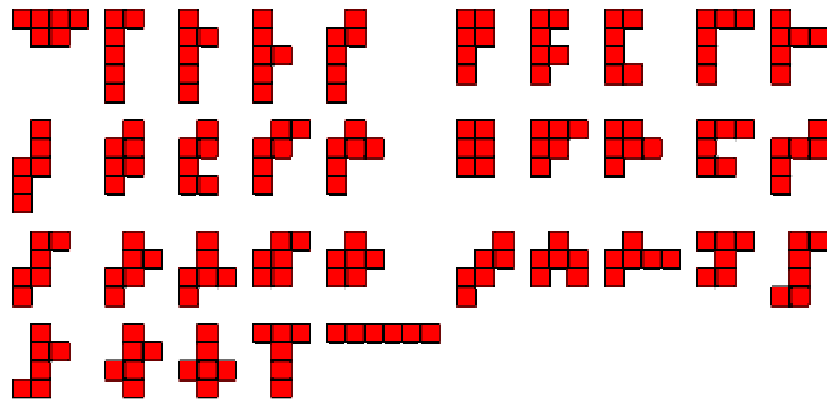
Ta by již mohla odpovídat určitým složeným částicím energie ~ hmoty. Na obr. 11.4 jsou znázorněna všechna existující *n*-omina pro $n = 1, 2, \dots, 8$, neboli monomina, domina, ... , oktomina.

Přitom polyomina lišící se pouze transformací rotace či reflexe, či jejich vzájemnou kombinací, zde považujeme za jeden a týž prvek množiny *n*-omin.

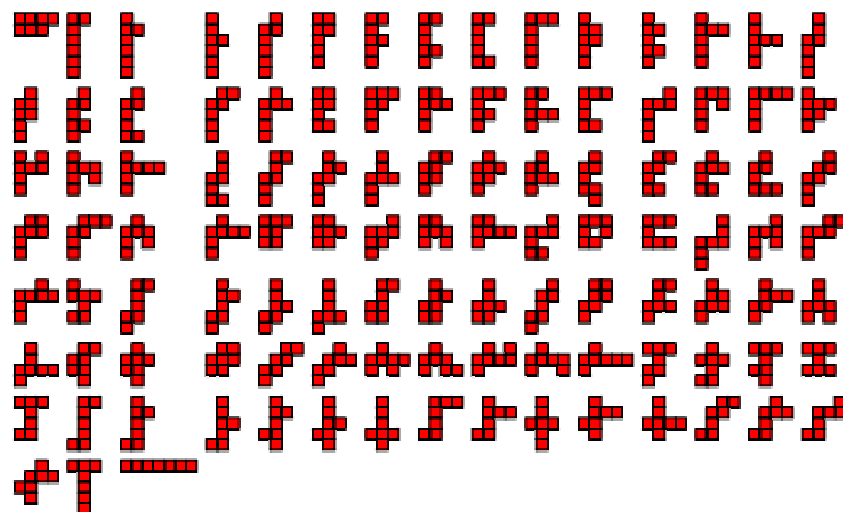
Obr. 11.4



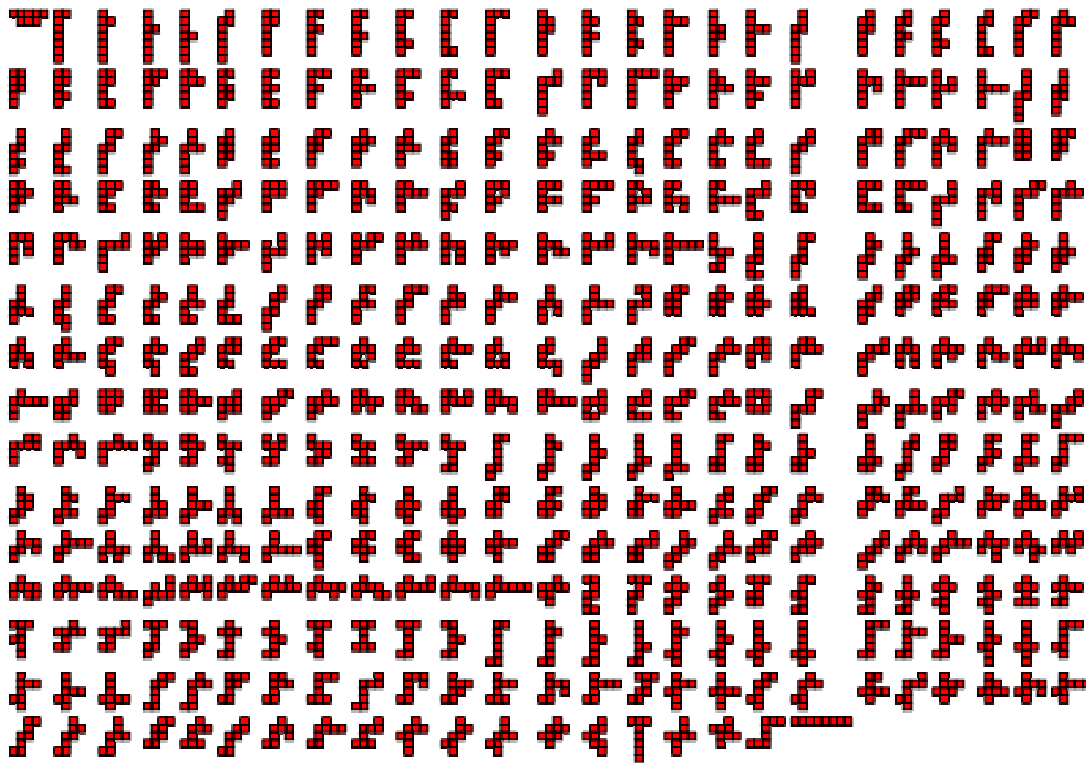
6



7



8



Pro každé n je k dispozici několik čísel vztahujících se k vyjádření počtu n -omin.

Tabulka 11.2 nám ukazuje hodnoty jednotlivých funkcí pro $n = 1$ až $n = 12$, přičemž:

$e(n)$ = počet Y-polyomin tvořených množstvím n spojených monomin.

$g(n)$ = počet n -omin, nepočítáme-li rotace a zrcadlení.

$h(n)$ = počet n -omin, nepočítáme-li rotace.

$t(n)$ = celkový počet n -omin.

$s(n)$ = počet n -omin invariantních (až na rotace) vzhledem k zrcadlení

$a(n)$ = počet prvků $h(n)$, které přispívají jedním prvkem do $t(n)$.

$b(n)$ = počet prvků $h(n)$, které přispívají 2 prvky do $t(n)$.

$c(n)$ = počet prvků $h(n)$, které přispívají 4 prvky do $t(n)$.

Tab. 11.2

n	$e(n)$	$g(n)$	$h(n)$	$t(n)$	$s(n)$	$a(n)$	$b(n)$	$c(n)$
1	1	1	1	1	1	1	0	0
2	1	1	1	2	1	0	1	0
3	2	2	2	6	2	0	1	1
4	3	5	7	19	3	1	3	3
5	4	12	18	63	6	1	3	14
6	6	35	60	216	10	0	12	48
7	8	108	196	760	20	0	12	184
8	12	369	704	2725	34	3	41	660
9	16	1285	2500	9910	70	2	42	2456
10	20	4655	9189	36446	121	0	155	9034
11	24	17073	33896	135268	250	0	158	33738
12	29	63600	126759	505861	441	9	574	126176

Hodnoty $s(n)$ se zdají být velmi podobné binomickým koeficientům, ale ne přesně.

Také existují zřejmé vztahy mezi těmito funkcemi, jako např.

$$h(n) = a(n) + b(n) + c(n) , \quad (11.102)$$

$$t(n) = a(n) + 2b(n) + 4c(n) , \quad (11.103)$$

$$s(n) = 2g(n) - h(n) , \quad (11.104)$$

$$3a(n) + 2b(n) = 4h(n) - t(n) . \quad (11.105)$$

Povšimněme si, že uspořádání vypočtená pomocí $a(n)$ mají 4-směrnou symetrii, která znamená, že každý čtverec (kromě centrálního čtverce u lichého počtu) se musí objevit čtyřikrát.

Proto $a(a)=0$ pro každé a , které po celočíselném dělení 4 dává zbytek 2 nebo 3.

Počet Y-polyomin pro dané n může být vyjádřen vztahem

$$e(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + \left[\frac{n+2}{2} \right] + \operatorname{sgn}(n-8) \cdot \left[\sqrt{n} \right] - \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right] \right) , \quad (11.106)$$

kde $[x]$ značí maximální celé číslo menší než x (např. $[8,12] = 8$;

[8] = 7).

Již na konci 60. let minulého století vyslovil Murray Gell-Mann hypotézu, podle níž by se měly kvarky sestávat z ještě elementárnějších struktur, které nazval **preony**.

V kap. 8 jsme vyslovili předpoklad, že preony jsou elementárními částicemi které jsou základní stavební entitou z níž jsou vytvořeny všechny ostatní částice, tj. kvarky a leptony.

Preony nesou 4 význačné charakteristiky, jež mohou nabývat hodnot uvedených v následující tabulce:

Tab. 11.3

Chuť	A (acid)	B (bitter)
Teplota	-1; -2/3; -1/3; 0	0; 1/3; 2/3; 1
El. náboj	-2/3	1/3
Barva	1/3(R, G, B)	1/3(R, G, B)

(Upozorňujeme, že kvantové číslo T zvané teplota nemá žádný vztah k fyzikální veličině T zvané termodynamická teplota).

Teplota a barva jsou určeny kombinací orientace vektorů cytonové parity (viz kapitola 3) jednotlivých kvantonů uvnitř preonů.

Kombinací chuti a teploty vznikají vůně.

Jak ukazuje následující tabulka, preony se seskupují buď do dvojic s různou teplotou svých členů, tvoříce tak 6 druhů vůní kvarků, nebo do trojic s různou teplotou svých členů, tvoříce 6 druhů vůní leptonů s celkovou teplotou $T = 0$.

Protože může existovat i více než jedna kombinace různých teplot dávající tutéž sumu, může existovat více možností kterak nakombinovat z preonů jeden a tentýž kvark či lepton.

Kvarky a leptony se seskupují do dvojic jež se vzájemně odlišují svojí hmotností.

Proto zpravidla hovoříme o lehkých, středně těžkých a těžkých kvarcích či leptonech.

Tabulka 11.4 ukazuje že to není pouhá náhoda, neboť částice tvořící tyto dvojice mají vždy tutéž celkovou teplotu a liší se od sebe pouze chutí.

Tab. 11.4

Třída	Vůně kvarků	Značka	Vůně leptonů	Značka
Lehké	$A^{-2/3} B^1$ $A^{-1/3} B^{2/3}$ $A^0 B^{1/3}$	d	$A^{-1/3} A^0 B^{1/3}$	e
	$B^{1/3} B^0$	u	$B^{1/3} B^0 A^{-1/3}$	ν_e
Středně těžké	$A^{-1/3} B^1$ $A^0 B^{2/3}$	s	$A^{-2/3} A^0 B^{2/3}$	μ
	$B^{2/3} B^0$	c	$B^{2/3} B^0 A^{-2/3}$	ν_μ
Těžké	$A^0 B^1$	b	$A^{-2/3} A^{-1/3} B^1$ $A^{-1} A^0 B^1$	τ
	$B^{2/3} B^{1/3}$ $B^1 B^0$	t	$B^{2/3} B^{1/3} A^{-1}$ $B^1 B^0 A^{-1}$	ν_τ

Tabulka 11.5 je přehledem základních kvantových charakteristik kvarků plynoucích z jejich vnitřní preonové struktury.

Tab. 11.5

		Vůně					
Kvantová čísla	Symbol	d	u	s	c	b	t
Chuť	t	AB	BB	AB	BB	AB	BB
Teplota	T	1/3	1/3	2/3	2/3	1	1
Baryonové číslo	B	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
Elektrický náboj	Q	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3
Helicita	J	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
Dolní projekce izospinu	I_z^-	-1	0	0	0	0	0
Horní projekce izospinu	I_z^+	0	1	0	0	0	0
Podivnost	σ	0	0	-1	0	0	0
Půvab	γ	0	0	0	1	0	0
Krása	β	0	0	0	0	-1	0
Pravda	τ	0	0	0	0	0	1

Pro elektrický náboj každého kvarku pak platí následující vztah:

$$Q = \frac{B + I_z + \sigma + \gamma + \beta + \tau}{2} . \quad (11.107)$$

Způsob, kterak jsou z jednotlivých kvarků sestaveny ostatní hadrony ukazují následující tabulky.

Tabulky 11.6 – 11.9 představují úplný systém rodiny baryonů, coby bezbarvých soustav tří kvarků:

V tabulkách 11.6 a 11.7 je představena úplná rodina hypernukleonů (antiparalelně orientované spiny kvarků) a hypernukleonů (paralelně orientované spiny kvarků).

Tabulka 11.8 pak zahrnuje veškeré existující hyperony (jen v základním stavu – vyšší hyperonové rezonance se označují stejně, pouze s hvězdičkami na místě horního indexu).

Tab. 11.6

	d	\bar{d}	
du	n	\bar{n}	\overline{du}
uu	p	\bar{p}	

Tab.11.7

	du	\overline{du}	
s	Λ_s^0	$\overline{\Lambda_s^0}$	\bar{s}
c	Λ_c^+	$\overline{\Lambda_c^-}$	\bar{c}
b	Λ_b^0	$\overline{\Lambda_b^0}$	\bar{b}
t	Λ_t^+	$\overline{\Lambda_t^-}$	\bar{t}

Tab. 11.8

	d	u	s	c	b	t	\bar{t}	\bar{b}	\bar{c}	\bar{s}	\bar{u}	\bar{d}	
dd	Δ^-	Δ^0	Σ_s^-	Σ_c^0	Σ_b^-	Σ_t^0	$\overline{\Sigma}_t^0$	$\overline{\Sigma}_b^+$	$\overline{\Sigma}_c^0$	$\overline{\Sigma}_s^+$	$\overline{\Delta}^0$	$\overline{\Delta}^+$	\overline{dd}
uu	Δ^+	Δ^{++}	Σ_s^+	Σ_c^{++}	Σ_b^+	Σ_t^{++}	$\overline{\Sigma}_t^{--}$	$\overline{\Sigma}_b^-$	$\overline{\Sigma}_c^-$	$\overline{\Sigma}_s^-$	$\overline{\Delta}^{--}$	$\overline{\Delta}^-$	\overline{uu}
ss	Ξ_s^-	Ξ_s^0	Ω_{ss}^-	Ω_{sc}^0	Ω_{sb}^-	Ω_{st}^0	$\overline{\Omega}_{st}^0$	$\overline{\Omega}_{sb}^+$	$\overline{\Omega}_{sc}^0$	$\overline{\Omega}_{ss}^+$	$\overline{\Xi}_s^0$	$\overline{\Xi}_s^+$	\overline{ss}
cc	Ξ_c^+	Ξ_c^{++}	Ω_{cs}^+	Ω_{cc}^{++}	Ω_{cb}^+	Ω_{ct}^{++}	$\overline{\Omega}_{ct}^{--}$	$\overline{\Omega}_{cb}^-$	$\overline{\Omega}_{cc}^-$	$\overline{\Omega}_{cs}^-$	$\overline{\Xi}_c^-$	$\overline{\Xi}_c^+$	\overline{cc}
bb	Ξ_b^-	Ξ_b^0	Ω_{bs}^-	Ω_{bc}^0	Ω_{bb}^-	Ω_{bt}^0	$\overline{\Omega}_{bt}^0$	$\overline{\Omega}_{bb}^+$	$\overline{\Omega}_{bc}^0$	$\overline{\Omega}_{bs}^+$	$\overline{\Xi}_b^0$	$\overline{\Xi}_b^+$	\overline{bb}
tt	Ξ_t^+	Ξ_t^{++}	Ω_{ts}^+	Ω_{tc}^{++}	Ω_{tb}^+	Ω_{tt}^{++}	$\overline{\Omega}_{tt}^{--}$	$\overline{\Omega}_{tb}^-$	$\overline{\Omega}_{tc}^-$	$\overline{\Omega}_{ts}^-$	$\overline{\Xi}_t^-$	$\overline{\Xi}_t^+$	\overline{tt}
du			Σ_s^0	Σ_c^+	Σ_b^0	Σ_t^+	$\overline{\Sigma}_t^-$	$\overline{\Sigma}_b^0$	$\overline{\Sigma}_c^-$	$\overline{\Sigma}_s^0$			\overline{du}
ds				Ξ_{sc}^0	Ξ_{sb}^-	Ξ_{st}^0	$\overline{\Xi}_{st}^0$	$\overline{\Xi}_{sb}^+$	$\overline{\Xi}_{sc}^0$				\overline{ds}
us				Ξ_{sc}^+	Ξ_{sb}^0	Ξ_{st}^+	$\overline{\Xi}_{st}^-$	$\overline{\Xi}_{sb}^0$	$\overline{\Xi}_{sc}^-$				\overline{us}
dc					Ξ_{cb}^0	Ξ_{ct}^+	$\overline{\Xi}_{ct}^-$	$\overline{\Xi}_{cb}^0$					\overline{dc}
uc					Ξ_{cb}^+	Ξ_{ct}^{++}	$\overline{\Xi}_{ct}^{--}$	$\overline{\Xi}_{cb}^-$					\overline{uc}
sc					Ω_c^0	Ω_c^+	$\overline{\Omega}_c^-$	$\overline{\Omega}_c^0$					\overline{sc}
db						Ξ_{bt}^0	$\overline{\Xi}_{bt}^0$						\overline{db}
ub						Ξ_{bt}^+	$\overline{\Xi}_{bt}^-$						\overline{ub}
sb						Ω_b^0	$\overline{\Omega}_b^0$						\overline{sb}
cb						Ω_b^+	$\overline{\Omega}_b^-$						\overline{cb}

Mezony jsou tvořeny páry kvark – antikvark a jejich fyzikální vlastnosti se liší v závislosti na vzájemné orientaci spinu obou kvarků. Ta může být buď paralelní (**vektorové mezony**), nebo antiparalelní (**skalární mezony**). jejich základní stav, spolu s prvním rezonančním stavem uvádí tabulka 11.9.

Tab. 11.9

Skalární mezony:

	\bar{d}	\bar{u}	\bar{s}	\bar{c}	\bar{b}	\bar{t}
d	η^0	π^-	K^0	D^-	B^0	T^-
u	π^+	π^0	K^+	$\overline{D^0}$	B^+	$\overline{T^0}$
s	$\overline{K^0}$	K^-	η_s^0	D_s^-	B_s^0	$\overline{T_s^-}$
c	$\overline{D^+}$	D^0	$\overline{D_s^+}$	η_c^0	B_c^+	$\overline{T_c^0}$
b	$\overline{B^0}$	B^-	$\overline{B_s^0}$	B_c^-	Y^0	$\overline{T_b^-}$
t	T^+	T^0	T_s^+	T_c^0	T_b^+	Z^0

Vektorové mezony:

	\bar{d}^*	\bar{u}^*	\bar{s}^*	\bar{c}^*	\bar{b}^*	\bar{t}^*
d^*	ω^0	ρ^-	K^{*0}	D^{*-}	B^{*0}	T^{*-}
u^*	ρ^+	ρ^0	K^{*+}	$\overline{D^{*0}}$	B^{*+}	$\overline{T^{*0}}$
s^*	$\overline{K^{*0}}$	K^{*-}	ϕ^0	D_s^{*-}	B_s^{*0}	$\overline{T_s^{*-}}$
c^*	$\overline{D^{*+}}$	D^{*0}	$\overline{D_s^{*+}}$	ψ^0	B_c^{*+}	$\overline{T_c^{*0}}$
b^*	$\overline{B^{*0}}$	B^{*-}	$\overline{B_s^{*0}}$	B_c^{*-}	Y'^0	$\overline{T_b^{*-}}$
t^*	T^{*+}	T^{*0}	T_s^{*+}	T_c^{*0}	T_b^{*+}	Z'^0

Skalární mezonové rezonance:

	\bar{d}^{**}	\bar{u}^{**}	\bar{s}^{**}	\bar{c}^{**}	\bar{b}^{**}	\bar{t}^{**}
d^{**}	h^0	a^-	K^{**0}	$D^{**,-}$	B^{**0}	$T^{**,-}$
u^{**}	a^+	ϕ^0	K^{**+}	$\overline{D^{**0}}$	B^{**+}	$\overline{T^{**0}}$
s^{**}	$\overline{K^{**0}}$	$K^{**,-}$	f^0	$D_s^{**,-}$	B_s^{**0}	$\overline{T_s^{**,-}}$
c^{**}	$\overline{D^{**+}}$	D^{**0}	$\overline{D_s^{**+}}$	χ_c^0	B_c^{**+}	$\overline{T_c^{**0}}$
b^{**}	$\overline{B^{**0}}$	$B^{**,-}$	$\overline{B_s^{**0}}$	$B_c^{**,-}$	χ_b^0	$\overline{T_b^{**,-}}$
t^{**}	T^{**+}	T^{**0}	T_s^{**+}	T_c^{**0}	T_b^{**+}	χ_t^0

Vektorové mezonové rezonance:

	\overline{d}^{***}	\overline{u}^{***}	\overline{s}^{***}	\overline{c}^{***}	\overline{b}^{***}	\overline{t}^{***}
d^{***}	h'^0	b^-	K^{***0}	D^{***-}	B^{***0}	T^{***-}
u^{***}	b^+	ϕ'^0	K^{***+}	\overline{D}^{***0}	B^{***+}	\overline{T}^{***0}
s^{***}	\overline{K}^{***0}	K^{***-}	f'^0	D_s^{***-}	B_s^{***0}	\overline{T}_s^{***-}
c^{***}	\overline{D}^{***+}	D^{***0}	\overline{D}_s^{***+}	$\chi_c'^0$	B_c^{***+}	\overline{T}_c^{***0}
b^{***}	\overline{B}^{***0}	B^{***-}	\overline{B}_s^{***0}	B_c^{***-}	γ_b^0	\overline{T}_b^{***-}
t^{***}	\overline{T}^{***+}	\overline{T}^{***0}	\overline{T}_s^{***+}	\overline{T}_c^{***0}	\overline{T}_b^{***+}	γ_t^0

Je na první pohled zřejmé, že pokud budou spiny vázány na preonové chuti, podobně jako náboje, není možno vytvořit fermionové stavy zároveň u kvarků (sudé kombinace chuti) i leptonů (liché kombinace chuti).

Na druhé straně, jsou-li spinové stavy určeny teplotou, pak stačí jednoduše přiřadit kladným teplotám helicitu 1, záporným teplotám helicitu 0 a nulové teplotě helicitu 1/2.

U všech kvarků i leptonů pak existuje alespoň jeden fermionový stav (viz tabulka 11.10).

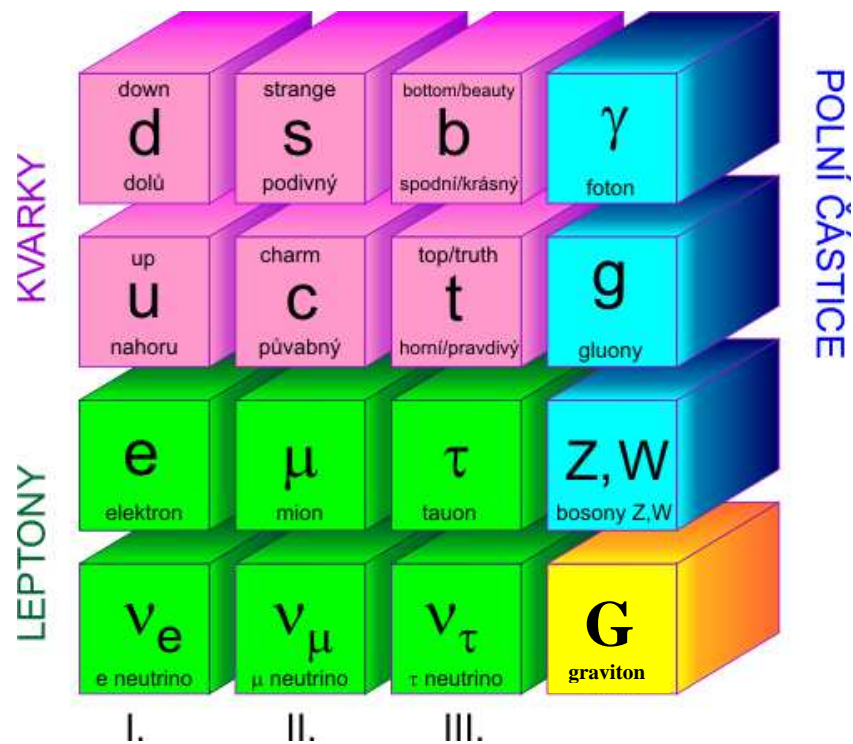
Otázkou však zůstává, jakou úlohu zde hraje oněch 6 zbývajících bosonových stavů, jimž snad kromě stavu ($B^{2/3}B^{1/3}A^{-1}$), jenž by mohl efektivně vystupovat jako graviton G a stavu ($A^{-2/3}A^{-1/3}B^1$), který by mohl reprezentovat nabitě vektorové bosony W^\pm , nelze připsat žádnou z dnes známých elementárních částic.

Jediným kandidátem z rodiny předpokládaných nabitých bosonů (neutrální bosony jsou tvořeny páry kvark – antikvark, lepton – antilepton a nepředstavují tedy z tohoto hlediska žádný problém) jsou dosud hypotetické **Axiony** – částice předpovídané grandunifikačními teoriemi, které by měly tvořit podstatnou část tzv. temné hmoty (dark matter) – záhadné neviditelné substance, tvořící drtivou většinu hmoty vesmíru.

Nyní můžeme jednoznačně přiřadit jednotlivým kvarkům a leptonům ale i některým bosonům jejich vnitřní preonovou strukturu:

Tab. 11.10

Kvarky		Leptony		Bosony	
Značka	Konfigurace	Značka	Konfigurace	Značka	Konfigurace
d	$A^0 B^{1/3}$	e	$A^{-1/3} A^0 B^{1/3}$	A_1^-	$A^{-2/3} B^1$
u	$B^{1/3} B^0$	ν_e	$B^{1/3} B^0 A^{-1/3}$	A_2^-	$A^{-1/3} B^{2/3}$
s	$A^0 B^{2/3}$	μ	$A^{-2/3} A^0 B^{2/3}$	A_3^-	$A^{-1/3} B^1$
c	$B^{2/3} B^0$	ν_μ	$B^{2/3} B^0 A^{-2/3}$	A_0^+	$B^{2/3} B^{1/3}$
b	$A^0 B^1$	τ	$A^{-1} A^0 B^1$	W	$A^{-2/3} A^{-1/3} B^1$
t	$B^1 B^0$	ν_τ	$B^1 B^0 A^{-1}$	G	$B^{2/3} B^{1/3} A^{-1}$



Tab. 11.11: Tabulka elementárních částic. Číslicemi I, II a III jsou označeny tzv. generace částic

Zabývejme se teď otázkou, jak jsou jednotlivé preony vnitřně uspořádány z kvantionů, tj. z plastifikovaných monomin.

Ukazuje se, že nejjednodušší způsob kterak by mohla příroda dosáhnouti plně funkčního systému elementárních částic je následující:

Budeme pracovat pouze s Y-stereominy stupně $n = 3$ a $n = 4$.

Spojme navzájem geometrické středy dvou sousedních buněk daného stereomina vektory $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_{n-1}$.

Vyškrtneme-li z tohoto systému všechny lineárně závislé vektory, obdržíme bázi prostoru V , přičemž počet bázevých vektorů označíme

$$D \equiv \dim V . \quad (11.108)$$

Všechny kyselé preonové stavy s teplotou $T = 0$ pak lze modelovat na množině Y-stereomin stupně $n = 3$, v prostoru V dimenze $D = 1$.

Při teplotách $T < 0$ je $n = 4$, $D = 2$.

Hořkým preonovým stavům přiřazujeme tatáž n jako stavům kyselým při téže $|T|$, avšak dimenze D je vždy o jednotku vyšší.

Výběrovým kritériem je v tomto případě požadavek, aby se takto vzniklý útvar při $SO(3)$ -rotacích o diskrétní úhly velikosti $\pi/2$ jevil vždy opět jako Y-polyomino.



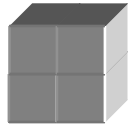
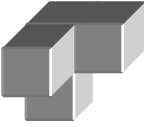

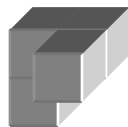


Co se týče jednoznačnosti přiřazení konkrétního stereomina k dané teplotě preonu pro $T \neq 0$, panuje dosud určitá nejistota.

Absolutní hodnota teploty různých preonů by např. mohla odrážet stupeň symetrie příslušných stereomin vzhledem k možným volbám orientace spinu jednotlivých kvantionů tvořících daný preon.

Vyjdeme-li z teploty $T = 0$, kde je stupeň symetrie nejvyšší (počet neekvivalentních kombinací spinů kvantionů generujících jednu a tutéž částici je zde nejnižší ze všech), pak lze předpokládat, že platí obecné pravidlo, podle něhož by měl být stupeň symetrie S nepřímo úměrný absolutní hodnotě teploty T .

Hledaný tvar jednotlivých preonů by tedy mohl vypadat např. takto:

Tab. 11.12

$ T $	A	B
0		
1/3		
2/3		
1		

To, zda je $T > 0$ či $T < 0$ pak závisí jednoduše na tom, jsou-li spiny jednotlivých kvantionů v preonech orientovány konstruktivně ($J = 1$), nebo destruktivně ($J = 0$).

To je určeno dalším výběrovým pravidlem jež je důsledkem **Pauliho vylučovacího principu**, který striktně vyžaduje rozlišitelnost jednotlivých kvantionů uvnitř preonu.

Z něho plyne požadavek, aby žádné dvě sousedící buňky neobsahovaly kvantiony se souhlasně orientovanými spiny.

Vzhledem k tomu, že helicity kvantionu může nabývat pouze dvou hodnot ($\pm 1/2$), platí však toto pravidlo pouze pro částice, jejichž stupně volnosti jsou omezeny dimenzí $D \leq 2$.

Pro $D > 2$ jsou kvantiony vzájemně rozlišitelné i tehdy, sousedí-li spolu dva kvantiony se souhlasně orientovanými spiny.

Tato kritéria lze splnit pouze za výše popsaného předpokladu o vzájemném vztahu dimenze D , stupně n , chuti t a teplotě T jednotlivých preonů, jak jej znázorňuje tab. 11.12.

Z fyzikálního hlediska nelze takto vytvořené struktury oddělit od ostatního vesmírného kontinua, neboť celý vesmír tvoří více či méně

koncentrovaná energie ~ hmota, jež zaujímá v prostoru vždy jistý tvar a navíc je ve stálém pohybu a víru neutuchajících proměn spjata s okolní energií ~ hmotou, na níž je přímo závislá.

Z tohoto předpokladu nyní vyjdeme při konstruování modelu tzv. **cytoprostoru**, který je založen na principech, jež dosti dobře korelují m.j. s **holografickým principem M-teorie** a tvoří základní pilíř o nějž se opírá celá teorie cytoprostoru.

3) Elementární úvod do teorie cytoprostoru

Základním přínosem teorie relativity je poznání, že polohové souřadnice a časové body událostí nemají samostatný invariantní význam, že prostor a čas tvoří sjednocené prostoročasové kontinuum.

Absolutní význam mají pouze prostoročasové intervaly.

V tomto ohledu by bylo nedůsledné měřit vzdálenosti ve čtyřrozměrném prostoročase v různých směrech různými jednotkami.

Ve směrech prostorových pomocí metru a podél časové osy v sekundách.

Podobně jako je přirozené měřit vzdálenosti v prostoru ve všech směrech pomocí týchž jednotek, je rozumné činit totéž i v prostoročase.

Vezmeme-li za základ jeden metr, je výhodné ocejchovat časovou osu tak, aby jeden dílek představoval vzdálenost, již urazí světlo za jednu sekundu.

Potom délku i čas budeme měřit v metrech, přičemž rychlost světla se v takto upravené souřadné soustavě bude jevit jako přímka $t' = x$, kde t' je **geometrodynamický čas**, tj. čas měřený v metrech.

Geometrodynamický čas pak souvisí s obyčejným časem t vztahem

$$t' = c \cdot t. \quad (11.109)$$

Další základní fyzikální veličinou je hmotnost.

V Newtonovské fyzice má hmota dva základní projevy – setrvačnost a gravitaci, přičemž tyto projevy jsou nezávislé.

Úměrnost setrvačné a gravitační hmotnosti vystupuje v Newtonovské mechanice jako empirický fakt, který není v rámci teorie vysvětlitelný.

Pro kvantitativní vyjádření množství hmoty byla proto stanovena další veličina zvaná hmotnost, nezávislá na veličinách délky a času, za jejíž jednotku byl zvolen kilogram.

V obecné teorii relativity, která stírá rozdíl mezi setrvačností a gravitací, se hmotnost těles měří prostřednictvím jejich setrvačných projevů, jež jsou určeny mírou zakřivování prostoročasu.

To znamená, že hmotnost lze stanovit pomocí čistě geometrických měření v prostoročase – pomocí měření délek.

Gravitační působení tělesa o hmotnosti M udílí každé testovací částici umístěné ve vzdálenosti r od centra gravitace zrychlení

$$a \equiv \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{G \cdot M}{r^2}, \quad (11.110)$$

což lze přepsat v geometrodynamické soustavě jednotek jako

$$a' \equiv \frac{d^2 r'}{dt'^2} = \frac{G \cdot M}{c^2 \cdot r'^2} \equiv \frac{M'}{r'^2}. \quad (11.111)$$

Za **geometrodynamickou hmotnost** je pak přirozené zvolit veličinu s rozměrem délky:

$$M' = \frac{G \cdot M}{c^2}. \quad (11.112)$$

Porovnáme-li nyní tuto délku s **Comptonovskou vlnovou délkou** částice

$$\lambda = \frac{\hbar}{M \cdot c} \equiv M', \quad (11.113)$$

dospějeme okamžitě k vyjádření

$$\lambda = \left(\frac{G \cdot \hbar}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \equiv l_h \approx 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m} . \quad (11.114)$$

Fyzikální význam konstanty l_h , která se nazývá **Planckovou délkou**, je následující: rozlišení dvou blízkých bodů optickým mikroskopem vyžaduje kratší vlnovou délku použitého světla než je vzdálenost těchto bodů.

Protože energie fotonu je

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda} , \quad (11.115)$$

vyžaduje rozlišení velmi blízkých bodů značnou energii ~ hmotu, která je samozřejmě zdrojem zakřivení prostoročasu ve svém okolí. V okamžiku, kdy se vlnová délka použitého fotonu rovná geometrodynamické délce jeho hmotnosti, ocitnou se vlivem nárůstu křivosti prostoročasu oba pozorované body uvnitř **Schwarzschildovy sféry**.

Pokus o změření tak malých vzdáleností proto nemůže být úspěšný.

Představa o spojitém prostoročasovém kontinuu tak ztrácí smysl.

Ukazuje se, že nemá smysl hovořit o prostorových intervalech kratších než l_h a rovněž o geometrodynamických časových intervalech kratších než je tato délka.

Z rovnosti (11.114) pak pro elementární kvantum času vyjádřené v klasických jednotkách plyne hodnota

$$t_h = \frac{t'}{c} = \frac{l_h}{c} \approx 5,4 \cdot 10^{-44} \text{ s} . \quad (11.116)$$

zvaná **Planckův čas**.

Model cytoprostoru spočívá v důsledném domyšlení výše popsaných skutečností z hlediska jejich příčin a jejich důsledků.

V tomto modelu je veškerý prostor uvnitř kupovesmíru ve skutečnosti tvořen krychlovou mřížkou o straně jedné buňky rovné Plackově délce, zvanou **cytoprostorová mříž**.

Buňky cytoprostorové mříže vytvářejí zdánlivě homogenní substanci v níž nelze tvarově rozlišit jednotlivá plastifikovaná polyomina a struktury vyššího řádu vytvořené jejich vzájemným pospojováním. Přiřadíme-li však neočíslovaným buňkám plastifikovaných polyomin formálně např. nuly, můžeme je uvnitř cytoprostoru vzájemně rozeznávat.

Kinematika se pak v cytoprostoru dociluje přeléváním čísel mezi jednotlivými cytoprostorovými buňkami, přičemž struktura polyomin zůstává zachována, pokud mez nimi nedochází k interakcím.

Buňky očíslované přirozenými čísly (tj. nikoliv nulou) označujeme jako **buňky aktivované**.

Každé aktivované buňce cytoprostoru odpovídá v prostoročase kvantum energie $E = h$ zvané kvantion, s nímž jsme se již seznámili v předešlé kapitole.

Buňky, jež jsou v daném časovém okamžiku na dané hypergrupě nulové, představují tzv. **inaktivní body této hypergrupy**.

Jsou to oblasti bez projevené energie, sloužící coby potenciál nezbytný pro zprostředkování jejího přenosu.

Ten se realizuje pomocí tzv. **primární cytorezonance**.

Z kap. 8 víme, že k tomu, aby mohl ve vesmíru plynout čas je zapotřebí neustálá výměna kvantionových **antionů** mezi jednotlivými kvantiony a **Blandriem**.

Tento pozoruhodný jev přenosu antionu se však podařilo plně fyzikálně objasnit teprve zavedením modelu cytoprostoru.

Kvazičástice sloužící k přenosu antionu mezi Blandriem a kvantiony byla nazvána **cyton**.

Jedná se o jedinou formu energie existující v cytoprostoru.

Právě energie přenášená ve formě cytonů tvoří prapůvod veškerého jsoucna.

Všechna rozmanitost myriád různých světů je jen důsledkem vyvěrání cytonové energie „na povrch“.

Cytonem nazýváme takovou buňku cytoprostoru, které je v čase t přiděleno tzv. **cytonové číslo** $s \in N$, $s \in \langle 1; 10^{62} \rangle$.

Během svého pohybu může cyton postupně nabývat cytonových čísel ležících v uvedeném intervalu.

Uspořádaná n -tice těchto čísel pak tvoří tzv. **cytonový vektor** $|\sigma\rangle$.

Jelikož je cytoprostor trojrozměrný, pohybují se v něm cytony ve třech nezávislých, navzájem ortogonálních směrech.

V každé buňce se tak protínají hned tři možné dráhy, po nichž může přicházet cyton.

Těmto drahám říkáme **cytorezonanční chreody** (z řeckého *chreos* – cesta).

Každá cytorezonanční chreoda obsahuje řádově 10^{62} buněk (průměr kupovesmíru vyjádřený v Plackových délkách).

Norma vektoru $|\sigma\rangle$ tak může nabývat řádově 10^{62} různých hodnot.

Proložíme-li cytoprostorem ortonormální soustavu souřadnou s počátkem v zadním levém dolním rohu cytoprostoru a zvolíme-li za normu vektoru kanonické báze β v takto zavedeném souřadném systému Planckovu délku, potom každý cytonový vektor jehož komponenty tvoří rostoucí posloupnost v této soustavě souřadnic budeme označovat v Diracově symbolice jako **bra-vektor**, kdežto cytonový vektor jehož komponenty tvoří klesající posloupnost cytonových čísel označíme za **ket-vektor**.

Cytonové vektory pak každé buňce cytoprostoru přiřadí uspořádanou trojici čísel, která tvoří polohový vektor buňky vzhledem k výše popsané bázi β .

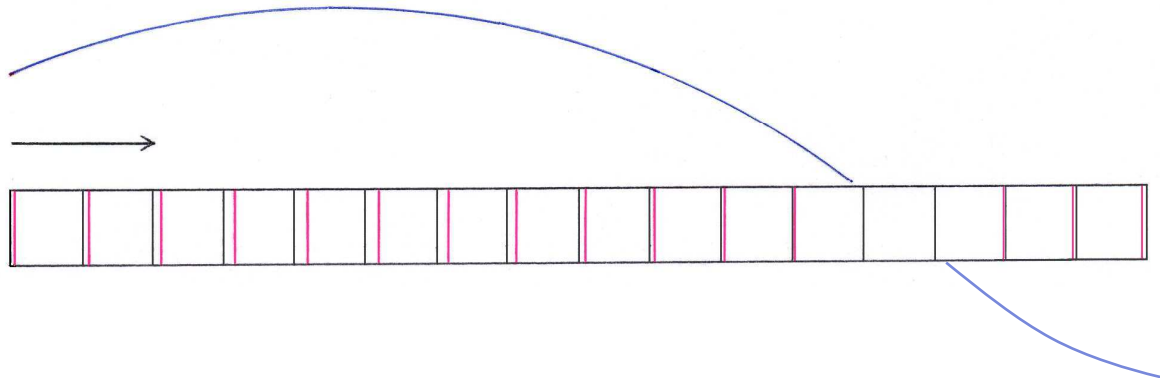
Princip primární cytorezonance však nespočívá v představě pouhého přelévání cytonového čísla buňkami dané chreody.

Cyton je totiž skutečnou kvazičásticí šířící se po chreodách cytoprostoru ve formě podélného vlnění.

Toto vlnění se realizuje postupným posunutím buněk dané chreody vůči naší hypergrupě o hodnotu $\Delta l < l_h$, jež se šíří po této chreodě mající charakter postupné vlny.

Na obr. 11.5 je schematicky znázorněn průběh primární cytorezonance po vybrané cytorezonanční chreodě v určité fázi jejího časového vývoje, včetně vlnové funkce $\psi(r, t)$ příslušející cytorezonančnímu kvazikvantu.

Obr. 11.5



Odtud je vidět, že cytonové číslo ve skutečnosti nepředstavuje přesnou polohu cytonu na jeho chreodě v daném okamžiku, ale brž odpovídá pouze střední hodnotě této polohy tj.

$$s = \langle \psi | x_i | \psi \rangle \quad (11.117)$$

Kde x_i je i -tá souřadnice polohového vektoru \mathbf{r} .

Každá chreoda je v cytoprostoru jednoznačně určena trojicí souřadnic vzhledem k bázi β .

Je zjevné, že jedna z těchto souřadnic bude vždy rovna nule.

Nahradíme-li tuto nulovou souřadnici nejvyšší z hodnot všech složek vektoru $|\sigma\rangle$, popř. nejnižší z hodnot složek vektoru $\langle\sigma|$, obdržíme trojici souřadnic tzv. polohového vektoru \mathbf{x} kvantionu generovaného uvažovanou dvojicí cytonů.

Tento polohový vektor kvantionu je totožný s polohovým vektorem buňky, v níž se má daný kvantion zhmotnit.

Označíme-li

$$\dim |\sigma\rangle = \bar{s}_i, \quad (11.118)$$

umožní nám předchozí úvahy definovat tzv. **cytonovou paritu**.

Předpisem, v němž nahradíme nulovou souřadnici polohového vektoru příslušné chreody číslem \bar{s}_i , označeným pruhem kvůli rozlišení zcela určité chreody na níž došlo ke generaci konkrétního kvantionu dvojicí

cytonů: s^+ s vektorem $|\sigma\rangle$ a s^- s vektorem $\langle\sigma|$, je tato dvojice jednoznačně určena (tj. lokalizována v cytoprostoru).

Tento předpis budeme nazývat cytonovou paritou daného kvantionu v čase t .

Stojí za povšimnutí, že cytonová parita kvantionu je vektor totožný s polohovým vektorem \mathbf{x} tohoto kvantionu.

Jediný rozdíl je zde v označení i -té souřadnice pruhem, přičemž i je funkcí času.

Tento zápis lze formálně nahradit např. přiřazením pořadového čísla proužkované souřadnice vzhledem k bázi $\beta = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ do závorky, za polohový vektor daného kvantionu:

$$s_x^\pm(t) = (s_1, s_2, s_3) [i(t)] \quad ; i \in \{1, 2, 3\} , \quad (11.119)$$

kde s_j jsou komponenty polohového vektoru \mathbf{x} kvantionu.

Princip generování hmoty v cytoprostoru je tedy založen na existenci cytorezonančních antičástic – **paracytonů**.

Průlet každého cytonu určitou chreodou ve směru $|\sigma\rangle$ je v čase $\pm\Delta t$ doprovázen pohybem paracytonu ve směru $\langle\sigma|$ po téže chreodě.

Přitom platí $\Delta t \leq 5 \cdot 10^{-106}$ s od okamžiku startu cytonu s^+ .

Polohový vektor každého kvantionu určuje Blandrium na základě výpočtu fázového rozdílu vlny cytonu a paracytonu.

Tím obdrží cytonovou paritu jakožto generátor tohoto kvantionu.

Celý systém tvorby hmoty a prostoročasu tedy funguje následujícím způsobem:

Cyton s^+ je vyslán Blandriem na kladný konec chreody a v čase t_0 .

V čase t_1 , pro který platí

$$|t_1 - t_0| = \Delta t , \quad (11.120)$$

je vyslán paracyton s^- k zápornému konci téže chreody.

Poloha buňky, ve které dojde k jejich kolizi a vzniku kvantionu závisí na parametru $t_x = t_1 - t_0$.

Po srážce se tzv. **reliktová cytorezonance a anticytorezonance** vracejí zpět do Blandria po téže chreodě, po níž se realizovala primární cytorezonance, aby zde informovaly o průběhu celé transakce.

Blandrium je tak neustále obeznámeno s polohou a hybností každé částice ve vesmíru.

Všechny kolize cytonů v cytoprostoru vedou nejen k vytvoření kvantionu ale rovněž ke vzniku tzv. **sekundární cytorezonance**. Jedná se o důsledek nevratnosti procesu generování kvantionu jenž se projeví zbytkovým chvěním cytoprostoru šířícím se po rozpadu kvantionu od místa kolize, a to převážně ve směru kolmém na chreodu, na níž se kolize realizovala.

V následující kapitole bude ukázáno, že sekundární cytorezonance odpovídá za všechny druhy interakcí v přírodě, tj. za veškeré formy fyzikálních polí ale také např. za vznik setrvačných sil v neinerciálních vztažných soustavách.

Pozoruhodným důsledkem existence sekundární cytorezonance je také izotropie prostoru, který je přitom generován anizotropním cytoprostorem.

4) Úvod do fyziky hypergrup

Z předešlého víme, že polyomina jsou symetrickými resp. antisymetrickými maticovými reprezentacemi.

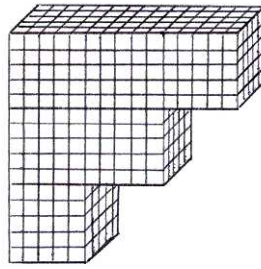
Plastifikovaná struktura polyomin, odpovídající vázané soustavě kvantionů, je tedy v jistém smyslu strukturalizovanou maticí.

V kap. 10 bylo popsáno (a v této kapitole bude podrobně dokázáno), že i kvantion má svoji vnitřní strukturu.

Přesněji řečeno, každý kvantion obsahuje ve svém nitru osminásobnou projekci našeho vesmíru, tzn., že každý kvantion typu 1 je tvořen opět kvantiony, ovšem samozřejmě typu -1.

V cytoprostoru tedy musíme brát v úvahu též vnitřní skelet jednotlivých buněk, tzv. **intrakvantionické cytoprostory**, krátce **intracytoprostory** (viz obr. 11.6).

Obr. 11.6



Každou buňku v našem cytoprostoru tak pomyslně rozdělíme na mřížku o straně jedné elementární buňky $l = 10^{-96}$ m.

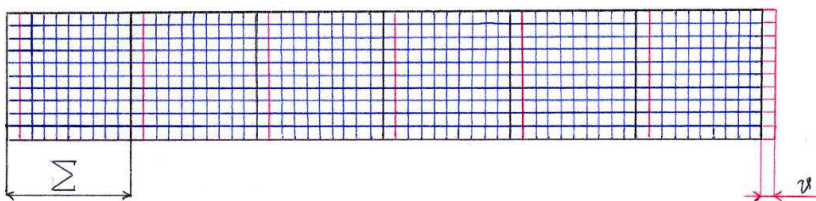
Pokud bychom v tomto stylu pokračovali dál, až k rozměru buňky $l = \infty^{-2}$, získáme nularozměrný model partonu v reálném pojetí, tj. řečeno jazykem moderních struníků-dirichletíků alias d-bránických teoretiků, obdržíme tzv. **d(0)-bránu**, čili **bodový chronor**.

My však při výkladu vlastností cytoprostoru nyní vystačíme s rozlišením 10^{-96} m.

Přeneseme se teď do dvourozměrné analogie trojrozměrného cytoprostoru, abychom se blíže seznámili s tím, kterak se v teorii cytoprostoru řeší problematika tzv. **hypergrup**, s nimiž se čtenář mohl poprvé potkat již v kap. 8.

Pohledme na následující obrázek:

Obr. 11.7



Buňky cytoprostoru jsou zde vyznačeny černě.

Uvnitř každé buňky vidíme modře vykreslen intracytoprostor.

Všechny buňky cytoprostoru patřící do tzv. naší hypergupy jsou černě orámovány.

Buňky, jež jsou vůči naší hypergupě posunuty o vektor ϑ patří do cizí hypergupy a jsou označeny červeně.

Pro cizí hypergrupy tedy platí: je-li strana buňky Σ hypergrupy α tvořena počtem n intracytoprostorových buněk, což zapisujeme

$$\Sigma_{\alpha} = n \cdot \lambda_h = l_h, \quad (11.121)$$

potom každá soustava buněk posunutá vůči hypergrupě α o velikost vektoru

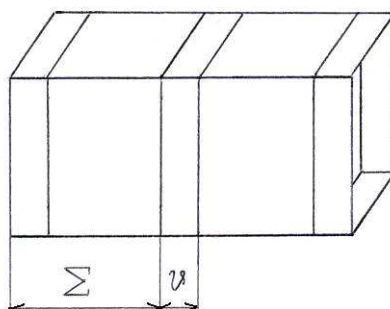
$$\vartheta = k \cdot \lambda_h, \quad (11.122)$$

kde λ_h je velikost intracytoprostorové buňky a $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tvoří cizí hypergrupu.

Číslo $\vartheta = \|\vartheta\|$ nazýváme **hypergrupární bariérou** mezi dvěma různými hypergrupami, čili **interhypergrupární bariérou**.

Jak se jeví celá situace ve 3D-pohledu ukazuje obrázek 11.8.

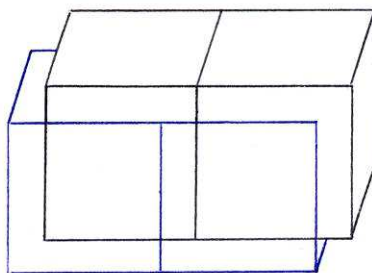
Obr. 11.8



Ty hypergrupy, jež jsou od naší hypergrupy α odděleny příliš silnou interhypergrupární bariérou ϑ nemají pro náš svět valného praktického významu, neboť účinný průřez jejich interakce s naší hypergrupou jde s rostoucím ϑ velmi rychle k nule.

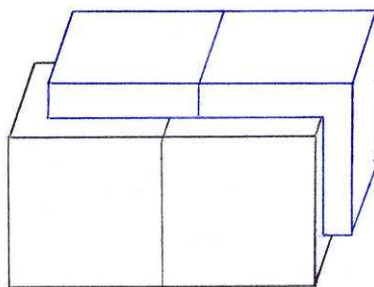
Uvažujeme-li vzájemnou translaci hypergrup pouze po horizontálách a vertikále tak, jak je to naznačeno v předchozím výkladu, potom v našem nejbližším okolí dostáváme celkem 6 přilehlých hypergrup. Pokud uvážíme ještě translaci po rovinných diagonálách, přidá se k těmto šesti blízkým hypergrupám ještě dalších 8 (viz obr. 11.9).

Obr. 11.9



A konečně, provedeme-li translaci hypergrup po prostorových diagonálách, jak naznačuje obr. 11.10, získáme dalších 8 hypergrup v naší těsné blízkosti.

Obr. 11.10



Celkem tak máme 22 hypergrup které jsou od té naší odděleny tou nejtenčí možnou interhypergrupární bariérou.

Protože jsou jednotlivé hypergrupy vzájemně posunuty, nemají za normálních okolností možnost mezi sebou interagovat, ačkoli jsou navzájem prolnuty.

Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že má-li celý mechanismus generování vesmíru bezchybně fungovat, nesmí se na téže chreodě v jednu okamžiku vyskytovat více než jeden cytonový pár.

Doba života kvantionu odpovídá Planckovu času t_h , a nazývá se jak víme antion.

Označíme-li průměr vesmíru jako d , pak počet buněk cytoprostoru na jedné chreodě bude dán výrazem

$$n = \frac{3d}{l_h} . \quad (11.123)$$

Z kap. 8 víme, že během rozpínání vesmíru se od sebe některé body prostoru vzdálili téměř na 10^{11} světelných roků, což činí necelých 10^{27} m.

Odtud

$$n \approx 10^{62} . \quad (11.124)$$

Pro průměr kupovesmíru pak platí $D \approx 3d$.

Jak později ukážeme, pro poloměr kupovesmíru platí přesně

$$R = \sqrt{\frac{3c^2}{\pi\rho_v G}} , \quad (11.125)$$

kde G je gravitační konstanta a ρ_v průměrná hustota vesmíru.

Pro rychlost cytonu nyní dostáváme hodnotu

$$v_s = \frac{n \cdot D}{t_h} \approx 6 \cdot 10^{132} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} . \quad (11.126)$$

Frekvenci na níž běží naše hypergrupa pak získáme coby podíl

$$F = \frac{v_s}{D} \approx 2 \cdot 10^{105} \text{ Hz} \quad (11.127)$$

a jak již také víme, je

$$\Delta t \leq F^{-1} . \quad (11.128)$$

Cytoprostor obsahuje celkem

$$N = n^3 \approx 10^{186} \quad (11.129)$$

buněk na každé hypergrupě.
Každou z buněk přitom může protéci až

$$\frac{c}{l_h} \approx 2 \cdot 10^{43} \quad (11.130)$$

bitů informace za jedinou sekundu.
Celou hypergrupou tedy může proběhnout až

$$\frac{N \cdot c}{l_h} = \frac{N}{t_h} \approx 2 \cdot 10^{229} \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (11.131)$$

Od počátku vesmíru uplynulo $4 \cdot 10^{17}$ sekund.
Za tuto dobu jím mohlo protéci maximálně

$$\frac{4 \cdot 10^{17}}{8 \cdot t_h} \cdot N \approx 10^{246} \text{ bit} \quad (11.132)$$

(Cytoprostor na naší hypergrupě generuje 8 vesmírů).
V ideálním případě, kdy jsou všechny buňky dané hypergrupy
zaplněny kvantiony (aktivovány) by činila hmotnost hypergrupy

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{N \cdot h}{c^2} \approx 7 \cdot 10^{135} \text{ kg}. \quad (11.133)$$

Skutečná gravitační hmotnost naší hypergrupy je však zhruba o 82
řádů nižší než její mezní hmotnost M .

Protože vesmír obsahuje pouze omezené množství hmoty, musí být
uzavřený a to znamená, že jeho poloměr r je zároveň poloměrem
gravitačním, příslušejícím skutečné gravitační hmotnosti m_v tohoto
vesmíru.

Pro její hodnotu tak dostaneme

$$m_v = \frac{r \cdot c^2}{2G} \approx 10^{53} \text{ kg}. \quad (1.134)$$

Hmotnost naší hypergrupy je osminásobkem této hmoty.
Spočteme-li objem současného vesmíru:

$$V_v = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \approx 10^{79} m^3, \quad (11.135)$$

snadno určíme jeho průměrnou hustotu

$$\rho_v = \frac{m_v}{V_v} \approx 10^{-27} kg \cdot m^{-3}. \quad (11.136)$$

Již elementární Newtonovská mechanika nám nyní pomůže určit poměrně přesný odhad Hubbleovy konstanty H .
Z Newtonova gravitačního zákona

$$F = \frac{m_v \cdot m \cdot G}{r^2} = m \cdot g \quad (11.137)$$

vyplývá pro potenciální energii testovací částice hmotnosti m vztah:

$$E_p = -m \cdot g \cdot r = -\frac{m_v \cdot m \cdot G}{r} = -\frac{4\pi \cdot \rho_v \cdot m \cdot r^2 \cdot G}{3}. \quad (11.138)$$

Rychlost vzdalování této částice v důsledku rozpínání vesmíru je dána Hubbleovým zákonem

$$v = H \cdot r. \quad (11.139)$$

Její kinetická energie tedy je

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot H^2 \cdot r^2. \quad (11.140)$$

Takže celková energie $E = E_k + E_p$ je tvaru

$$E = m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{2} H^2 - \frac{4}{3} \pi \cdot \rho_v \cdot G \right). \quad (11.141)$$

Je-li E nezáporná, částice se nikdy nemůže vzdálit do asymptotického nekonečna, protože pro velmi velká r je potenciální energie zanedbatelná a celková energie se blíží energii kinetické, která je vždy nezáporná.

Je-li naopak E kladná, může částice uniknout do nekonečna a ještě jí zbyde nějaká nenulová kinetická energie.

Pro přesně únikovou rychlost odtud plyne podmínka $E = 0$, což dává

$$\frac{1}{2} H^2 = \frac{4}{3} \pi \cdot \rho_v \cdot G. \quad (11.142)$$

Pro velikost Hubbleovy konstanty odtud máme

$$H \leq \left(\frac{8\pi \cdot \rho_v \cdot G}{3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11.143)$$

Naše dosavadní úvahy nás tak přivádějí k závěru, že hodnota H se pohybuje kdesi v poměrně těsné blízkosti čísla $61 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. Přestože tento výsledek zde byl odvozen na základě Newtonovské fyziky, platí i pro vysoce relativistický vesmír.

ρ_v pak musí být interpretována jako celková hustota energie vesmíru dělená c^2 .

Kvantově mechanicky vzato, odpovídá tato hustota množství přibližně 10^{24} kvantionů na krychlový metr prostoru, neboť (jak bude později ukázáno – viz vztah (11.189)) hmotnost kvantionu činí

$$m_y = \frac{5}{8} \frac{h}{\pi l_h c z^5} \approx 7,3725 \cdot 10^{-51} \text{ kg}. \quad (11.144)$$

Z hlediska zákona zachování energie musí vesmír obsahovat v každém elementárním čase stejný počet

$$N_y = \frac{m_v}{m_y} \approx 10^{103} \quad (11.145)$$

kvantionů.

To nám umožní vypočít průměr Hawkingovy pseudosingularity pro celý vesmír.

Z rovnice

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = N_y \cdot l_h^3 \quad (11.146)$$

získáme okamžitě

$$r = 0,24 \text{ m} \quad (11.147)$$

neboli

$$\phi \equiv 2r = 0,48 \text{ m} . \quad (11.148)$$

Po zhroucení vesmíru bude tedy průměr struktury **Baby universe** (Hawkingovy pseudosingularity) činit necelých půl metru.

A nyní trochu statistické fyziky:

V kupovesmíru lze v každém okamžiku nalézt jeden kvantion přibližně na každé

$$\frac{N}{N_y} \approx 10^{83} \quad (11.149)$$

buňce.

Pravděpodobnost nalezení kvantionu na jedné konkrétní chreodě během elementárního času t_h udává vztah

$$p = \frac{3N_y \cdot D}{N \cdot l_h} = \frac{3N_y \cdot n}{N} \equiv 3 \cdot 10^{-19} \% . \quad (11.150)$$

Na kvantion tedy narazíme zhruba na každé $3 \cdot 10^{21}$ chreodě.
Nyní přejdeme k základním časovým jednotkám, tj. k sekundám.
Na jedné chreodě lze za jednu sekundu zaznamenat v průměru cca.

$$P = \frac{P}{t_h} \approx 6 \cdot 10^{22} \quad (11.151)$$

kvantionů.

Přibližně na každé $2 \cdot 10^{39}$ buňce vybrané chreody lze tedy v průměru každou sekundu spatřit nějaký ten kvantion.

(Pokud se někomu náhodou zdá poslední údaj nepodloženě trojnásobně nadhodnocen, nechť si znovu důkladně prostuduje pojednání o struktuře cytoprostoru a ještě jednou si celou záležitost promyslí).

Na celkové množství $3 \cdot 10^{124}$ chreod připadá v kupovesmíru 10^{103} kvantionů.

To znamená, že na nějakých $3 \cdot 10^{21}$ chreod připadá v elementárním čase v průměru jeden jediný kvantion.

K témuž výsledku jsme však dospěli již dříve poněkud jiným postupem, že ano.

Nyní je již snadné učinit řádový odhad operační rychlosti cytoprostoru pracujícího v běžném režimu:

$$Q = \frac{N_y}{t_h} = \frac{P \cdot m}{3} \approx 6 \cdot 10^{146} \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (11.152)$$

kde m je počet chreod.

Z tohoto výkonu připadá na jednu chreodu

$$\frac{Q}{m} = \frac{P}{3} \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (11.153)$$

Snadno nahlédneme, že od počátku tohoto vesmíru byla přibližně jen každá 10^{22} buňka cytoprostoru alespoň jedenkrát aktivována

Blandriem, tj. obsazena kvantionem.

Ó jaké to plýtvání prostorem, není-liž pravda?

V závěru této části si ještě můžeme ukázat jednoduchý způsob, kterak přiřadit dynamické proměnné dokonce i samotným cytorezonančním kvazikvantům – cytonům.

Protože každý z cytonů nese energii potřebnou k vygenerování celého jednoho kvantionu, neboť jinak by po srážce s paracytonem tento pár úplně zanikl odevzdávše veškerou svou energii kvantionu a nedostávalo by se již energie pro sekundární cytorezonanci, musí být

$$h = \frac{m_s \cdot v_s^2}{2}, \quad (11.154)$$

neboli

$$m_s = \frac{2h}{v_s^2} \approx 3,7 \cdot 10^{-299} \text{ kg}. \quad (11.155)$$

Pro součet velikostí hybností páru cyton – paracyton dostáváme

$$p = 2m_s \cdot v_s \approx \frac{4h}{v_s}. \quad (11.156)$$

Čas potřebný k přepólování vektoru rychlosti cytonu z v_s na $-v_s$ je

$$t = \frac{l_h}{v_s} = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^3 \cdot v_s^2}} \approx 1,6 \cdot 10^{-184} \text{ s}. \quad (11.157)$$

Při spárování cytonů uvnitř cytoprostorové buňky tedy dosahuje jejich střední zrychlení velikosti

$$p = \frac{dv_s}{dt} = \frac{l_h}{t^2} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot c^3 \cdot v_s^4}{h \cdot G}} \approx 6,2 \cdot 10^{332} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (11.158)$$

Síla, jíž přitom na sebe oba cytony vzájemně působí je rovna

$$F = \frac{dp}{dt} = \sqrt{\frac{32\pi \cdot h \cdot c^3}{G}} \approx 164 \text{ N}, \quad (11.159)$$

a jak později uvidíme, představuje napětí tzv. **lineárního chronoru** generujícího kvantion.

V následujícím odstavci prozkoumáme některé relativistické aspekty modelu cytoprostoru.

Ukážeme si, kterak amplituda cytorezonance ovlivňuje dobu života generovaného kvantionu, a jaký to má vliv na rychlost částic ve vesmíru.

Naším cílem bude postupně vybudovat důkaz fraktální teorie vesmíru.

5) Cytoprostorová perspektiva teorie relativity

První známky toho, že náležité vysvětlení chování světla vyžaduje dramatickou změnu způsobu, jakým do té doby fyzikové vnímali svět, se objevily již nedlouho po roce 1887, kdy Michelson a Morley oznámili své definitivní experimentální výsledky.

V roce 1889 nabídl irský fyzik George Fitzgerald vysvětlení výsledků Michelsonova – Morleyova experimentu.



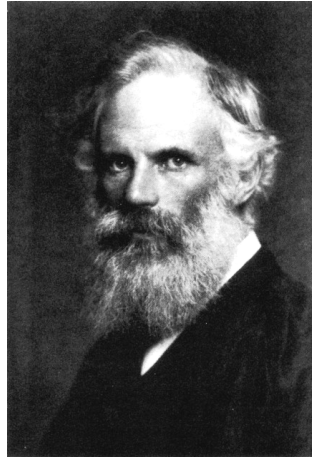
Albert Abraham Michelson (1852 – 1931)



Edward Williams Morley (1838 – 1923)

Okolnost, že se při tomto experimentu nepodařilo naměřit jakoukoli změnu rychlosti světla z ohledem na směr, kterým se světlo pohybovalo relativně k Zemi, mohla být podle něj důsledkem smršťování celé experimentální aparatury (i samotné Země) ve směru pohybu.

Problém by to vyřešilo, neboť by tak rychlost světla relativně k zemi sice závisela na pohybu země „éterem“, ale měřicí aparatura by se smršťovala přesně v potřebné míře, aby to vyvolalo iluzi, že rychlost světla je stále c .



George Francis FitzGerald (1851 – 1901)

V 90. letech 19. století stejnou myšlenku nezávisle předložil i Hendrik Lorentz.

Lorentz však tuto myšlenku dovedl mnohem dále než FitzGerald.

V roce 1904 odvodil soubor rovnic známý jako **Lorentzovy transformace**, jež popisují, kterak se z pohledu pozorovatelů, kteří se pohybují odlišnými rychlostmi, transformují nejen délka pohybujícího se tělesa, nýbrž i čas a jeho další vlastnosti.

Své transformační rovnice Lorentz odvodil proto, aby matematicky popsal, jak by se elektromagnetická pole jevila různým pozorovatelům.

Tyto transformace totiž do Maxwellových rovnic vkládají relativní rychlosti pozorovatelů.

O rok později Albert Einstein ukázal, že tytéž transformační rovnice se hodí i pro popis mechanických systémů a jejich transformací z pohledu pozorovatelů pohybujících se různými rychlostmi.

Ukazují, kterak se z pohledu různě rychlých pozorovatelů jeví odlišně nejen délka a čas, nýbrž také rychlost a dokonce i hmotnost pohybujících se těles.

Lorentzovy výzkumy elektromagnetismu Einsteinovi posloužili coby odrazový můstek při odvozování speciální teorie relativity.

Klíčovým pojmem speciální teorie relativity je předpoklad, že vesmír a fyzikální zákony by se měly jevit stejné všem pozorovatelům,

nehledě na to, jak se pohybují (pamatujme však, že ve speciální teorii relativity máme co do činění pouze s konstantními rychlostmi, nikoli se zrychleními).

Tento předpoklad je znám jako **Lorentzova invariance**.

Z **Aspectova experimentu** (prvního experimentálního pozorování porušení slavných **Bellových nerovností**, tj. tzv. **EPR-paradoxu**, předpovídaného kvantovou teorií – viz 3. kapitola) vyplývá, že se musíme zřeknout lokální skutečnosti, a že buď vesmír „tam venku“ není skutečný, nebo že dochází k nějaké formě komunikace rychlejší než světlo (k Einsteinovu „strašidelnému působení na dálku“).

Bell poukázal na možnost, že „nejlacinějším řešením“ celé záhady je návrat k tomu druhu relativity, který existoval před Einsteinovou verzí, tedy k teorii, kterou vytvořili lidé jako Lorentz a Poincaré na základě předpokladu o reálné existenci éteru.

Preferovaná souřadnicová soustava podle těchto představ opravdu existuje, ale naše měřicí přístroje jsou pohybem zdeformovány právě tak, aby to zajistilo, že se nám nikdy nepodaří detekovat žádný pohyb „skrze éter“ (nebo „relativně k němu“).

Existence preferované soustavy souřadnic má velmi zajímavý důsledek: Přestože se věci v této preferované soustavě mohou pohybovat rychleji než světlo, v ostatních souřadnicových soustavách, ve kterých se vlivy podle všeho šíří jak rychleji než světlo, tak zpátky v čase, je to jenom určitým druhem optické iluze.

Pakliže existuje preferovaná soustava souřadnic, hodiny v této preferované soustavě budou odtikávat preferovanou rychlostí času. Jedním rázem se tím obnovují jak Newtonův absolutní prostor, tak jeho absolutní čas.

Pouze v Einsteinově verzi relativity, ve které jsou si všechny Lorentzovy souřadnicové soustavy vzájemně ekvivalentní, platí, že pohyb rychlejší než světlo znamená rovněž „skutečný“ pohyb zpátky v čase.

Bell tyto představy rozvinul v knize *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*.

Ukázal, jak použití predeinsteinovské myšlenky preferované soustavy souřadnic, kombinované s experimentálním faktem, že pohyb relativně k této soustavě souřadnic nepozorujeme, vede k obvyklé formě Lorentzových transformačních rovnic, takže nelze experimentálně určit, která, pokud vůbec některá, ze dvou rovnoměrně

se pohybujících soustav je opravdu v klidu a která se pohybuje. Bell zdůrazňuje, že Einsteinova teorie se od Lorentzovy verze liší filozofií i stylem.

Příslušný filozofický rozdíl vzniká proto, že poněvadž nelze říci, která ze dvou pohybujících se soustav (pokud vůbec některá z nich) je opravdu v klidu a která se opravdu pohybuje, pojmy „opravdu v klidu“ a „opravdu v pohybu“ nemají žádný smysl a důležitý je pouze relativní pohyb.

Stylový rozdíl je pak dán tím, že Einstein vychází z hypotézy, že fyzikální zákony se všem rovnoměrně se pohybujícím pozorovatelům jeví jako stejné, načež jednoduchým a elegantním způsobem odvozuje Lorentzovy transformace místo toho, aby začal od experimentálních důkazů a ke stejnému cíli dorazil delší cestou.

Právě tak, jako je tomu řekněme u Bohrovy kodaňské interpretace kvantové teorie a Everettovy interpretace mnoha vesmírů, které poskytují stejné odpovědi na kvantové problémy, stejné odpovědi ve všech praktických fyzikálních situacích poskytují i Lorentzova verze relativity a Einsteinova speciální teorie relativity. Nabízejí však rozdílné interpretace toho, co se děje.



Hugh Everett (1930 – 1982)

Poukaz na možnost, že speciální teorie relativity by nemusela být právě tím nejlepším způsobem, jak se dívat na svět, by koneckonců neměl vyvolávat příliš velký šok, protože už samotné její jméno nám oznamuje, že se – co se týče tvorby teorií relativity – nejedná o poslední slovo.

Je neúplná, protože na rozdíl od obecné teorie relativity nepracuje se zrychleným pohybem nebo s gravitací.

Obecná teorie relativity popisuje gravitaci v pojmech zakřivení prostoročasu. Místo abychom přemýšleli o nějakém mysteriózním působení na dálku (zvaném gravitace), zasahujícím ven ze Slunce a udržujícím Zemi na její oběžné dráze, obecná teorie relativity nabízí představu, že Slunce vytváří jakýsi „důlek“ v prostoročase, podobný důlku, který by vytvořila kuželková koule, kdybychom ji položili na nataženou gumovou plachtu.

Země, která zakřiveným prostoročasem sleduje dráhu nejmenšího odporu, je tak nucena obíhat kolem Slunce podobně jako kulička, jež krouží kolem důlku na gumové plachtě vytvořeného kuželkovou koulí.

V principu se gravitační vliv Slunce (nebo čehokoli jiného) šíří vesmírem věčně, i když rozsah zakřivení prostoročasu způsobeného Sluncem s rostoucí vzdáleností stále klesá.

Změny gravitačního působení lze vyvolat „pohupováním“ hmotnostmi kolem dokola v prostoročase, čímž vzniknou vlny (podobné vlnám, jaké byste vytvořili na gumové plachtě, kdybyste na ní pohupovali nahoru a dolů kuželkovou koulí), jež se šíří rychlostí světla.

Existenci těchto **gravitačních vln** předpověděla Einsteinova obecná teorie relativity a potvrdily ji výzkumy hvězdných soustav známých jako binární pulsary.

Kolem společného těžiště v nich obíhají dvě neutronové hvězdy, jež právě ve formě gravitačního záření ztrácejí tolik energie, že to vede k měřitelným změnám doby jejich oběhu.



Russell Alan Hulse (1950)



Joseph Hooton Taylor, Jr (1941)

Rozsah, v němž se tato oběžná doba mění, se přesně shoduje s konkrétní předpovědí obecné teorie relativity pro takový případ.

Příslušný objev byl považován za tak důležitý, že badatelé, kteří ho uskutečnili (Russell Hulse a Joe Taylor), za něj v roce 1993 obdrželi Nobelovu cenu.

Nicméně i když se gravitační záření pohybuje rychlostí světla, v jistém smyslu se gravitační působení tělesa jeví jako nelokální.

Gravitační pole je podle obvyklé představy rozšířeno všude v prostoru po všechen čas.

To může souviset s jinou záhadou, která s proměnlivou naléhavostí znepokojuje vědce po řadu desetiletí - záhadou setrvačnosti.

Má-li těleso změnit směr svého pohybu, nebo se začít pohybovat rychleji či pomaleji - na to vše je potřeba energie.

To je tak důležité, že takzvané lorentzovsky invariantní souřadnicové soustavy pozorovatelů, kteří se pohybují stálou rychlostí, bývají často označovány prostě jako **inerciální (setrvačné) soustavy**.

Ale jak vlastně objekt „ví“, že jeho pohyb se mění (nebo nemění)? V takovém vesmíru, jaký známe, se chování těles podle všeho jeví, jakoby svou rychlost „měřila“ vzhledem k průměrné poloze (resp. k těžišti) veškeré hmoty ve vesmíru. Známé je to jako **Machův princip**.

Einsteina tento princip při jeho formulaci obecné teorie relativity výrazně ovlivnil.

Je ovšem poněkud ironií, že přes veškeré Einsteinovy snahy obecná teorie relativity ve skutečnosti Machův princip či původ setrvačnosti nevysvětluje; dvojnásobnou ironií pak je to, že Machovi se Einsteinova teorie nelíbila, přestože ji pomáhal inspirovat.

Záhada setrvačnosti tedy přetrvává.

O speciální teorii relativity, jež zakazuje komunikaci rychlejší než světlo, se ví, že je neúplnou teorií vesmíru a že v podobě, v jaké ji rozpracoval Bell, vychází pro všechny praktické účely nastejno jako Lorentzova teorie, jež signalizaci rychlejší než světlo dovoluje.

Obecná teorie relativity, která je mnohem uspokojivější univerzální teorií než speciální teorie relativity, naproti tomu jako by v sobě měla určitým způsobem zabudovánu nelokálnost.

A má-li Machův princip jakýkoli pravdivý základ, pak ve vesmíru existuje preferovaná souřadnicová soustava.

Víme, že se vesmír rozpíná. Preferovanou souřadnicovou soustavou, specifikovanou průměrným rozložením veškeré hmoty ve vesmíru, je pak i ta, ve které toto rozpínání probíhá dokonale rovnoměrně do

všech směrů.

Víme též, že v prvních okamžicích svého zrodu byl vesmír vyplněn superhorkou „polévkou“ elektromagnetického záření.

Toto záření od té doby natolik ochladlo, že se přeměnilo ve slabý mikrovlnný rádiový šum o teplotě něco málo pod 3K, dodnes takřka rovnoměrně vyplňující celý vesmír.

Pozorovatel se tudíž nachází v klidu v preferované souřadnicové soustavě vesmíru i tehdy, když se nepohybuje relativně k záření kosmického pozadí.

Preferovanou souřadnicovou soustavu nám tak nabízí samotné elektromagnetické záření.

I sám Newton nastínil elegantní experiment, který podle všeho ukazuje, že ve vesmíru opravdu existuje preferovaná souřadnicová soustava.

Pozdější filozofové prohlásili, že tento experiment ukazuje právě to, co definuje absolutní standard klidu.

Newton ve své knize *Principia* v roce 1686 popsal, co se stane, když vezmete kbelík vody, zavěsíte ho na dlouhý provaz, tento provaz podélně napevno stočíte do spirály, načež ho pustíte.

Kbelík samozřejmě bude během rozvíjení provazu rotovat.

Hladina vody v něm nejprve zůstane na stejné úrovni, ale jak tření postupně přenesou rotaci kbelíku na samotnou vodu, rotovat začne i voda, a její hladina získá vydutý (konkávní) tvar - odstředivá síla totiž bude vodu tlačit ke stěnám kbelíku.

Když kbelík uchopíte, abyste jeho rotaci zastavili, voda bude rotovat dál s vydutou hladinou, její rotace se však začne zpomalovat a hladina bude stále plošší a plošší, dokud se pohyb vody nezastaví úplně a její hladina nebude opět zcela plochá.

Newton zdůraznil, že soudě podle vydutého tvaru hladiny, rotující voda „ví“, že rotuje.

Relativně k čemu však rotuje?

Relativní pohyb kbelíku a vody se zde jeví jako zcela nedůležitý.

Jsou-li jak kbelík, tak voda v klidu, bez jakéhokoli relativního pohybu, hladina vody je plochá.

Pokud kbelík rotuje a voda nikoli, její hladina je stále plochá, přestože existuje relativní pohyb vody a kbelíku.

Pokud voda rotuje a kbelík nikoli, existuje jejich relativní pohyb a hladina je vydutá.

Když však rotuje jak voda, tak kbelík, takže opět neexistuje žádný jejich relativní pohyb, i tehdy je hladina vydutá.

Voda tak, soudil Newton, „ví“, zda rotuje relativně k **absolutnímu prostoru**, nebo nikoli.

Zajímavým zřetelem této debaty je i fakt, že Einsteinovy rovnice produkují správný druh machovských vlivů, pouze pokud je ve vesmíru dostatek hmoty, aby se prostoročas gravitačně zakřivil „sám do sebe“.

V otevřeném vesmíru, zasahujícím ve všech směrech do nekonečna, nelze rovnice žádným způsobem uvést do rovnováhy s konečným množstvím setrvačnosti.

Obvykle to sloužilo jako argument proti tvrzení, že obecná teorie relativity zahrnuje Machův princip, protože lidé si mysleli, že vesmír nutně musí být otevřený.

Nyní se vše změnilo a podle všeho existují přesvědčivé důkazy, že vesmír je skutečně uzavřený.

Je vskutku těžké uvěřit, že by speciální teorie relativity mohla být chybná, že může existovat preferovaný klidový stav a je principiálně možno absolutně stanovit směr i velikost rychlosti kteréhokoli pohybu. Několika teoretikům však toto nedělá žádné potíže. Vyjma samotného Johna Bella je dalším z těchto průkopníků Ted Jacobson, který se zabývá smyčkovou kvantovou gravitací a jako první našel přesná řešení Wheelerovy – DeWittovy rovnice. Již dlouhá léta úspěšně rozvíjí konzistentní teorii s privilegovanou soustavou.

K dalším vizionářům, zpochybňujícím celý rámec teorie relativity, patří Joao Magueijo, o němž jsme již hovořili v desáté kapitole. Pak jsou zde nositelé Nobelovy ceny za fyziku Robert Laughlin a Grigorij Volovik, kteří vycházejí z myšlenky, že princip relativity není správný a platí pouze přibližně, neboť se ve skutečnosti jedná o emergentní jev. Z dalších vizionářů, úspěšně rozvíjejících dále tuto myšlenku, jmenujme např. Holgera Bech Nielsena z Ústavu Nielse Bohra a mnoho dalších.



Theodore A. Jacobson (1954)



Holger Bech Nielsen (1941)



Robert Betts Laughlin (1950)



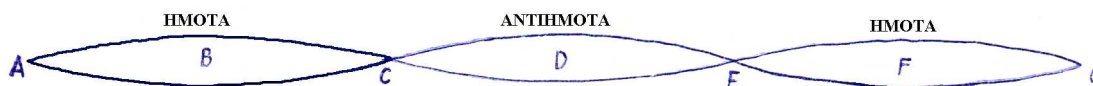
Grigorij Efimovič Volovik (1946)

6) Konstrukce lineárního chronoru

Aby mohla existovat hmota, musí se vyznačovat jistou vlastností, kterou je její vnitřní vibrace.

Rychlost hmototvorné vibrace činí v měřítku malých rychlostí, $v = c$. Tato vibrace nás posouvá (viz obr. 11.11) z nulového bodu **A** do bodu **B**.

Obr. 11.11



My však zkoumáme mechanistickou rychlost hmoty, aniž bychom brali v úvahu její rychlost kvantovou.

Zkrátka uvažujeme sami sebe jako klidovou inerciální soustavu.

To je důvod proč se domníváme, že se nalzáme v bodě **A**.

Říkáme, že naše **zdánlivá rychlost** je rovna nule a že bodu **C** odpovídá rychlost c .

Tato rychlost je však zdánlivou rychlostí v bodě **C**, která vzniká ignorací bodu **B**.

Skutečná rychlost je vždy o c vyšší, nežli rychlost zdánlivá.

Skutečná rychlost v bodě **C** je tedy rovna $2c$.

Letí-li světlo skutečnou rychlostí $rv = 3c$, stává se antihmotou.

Při $rv = 4c$ se stává antisvětlem (viz tab. 11.13)

Zoevistianova pohybová tabulka

Tab. 11.13

Oblast	Rychlost	Stav hmoty a záření	Relativní rychlost	Pohyb vůči nižší hypergrupě		Pohyb vůči vyšší hypergrupě	
				Reálná rychlost	Relativní rychlost	Reálná rychlost	Relativní rychlost
A	0	0	-c	4c	3c	-4c	-5c
B	c	hmota	0	5c	4c	-3c	-4c
C	2c	světlo	c	6c	5c	-2c	-3c
D	3c	antihmota	2c	7c	6c	-c	-2c
E	4c	antisvětlo	3c	8c	7c	0	-c

Rychlost v bodě **C** je vůči nám rychlostí světla, rychlost v bodě **D** souvisí s antihmotou vibrující vůči nám $rv = 3c$.

Bod **F**, který se již vůči nám nalzá na jiné hypergrupě vibruje rychlostí $rv = 5c$.

Vůči sobě sama je však bod **F** samozřejmě v relativním klidu.

Pro antihmotu **D** začíná hypergrupa bodem **C** a končí bodem **G**, kde začíná vůči bodu **D** další hypergrupa.

Pro naši hmotu **B** začíná hypergrupa bodem **A** a končí bodem **E**, kde pro nás začíná vyšší hypergrupa.

Pro antihmotu **D** je však bod **C** (tj. pro nás rychlost světla), začátkem nižší hypergrupy, stejně jako pro nás bod **A**.

Maximálně dosažitelná reálná rychlost vibrace v jedné hypergrupě je $rv = 4c$.

Ve vyšší hypergrupě je to taktéž $4c$, avšak vůči výchozí hypergrupě činí tato rychlost již dvojnásobek, tj. $rv = 8c$.

Translační rychlost tělesa tedy závisí na procentuálním splnění maximální rychlosti v jedné hypergrupě, tj. $4c$.

Přesahuje-li toto splnění 100 %, hovoříme o tzv.

interhypergrupárním pohybu.

Sníží-li foton svoji rychlost o c , stává se částicí hmoty.

Sníží-li rychlost o $2c$, dostává se na relativní nulu a zároveň se mění na antifoton.

Při dalším snižování rychlosti je již součástí antihmoty na nižší hypergrupě.

Naopak, zvyšováním rychlosti se při několikanásobném překonání rychlosti světla, může dostat na vyšší hypergrupu.

Z toho plyne, že bod absolutní nuly relativně neexistuje a že tedy i rychlost kvantionu je vůči nám v každé hypergupě obecně jiná.



David Joseph Zoevistian (1974)

Vzhledem k Heisenbergově relaci neurčitosti

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar \quad (11.160)$$

se kvantion lokalizovaný v jedné cytoprostorové buňce, tj. na prostoru o straně $\Delta x = l_h$, pohybuje rychlostí extrémně blízkou rychlosti c , což jej m.j. posouvá do bodu **B** Zoevistianovy pohybové tabulky.

Pro jeho hybnost pak musí platit nerovnost

$$\Delta p = \frac{m_y \cdot c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq \frac{\hbar}{l_h}, \quad (11.161)$$

kde rovnost nastane při dosažení tzv. **mezní rychlosti**.
Provedeme-li substituci

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c^n, \quad (11.162)$$

můžeme (11.161) přepsat na

$$m_y \cdot c^{n+1} \approx \frac{\hbar}{l_h}, \quad (11.163)$$

odkud

$$c^{n+1} \approx \frac{\hbar}{l_h m_y} \approx c^6. \quad (11.164)$$

Srovnáním (11.162) a (11.164) odtud dostáváme mezní hodnotu Lorentzova faktoru která je ještě v souladu s kvantovou mechanikou:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx c^5. \quad (11.165)$$

Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že konstanta na pravé straně (11.165) je nyní bezrozměrná, a i když její velikost je velmi blízká c^5 , nejsme oprávněni ji označovat jako rychlost. Zavedeme pro ni tudíž alternativní bezrozměrné označení $z = 299792458$.

Dodáváme-li kvantionům energii, bude docházet k poklesu hodnot jejich relativního antionu, tj. k **dilataci času** a s ní související **kontrakci prostorových souřadnic** ve směru vektoru rychlosti. Z kvantové povahy cytoprostoru pak plyne, že rychlosti světla nelze v žádném případě dosáhnout, lze se jí pouze přiblížit až na určitou hodnotu η , kterou bude nyní naším úkolem určit. Za tímto účelem přepíšeme rovnici (11.165) na tvar

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(c - \eta)^2}{c^2}}} = z^5, \quad (11.166)$$

odkud plyne pro velikost mezní prostoročasové rychlosti

$$v_{\max} = c - \eta = \left(\frac{z^{10} - 1}{z^{10}} c^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11.167)$$

Umocněním rovnice (11.167) získáme kvadratickou rovnici pro neznámou η

$$v_{\max}^2 = c^2 - \frac{c^2}{z^{10}} = (c - \eta)^2 \quad (11.168)$$

která má řešení

$$\eta = \frac{c}{2z^{10}} \quad (11.169)$$

(neboť člen $\frac{c}{4z^{19}}$ je naprosto zanedbatelný).

Poznámka: pozoruhodným potvrzením tohoto výsledku je i netriviální skutečnost, že relativistická energie kvantionu, urychleného na výše vypočtenou mezní rychlost v_{\max} , odpovídá Plackově energii, tj. mezní energii částic, kterou jsme již dříve vypočetli na základě úvah o vztahu mezi vlnovou délkou a gravitačním poloměrem nehmotných

kvant. Toto neobyčejně krásné, nezávislé potvrzení logiky celé výše provedené konstrukce ukazuje, že se naše úvahy ubírají správným směrem a jejich výsledky dobře zapadají do mozaiky obecnějšího fyzikálního rámce).

Při dalším urychlování přejde energie částice do oblasti imaginárních hodnot a její rychlost vzroste na hodnotu

$$v = c + \eta . \quad (11.170)$$

Poté dochází s úbytkem energie k dalšímu urychlování až na rychlost

$$v = 2c - \eta . \quad (11.171)$$

Posuňme nyní počátek souřadnic do bodu **A** Zoevistianovy pohybové tabulky.

Při rychlosti $v \in (0; c)$, tj. v tzv. **neutrálním pásmu cytu** se při vzrůstající rychlosti tok relativního času urychluje.

Při rychlosti $v = c + \eta$ začíná existovat hmota.

Při rychlosti $v \in (c; 2c)$ se s narůstající rychlostí tok relativního času zpomaluje.

Při rychlosti $v \in (2c; 3c)$ (tzv. **neutrální pásmo paracytu**) se s růstem rychlosti záporný čas urychluje (tok relativního času v tomto intervalu mění své znaménko).

Při $v = 3c + \eta$ začíná existovat antihmota.

Při rychlosti $v \in (3c; 4c)$ se při růstu rychlosti záporný tok relativního času opět zpomaluje.

Tzv. neutrální pásma představují nestabilní oblasti s imaginární energií.

S ubýváním energie zde rychlost vzrůstá dokud nedojde k vytvoření částic resp. antičástic, jež představují již stabilní konfigurace cytu resp. paracytu.

Úroveň hranice přechodu cytu a paracytu je víceméně fundamentální vlastností cytoprostoru, která se nám promítá do prostoročasu ve formě konstanty c a s ní souvisejících Lorentzových transformací.

Při přechodu cytu v paracyt a naopak, se vždy formálně mění znaménko toku relativního času.

U vzájemně prostoročasově oddělených struktur cytu a parasitu jakými jsou např. vesmír a antivesmír, je tato skutečnost fyzikálně irelevantní: to, co v našem vesmíru hodnotíme jako záporně elektricky nabitě, je v antivesmíru hodnoceno stejně, neboť oba systémy spolu nemohou vejít do vzájemné interakce, jež by odhalila různost elektrického náboje obou zkoumaných entit.

Jakmile však do našeho vesmíru, v němž je absolutní převaha cytu, pronikne částice jež je součástí paracytu, tj. antičástice, nabývá celá problematika na fyzikálním významu.

Již poměrně elementární vhled do podstaty legendární relativistické předpovědi existence pozitronu, pocházející od Paula Maurice Diraca (podrobné odvozování dalece přesahuje rámec této publikace), odhalí princip fyzikálních procesů spojených s přímou interakcí objektů cytu s objekty paracytu.

Vyjdeme z Einsteinova vztahu mezi hmotou a energií a použijeme Lorentzovu transformaci hmotnosti:

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (11.172)$$

kde m_0 je klidová hmotnost částice.

Umocněním (11.172) dostaneme

$$E^2 = \frac{m_0^2 \cdot c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 \cdot c^4, \quad (11.173)$$

odkud již máme

$$\begin{aligned} m_0^2 \cdot c^4 &= \frac{m_0^2 \cdot c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 \cdot c^4 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 \cdot c^4 - m^2 \cdot v^2 \cdot c^2 = \\ &= E^2 - p^2 \cdot c^2, \end{aligned} \quad (11.174)$$

čili

$$E = \pm \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2} . \quad (11.175)$$

Z Einsteinova vztahu pro fotoefekt tak plyne vyjádření **úhlové frekvence De Broglieova vlnění** relativistické částice ve tvaru

$$\omega = \pm \frac{\sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2}}{\hbar} . \quad (11.176)$$

Zatímco kladné znaménko odpovídá frekvenci běžné částice, záporná frekvence odpovídá jakémusi jejímu zrcadlovému protějšku, pohybujícímu se inverzně v čase (záporné intervaly prostorového typu postrádají geometrického významu).

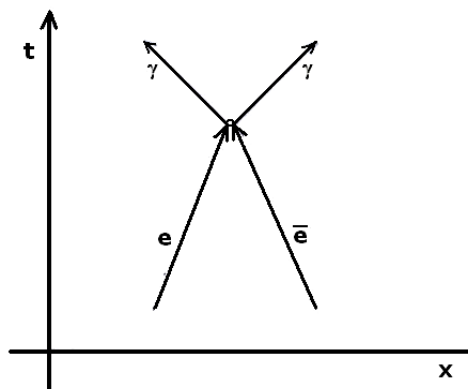
Diracova genialita spočívala v tom, že přiřkl fyzikální význam i těmto záporným řešením, což mu umožnilo předpovědět existenci antičástic ještě před jejich experimentálním objevem.

Z experimentů konaných na urychlovačích částic ve druhé polovině 20. století pak jednoznačně vyplynulo, že antičástice se v našem vesmíru vskutku pohybují ve své soustavě v inverzním čase.

Tuto skutečnost si ihned osvětlíme na následujícím Feynmanově diagramu znázorňujícím **anihilaci páru**.

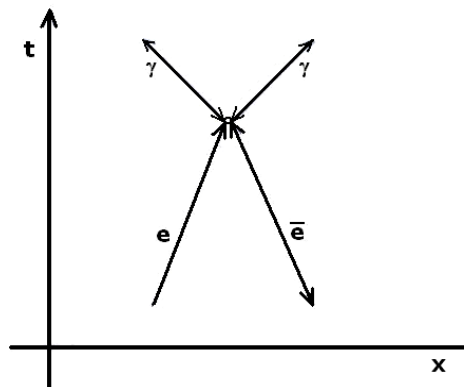
Zatímco v soustavě externího pozorovatele v cytu je anihilace zničením páru částice – antičástice při jejich vzájemné interakci,

Obr. 11.12



v soustavě částice je anihilace přeměnou částice v antičástici (tj. obrácením pohybu v čase) setkáním s fotonem.
(Foton jakožto příslušník rodiny bosonů je tvořen virtuálními páry kvarků a leptonů, a je tedy svojí vlastní antičásticí. Jeho chování je tak invariantní vzhledem k inverzi času).

Obr. 11.13



Je to způsobeno tím, že externí pozorovatel v cytu nevnímá změnu znaménka plynutí času v bodě $(x_0; t_0)$, neboť se stále pohybuje ve směru kladné orientace osy t .

V nejmodernějších verzích **strunové teorie** se dokonce nyní testují konstrukce elementárních částic prováděné ve **vícedimenzionálním čase**.

Dělá-li nám trochu problémy představit si, co ve skutečnosti znamená vícedimenzionální čas, je možno použít analogii s např. dvourozměrným prostorem.

Zatímco v jednorozměrném prostoru lze vždy postupovat pouze podél jedné souřadnice, tj. buď dopředu, nebo dozadu, ve dvourozměrném prostoru již můžeme libovolně měnit směr pohybu, pouze nemůžeme nadskakovat (třetí rozměr není ještě k dispozici).

Co to tedy znamená z hlediska naší analogie vícerozměrného času? Každý kvantový systém si musí během procesu měření náhodně zvolit, do jakého stavu zkolabuje jeho vlnová funkce, tj. co bude finálním výsledkem našeho pozorování.

Dle dnes již klasické **Everettovy anizotropní interpretace** vícedimenzionálního času se však realizují i všechny ostatní možné výsledky pozorování, avšak vydají se po různých jiných časových

trajektoriích v rámci (minimálně) dvoudimenzionální časové roviny, takže s naší časovou linií již nejsou v kontaktu, a proto je nelze bezprostředně vnímat.

Dle **Deutschovy izotropní verze** teorie vícedimenzionálního času se navíc mohou dvě různé světočáry, znázorňující vývoj dvou oddělených systémů v prostoročase s dodatečnými časovými dimenzemi, setkat v nějakém světobodě.



David Elieser Deutsch (1953)

Stejně jako se v prostoru můžeme, poté co obejdeme blok, ocitnout znovu ve výchozím bodě, mohou se i dva různé kvantové systémy, jež kdysi bývaly jeden, opět setkat v nějakém jiném světobodě a spolu interferovat, čímž se dá úspěšně vysvětlit celá řada kvantových jevů. Myšlenka vícedimenzionálního času tedy není nová a zdaleka nesouvisí pouze se strunovou teorií.

Má-li však teorie strun kandidovat na teorii všeho, je přirozené, že se musí zabývat i těmito otázkami.

Je ovšem třeba zdůraznit, že mnozí fyzikové věří, že kvantová teorie by mohla být filozoficky konzistentní již v jednorozměrné časové verzi v rámci **transakční teorie** Johna G. Cramera z roku 1980, která byla vlastně inspirována staříčkou myšlenkou R. Feynmana a J. Wheelera z roku 1940 jež se stala později základem dnes veleúspěšné kvantové elektrodynamiky (QED) a nazývala se **absorbérovou teorií**.



John G. Cramer (1934)

Transakční teorie však funguje pouze za předpokladu, že podobně jako se v jednorozměrném prostoru můžeme pohybovat oběma směry, tak se i kvantové vlny pravděpodobnosti pohybují v čase kupředu i nazpět bez jakéhokoliv omezení.

John G. Cramer ve svém prvním článku o transakční teorii shrnul pět nezávislých principů, z nichž se skládá **kodaňská interpretace**:

- **Heisenbergův princip neurčitosti.** Podle principu neurčitosti dvojice „konjugovaných“ proměnných (jako je poloha a hybnost nebo energie a čas) nelze měřit se stejnou přesností ve stejný okamžik, neboť nemají v daný okamžik stejně definované hodnoty.
- **Bornův zákon pravděpodobnosti.** Podle tohoto zákona druhá mocnina absolutní hodnoty vlnové funkce odpovídá pravděpodobnosti toho, že se systém nachází ve stavu popsaném danou vlnovou funkcí.
- **Bohrův princip komplementarity.** Podle tohoto principu je Heisenbergův princip neurčitosti vnitřní vlastností přírody a nikoliv problémem měření. Pozorovatel, jeho měřící přístroj a měřený systém tvoří celek, který nelze rozdělit.
- **Heisenbergova interpretace znalosti.** Podle této interpretace vlnová funkce není fyzickou vlnou, která se pohybuje prostorem ani není přímým popisem fyzikálního systému, ale matematickým popisem znalosti pozorovatele, kterou získal měřením systému.
- **Heisenbergův pozitivismus.** Podle tohoto principu nemá smysl diskuse o aspektech reality, které leží za formalismem kvantové

mechaniky, neboť diskutované veličiny nebo fyzikální entity nelze měřit experimentálně.

První tři principy kodaňské interpretace slouží k propojení formalismu kvantové mechaniky s výsledky fyzikálního měření.

Poslední dva principy, formulované Heisenbergem, reagují na Einsteinovy kritiky „strašidelného působení na dálku“.

Podobné problémy souvisejí s obecným **problémem nelokálnosti**.

Uvažujme následující jev: excitovaný atom svoji energii ztrácí vyzářením fotonu.

Formalismus kvantové mechaniky tento jev reprezentuje vlnovou funkcí, která se šíří prostorem jako sférická vlna.

Druhá mocnina absolutní hodnoty vlnové funkce v určitém bodě prostoročasu udává pravděpodobnost výskytu fotonu v tomto bodě.

Když je foton pohlcen atomem stříbra fotografické desky, je jeho energie předána tomuto atomu.

Vlnová funkce fotonu prochází procesem, který se označuje jako **kolaps vlnové funkce**.

Vlnová funkce fotonu z celého časoprostoru zmizí kromě těsného okolí atomu, kterým byl foton zachycen.

Matematický formalismus redukuje vlnovou funkci na jedinou hodnotu, která odpovídá právě uskutečněnému jevu.

Toto vymizení vlnové funkce je součástí Einsteinovy kritiky.

Werner Heisenberg vysvětloval, že toto rozprostření vlnové funkce nepředstavuje reálnou vlnu šířící se prostorem rychlostí světla, ale reprezentaci znalosti pozorovatele.

Pokud pozorovatel foton ještě nedetekoval, má tento foton stejnou pravděpodobnost výskytu všude na čele sférické vlny.

Jakmile byl foton detekován, je pravděpodobnost jeho výskytu všude jinde rovna nule.

Problém s touto interpretací vyplývá z EPR paradoxu, kdy např. máme systém dvou polarizačně korelovaných fotonů, které se vzájemně pohybují v opačných směrech.

Dva pozorovatelé provedou měření, při němž vlnová funkce obou fotonů náhodně zkolabuje do některého z možných stavů.

Jejich měření však musí zůstat korelovaná.

Každý z pozorovatelů tak získá okamžitě informaci o obou fotonech, ačkoliv tyto fotony jsou od sebe vzdáleny natolik, že by mezi nimi principiálně nemělo dojít k tak rychlé výměně informace (dle teorie

relativity nelze přenášet informace mezi dvěma fyzikálními entitami nadsvětelnou rychlostí).

Tuto nelokálnost, která vyplývá z korelace informace, nelze odstranit.

Transakční interpretace řeší problém nelokálnosti použitím „transakčního“ modelu kvantových jevů založeného, jak již bylo uvedeno výše, na absorbérové teorii, kterou vypracovali Richard Phillips Feynman a John Archibald Wheeler roku 1940.

Podle absorbérové teorie proces emise vytváří **advancované vlny** na stejném principu, jako běžné **retardované vlny**.

Ale když je retardovaná vlna v budoucnosti absorbována, rušící proces smaže stopy po advancovaných vlnách a jejich projevech.

Přijímač absorbuje retardovanou vlnu vytvořením druhé retardované vlny, která je identická ale přesně v opačné fázi, než byla retardovaná vlna z vysílače.

Obě vlny se vzájemně zruší a proto můžeme říci, že byla retardovaná vlna vysílače pohlcena.

Přijímač ale musí také vytvořit advancovanou vlnu, která se pohybuje v čase nazpět.

Ale tato vlna je zrušena advancovanou vlnou z vysílače, která má opačnou fázi.

Uvažujme systém dvou těles (při rozšíření úvahy na více těles se neobjevují žádné problémy).

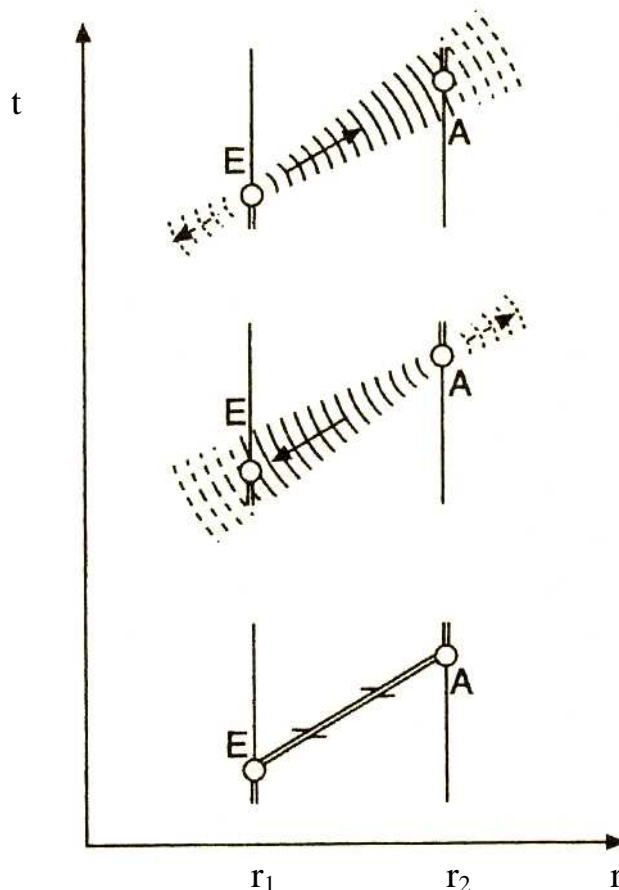
Jedno kvantově mechanické těleso se nachází v prostoročasovém bodě (r_1, t_1) , druhé, které s ním bude interagovat, je v bodě (r_2, t_2) .

Mezi oběma tělesy probíhá kvantově mechanický proces podle zákona zachování $E = h \cdot \nu$, kde ν je frekvence vlnění (viz obr. 11.14).

1. "Vysílač" (E) v bodě (r_1, t_1) vysílá retardovanou „nabízející vlnu“ Ψ . Tato vlna (stavový vektor) je fyzikální vlna a nikoliv (jako v Kodaňské interpretaci) pouze „pravděpodobnostní“ vlna.
2. „Přijímač“ (A) v bodě (r_2, t_2) přijímá nabízející vlnu a je tím donucen vyslat „potvrzující vlnu“, která je proporcionální vlně Ψ v bodě R_2 zpětně v čase. Faktor proporcionality je Ψ^* (r_2, t_2) .
3. Potvrzující vlna, kterou přijme „vysílač“ je $\Psi \cdot \Psi^*$. Můžeme předpokládat, že tato vlna odpovídá pravděpodobnosti, že transakce je kompletní (tj. proběhla interakce).

4. Výměna nabízející a potvrzující vlny pokračuje, dokud probíhá výměna energie a dalších zachovávajících se veličin, která je určena kvantovými okrajovými podmínkami systému. Mezi vysílačem a přijímačem je tedy stojatá vlna v prostoročasu, která odpovídá zachování energie a momentu hybnosti (a rotačního momentu). Vytvoření takové superpozice avancovaných a retardovaných vln (vln předcházejících se a zpožďujících se v čase) je ekvivalentem "kolapsu stavového vektoru" v Kodaňské interpretaci. Pozorovatel sleduje pouze kompletní transakci, kterou může interpretovat jako jedinou retardovanou vlnu (např. foton), který se pohybuje od vysílače k přijímači.

Obr. 11.14



Tento obrázek je shrnutím „transakční interpretace“ kvantové mechaniky, se kterou vystoupil John Cramer. Shora dolů: Zářič E vysílá „nabídkovou vlnu“ do budoucnosti a do minulosti (nahore). Zachytí ji absorbér A, který vysílá jako ozvěnu „potvrzující vlnu“ zpátky v čase k zářiči a do budoucnosti (střed). Nabídková vlna a potvrzující vlna se všude ve vesmíru vzájemně zruší vyjma oblasti na přímé dráze mezi absorbérem a zářičem, kde se vzájemně zesilují, aby vytvořily kvantovou transakci (dole).

Kolaps vlnové funkce v této souvislosti již není zásadním problémem. Proces kvantového měření probíhá v „okamžiku“, kdy je transakce (nabízející vlna odeslána, potvrzující vlna přijata, stojatá vlna vytvořena s pravděpodobností $\Psi \cdot \Psi^*$) dokončena, což se stane přes určitý prostoročasový interval a proto nikdo nemůže určit okamžik kolapsu, ale pouze interval kolapsu (v souhlase s teorií relativity).

Dosud jsme se zabývali časově reverzibilním invariantem.

Ale hmotné částice jsou popsány **Schrödingerovou rovnicí**.

Pokud je Ψ řešením (tj. nabízející vlna), pak Ψ^* řešením není.

Potvrzující vlna však musí být časově obrácena a obecně musí být relativistickým invariantem, tedy řešením **Diracovy rovnice**.

V tomto případě nerelativistickým omezením není pouze jediná Schrödingerova rovnice, ale dvě Schrödingerovy rovnice: rovnice ve směru času má za řešení funkci Ψ , časově inverzní rovnice (kde i je nahrazeno $-i$) má řešení Ψ^* .

Proto Ψ^* odpovídá potvrzující vlně, Ψ nabízející vlně.

Celý proces probíhá v prostoru (ve třech rozměrech).

Retardovaná nabízející vlna je vyslána ve všech prostorových směrech.

Objekty, které nabízející vlny přijmou, posílají nazpět své advancedované potvrzující vlny odesílateli.

Předpokládejme, že příjemci jsou označeni jako 1 a 2, s odpovídajícími změnami energie E_1 a E_2 .

Pak stavový vektor systému lze zapsat standardním způsobem jako superpozici vln.

Mohou proběhnout dvě možné transakce: výměna energie E_1 s pravděpodobností $P_1 = \Psi_1 \Psi_1^*$, nebo výměna energie E_2 s pravděpodobností $P_2 = \Psi_2 \Psi_2^*$.

V tomto případě jsou konjugované vlny advancedovanými vlnami s hodnotami v bodech R_1 nebo R_2 , případně podle pravidla 3. uvedeného výše.

Kolaps vlnové funkce probíhá v prostoročasovém intervalu.

Podle Bella žádná "teorie" nemůže být v souladu s kvantovou mechanikou, dokud nemá nelokální charakter.

V tomto smyslu je transakční interpretace **teorií skrytých proměnných**, neboť postuluje reálné vlny pohybující se v prostoročase.

Dokud není nabízející vlna pohlcena, nevytváří se žádná potvrzující vlna.

Tento mechanismus nepředstavuje žádný problém, protože se nepřenáší ani energie, ani moment hybnosti ani žádná jiná fyzikálně pozorovatelná veličina.

Problémy, jako je EPR paradox nebo Schrödingerova kočka, se v této teorii nevyskytují.

Jak již bylo řečeno dříve, v této interpretaci neexistuje žádný časový okamžik, v němž je transakce kompletní.

EPR paradox je argumentem nekompletnosti teorie, která proto vyžaduje objektivní realitu.

Transakční interpretace je takovou teorií, protože nabízející a potvrzující vlny jsou reálnými vlnami a nikoliv vlnami pravděpodobnosti.

Vzájemná korespondence avancovaných a retardovaných vln je základem transakční teorie, která vytváří těsný vztah mezi budoucností a minulostí, pomocí něhož se může přenášet energie, moment hybnosti a další kvantové veličiny.

Nelokálnost teorie spočívá především v tom, že minulost je jistým omezeným způsobem ovlivňována jevy v budoucnosti tak, jako je budoucnost ovlivněna jevy v minulosti.

Pokud například pozorujeme hvězdu vzdálenou několik stovek světelných let od Země, pak do našeho oka dopadají retardované vlny a současně z našeho oka vycházejí avancované vlny směrem k hvězdě.

Transakční teorie je učebnicovým příkladem jednorozměrné, leč izotropní teorie času.

Ukazuje se, že celá kvantová teorie je vskutku časově takřka invariantní.

Všechny běžné kvantové události mohou probíhat a také probíhají v čase tam i nazpět se stejnými výsledky (jsou vratné).

Čas je tedy pro elementární částice takřka izotropní.

Jakmile však do hry vstupuje veliké množství částic, začínají prudce klesat pravděpodobnosti, že se např. všechny částice shromáždí pouze

v jedné ze dvou spojených nádob, potažmo, že se ojetý vrak spontánně změnil na luxusní mercedes.

Jinými slovy, řídicí úlohu v tomto případě přebírá **entropie**, která, jak známo z druhého zákona termodynamiky, spontánně nikdy neklesá s časem plynoucím určitým jedním směrem, čímž budí zdání že tento směr je jediným propustným směrem toku času.

Pro kvanta to však neplatí a proto ani běžný pojem kauzality, tak jak jej chápou makroskopické bytosti, neznamena v kvantovém světě téměř nic.

V izotropním čase není na kvantové teorii vskutku nic mystického. Teprve pokud trváme na zachování kauzality i pro kvantové systémy, stává se kvantovka opravdu těžko pochopitelnou teorií odporující zdravému rozumu.

Z toho, co zde bylo nyní řečeno, by se mohla jevit myšlenka cytu a paracytu zcela zbytečná.

Při vysokých energiích částic se však ukazuje, že šipka času není přeci jen pouhou termodynamickou iluzí alébrž fundamentální skutečností projevující se (i když velmi slabě a jen ve zcela specifických případech) i na úrovni samotných elementárních částic.

Zasvěcenější čtenáři již jistě tuší, že mám na mysli dnes již dostatečně experimentálně prověřený jev **porušení CP-invariance**:

V rámci kvantové teorie pole lze ukázat, že z požadavku relativistické invariance, lokality a mikrokauzality (tj. z vlastností týkajících se výhradně chování v prostoročase) plyne invariance vůči kombinované inverzi zahrnující nábojové sdružení (C), prostorovou inverzi (P) a časovou inverzi (T).

Výrok, že každá lokální relativistická kvantová teorie je CPT-invariantní, známý jako **CPT-teorém**, sehrál v moderní fyzice významnou roli.

Dnes existuje jeho rigorózní důkaz i v rámci axiomatické kvantové teorie pole.

Na druhé straně nyní máme k dispozici experimentální data, jež nade vší pochybnost potvrzují, že v přírodě dochází k narušení C-invariance, P-invariance i kombinované CP-invariance.

Protože dle výše zmíněného teorému se kombinovaná CPT-invariance musí vždy zachovávat, plyne z narušení CP-invariance též narušení T-invariance, tj. invariance fyzikálních procesů vzhledem k inverzi

času (poprvé pozorováno ve druhé polovině 90. let 20. století v ženevském CERNu při rozpadu neutrálních kaonů a antikaonů). To se v minulosti projevilo např. tím, že při vzniku vesmíru, v době před spontánním narušením symetrie grandunifikační interakce (**GUT**), došlo k velmi nepatrnému porušení rovnováhy mezi hmotou a antihmotou.

Tehdy existovalo ve vesmíru pouze šest druhů leptokvarků X a šest druhů leptokvarků Y jež spolu se svými antičásticovými protějšky \bar{X} a \bar{Y} umožňovaly volné přechody mezi kvarky a leptony např. při reakcích:

$$\begin{aligned} e + \bar{d} &\leftrightarrow X \leftrightarrow uu \\ \bar{\nu}_e + \bar{d} &\leftrightarrow Y \leftrightarrow du, \end{aligned} \quad (11.177)$$

apod., porušujících m.j. **zákon zachování baryonového čísla**.

Díky narušení CP-invariance však tyto procesy neproběhly symetricky.

V oblasti cytu byl tak vyprodukován řádově na miliardu párů kvark-antikvark resp. lepton-antilepton jeden kvark resp. lepton navíc.

V oblasti paracytu pak na miliardu párů kvark-antikvark resp. lepton-antilepton vznikl jeden přebytný antikvark resp. antilepton.

Zatímco páry částice-antičástice spolu záhy anihilovaly za vzniku fotonového záření jež dnes, po vychladnutí vesmíru, pozorujeme ve formě již zmíněného mikrovlnného reliktového pozadí, leptony a kvarky, jež neměly antičásticového partnera vytvořily v cytu veškerou baryonickou látku současného vesmíru, v paracytu pak všechny antileptony a antikvarky jež neměly částicového partnera vytvořily veškerou antibaryonickou látku současného antivesmíru.

Narušení T-invariance, tj. existenci preferovaného směru toku času v systémech cyt resp. paracyt, tedy vděčíme za svoji vlastní existenci. Bez této preference by ve vesmíru existovaly pouze fotony.

Nakonec je ještě třeba pro úplnost alespoň krátce zmínit slavnou Hawkingovu – Hartleho podmínku „**bez hranic**“ poprvé publikovanou v roce 1983, která jde v chápání času ještě mnohem dále

než výše jmenované teorie času, neboť staví časovou souřadnici na stejnou úroveň společně se souřadnicemi prostorovými:
Zavedeme-li nejprve geometrodynamický čas vztahem

$$t' = c \cdot t , \quad (11.178)$$

kde t je běžný čas měřený v sekundách, potom element prostoročasového intervalu je v Minkowského geometrii vyjádřen známou rovností

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (dt')^2 , \quad (11.179)$$

na níž na první pohled zaujme skutečnost, že v ní Časový parametr vystupuje se zápornou druhou mocninou.

S časem tedy nelze v OTR zacházet stejným způsobem jako s prostorem.

Počátkem 80. let 20. století si však Steven Hawking a Jim Hartle povšimli, že palčivý problém počáteční singularity vesmíru – na „okraji“ času – lze elegantně vyřešit použitím triviální matematické transformace a sice vynásobením času imaginární jednotkou:

$$\tau = i \cdot t' . \quad (11.180)$$

Tato jednoduchá transformace má však dosti dramatický účinek, neboť časový parametr v Einsteinových rovnicích převádí na roveň prostorových parametrů:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2 . \quad (11.181)$$

V Hawkingově čtyřrozměrném prostoročase s imaginární časovou osou (11.180) se vesmír a všechny jeho části jeví jako zcela statické, nepodléhající žádným časoprostorovým změnám.

Teprve zanedbání imaginární jednotky u časové souřadnice (přechod k běžnému pojetí času) vytváří iluzi pohybu a jeho změn.

Známe jednoduché dvourozměrné příklady, jako je povrch koule, které jsou hladké, konečné a neobsahují žádné singulární body a žádné hranice.

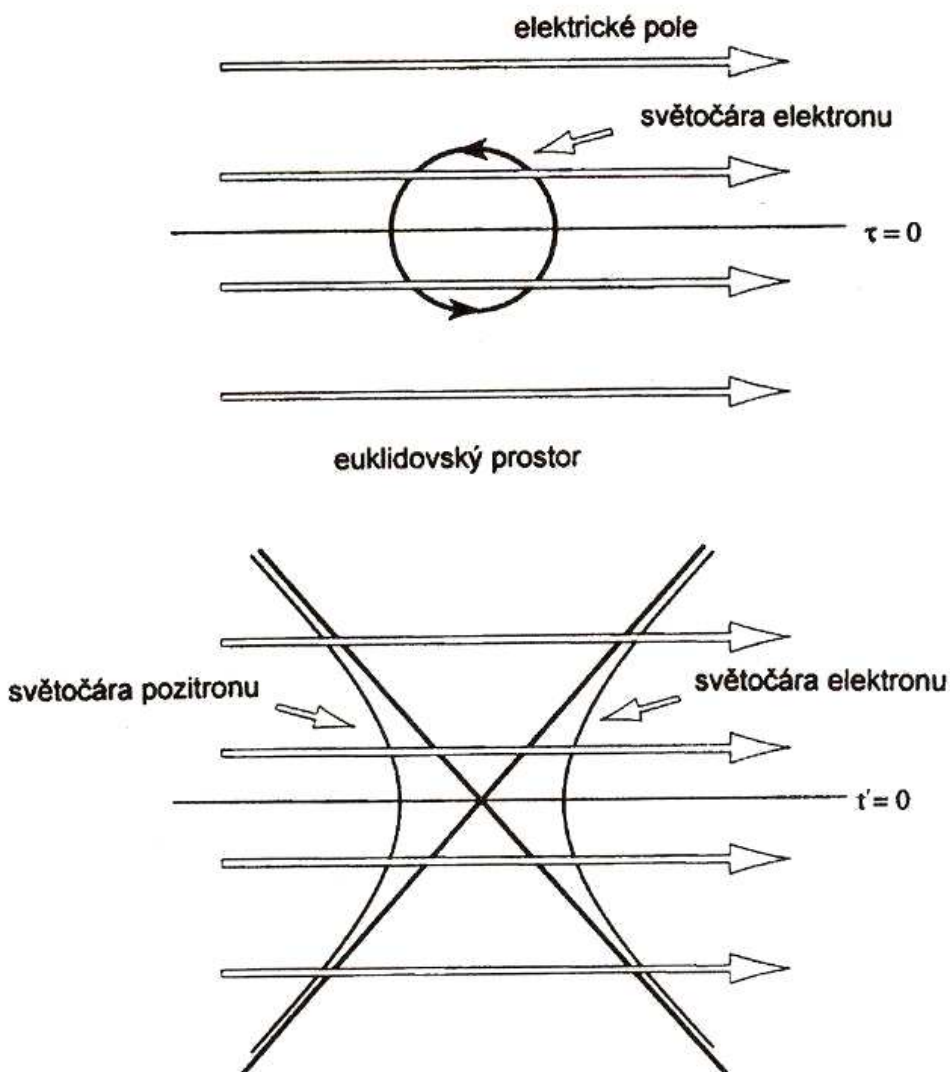
Celou mezní plochu čtyřrozměrného prostoročasu bychom tak mohli považovat za jediný hladký trojrozměrný povrch čtyřrozměrné koule. Již dlouhou dobu je známo, že v silném elektrickém poli můžeme vytvořit dvojici pozitivně a negativně nabitých částic.

Jeden způsob kterak tuto skutečnost vysvětlit, je všimnout si, že v plochém eukleidovském prostoročase s imaginární časovou osou se částice náboje q , jako např. elektron, pohybuje v homogenním elektrickém poli E po kružnici.

Tento pohyb můžeme analogicky prodloužit z imaginárního času τ do reálného času t' .

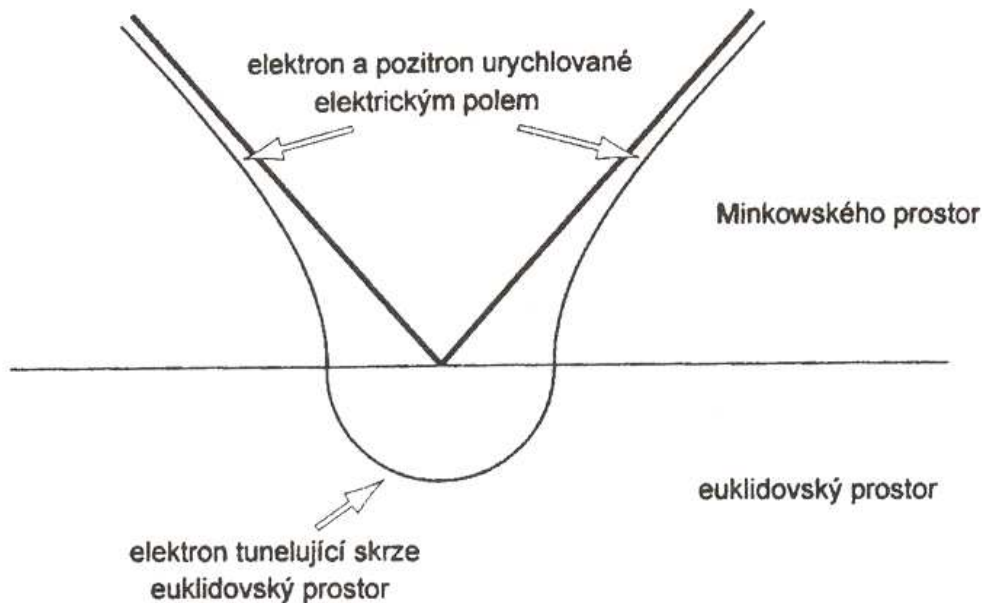
Dostaneme pár pozitivně a negativně nabitých částic urychleně se od sebe vzdalujících pod vlivem elektrického pole (viz obr. 11.15).

Obr. 11.15



Proces tvorby páru je pak popsán rozstříhnutím obou diagramů na poloviny podél os $t' = 0$, resp. $\tau = 0$ a složením vrchní poloviny Minkovského diagramu s reálným časem a spodní poloviny eukleidovského řešení s imaginárním časem (viz obr. 11.16).

Obr. 11.16



Tím obdržíme obrázek, v němž jsou pozitivně a negativně nabitě částice vsutku jen jednou jedinou částicí.

Ta tuneluje skrze eukleidovský prostor z jedné Minkowského světočáry do druhé.

V prvním přiblížení je pravděpodobnost vytvoření páru rovna e^{-I} , kde eukleidovská akce je

$$I = \frac{2\pi \cdot m^2}{q \cdot E} . \quad (11.182)$$

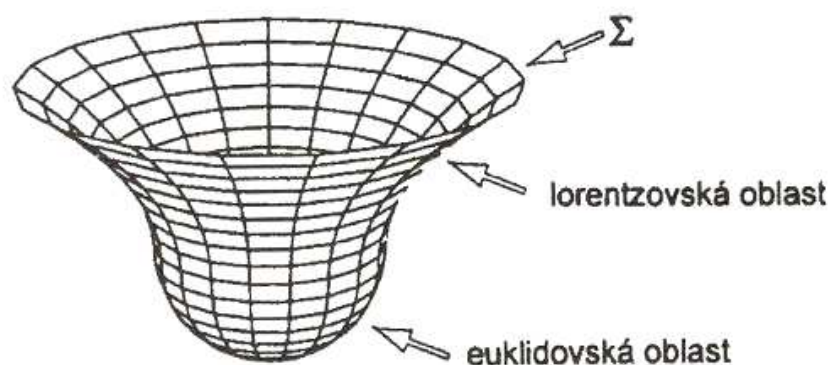
Tvorba párů v silném elektrickém poli byla pozorována experimentálně a její frekvence souhlasí s uvedenou hodnotou. Zavedení imaginárního času do kvantové kosmologie vedlo ke skutečné revoluci v našem chápání procesu kvantového generování vesmíru v prvopočátcích existence reálného času.

Podařilo se dokonce sestavit vlnovou funkci celého vesmíru a Schrödingerovu rovnici popisující její tvar v závislosti na imaginárním čase, podobně, jako v kvantové mechanice popisujeme reálně-časový vývoj vlnové funkce kvantových systémů.

Celá tato Hawkingova teorie přirozeně evokuje otázky po povaze vztahu mezi reálným časem každodenního života a imaginárním časem, jenž hraje zřejmě rozhodující úlohu za poněkud extrémních podmínek jaké panují na submikroskopických rozměrech a za ohromných hustot energie \sim hmoty.

Obdobnou situaci si lze představit i co se týče počátečního stavu vesmíru.

Obr. 11.17



Náš obvyklý pojem času je v tomto kvantově – kosmologickém prostředí překročen a stává se pouze dalším prostorovým rozměrem. Ve skutečnosti fyzici tohoto triku změny času na prostor už dříve často účelově používali k vyřešení jistých problémů v běžné kvantové mechanice, ačkoliv si přitom nepředstavovali, že čas se doopravdy stává prostorem.

Na konci výpočtu se jednoduše přesunuli zpět do rámce obvyklého výkladu v němž existuje jeden rozměr času a tři (kvalitativně odlišné) prostorové rozměry.

Radikální charakter Hawkingova – Hartleho kvantového přístupu k času spočívá v tom, že se s časem zachází tak, jako by se ve vrcholném kvantově gravitačním prostředí velkého třesku skutečně podobal prostoru.

Začínáme-li se vzdalovat od počátku vesmíru, očekáváme, že kvantové efekty se začnou vzájemně ovlivňovat a rušit, jak se hřebeny vln setkávají s vlnovými údolími a že vesmír bude se stále narůstající pravděpodobností sledovat klasickou dráhu.

Postupujeme-li zpátky směrem k počátku vesmíru, význačná povaha času jako kvalitativně odlišného od prostoru se stále více rozplývá a čas se postupně stává nerozlišitelným od prostoru.

Obvyklá povaha času však začíná krystalizovat již v prvních několika okamžicích po Planckově čase (násobeném samozřejmě ještě konstantou c a imaginární jednotkou).

Tato bezčasovost původního kvantového stavu byla Hartlem a Hawkingem navržena pro její úspornost a také proto, že obchází singularitu v počátečním stavu vesmíru.

Návrh bezhraničnosti je výhradou, že vlnovou funkci vesmíru určuje průměr přechodů omezených na čtyřrozměrné prostory s jedinou konečnou hladkou hranicí podobnou kulové hranici, o níž jsme hovořili výše.

Přechodová pravděpodobnost, kterou tento předpis poskytuje, má tvar, v němž nejsou žádné předchozí počáteční stavy.

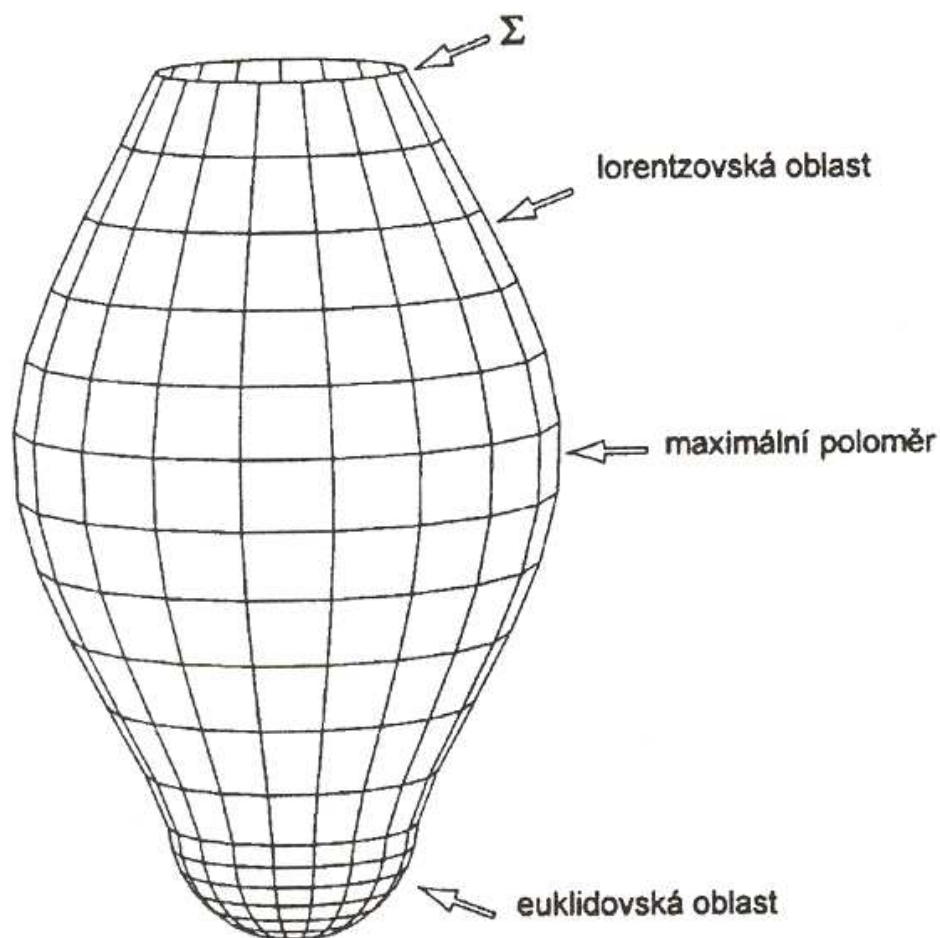
Podmínka bezhraničnosti je tudíž často popisována jako „stvoření z niče“.

Důsledkem této teorie je, že neexistuje žádný určitý okamžik nebo bod stvoření.

Celkovým obrazem situace, jenž získáváme na základě tohoto typu kvantového počátku je, že když zpětně pohlížíme směrem k tomuto okamžiku, jenž jsme nazývali nulou času, slábne samotná představa času a nakonec úplně přestává existovat.

Tento typ kvantového vesmíru vzniká právě tak, jak se zdají vznikat nekvantové kosmologie se singularitami ale nepočíná velkým třeskem, kde jsou hodnoty fyzikálních veličin nekonečné a kde je třeba upřesnit další počáteční podmínky.

Obr. 11.18



Ve světle předešlých úvah se tak ukazuje, že chápání času coby skalární veličiny neodpovídá zcela fyzikální realitě, neboť nejen délka časových intervalů ale též směr jímž se čas v daném okamžiku pohybuje hraje důležitou roli při modelování fyzikálních procesů ve vesmíru.

Proto v teorii cytoprostoru zavádíme tzv. **lineární chronor** coby vektor relativního času mířící v každé aktivní cytoprostorové buňce vždy do aktuálního směru cytonové parity pro daný kvantion. Z teorie cytoprostoru pak plyne, že lineární chronor, generovaný srážkou párovaných cytonů postupně ve všech osách cytoprostoru, rotuje okolo geometrického středu příslušné buňky úhlovou rychlostí ω .

Víme-li, že tato rotace času indukuje v dané buňce vznik hmotného kvantionu, můžeme se pokusit velikost této úhlové rychlosti odvodit.

7) Konstrukce orbitálního chronoru

Představíme-li si lineární chronor jako nehmotnou úsečku (strunu) v prostoru E^3 , rotující úhlovou rychlostí ω střídavě kolem navzájem ortogonálních os (třetí osu neuvažujeme, neboť rotace lineárního chronoru neprobíhá ve skutečnosti spojitě), potom každým bodem své celkové trajektorie projde vektor času minimálně N -krát za sekundu, přičemž

$$N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} . \quad (11.183)$$

Položíme-li nyní

$$T = \pi \cdot t_h \quad (11.184)$$

neboli

$$N = (\pi \cdot t_h)^{-1} . \quad (11.185)$$

Čas se tím zprostorní (vektor času bude v jediném okamžiku orientován do všech význačných cytoprostorových směrů).

Pro velikost ω odtud plyne

$$\omega = \frac{2}{t_h} \quad (11.186)$$

a pro obvodovou rychlost

$$v = \omega \cdot r = \frac{l_h}{t_h} = c . \quad (11.187)$$

Nyní zbývá dokázat, že se uvnitř cytoprostorové buňky zasažené párem cytonů čas nejen zprostorní ale též zhmotní.

Důkaz provedeme v úplné extenzi Minkowského geometrie.

Nejprve spojíme pozorovatele se soustavou pevnou v cytoprostoru.

To lze v praxi učinit nejpřesněji vztažením pozorovatele k mikrovlnnému reliktnímu záření vesmírného pozadí.

Např. sluneční soustava se v současnosti pohybuje vůči cytoprostoru rychlostí $400 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ve směru souhvězdí Iva.

Zaměří-li se nyní pozorovatel pevný v cytoprostoru na jedinou aktivní cytoprostorovou buňku, a bude sledovat koncový bod rotujícího lineárního chronoru, potom hmotnost tohoto bodu vůči němu lorentzovsky vzroste na nekonečnénásobek své klidové hodnoty. Aktivovaná buňka tedy pro tohoto pozorovatele získá konečnou energii.

Dokážeme nyní, že tato energie se číselně blíží hodnotě Planckovy konstanty h .

Vlastní moment hybnosti částice může dosahovat nejmenších hodnot

0 a $\frac{\hbar}{2}$. V případě 0 se jedná o bosony, které můžeme z dalších úvah

vyloučit, neboť nerespektují Pauliho vylučovací princip a tudíž nemohou vytvářet vzájemné vazby. Jak později ukážeme (viz vztah (11.333)), můžeme moment hybnosti kvantionu aproximovat vztahem

$$\frac{\hbar}{2} \approx \frac{2m_y \cdot l_h \cdot cz^5}{5}, \quad (11.188)$$

odkud již snadno přibližně vyjádříme jeho hmotnost

$$m_y \approx \frac{5}{8\pi} \frac{h}{l_h \cdot cz^5} \approx 10^{-50} \text{ kg} \quad (11.189)$$

a energii

$$E_y = m_y \cdot c^2 \approx h. \quad (11.190)$$

Ukázali jsme tedy, že energie $E_y \approx h$ je nejmenším kvantem energie jež může být obsaženo ve hmotné částici.

Předpokládejme, že jediná cytoprostorová buňka obsahuje energii $E > h$.

To by však znamenalo, že jediná cytoprostorová buňka může v principu obsahovat i více než jednu hmotnou částici.

Potom však tato částice musí v cytoprostoru zaujímat objem $V < l_h^3$, což je zjevný spor s kvantovou geometrodynamikou. ☺

Položme nyní soustavu pozorovatele pevně spjatou s lineárním chronorem.

Tuto soustavu označme písmenem **A**.

Původní soustavu pevnou v cytoprostoru označíme **B**.

Čas v soustavě **A** pak poteče nekonečněkrát pomaleji ve srovnání s rychlostí toku času v soustavě **B**.

Úhlová rychlost rotace lineárního chronoru v soustavě **A** je tedy $\omega = \infty$.

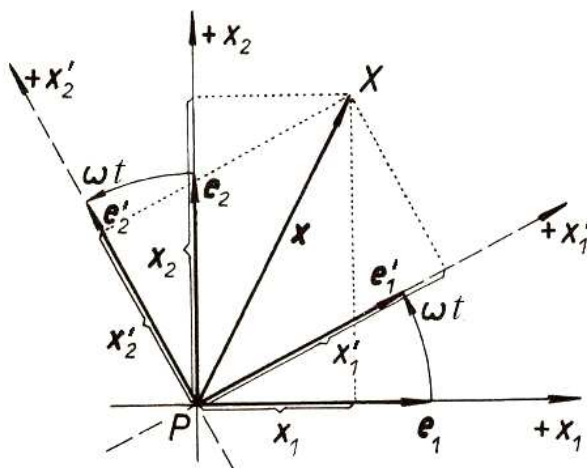
To však znamená, že koncový bod lineárního chronoru vytváří vzhledem k soustavě **A** souvislou uzavřenou smyčku.

Tedy rovněž z hlediska soustavy **A** se čas zprostornil.

Zbývá opět dokázat, že se z pohledu této soustavy čas rovněž zhmotní tak, jako tomu bylo z pohledu soustavy **B**.

Pro jednoduchost se omezíme pouze na dvourozměrný popis celého procesu: danou ortonormální bázi $\beta = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ prostoru E_2 otočíme o orientovaný úhel velikosti ωt do báze $\beta' = \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle$.

Obr. 11.19



Máme za úkol najít rovnice které pro $\mathbf{x} \in E_2$ popisují vztah mezi původními souřadnicemi $\langle \mathbf{x} \rangle_\beta = (x_1, x_2)$ a novými souřadnicemi $\langle \mathbf{x} \rangle_{\beta'} = (x_1', x_2')$.

Vektor \mathbf{e}_1' resp. \mathbf{e}_2' má v původní bázi směrnik ωt resp. $\omega t + \pi/2$. Protože platí

$$\begin{aligned} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(\omega t); \\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (11.191)$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= \mathbf{e}_1 \cdot \cos(\omega t) + \mathbf{e}_2 \cdot \sin(\omega t) \\ \mathbf{e}_2' &= -\mathbf{e}_1 \cdot \sin(\omega t) + \mathbf{e}_2 \cdot \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (11.192)$$

Operátor přechodu od báze β' k bázi β tedy tvoří matice

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (11.193)$$

Tento operátor, jak snadno zjistíme, je ortonormální, takže platí

$$\hat{\mathbf{R}}^{-1} = \hat{\mathbf{R}}^T, \quad (11.194)$$

čili

$$\hat{\mathbf{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (11.195)$$

Hledaná maticová rovnice

$$\langle \mathbf{x} \rangle_{\beta'}^T = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \langle \mathbf{x} \rangle_\beta^T \quad (11.196)$$

po rozepsání do souřadnic pak dá soustavu rovnic popisujících vzájemný vztah mezi oběma uvažovanými bázemi:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cdot \cos(\omega t) + x_2 \cdot \sin(\omega t) \\x'_2 &= -x_1 \cdot \sin(\omega t) + x_2 \cdot \cos(\omega t).\end{aligned}\tag{11.197}$$

Odtud po zderivování obou rovnic dostáváme

$$\begin{aligned}v'_1 &= \frac{dx_1}{dt} \cos(\omega t) - x_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) + \frac{dx_2}{dt} \sin(\omega t) + x_2 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \\v'_2 &= -\frac{dx_1}{dt} \sin(\omega t) - x_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) + \frac{dx_2}{dt} \cos(\omega t) - x_2 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t),\end{aligned}\tag{11.198}$$

neboli

$$\begin{aligned}v'_1 &= v_1 \cdot \cos(\omega t) + v_2 \cdot \sin(\omega t) + \omega[-x_1 \cdot \sin(\omega t) + x_2 \cdot \cos(\omega t)] \\v'_2 &= v_2 \cdot \cos(\omega t) - v_1 \cdot \sin(\omega t) - \omega[x_1 \cdot \cos(\omega t) + x_2 \cdot \sin(\omega t)]\end{aligned}\tag{11.199}$$

a vzhledem k (11.197) vyjádříme rychlost ještě jednodušeji

$$\begin{aligned}v'_1 &= v_1 \cdot \cos(\omega t) + v_2 \cdot \sin(\omega t) + \omega \cdot x'_2 \\v'_2 &= v_2 \cdot \cos(\omega t) - v_1 \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot x'_1.\end{aligned}\tag{11.200}$$

Tuto soustavu opět zderivujeme a máme

$$\begin{aligned}a'_1 &= \frac{dv_1}{dt} \cos(\omega t) - v_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) + \frac{dv_2}{dt} \sin(\omega t) + v_2 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) + \omega \frac{dx'_2}{dt} \\a'_2 &= -\frac{dv_1}{dt} \sin(\omega t) - v_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) + \frac{dv_2}{dt} \cos(\omega t) - v_2 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) - \omega \frac{dx'_1}{dt},\end{aligned}\tag{11.201}$$

čili

$$\begin{aligned}
 a'_1 &= a_1 \cdot \cos(\omega t) + a_2 \cdot \sin(\omega t) + \omega \cdot v'_2 + \omega \left[-v_1 \cdot \sin(\omega t) + v_2 \cdot \cos(\omega t) \right] \\
 a'_2 &= -a_1 \cdot \sin(\omega t) + a_2 \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot v'_1 - \omega \left[v_1 \cdot \cos(\omega t) + v_2 \cdot \sin(\omega t) \right].
 \end{aligned}
 \tag{11.202}$$

Porovnáním s rovnicemi (11.200) odtud plyne

$$\begin{aligned}
 a'_1 &= a_1 \cdot \cos(\omega t) + a_2 \cdot \sin(\omega t) + \omega \cdot v'_2 + \omega(v'_2 + \omega \cdot x'_1) \\
 a'_2 &= -a_1 \cdot \sin(\omega t) + a_2 \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot v'_1 - \omega(v'_1 - \omega \cdot x'_2),
 \end{aligned}
 \tag{11.203}$$

tj.

$$\begin{aligned}
 a'_1 &= a_1 \cdot \cos(\omega t) + a_2 \cdot \sin(\omega t) + 2\omega \cdot v'_2 + \omega^2 \cdot x'_1 \\
 a'_2 &= -a_1 \cdot \sin(\omega t) + a_2 \cdot \cos(\omega t) - 2\omega \cdot v'_1 - \omega^2 \cdot x'_2.
 \end{aligned}
 \tag{11.204}$$

Konstanta ω zde má zřejmě význam úhlové rychlosti, takže

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{t}}.
 \tag{11.205}$$

vektor \mathbf{r} je normálovým vektorem pohybu času a proto

$$r \equiv \|\mathbf{r}\| = konst = \pi \cdot l_h.
 \tag{11.206}$$

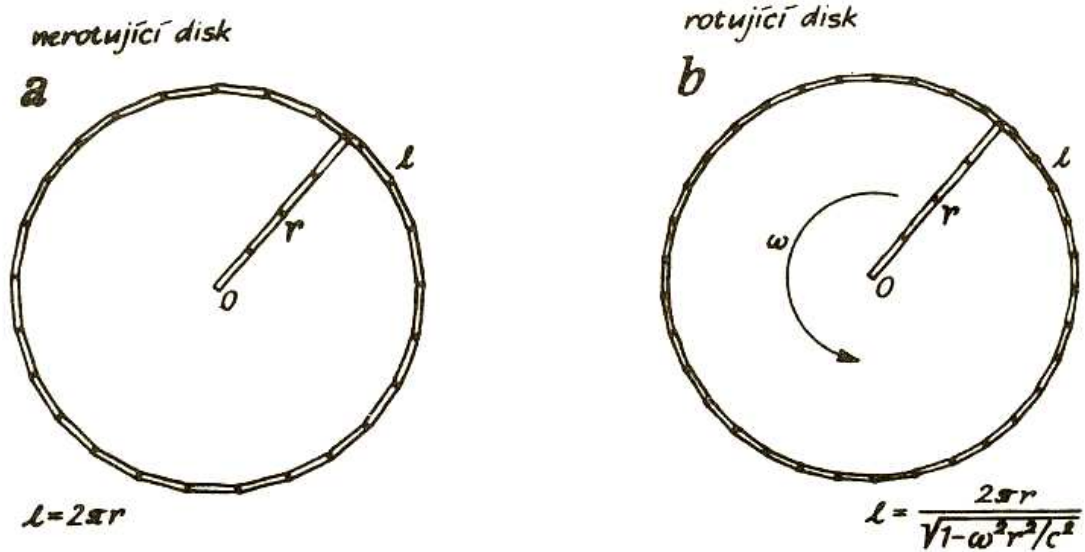
V Minkowského pseudoeukleidovském prostoročase s nímž zde máme co do činění (neboť hmota je zprvu rovna ∞^{-1}) se v neinerciálních vztažných soustavách geometrie trojrozměrného prostoru stává neeukleidovskou.

Demonstrujme to na našem případu rotující vztažné soustavy dle obr. 11.20.

Mějme zprvu nerotující rovný kotouč, jehož střed tvoří počátek inerciální vztažné soustavy V .

Pozorovatel, který pomocí dostatečně krátkých měřících tyčí měří rozměry tohoto kruhového disku, změří jeho poloměr r a obvod $l = 2\pi r$, plně v souladu s eukleidovskou geometrií (viz obr. 11.20a).

Obr.11.20



Nyní disk roztočíme kolem jeho středu S úhlovou rychlostí ω vzhledem k soustavě V .

Pozorovatel pevně spojený s rotujícím kotoučem naměří pomocí radiálně přikládaných měřících tyčí stejný poloměr r disku jako kdyby rotace nebylo.

Sleduje-li však nyní inerciální pozorovatel v soustavě V měřící tyče které experimentátor na rotujícím disku přikládá k jeho obvodu za účelem změření délky obvodu l , pohybují se tyto tyče vůči soustavě V ve směru své délky rychlostí $v = \omega \cdot r$.

Každá taková tyč pak bude zkrácena Lorentzovým faktorem

$$\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \cdot r^2}{c^2}} \quad (11.207)$$

oproti své klidové délce (viz obr. 11.20b).

Pozorovatel na rotujícím disku proto zjistí, že mezi poloměrem a obvodem kruhového disku platí vztah

$$l = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 \cdot r^2}{c^2}}} \quad (11.208)$$

Poměr mezi délkou kružnice a jejím poloměrem je zde různý od 2π . Geometrie rotujícího disku je tedy neeukleidovská.

Vnější inerciální pozorovatel to vysvětlí kinematicky pomocí Lorentzových transformací délek, zatímco pozorovatel rotující spolu s diskem to bude považovat za důsledek setrvačných sil působících na všechna tělesa, neboť pro něj jsou všechny části disku v klidu.

Prohlásí, že tyto setrvačné síly odchyľují geometrii prostoru od Eukleidovy, přičemž míra této neeukleidovosti, tj. zakřivení prostoru, je určena velikostí těchto setrvačných sil.

Úhlová rychlost pozorovatele na rotujícím disku v jeho vlastní soustavě pak bude dána vztahem

$$\Omega = \frac{S}{t \cdot r} = \frac{2\pi}{t \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \cdot r^2}{c^2}}} . \quad (11.209)$$

Uvnitř aktivní cytoprostorové buňky navíc platí

$$t \equiv \|\mathbf{t}\| \equiv r = \frac{l_h}{2} , \quad (11.210)$$

což po dosazení do vztahu (11.209) a drobné úpravě dá konečný výsledek

$$\Omega = \frac{8\pi \cdot c}{l_h \cdot \sqrt{4c^2 - \omega^2 \cdot l_h^2}} , \quad (11.211)$$

kde ω značí úhlovou rychlost kterou naměří inerciální pozorovatel pevně spojený se cytoprostorem.

Je zřejmé, že

$$\omega \rightarrow \frac{2c}{l_h} \Rightarrow \Omega \rightarrow \infty . \quad (11.212)$$

Položíme-li klidovou hmotnost lineárního chronoru

$$m_{t_0} = \infty^{-1}, \quad (11.213)$$

což vypadá jako velmi rozumný předpoklad, pak po dosazení do (11.204) máme

$$\begin{aligned} F'_1 &= 2k \cdot \omega \cdot v'_2 + k \cdot \omega^2 \cdot x'_1 \\ F'_2 &= -2k \cdot \omega \cdot v'_1 + k \cdot \omega^2 \cdot x'_2, \end{aligned} \quad (11.214)$$

kde k je nějaká konečná konstanta různá od nuly, takže platí

$$\begin{aligned} F'_1 &= F_1^c + F_1^o \neq 0 \\ F'_2 &= F_2^c + F_2^o \neq 0, \end{aligned} \quad (11.215)$$

kde F^c je síla Coriolisova a $F^o \neq 0$ je síla odstředivá.



Gaspard-Gustave de Coriolis (1792 – 1843)

Nyní zbývá ještě určit velikost konstanty k , což by však ve světle předchozích úvah nemělo činiti žádný problém.

Konstanta k zřejmě vyjadřuje hledanou hmotnost chronoru, takže by mělo platit

$$k = \frac{E}{c^2} = \frac{h}{c^2}. \quad (11.216)$$

Odtud pro odstředivou sílu, která je zjevnou příčinou tenze lineárního chronoru (vnitřní pnutí kvantionu) dostáváme hodnotu

$$F^o = k \cdot \omega \cdot r = \frac{4 \cdot h}{l_h} = \sqrt{\frac{32\pi \cdot h \cdot c^3}{G}} \approx 164 \text{ N}, \quad (11.217)$$

zcela ve shodě se vztahem (11.159) odvozeným čistě jen na základě úvah o dynamice cytorezonančních kvazičástic cytonů. ☺

Ukázali jsme tedy, že rotace vektoru lineárního času iniciuje vznik rotující hmotné kružnice uvnitř cytoprostorové buňky.

Tento útvar budeme nadále nazývat **orbitálním chronorem**.

V následujícím oddílu podrobně prozkoumáme, jaké efekty můžeme v souvislosti s pohybem orbitálního chronoru očekávat.

8) Konstrukce sférického chronoru

Počátek soustavy souřadné vložíme do bodu, kolem kterého se orbitální chronor otáčí.

Rychlost n -tého bodu chronoru pak udává vztah

$$\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n, \quad (11.218)$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je okamžitá úhlová rychlost otáčení chronoru, \mathbf{r}_n je polohový vektor n -tého bodu chronoru.

Pro celkový impulsmoment \mathbf{B} pak platí

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{v}_n = \sum m_n \mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n). \quad (11.219)$$

Rovnici (11.219) rozepíšeme do složek vyjádřených v integrálním tvaru:

$$\begin{aligned} B_1 &= \int \rho_l \left[x_2 (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) - x_3 (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) \right] dl \\ B_2 &= \int \rho_l \left[x_3 (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2) - x_1 (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) \right] dl \\ B_3 &= \int \rho_l \left[x_1 (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) - x_2 (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2) \right] dl, \end{aligned} \quad (11.220)$$

kde ρ_l je lineární hustota chronoru, dl je element délky.

Po vytknutí složek vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$, který je společný pro celý chronor, můžeme rovnice (11.220) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} B_1 &= \omega_1 \int \rho_l \left[(x_2)^2 + (x_3)^2 \right] dl - \omega_2 \int \rho_l x_1 x_2 dl - \omega_3 \int \rho_l x_1 x_3 dl \\ B_2 &= -\omega_1 \int \rho_l x_1 x_2 dl + \omega_2 \int \rho_l \left[(x_1)^2 + (x_3)^2 \right] dl - \omega_3 \int \rho_l x_2 x_3 dl \\ B_3 &= -\omega_1 \int \rho_l x_1 x_3 dl - \omega_2 \int \rho_l x_2 x_3 dl + \omega_3 \int \rho_l \left[(x_1)^2 + (x_2)^2 \right] dl . \end{aligned} \quad (11.221)$$

Koeficienty u složek úhlové rychlosti mají rozměr shodný s rozměrem inerciálního momentu.

Z důvodu zjednodušení je označíme následujícím způsobem:

$$I_{ik} = \int \left[(x_i)^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right] \rho_l dl = I_{ki} , \quad (11.222)$$

což po rozepsání dá

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int \left[(x_2)^2 + (x_3)^2 \right] \rho_l dl ; & I_{12} &= I_{21} = - \int x_1 x_2 \rho_l dl ; \\ I_{22} &= \int \left[(x_1)^2 + (x_3)^2 \right] \rho_l dl ; & I_{13} &= I_{31} = - \int x_1 x_3 \rho_l dl ; \\ I_{33} &= \int \left[(x_1)^2 + (x_2)^2 \right] \rho_l dl ; & I_{23} &= I_{32} = - \int x_2 x_3 \rho_l dl . \end{aligned} \quad (11.223)$$

S tímto novým označením můžeme rovnice (11.221) přepsat na tvar

$$\begin{aligned} B_1 &= \omega_1 I_{11} + \omega_2 I_{12} + \omega_3 I_{13} , \\ B_2 &= \omega_1 I_{21} + \omega_2 I_{22} + \omega_3 I_{23} , \\ B_3 &= \omega_1 I_{31} + \omega_2 I_{32} + \omega_3 I_{33} . \end{aligned} \quad (11.224)$$

Ve složkové symbolice můžeme celou soustavu (11.224) vyjádřit v kompaktním tvaru jako

$$B_i = \omega_j I_{ij} , \quad (11.225)$$

nebo, v symbolice operátorů, jako

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} . \quad (11.226)$$

V soustavě souřadnic spjaté s chronorem označíme složky vektoru \mathbf{B} po řadě $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, složky polohového vektoru \mathbf{r} jako ξ_1, ξ_2, ξ_3 a složky úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ coby $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

Nahradíme-li v rovnici (11.221) $x_i \rightarrow \xi_i$, $\omega_i \rightarrow \Omega_i$, obdržíme

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \Omega_1 \int \rho_l \left[(\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 \right] dl - \Omega_2 \int \rho_l \xi_1 \xi_2 dl - \Omega_3 \int \rho_l \xi_1 \xi_3 dl , \\ \beta_2 &= -\Omega_1 \int \rho_l \xi_1 \xi_2 dl + \Omega_2 \int \rho_l \left[(\xi_1)^2 + (\xi_3)^2 \right] dl - \Omega_3 \int \rho_l \xi_2 \xi_3 dl , \\ \beta_3 &= -\Omega_1 \int \rho_l \xi_1 \xi_3 dl + \Omega_2 \int \rho_l \xi_2 \xi_3 dl + \Omega_3 \int \rho_l \left[(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \right] dl . \end{aligned} \quad (11.227)$$

Koeficienty u Ω_i nyní označíme J_{ij} .

$$J_{ij} = \int \left[(\xi_1)^2 \delta_{ij} - \xi_i \xi_j \right] \rho_l dl = J_{ji} , \quad (11.228)$$

tj.

$$\begin{aligned} J_{11} &= \int \rho_l \left[(\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 \right] dl ; & J_{12} &= J_{21} = - \int \rho_l \xi_1 \xi_2 dl ; \\ J_{22} &= \int \rho_l \left[(\xi_1)^2 + (\xi_3)^2 \right] dl ; & J_{13} &= J_{31} = - \int \rho_l \xi_1 \xi_3 dl ; \\ J_{33} &= \int \rho_l \left[(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \right] dl ; & J_{23} &= J_{32} = - \int \rho_l \xi_2 \xi_3 dl . \end{aligned} \quad (11.229)$$

Rovnice (11.227) pak můžeme opět stručně zapsat jako

$$\beta_i = \Omega_j J_{ij} , \quad (11.230)$$

čili

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} . \quad (11.231)$$

V soustavě souřadnic spjaté s orbitálním chronorem jsou souřadnice ξ_i s časem stálé a tedy i koeficienty J_{ij} jsou na rozdíl od koeficientů I_{ij} časově invariantní, konstantní veličiny.

Koeficientům J_{ij} budeme říkat **komponenty inercmomentu**.

Složky se shodnými indexy J_{11}, J_{22}, J_{33} budeme nazývat **inercmomenty** vůči osám souřadného systému.

Složky se smíšenými indexy J_{12}, J_{13}, J_{23} nazveme **deviačními momenty**.

Čtverec délky průvodiče n -tého bodu chronoru je

$$\xi'_i \xi'_i \equiv (\xi'_1)^2 + (\xi'_2)^2 + (\xi'_3)^2 , \quad (11.232)$$

popř.

$$\xi_j \xi_j \equiv (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 . \quad (11.233)$$

V prvním faktoru položíme

$$\xi'_i = a_{ij} \xi_j , \quad (11.234)$$

ve druhém

$$\xi'_i = a_{ik} \xi_k . \quad (11.235)$$

Budeme se zabývat pouze takovými transformacemi, při nichž je invariantní délka průvodiče, tj.

$$\xi'_i \xi'_i = a_{ij} a_{ik} \xi_j \xi_k = \xi_j \xi_j . \quad (11.236)$$

Takové transformace nazýváme **unitární**.

Podmínka (11.236) určuje jisté omezující podmínky na operátor

$$\hat{\mathbf{A}} = \{ a_{ij} \} . \quad (11.237)$$

Pomocí Kroneckerova tenzoru přepíšeme (11.233) jako

$$\xi_j \xi_j = \delta_{jk} \xi_j \xi_k , \quad (11.238)$$

což po dosazení do (11.236) dá

$$(a_{ij} a_{ik} - \delta_{jk}) \xi_j \xi_k = 0 \quad (11.239)$$

neboli

$$a_{ij} a_{ik} \xi_j \xi_k = \delta_{jk} \xi_j \xi_k . \quad (11.240)$$

Tato rovnice musí platit pro všechna ξ_j, ξ_k , což vede k podmínce pro koeficienty transformace

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} . \quad (11.241)$$

Nyní najdeme inverzní transformaci k (11.234).

Za tím účelem vynásobíme tuto rovnici koeficientem a_{ik} , což dá

$$a_{ik} \xi'_i = a_{ij} a_{ik} \xi_j = \delta_{jk} \xi_j = \xi_k . \quad (11.242)$$

Je tedy

$$\xi_k = a_{ik} \xi'_i . \quad (11.243)$$

Z podmínky

$$\xi_k \xi_k = \xi'_i \xi'_i \quad (11.244)$$

pak stejným postupem jako při odvozování (11.241) dostaneme

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} . \quad (11.245)$$

Mezi složkami β_i a β'_i resp. Ω_j a Ω'_j platí podle definice vektoru vztahy

$$\begin{aligned} \beta_i &= a_{li}\beta'_l , \\ \Omega_j &= a_{kj}\Omega'_k , \end{aligned} \quad (11.246)$$

uvažujeme-li inverzní transformaci

$$\xi_j = a_{ij}\xi'_i \quad (11.247)$$

k transformaci (11.234).

Dosadíme-li (11.246) do (11.230) dostáváme

$$a_{li}\beta'_l = a_{kj}\Omega'_k J_{ij} . \quad (11.248)$$

Poslední rovnici vynásobíme koeficientem transformace a_{mi}

$$a_{mi}a_{li}\beta'_l = a_{mi}a_{kj}\Omega'_k J_{ij} , \quad (11.249)$$

a protože platí

$$a_{mi}a_{li} = \delta_{ml} , \quad (11.250)$$

získáme užitím zřejmé identity

$$\delta_{ml}\beta'_l = \beta'_m \quad (11.251)$$

rovnici

$$\beta'_m = \Omega'_k a_{mi}a_{kj} J_{ij} . \quad (11.252)$$

Poslední rovnice je vyjádřením vztahu (11.230) v čárkované soustavě souřadnic.

Musí tedy mít tvar

$$\beta'_m = \Omega'_k J_{mk} . \quad (11.253)$$

Porovnáním (11.251) a (11.253) dostáváme

$$J'_{mk} = a_{mi} a_{kj} J_{ij} . \quad (11.254)$$

To je však transformační rovnice pro tenzor druhého řádu.

Rovnice (11.230) může tedy být splněna pouze když výraz J_{ij} je tenzorem druhého řádu.

Jelikož platí relace

$$J_{ij} = J_{ji} , \quad (11.255)$$

jedná se navíc o symetrický tenzor.

V dalším textu pro něj budeme užívat označení **inerciální tenzor**.

Nyní se pokusíme přepsat druhou větu impulsovou

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_S = \mathbf{M} \quad (11.256)$$

do soustavy souřadnic spjaté s chronorem.

Budeme předpokládat, že soustava souřadnic pevná v chronoru a soustava souřadnic pevná v cytoprostoru mají společný počátek v bodě, kolem kterého se chronor otáčí.

Vektor \mathbf{M} převedeme do soustavy souřadnic spjaté s chronorem jednoduše tak, že v této soustavě vyjádříme jeho složky.

Označme je μ_1, μ_2, μ_3 .

Vyjádření derivace $\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_C$, tj. časové změny vektoru \mathbf{B} vůči soustavě souřadnic spjaté s chronorem, pomocí časové změny vektoru \mathbf{B} vzhledem k cytoprostoru $\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_S$, je již poněkud obtížnější.

Polohový vektor \mathbf{r} určitého pevného bodu chronoru je v soustavě spjaté s chronorem konstantní, kdežto v soustavě pevné v cytoprostoru se s časem mění.

Pro rychlost n -tého bodu chronoru vzhledem k různým soustavám tedy platí

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_C = 0, \quad (11.257)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_S = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (11.258)$$

čili

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_S - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (11.259)$$

U jiných vektorů, jako např. u vektoru \mathbf{B} nemusí být derivace vůči chronoru nulová.

Mezi oběmi derivacemi však i nadále zůstává v platnosti vztah

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_S - \left(\frac{d}{dt}\right)_C = \boldsymbol{\omega} \times \quad . \quad (11.260)$$

Speciálně pro vektor \mathbf{B} celkového impulsmomentu orbitálního chronoru platí

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_S - \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}. \quad (11.261)$$

Po dosazení rovnice (11.261) do druhé věty impulsové (11.256) získáme hledané vyjádření této věty v soustavě souřadnic spjaté s chronorem:

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} = \mathbf{M} . \quad (11.262)$$

Rozepsáním této rovnice do složek dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_1}{dt} + \Omega_2\beta_3 - \Omega_3\beta_2 &= \mu_1 , \\ \frac{d\beta_2}{dt} + \Omega_3\beta_1 - \Omega_1\beta_3 &= \mu_2 , \\ \frac{d\beta_3}{dt} + \Omega_1\beta_2 - \Omega_2\beta_1 &= \mu_3 . \end{aligned} \quad (11.263)$$

Dosadíme-li do (11.263) vyjádření β_i podle (11.230), přejdou rovnice (11.263) na tvar

$$\begin{aligned} J_{11} \frac{d\Omega_1}{dt} + J_{12} \frac{d\Omega_2}{dt} + J_{13} \frac{d\Omega_3}{dt} + \Omega_2\Omega_1 J_{31} + \Omega_2\Omega_2 J_{32} + \Omega_2\Omega_3 J_{33} - \\ - \Omega_3\Omega_1 J_{21} - \Omega_3\Omega_2 J_{22} - \Omega_3\Omega_3 J_{23} &= \mu_1 , \\ J_{21} \frac{d\Omega_1}{dt} + J_{22} \frac{d\Omega_2}{dt} + J_{23} \frac{d\Omega_3}{dt} + \Omega_3\Omega_1 J_{11} + \Omega_3\Omega_2 J_{12} + \Omega_3\Omega_3 J_{13} - \\ - \Omega_1\Omega_1 J_{31} - \Omega_1\Omega_2 J_{32} - \Omega_1\Omega_3 J_{33} &= \mu_2 , \\ J_{31} \frac{d\Omega_1}{dt} + J_{32} \frac{d\Omega_2}{dt} + J_{33} \frac{d\Omega_3}{dt} + \Omega_1\Omega_1 J_{21} + \Omega_1\Omega_2 J_{22} + \Omega_1\Omega_3 J_{23} - \\ - \Omega_2\Omega_1 J_{11} - \Omega_2\Omega_2 J_{12} - \Omega_2\Omega_3 J_{13} &= \mu_3 . \end{aligned} \quad (11.264)$$

Proložíme-li třetí osu soustavy souřadnic spjaté s chronorem osou rotace, pak $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, $\Omega_3 \neq 0$.

Pro složky β_i impulsmomentu pak podle (11.230) dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \Omega_3 J_{13} , \\
\beta_2 &= \Omega_3 J_{23} , \\
\beta_3 &= \Omega_3 J_{33} .
\end{aligned}
\tag{11.265}$$

Jsou-li deviační složky inerciálního tenzoru J_{13} a J_{23} nenulové, má celkový impulsmoment nejen složku do směru osy rotace, ale i nenulové složky β_1 a β_2 .

Vektor β_i nemá tedy směr osy otáčení.

Z pohybových rovnic (11.264) pro rotaci orbitálního chronoru kolem třetí osy ($\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \Omega_3 \neq 0$) plyne

$$\begin{aligned}
J_{13} \frac{d\Omega_3}{dt} - (\Omega_3)^2 J_{23} &= \mu_1 , \\
J_{23} \frac{d\Omega_3}{dt} - (\Omega_3)^2 J_{13} &= \mu_2 , \\
J_{33} \frac{d\Omega_3}{dt} &= \mu_3 .
\end{aligned}
\tag{11.266}$$

Nepokládáme-li osu rotace za osu, která je vazbami udržována v pevné poloze, nenulové hodnoty deviačních momentů v rovnici (11.266) způsobí, že osa rotace nebude mít vůči chronoru ani vůči cytoprostoru stálou polohu.

Osa začne chronorem i cytoprostorem putovat, a to i v případě, kdy výsledný moment vnějších sil působících na chronor je nulový.

Zodpovíme nyní otázku, zda v chronoru existují osy, vůči kterým jsou deviační momenty nulové.

Jde o to, nalézt v chronoru směry, v nichž je při rotaci impulsmoment rovnoběžný s osou rotace, tj. $\mathbf{B} = k \cdot \boldsymbol{\omega}$.

V soustavě spjaté s chronorem pak platí $k = J$ tj.

$$\beta_i = J \cdot \Omega_i .
\tag{11.267}$$

Dosadíme-li požadavek (11.267) do (11.230), dostáváme

$$J \cdot \Omega_i = J_{ij} \Omega_j .
\tag{11.268}$$

Soustavu (11.268) rozepíšeme do složek a všechny členy převedeme na levou stranu:

$$\begin{aligned} (J_{11} - J) \Omega_1 + J_{12} \Omega_2 + J_{13} \Omega_3 &= 0, \\ J_{21} \Omega_1 + (J_{22} - J) \Omega_2 + J_{23} \Omega_3 &= 0, \\ J_{31} \Omega_1 + J_{32} \Omega_2 + (J_{33} - J) \Omega_3 &= 0. \end{aligned} \quad (11.269)$$

Obdrželi jsme homogenní soustavu pro neznámé složky Ω_i vektoru úhlové rychlosti.

Netriviální řešení získáme jen v případě, že matice soustavy (11.269)

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} J_{11} - J & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} - J & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} - J \end{pmatrix} \quad (11.270)$$

je singulární, tj.

$$\det \hat{\mathbf{M}} = 0. \quad (11.271)$$

Čísla J_i tedy tvoří spektrum operátoru $\hat{\mathbf{M}}$ a jak se lze snadno přesvědčit, jsou pro reálné hodnoty J_{ij} rovněž všechna tři J_i reálná. Existují tedy celkem tři konstanty J_1, J_2, J_3 , splňující rovnici (11.271).

Každé z těchto tří konstant odpovídá jedno řešení rovnic (11.269), tj. jedna trojice složek Ω_i vektoru úhlové rychlosti.

Rovnicemi (11.269) jsou však vektory Ω_k určeny až na libovolnou konstantu.

Je-li Ω_i jejím řešením, je řešením také $k \cdot \Omega_i$, neboť dosazením do (11.269) lze konstantu k ve všech rovnicích soustavy vykrátit.

Vlastními vektory operátoru $\hat{\mathbf{M}}$ jsou pak jednotlivé vektory \mathbf{v}_k rovnoběžné se všemi Ω_k .

Vektory \mathbf{v}_k jsou tedy jednotkovými vektory určujícími hledaný směr hlavních os rotace.

Lze ukázat, že jsou-li všechny konstanty J_1, J_2, J_3 navzájem různé, jsou jim odpovídající vlastní vektory \mathbf{v}_k vzájemně ortogonální. K tomu stačí ukázat, že vlastní vektory tvoří bázi prostoru E^3 . Protože jejich počet odpovídá stupni charakteristické rovnice (11.271) tzn. dimenzi E^3 , ukážeme již jen jejich nezávislost, třeba takto: Kdyby

$$\sum \mu_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} , \quad (11.272)$$

kde \mathbf{v}_k jsou vlastní vektory operátoru $\hat{\mathbf{M}} : \vec{f}(\mathbf{v}_k) = J_k \mathbf{v}_k$, tak by pro každé N platilo

$$\hat{\mathbf{M}}^N(\mathbf{v}) = J^N \mathbf{v} , \quad (11.273)$$

neboli

$$\hat{\mathbf{M}}^N \left(\sum \mu_k \mathbf{v}_k \right) = \sum \mu_k J_k^N \mathbf{v}_k = \mathbf{0} . \quad (11.274)$$

To je ovšem nekonečně mnoho nezávislých rovnic pro neznámou μ_k což je neřešitelné, že ano. ☺

Podmínku (11.267) o rovnoběžnosti vektorů $\boldsymbol{\omega}$ a \mathbf{B} lze tedy splnit alespoň pro jednu trojici vzájemně ortogonálních vektorů.

V libovolném tělese tedy existují pro každý bod nejméně tři tímto bodem procházející vzájemně ortogonální osy takové, že při rotaci kolem nich je celkový impulsmoment rovnoběžný s osou rotace.

Těmito osami lze samozřejmě proložit vektory kanonické báze, tj. osy ortonormální soustavy souřadné.

Předpokládejme, že objekt rotuje kolem třetí osy takto zvolené soustavy souřadnic.

Jelikož impulsmoment v uvažované soustavě souřadnic musí být rovnoběžný s osou rotace, tj. třetí osou, platí pro první a druhou složku rovnost $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Z prvních dvou rovnic (11.262) pak plyne, že v takto zvolené soustavě souřadné musí být $J_{13} = J_{23} = 0$.

Podobným rozbořem rovnic (11.265) pro rotaci kolem zbývajících dvou os dostaneme postupně $J_{12} = J_{23} = 0$ pro rotaci kolem druhé osy a $J_{12} = J_{13} = 0$ pro rotaci kolem první osy.

Odtud plyne závěr, že proložíme-li osy kartézské soustavy souřadnic těmi směry, ve kterých je při rotaci impulsmoment rovnoběžný s rotační osou, deviační momenty vymizí.

V takové soustavě souřadnic zůstanou nenulové pouze diagonální složky inerciálního tenzoru J_{11}, J_{22}, J_{33} , které jsou řešením rovnice (11.271), tj. platí: $J_{11} = J_1, J_{22} = J_2, J_{33} = J_3$.

Osám, vůči nimž deviační složky inerciálního tenzoru zmizely, říkáme **hlavní osy inerciálního tenzoru** a jim příslušejícím momentům J_1, J_2, J_3 říkáme **hlavní inercmomenty**.

Proces, jehož jsme právě byli svědky se nazývá **diagonalizací tenzoru**.

Zvolíme-li soustavu souřadnic pevnou v chronoru ve směru hlavních os inerciálního tenzoru, zjednoduší se nám rovnice (11.264) na tvar

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + \Omega_2 \Omega_3 (J_3 - J_2) &= \mu_1, \\ J_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + \Omega_3 \Omega_1 (J_1 - J_3) &= \mu_2, \\ J_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + \Omega_1 \Omega_2 (J_2 - J_1) &= \mu_3. \end{aligned} \quad (11.275)$$

Zbývá ještě ukázat, kterak určit inercmoment vůči libovolné ose procházející bodem v němž známe inerciální tenzor.

Pro složku impulsmomentu rovnoběžnou s osou otáčení platí

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = J \cdot \omega, \quad (11.276)$$

kde \mathbf{B} je celkový impulsmoment a \mathbf{v} je jednotkový vektor kolineární s osou otáčení.

Projekce impulsmomentu do osy rotace je invariantní veličinou vzhledem k volbě souřadného systému (nezávisí na tom, zda jej upevníme v cytoprostoru či v chronoru).

Platí tedy rovněž

$$v_i \beta_i = J \cdot \omega , \quad (11.277)$$

kde v_i jsou nyní složky jednotkového vektoru ve směru rotační osy v soustavě souřadnic pevné v chronoru.

Do rovnice (11.277) dosadíme vyjádření β_i podle (11.230) a dostaneme

$$v_i J_{ij} \Omega_j = J \cdot \omega . \quad (11.278)$$

Při rotaci kolem pevné osy má vektor Ω_j směr této osy, a proto

$$\Omega_j = v_j \omega . \quad (11.279)$$

Dosazením posledního vztahu do rovnice (11.278) a pokrácením úhlové rychlosti ω obdržíme hledané vyjádření inercmomentu J podle komponent inerciálního tenzoru J_{ij} , tj. **kontrakci inerciálního tenzoru**, ve tvaru

$$J = v_i v_j J_{ij} . \quad (11.280)$$

V námi zkoumaném případě bude rozumné předpokládat, že vnější silové působení na chronor je omezeno toliko na kvantové fluktuace cytoprostoru a jako takové bude bez přijetí dalších dodatečných předpokladů (interhypergrupární komunikace apod.) zcela náhodné. Proto je vektorový součet všech silových momentů působících na chronor v každém okamžiku průměrně nulový.

Pro první přiblížení nám tento předpoklad bohatě postačí, avšak přesnější výsledky, jichž se dočkáme již v následující kapitole, budou vyžadovat zahrnutí i oněch výše jmenovaných kvantových (či spíše již subkvantových) fluktuací.

Předpokládejme, že osa rotační symetrie orbitálního chronoru je třetí souřadnou osou, tj. $J_3 \neq J_1 = J_2$.

Jeho pohyb je pak určen rovnicemi

$$\begin{aligned}
 J_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + \Omega_2 \Omega_3 (J_3 - J_1) &= 0, \\
 J_1 \frac{d\Omega_2}{dt} + \Omega_3 \Omega_1 (J_1 - J_3) &= 0, \\
 J_3 \frac{d\Omega_3}{dt} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{11.281}$$

Z poslední rovnice systému plyne

$$\Omega_3 = \textit{konst.} \tag{11.282}$$

Časovou závislost zbývajících dvou složek vektoru Ω_i získáme řešením soustavy prvních dvou diferenciálních rovnic systému (11.281), které nyní vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Omega_1}{dt} + \Omega_2 \Omega_3 \frac{J_3 - J_1}{J_1} &= 0, \\
 \frac{d\Omega_2}{dt} - \Omega_1 \Omega_3 \frac{J_3 - J_1}{J_1} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{11.283}$$

Výraz

$$\Omega_3 \frac{J_3 - J_1}{J_1} \equiv \Omega \tag{11.284}$$

je vzhledem k (11.282) konstantní a má rozměr úhlové rychlosti.

Z první rovnice systému (11.283) vypočteme

$$\Omega_2 = -\frac{1}{\Omega} \cdot \frac{d\Omega_1}{dt} \tag{11.285}$$

a po zderivování podle času máme

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = -\frac{1}{\Omega} \cdot \frac{d^2\Omega_1}{dt^2}. \tag{11.286}$$

Srovnáním této rovnice s druhou rovnicí systému (11.283) obdržíme diferenciální rovnici pro hledanou funkci $\Omega_1 = \Omega_1 (t)$:

$$\frac{d^2\Omega_1}{dt^2} + \Omega^2\Omega_1 = 0 . \quad (11.287)$$

Protože zřejmě platí

$$\Omega_1 \cdot \frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \Omega_1^2 \right) \cdot 1 \quad (11.288)$$

a odtud rovněž

$$\frac{d\Omega_1}{dt} \cdot \frac{d^2\Omega_1}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega_1}{dt} \right)^2 \right] \cdot 1 , \quad (11.289)$$

můžeme rovnici (11.287) rozšířit funkcí $\frac{d\Omega_1}{dt}$:

$$\frac{d\Omega_1}{dt} \cdot \frac{d^2\Omega_1}{dt^2} + \Omega^2 \cdot \frac{d\Omega_1}{dt} \cdot \Omega_1 = \frac{d\Omega_1}{dt} \left(\frac{d^2\Omega_1}{dt^2} + \Omega^2 \cdot \Omega_1 \right) = 0 \quad (11.290)$$

a poté vyjádřit ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \Omega^2 \cdot \Omega_1^2 \right] = 0 . \quad (11.291)$$

To však znamená, že

$$\left(\frac{d\Omega_1}{dt} \right)^2 + \Omega^2 \cdot \Omega_1^2 = konst. \quad (11.292)$$

Označíme-li

$$\text{konst.} = (k \cdot \Omega)^2, \quad (11.293)$$

získáme rovnici

$$\left(\frac{d\Omega_1}{dt} \right)^2 = \Omega^2 (k^2 - \Omega_1^2), \quad (11.294)$$

z níž již separací proměnných plyne výraz

$$\frac{d\Omega_1}{\sqrt{k^2 - \Omega_1^2}} = \Omega dt \quad (11.295)$$

Připravený k integrování.

Máme tedy integrální rovnici

$$\int \frac{d\Omega_1}{\sqrt{k^2 - \Omega_1^2}} = \int \Omega dt. \quad (11.296)$$

Zavedeme substituci

$$\Omega_1 = k \cdot \sin x \quad (11.297)$$

a odtud

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = k \cdot \cos x \Rightarrow d\Omega_1 = k \cdot \cos x \cdot dx. \quad (11.298)$$

Vyintegrujeme nejprve levou stranu rovnice (11.295):

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega_1}{\sqrt{k^2 - \Omega_1^2}} &= \int \frac{k \cdot \cos x}{\sqrt{k^2 - k^2 \cdot \sin^2 x}} dx = \int \frac{k \cdot \cos x}{k \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x}} dx = \\ &= \int \frac{\cos x}{|\cos x|} dx = \int dx \end{aligned} \quad (11.299)$$

Porovnáním tohoto výsledku s pravou stranou rovnice (11.296) dostaneme

$$dx = \Omega dt , \quad (11.300)$$

což po integraci dá konečný výsledek

$$x = \Omega t + \alpha . \quad (11.301)$$

Dosazením do substituční rovnice (11.297) nyní nalézáme obecné řešení rovnice (11.287) ve tvaru

$$\Omega_1 = k \cdot \sin(\Omega t + \alpha) . \quad (11.302)$$

Dosadíme-li toto řešení do první rovnice soustavy (11.283) dostáváme

$$\frac{d}{dt} [k \cdot \sin(\Omega t + \alpha)] = -\Omega \cdot \Omega_2 , \quad (11.303)$$

což po provedení derivace dá

$$\Omega \cdot k \cdot \cos(\Omega t + \alpha) = -\Omega \cdot \Omega_2 , \quad (11.304)$$

neboli

$$\Omega_2 = -k \cdot \cos(\Omega t + \alpha) . \quad (11.305)$$

Konstanty k a α lze určit z počátečních podmínek pohybu, tj. obvykle udáním vektoru $\omega_0 = (\Omega_1^0, \Omega_2^0, \Omega_3^0)$ v čase $t = 0$.

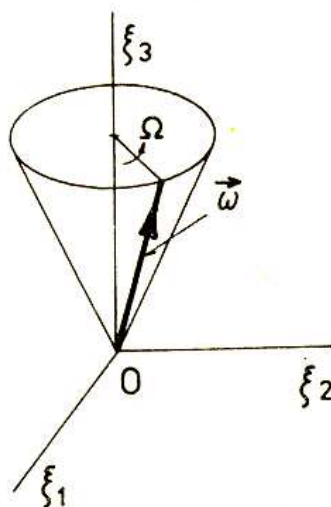
Předpokládejme, že všechny tři složky vektoru ω_0 jsou nenulové.

Potom ani jedna ze složek vektoru $\omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ nemůže být po celou dobu pohybu nulová.

Položíme-li počátek vektoru ω do počátku souřadného systému, tj. do hmotného středu chronoru, lze rovnice (11.302), (11.305),

(11.282) pokládat za parametrické rovnice trajektorie koncového bodu vektoru $\boldsymbol{\omega}$ v soustavě souřadnic spjaté s chronorem. Tyto rovnice však popisují kružnici o poloměru k , jež má střed na třetí souřadné ose ξ_3 vzdálené Ω_3 od počátku soustavy souřadnic. Vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ tedy opisuje v tělese plášť (tzv. **polhodiového**) kužele a to **precesní rychlostí Ω** .

Obr. 11.21



Z provedeného rozboru pohybu vektoru $\boldsymbol{\omega}$ v chronoru rovněž plyne, že jeho velikost ω je s časem konstantní.

Vzhledem k volbě soustavy souřadnic ve směru hlavních os inerciálního tenzoru orbitálního chronoru mají rovnice (11.230) jednoduchý tvar

$$\begin{aligned} \beta_1 &= J_1 \Omega_1 , \\ \beta_2 &= J_2 \Omega_2 , \\ \beta_3 &= J_3 \Omega_3 . \end{aligned} \quad (11.306)$$

V důsledku symetrie orbitálního chronoru ($J_1 = J_2$) odtud plyne rovnost

$$\frac{\beta_1}{\Omega_1} = \frac{\beta_2}{\Omega_2} . \quad (11.307)$$

Geometricky to znamená, že vektory \mathbf{B} a $\boldsymbol{\omega}$ leží ve společné rovině s osou ξ_3 .

Na obrázku 11.22 jsou naznačeny polohy zmíněných vektorů a výraz

$$\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = \text{konst.} \quad (11.308)$$

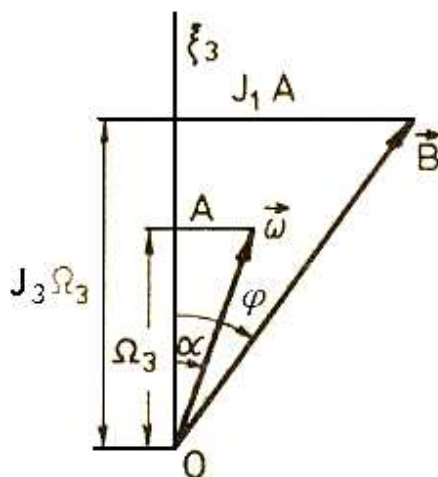
je ve shodě s (11.302) a (11.305) roven

$$\text{konst.} \equiv A = k \cdot \sqrt{\sin^2(\Omega t + \alpha) + \cos^2(\Omega t + \alpha)} \quad (11.309)$$

a navíc, jak vyplývá z obr. 11.22,

$$\frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} = \frac{J_1}{J_3}. \quad (11.310)$$

Obr. 11.22



Tento obrázek odpovídá případu $J_1 > J_3$.

Pro $J_3 > J_1$ leží vektor \mathbf{B} blíže k ose ξ_3 než vektor $\boldsymbol{\omega}$.

Konečně, pro sférický případ $J_1 = J_3$ zřejmě platí $\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 1$.

Vektor $\boldsymbol{\omega}$ se otáčí kolem osy ξ_3 úhlovou rychlostí Ω .

Protože však vektory $\boldsymbol{\omega}$ a \mathbf{B} leží ve společné rovině s osou ξ_3 , musí rovněž vektor \mathbf{B} rotovat vůči soustavě pevné v chronoru úhlovou rychlostí Ω , a to po plášti virtuálního kužele, který má však obecně jiný vrcholový úhel nežli kužel polhodiový.

Podle rovnice (11.256) je vektor \mathbf{B} pevný v cytoprostoru, neboť platí

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{0} \quad (11.311)$$

(výsledný moment vnějších sil působících na orbitální chronor je nulový).

Na obr. 11.23 je impulsmoment \mathbf{B} naznačen jako vektor ve směru třetí osy x_3 soustavy souřadnic pevné v cytoprostoru.

Vektor \mathbf{B} leží dle výše provedených úvah v plášti kužele pevného vůči orbitálnímu chronoru, s vrcholovým úhlem 2φ , jehož osou je osa ξ_3 soustavy souřadnic pevné v orbitálním chronoru.

Na obrázku jsou znázorněny další dva kužele.

Kužel polhodiový a tzv. kužel **herpolhodiový** s vrcholovým úhlem $\gamma = \varphi - \alpha$ a s osou procházející vektorem \mathbf{B} .

Protože, jak víme, osa ξ_3 a vektory $\boldsymbol{\omega}$ a \mathbf{B} leží v jedné rovině, dotýkají se polhodiový a herpolhodiový kužel podél přímky v níž leží vektor $\boldsymbol{\omega}$, tj. podél okamžité osy rotace orbitálního chronoru, která je v chronoru i cytoprostoru pevná.

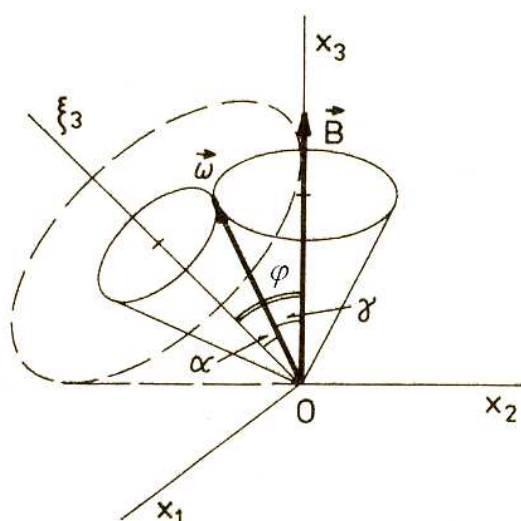
Podél dotykové přímky obou kuželů tedy nemůže docházet k „prokluzu“.

Pohyb volného orbitálního chronoru tak lze názorně popsat odvalováním polhodiového kužele po herpolhodiovém, bez vzájemného prokluzování.

Rychlost n -tého bodu orbitálního chronoru vůči jeho hmotnému středu udává vztah (viz obr. 11.23)

$$v_{S,n} = \left\| \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{S,n} \right\| = r_{S,n} \cdot \omega \cdot \sin \alpha \quad (11.312)$$

Obr. 11.23



Skutečnost, že námi zvolený bod n neleží na orbitálním chronoru nýbrž pouze na jeho rotační ose je samozřejmě irelevantní.

Vyjádříme-li rychlost bodu n jako rychlost rotace kolem osy x_3 pevné v cytoprostoru, můžeme pro její velikost psát vyjádření

$$v = r_{S,n} \cdot \Omega_p \cdot \sin \varphi . \quad (11.313)$$

Porovnáním rovnice (11.312) a (11.313) dostáváme poměr velikosti precesní rychlosti Ω_p a úhlové rychlosti otáčení chronoru ω :

$$\frac{\Omega_p}{\omega} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} . \quad (11.314)$$

Zadáním počáteční hodnoty ω_0 vektoru ω v soustavě souřadnic spjaté s tělesem je dán úhel α , neboť

$$\tan \alpha = \frac{A}{\Omega_3} = \frac{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}}{\Omega_3} \quad (11.315)$$

a tím je podle (11.310) dán i úhel φ .

Rovnicí (11.314) je potom určena velikost precesní rychlosti Ω_p .

Jelikož Ω_3 je třetí složka vektoru ω v soustavě souřadnic spjaté s chronorem, zřejmě platí

$$\Omega_3 = \omega \cdot \cos \alpha , \quad (11.316)$$

a tedy

$$\omega = \frac{\Omega_3}{\cos \alpha} . \quad (11.317)$$

Dosazením (11.317) do (11.314) máme postupně

$$\frac{\Omega_p \cdot \cos \alpha}{\Omega_3} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} , \quad (11.318)$$

$$\frac{\Omega_p}{\Omega_3} = \frac{\tan \alpha}{\sin \varphi} , \quad (11.319)$$

$$\Omega_3 = \frac{J_1 \cdot \Omega}{J_3 - J_1} = \frac{\Omega_p \cdot \sin \varphi}{\tan \alpha} . \quad (11.320)$$

Protože, jak již víme (viz (11.310)), je

$$\tan \alpha = \frac{J_3 \cdot \tan \varphi}{J_1} , \quad (11.321)$$

platí rovnost

$$\frac{\Omega_p (J_3 - J_1)}{J_1 \cdot \Omega} = \frac{\tan \alpha}{\sin \varphi} = \frac{J_3 \cdot \tan \varphi}{J_1 \cdot \sin \varphi} = \frac{J_3}{J_1 \cdot \cos \varphi} , \quad (11.322)$$

odkud

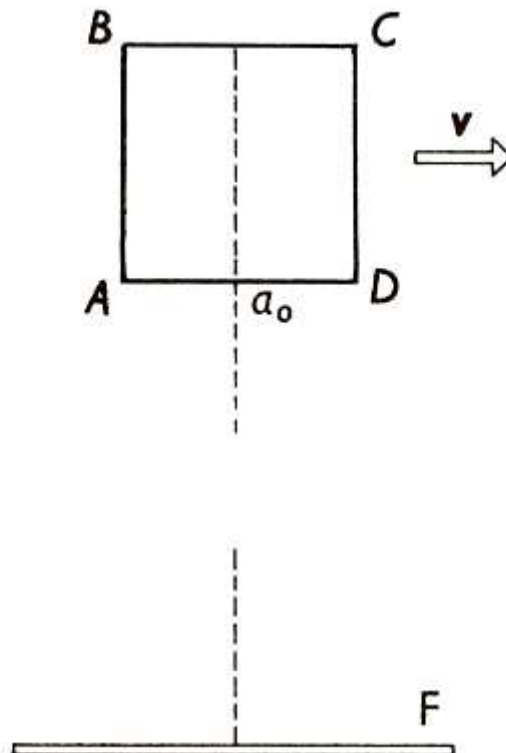
$$\Omega_p = \frac{\Omega \cdot J_3}{(J_3 - J_1) \cdot \cos \varphi} = \frac{\Omega_3 \cdot J_3}{J_1 \cdot \cos \varphi}. \quad (11.323)$$

Otázkou zůstává, jaká je mezní velikost úhlu φ , která je ještě v souladu s kvantovou povahou prostoročasu generovaného cytoprostorem.

Abychom si odpověděli na tuto otázku, provedeme nyní relativistický kvantový rozbor následujícího myšlenkového experimentu:

Těleso, jež má ve své soustavě tvar krychle a pohybuje se rychlostí v v naznačeném směru, fotografujeme z větší vzdálenosti v okamžiku, kdy optická osa fotografického přístroje prochází středem krychle a je kolmá k vektoru \mathbf{v} její rychlosti (viz obr. 11.24).

Obr. 11.24



Naším úkolem bude určit, jak by vypadal obraz krychle na fotografickém snímku, jestliže expozice trvala zanedbatelně krátký okamžik.

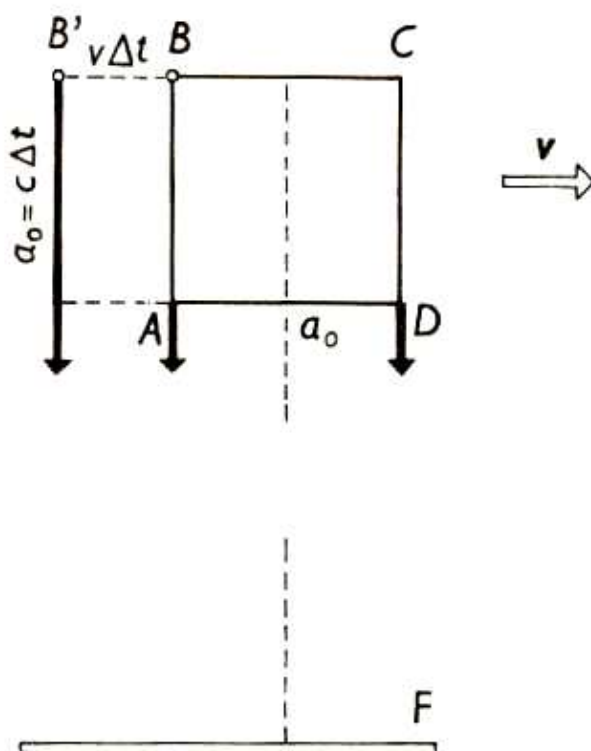
Světlo, které dopadne v daném okamžiku na fotografickou desku, bylo emitováno z povrchu krychle v různých časech, neboť jednotlivé body krychle jsou od fotografické desky vzdáleny různě.

V okamžiku, kdy na fotografickou desku F dopadne světlo z hrany AD, dopadne na ni též světlo z bodu B' ve kterém se nalézal bod B o dobu

$$\Delta t = \frac{a_0}{c} \quad (11.324)$$

dříve (viz obr. 11.25).

Obr. 11.25



Pro vzdálenost B' a B zřejmě platí

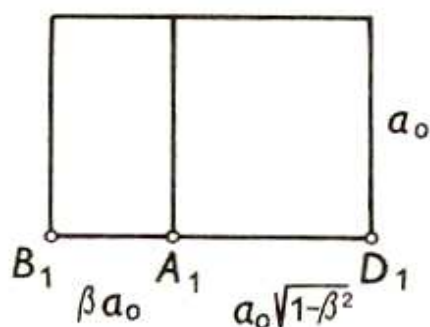
$$|B'B| = v \cdot \Delta t = a_0 \cdot \frac{v}{c} . \quad (11.325)$$

Hrana AD o vlastní délce a_0 se v důsledku Lorentzovy transformace délky bude jevit jako úsečka délky

$$a'_0 = a_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \quad (11.326)$$

Celkový vzhled krychle při jejím fotografování za daných podmínek tedy bude

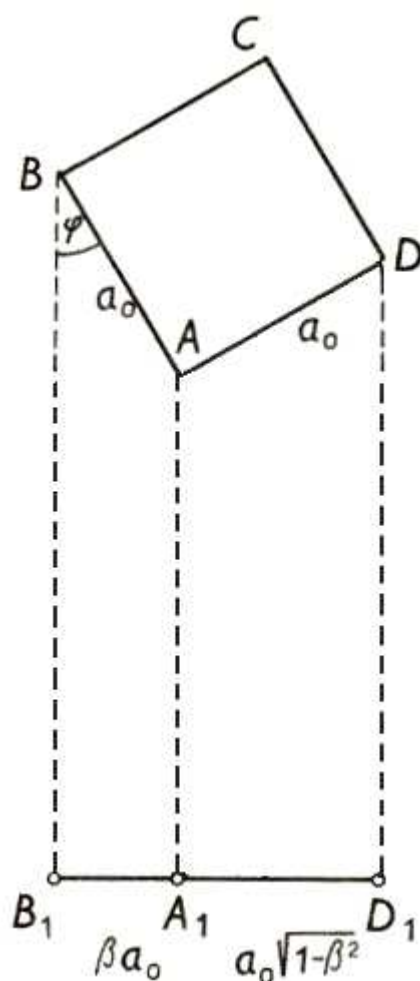
Obr. 11.26



což lze interpretovat jako průmět původní nehybné krychle pootočené o úhel φ , pro který platí

$$\sin \varphi = \frac{v}{c} . \quad (11.327)$$

Obr. 11.27



Průmět hrany AB potočené krychle je totiž

$$|A_1B_1| = a_0 \cdot \sin \varphi = a_0 \cdot \frac{v}{c}, \quad (11.328)$$

a průmět hrany AD je

$$|A_1D_1| = a_0 \cdot \cos \varphi = a_0 \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = a_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11.329)$$

Protože, jak již víme (viz vztah (11.166)), platí pro mezní hodnotu Lorentzova faktoru γ vztah

$$\gamma_m^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = z^{-5}, \quad (11.330)$$

musí, srovnáním s (11.329) platit rovněž

$$\cos \varphi_m = z^{-5}, \quad (11.331)$$

čímž je vyjádřen hledaný mezní úhel φ_m .

Dosadíme-li tento úhel do vztahu pro velikost precesní rychlosti orbitálního chronoru (11.323), získáme hodnotu

$$\Omega_p = \frac{2cz^5}{\frac{l_h}{2}}, \quad (11.332)$$

což pro velikost obvodové rychlosti precesního pohybu dává

$$v_p = 2cz^5. \quad (11.333)$$

Tím je hotova konstrukce nového typu chronoru, tzv. **sférického chronoru** s dimenzí $D = 3$.

Hmotná povaha sférického chronoru se dokáže analogicky jako tomu bylo v případě chronoru orbitálního.

Sférický chronor je zřejmě elementární částicí totožnou s kvantonem, jehož existenci jsme předpokládali na základě prostších úvah již dříve.

Bude jistě zajímavé, prozkoumat tento objekt poněkud podrobněji, coby entitu obývající svět, kde subkvantové perturbace na úrovni interhypergrupárních bariér cytoprostoru dosahují významných úrovní, takže náš předpoklad o nulovém momentu vnějších sil působících na chronor, který samozřejmě po vhodném časoprostorovém zprůměrování stále platí, nemusí již platit v každém prostoročasovém světobodě sférického chronoru.

Lze tedy očekávat jisté vnitřní deformace, projevivší se na subkvantové úrovni orbitálního chronoru, na jejichž rozbor se zaměříme v následujícím odstavci.

9) kvantování pohybu sférického chronoru

Nechť samosdružené operátory $\hat{\mathbf{L}}_k$ ($k = 1, 2, 3$) splňují komutační relace

$$\left[\hat{\mathbf{L}}_j, \hat{\mathbf{L}}_k \right] = i\varepsilon_{jkl} \hat{\mathbf{L}}_l, \quad (11.334)$$

potom pro pozitivně definitní operátor

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \equiv \hat{\mathbf{L}}_1^2 + \hat{\mathbf{L}}_2^2 + \hat{\mathbf{L}}_3^2 \quad (11.335)$$

platí

$$\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{L}}_k \right] = 0. \quad (11.336)$$

V příslušném Hilbertově prostoru tedy existuje báze tvořená společnými vlastními vektory operátorů $\hat{\mathbf{L}}^2$ a $\hat{\mathbf{L}}_3$.

Definujme **posunovací operátory**

$$\hat{\mathbf{L}}_{\pm} \equiv \hat{\mathbf{L}}_1 \pm i \cdot \hat{\mathbf{L}}_2. \quad (11.337)$$

Ze samosdruženosti operátorů $\hat{\mathbf{L}}_k$ plyne

$$\hat{\mathbf{L}}_{\pm} = \hat{\mathbf{L}}_{\mp}^{\dagger}. \quad (11.338)$$

Komutační relace

$$\left[\hat{\mathbf{L}}_{+}, \hat{\mathbf{L}}_{-} \right] = 2\hat{\mathbf{L}}_3, \quad (11.339)$$

$$\left[\hat{\mathbf{L}}_3, \hat{\mathbf{L}}_{\pm} \right] = \pm \hat{\mathbf{L}}_{\pm}, \quad (11.340)$$

$$\left[\hat{\mathbf{L}}_{\pm}, \hat{\mathbf{L}}^2 \right] = 0, \quad (11.341)$$

jsou ekvivalentní relacím (11.334), (11.336).
Operátor (11.335) lze vyjádřit jako

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{\mathbf{L}}_+ \hat{\mathbf{L}}_- + \hat{\mathbf{L}}_3^2 - \hat{\mathbf{L}}_3 , \quad (11.342)$$

nebo ekvivalentně

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{\mathbf{L}}_- \hat{\mathbf{L}}_+ + \hat{\mathbf{L}}_3^2 + \hat{\mathbf{L}}_3 . \quad (11.343)$$

Necht' $|l, m\rangle$ je normalizovaný společný vlastní vektor operátorů $\hat{\mathbf{L}}^2$ a $\hat{\mathbf{L}}_3$ pro který platí

$$\hat{\mathbf{L}}^2 |l, m\rangle = l(l+1) |l, m\rangle , \quad (11.344)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_3 |l, m\rangle = m |l, m\rangle , \quad (11.345)$$

$$\langle l, m | l', m' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (11.346)$$

kde

$$l = l^* \geq 0 . \quad (11.347)$$

Pomocí komutační relace (11.340) resp. (11.341) nalezneme

$$\hat{\mathbf{L}}_3 \hat{\mathbf{L}}_{\pm} |l, m\rangle = (\hat{\mathbf{L}}_{\pm} \hat{\mathbf{L}}_3 \pm \hat{\mathbf{L}}_{\pm}) |l, m\rangle = (m \pm 1) \hat{\mathbf{L}}_{\pm} |l, m\rangle , \quad (11.348)$$

resp.

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \hat{\mathbf{L}}_{\pm} |l, m\rangle = \hat{\mathbf{L}}_{\pm} \hat{\mathbf{L}}^2 |l, m\rangle = l(l+1) \hat{\mathbf{L}}_{\pm} |l, m\rangle . \quad (11.349)$$

Je-li tedy ket $\hat{\mathbf{L}}_+|l, m\rangle$ resp. $\hat{\mathbf{L}}_-|l, m\rangle$ nenulovým, potom je společným vlastním vektorem operátorů $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{L}}_3$ příslušejícím k vlastním hodnotám $l(l+1)$, $m+1$ resp. $l(l+1)$, $m-1$.

Z definice (11.335) je zřejmé, že vektor $|l, m\rangle$ je rovněž vlastním vektorem pozitivně definitního operátoru $\hat{\mathbf{L}}_1^2 + \hat{\mathbf{L}}_2^2$, příslušejícím vlastní hodnotě $l(l+1) - m^2$.

V charakteristickém podprostoru operátoru $\hat{\mathbf{L}}^2$ je tedy velikost vlastních hodnot operátoru $\hat{\mathbf{L}}_3$ shora i zdola omezena nerovností

$$m^2 \leq l(l+1) . \quad (11.350)$$

označme m_{\max} spektrální poloměr operátoru $\hat{\mathbf{L}}_3$ v tomto podprostoru. Potom z (11.348) plyne

$$\hat{\mathbf{L}}_+|l, m_{\max}\rangle = 0 . \quad (11.351)$$

Aplikací operátoru $\hat{\mathbf{L}}_-$ na obě strany této rovnosti dostaneme

$$\left(\hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{L}}_3^2 - \hat{\mathbf{L}}_3 \right) |l, m_{\max}\rangle = 0 . \quad (11.352)$$

Odtud dostáváme pro m_{\max} rovnici

$$l(l+1) - m_{\max}(m_{\max} + 1) = 0 , \quad (11.353)$$

viz (11.344), (11.345), (11.346).

Podmínce (2493) přitom vyhovuje pouze řešení

$$m_{\max} = l . \quad (11.354)$$

obdobně nalezneme, že při daném l je spektrální minimum operátoru $\hat{\mathbf{L}}_3$ rovno

$$m_{\min} = -l . \quad (11.355)$$

Spočtěme nyní normu vektoru $\hat{\mathbf{L}}_- |lm\rangle$:

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{L}}_- |l,m\rangle\|^2 &= \langle l,m | \hat{\mathbf{L}}_+ \hat{\mathbf{L}}_- |l,m\rangle = \langle l,m | (\hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{L}}_3^2 + \hat{\mathbf{L}}_3) |l,m\rangle = \\ &= l(l+1) - m(m-1), \end{aligned} \quad (11.356)$$

tj.

$$\|\hat{\mathbf{L}}_- |l,m\rangle\| = [(l+m)(l-m+1)]^{1/2}. \quad (11.357)$$

Pro $l \neq 0$ je tedy vektor $\hat{\mathbf{L}}_- |l,m\rangle$ s $m = l$ nenulovým, a tedy vektor

$$|l,l-1\rangle \equiv \frac{\hat{\mathbf{L}}_- |l,l\rangle}{\|\hat{\mathbf{L}}_- |l,l\rangle\|} \quad (11.358)$$

vyhovuje rovnicím (11.344) a (11.346) s $m = l - 1$.

Naznačeným postupem nalezneme pro všechna $m \geq 1 - l$

$$|l,m-1\rangle \equiv \frac{\hat{\mathbf{L}}_- |l,m\rangle}{\|\hat{\mathbf{L}}_- |l,m\rangle\|}. \quad (11.359)$$

Umíme tedy v každém charakteristickém podprostoru operátoru $\hat{\mathbf{L}}^2$ zkonstruovat $(2l+1)$ vlastních vektorů $|l,m\rangle$ operátoru $\hat{\mathbf{L}}_3$, příslušejících vlastním hodnotám

$$m = l, l-1, \dots, -l, \quad (11.360)$$

vycházejí z vektoru $|l,l\rangle$ odpovídajícího maximální vlastní hodnotě operátoru $\hat{\mathbf{L}}_3$ v tomto podprostoru.

Odtud je zřejmé, že číslo $(2l+1)$ musí být celé kladné, a tedy l může být pouze celým nebo polocelým nezáporným číslem.

Aplikací operátoru $\hat{\mathbf{L}}_+$ na obě strany formule (11.359) dostaneme

$$\hat{\mathbf{L}}_+ |l, m\rangle = \left\| \hat{\mathbf{L}}_+ |l, m\rangle \right\| |l, m+1\rangle, \quad (11.361)$$

kde

$$\left\| \hat{\mathbf{L}}_+ |l, m\rangle \right\| \equiv [(l-m) \cdot (l+m+1)]^{1/2} = \left\| \hat{\mathbf{L}}_- |l, m+1\rangle \right\|. \quad (11.362)$$

Nyní již bez potíží nalezneme všechny maticové elementy

$$\langle l', m' | \hat{\mathbf{L}}_k |l, m\rangle, \quad k = 1, 2, 3. \quad (11.363)$$

Z formulí (11.345), (11.359), (11.361) ihned plyne

$$\langle l', m' | \hat{\mathbf{L}}_1 |l, m\rangle = \frac{1}{2} \delta_{l'l'} \left[\left\| \hat{\mathbf{L}}_- |l, m\rangle \right\| \delta_{m', m-1} + \left\| \hat{\mathbf{L}}_+ |l, m\rangle \right\| \delta_{m', m+1} \right], \quad (11.364)$$

$$\langle l', m' | \hat{\mathbf{L}}_2 |l, m\rangle = \frac{i}{2} \delta_{l'l'} \left[\left\| \hat{\mathbf{L}}_- |l, m\rangle \right\| \delta_{m', m-1} - \left\| \hat{\mathbf{L}}_+ |l, m\rangle \right\| \delta_{m', m+1} \right], \quad (11.365)$$

$$\langle l', m' | \hat{\mathbf{L}}_3 |l, m\rangle = m \cdot \delta_{l'l'} \delta_{mm'}. \quad (11.366)$$

Povšimněme si, že

$$\langle l, m | \hat{\mathbf{L}}_{1,2} |l, m\rangle = 0, \quad (11.367)$$

tj. v každém vlastním stavu projekce impulsmomentu do vybraného směru \mathbf{n} je střední hodnota projekce impulsmomentu do roviny ortogonální na \mathbf{n} rovna nule.

($2l + 1$) – rozměrné matice $\mathbf{L}^{(l)}$ definované elementy

$$\left(\mathbf{L}^{(l)} \right)_{m'm} \equiv \langle l, m' | \hat{\mathbf{L}} |l, m\rangle, \quad (11.368)$$

představují realizace operátorů $\hat{\mathbf{L}}$ v charakteristickém podprostoru operátoru $\hat{\mathbf{L}}^2$.

Tyto matice pochopitelně vyhovují komutačním relacím (11.334) a platí

$$\hat{\mathbf{L}} |l, m\rangle = \sum_{m'=-l}^l \mathbf{L}_{m'm}^{(l)} |l, m'\rangle . \quad (11.369)$$

Pro nejnižší možné hodnoty l mají matice $\mathbf{L}_k^{(l)}$ následující tvar (hodnota indexů m' , m číslujících řádky a sloupce ubývá shora dolů a zleva doprava):

$$\mathbf{L}_k^{(0)} = 0 , \quad (11.370)$$

$$\mathbf{L}_k^{(1/2)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_k , \quad (11.371)$$

kde

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11.372)$$

jsou tzv. Pauliho matice a

$$\mathbf{L}_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11.373)$$

Definujme operátory

$$\hat{\mathbf{A}}_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{P}}_k - i \cdot \hat{\mathbf{X}}_k), \quad k = 1, 2 . \quad (11.374)$$

$$\hat{\mathbf{B}} \equiv \hat{\mathbf{A}}_2 + i \cdot \hat{\mathbf{A}}_1 . \quad (11.375)$$

Z komutačních relací mezi operátory impulsu a souřadnice nalezneme, že platí:

$$\left[\hat{\mathbf{A}}_k, \hat{\mathbf{A}}_k^+ \right] = \frac{1}{2} \left[\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{B}}^+ \right] = 1, \quad (11.376)$$

$$\left[\hat{\mathbf{A}}_1^+ \hat{\mathbf{A}}_1, \hat{\mathbf{A}}_2^+ \hat{\mathbf{A}}_2 \right] = \left[\hat{\mathbf{B}}^+ \hat{\mathbf{B}}, \sum_{k=1}^2 \hat{\mathbf{A}}_k^+ \hat{\mathbf{A}}_k \right] = 0. \quad (11.377)$$

Z formule (11.376) plyne, že spektrum operátoru $\hat{\mathbf{B}}^+ \hat{\mathbf{B}}$ resp. $\hat{\mathbf{A}}_k^+ \hat{\mathbf{A}}_k$ probíhá hodnoty 0, 2, 4, ... , resp. 0, 1, 2,
Snadno se přesvědčíme, že

$$\hat{\mathbf{L}}_3 = \hat{\mathbf{B}}^+ \hat{\mathbf{B}} - \sum_{k=1}^2 \hat{\mathbf{A}}_k^+ \hat{\mathbf{A}}_k. \quad (11.378)$$

Komutativita (11.377) pak zaručuje, že spektrum operátoru (11.378) se získá kompozicí spekter operátorů $\hat{\mathbf{B}}^+ \hat{\mathbf{B}}$ a $\sum_k \hat{\mathbf{A}}_k^+ \hat{\mathbf{A}}_k$.

Vlastní hodnoty operátoru (11.378) tedy mohou být pouze celočíselné:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (11.379)$$

Z obecně platné formule (11.360) pak ihned vidíme, že v uvažovaném případě může l nabývat pouze celých nezáporných hodnot.

Funkce

$$P_l^m(x) \equiv \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l \cdot l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l, \quad l \in \mathbf{N}_0; \quad m \in \mathbf{N}; \quad |m| \leq l \quad (11.380)$$

je tzv. **přidružená Legendreova funkce** m -tého řádu a l -tého stupně.

Pro $m = 0$ je

$$P_l^0(x) = P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l \cdot l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l . \quad (11.381)$$

Je zřejmé, že pro $m > 0$ můžeme psát

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) . \quad (11.382)$$

platí

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l - m)!}{(l + m)!} P_l^m(x) , \quad (11.383)$$

$$P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l^m(x) , \quad (11.384)$$

$$P_l^m(1) = \delta_{m0} . \quad (11.385)$$

Lze dokázat, že $P_l^m(x)$ má v intervalu $x \in (-1; 1)$ $l - |m|$ nul.

Přidružené Legendreovy funkce tří sousedních stupňů jsou spolu vázány vztahem

$$x \cdot P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} \left[(l+1-m) P_{l+1}^m(x) + (l+m) P_{l-1}^m(x) \right] . \quad (11.386)$$

Relace ortogonality

$$\int_{-1}^1 P_k^m(x) P_l^m(x) dx = 2 \frac{(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{kl} , \quad (11.387)$$

je pro $m = 0$ speciálním případem obecnějšího vzorce

$$\int P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1) P_k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_2) d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \delta_{lk}, \quad (11.388)$$

kde \mathbf{n} , \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 jsou jednotkové vektory a $d\Omega$ je element prostorového úhlu ve směru \mathbf{n} .

Pro $m > 0$, $n \geq 0$ platí rovněž relace ortogonality

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^n(x) \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{(l+m)!}{m(l-m)!} \delta_{mn}. \quad (11.389)$$

Často se s výhodou využívá toho, že

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(x) = \delta(x-1). \quad (11.390)$$

Lze dokázat, že pro libovolná komplexní čísla x , z vyhovující podmínce

$$|x| < \min \left| z \pm (z^2 - 1)^{1/2} \right| \quad (11.391)$$

platí

$$(1 - 2xz + x^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(z). \quad (11.392)$$

Výraz na levé straně se nazývá **generátorem Legendreových polynomů**.

Speciálním případem je rozvoj

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|} = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \Theta), \quad (11.393)$$

platný $\forall \frac{r}{R} < 1$, kde

$$r \equiv |\mathbf{x}|, \quad R \equiv |\mathbf{X}|, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{X} = r \cdot R \cdot \cos \Theta. \quad (11.394)$$

Pro nekladná m můžeme přidružené Legendreovy funkce vyjádřit pomocí hyperbolometrických funkcí jako

$$P_l^m(x) = (-1)^m \frac{2^m}{|m|!} (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} F\left(l+1-m, -l-m, 1-m; \frac{1-x}{2}\right). \quad (11.395)$$

Speciálně pro Legendreovy polynomy odtud dostaneme

$$P_l(x) = F\left(l+1, -l, 1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (11.396)$$

Pravá strana má smysl i pro komplexní l a x .

V tomto obecném případě je formule (11.396) definicí

Legendreových funkcí prvního druhu.

Jako funkce komplexní proměnné z je $P_\lambda(z)$ analytickou funkcí v komplexní polorovině s vyjmutou reálnou poloosou $(-\infty; -1)$.

Pomocí Legendreových funkcí definujeme **kulové funkce**

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \equiv (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \vartheta) \exp(im\varphi). \quad (11.397)$$

Ty tvoří ortonormální bázi na jednotkové kouli, tj.

$$\int Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \cdot Y_{l'm'}(\mathbf{n}) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (11.398)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\mathbf{n}) \cdot Y_{lm}^*(\mathbf{n}') = \delta^{(2)}(\mathbf{n} - \mathbf{n}'). \quad (11.399)$$

Impulsmoment klasické částice s polohovým vektorem \mathbf{X} a impulsem \mathbf{P} je, jak víme

$$\mathbf{B} = \mathbf{X} \times \mathbf{P} \quad (11.400)$$

což zapsáno ve složkách znamená

$$B_j = \varepsilon_{jkl} X_k P_l ; \quad j = 1, 2, 3 . \quad (11.401)$$

Podle principu korespondence jsou komponentám impulsmomentu přiřazeny operátory

$$\hat{\mathbf{B}}_j \equiv \varepsilon_{jkl} \hat{\mathbf{X}}_k \hat{\mathbf{P}}_l ; \quad j = 1, 2, 3 . \quad (11.402)$$

Vzhledem ke komutativitě samosdružených operátorů $\hat{\mathbf{X}}_k, \hat{\mathbf{P}}_l$ (pro $k \neq l$) jsou také operátory $\hat{\mathbf{B}}_j$ samosdružené.

Pro zjednodušení zápisu nyní zavedeme operátory

$$\hat{\mathbf{L}}_j \equiv \frac{\hat{\mathbf{B}}_j}{\hbar} . \quad (11.403)$$

Experimentální data ukazují, že všechny tři komponenty x_1, x_2, x_3 průvodiče \mathbf{x} jsou současně měřitelné a že jejich hodnota může ležet kdekoli v intervalu $(-\infty, \infty)$.

Odpovídající operátory musí proto komutovat a mít spojité spektrum probíhající tentýž interval.

To znamená, že

$$[\hat{\mathbf{X}}_j, \hat{\mathbf{X}}_k] = 0, \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (11.404)$$

a pro každé $x_j \in (-\infty, \infty)$ existují řešení rovnic

$$\hat{\mathbf{X}}_j |x_1, x_2, x_3\rangle = x_j |x_1, x_2, x_3\rangle, \quad j = 1, 2, 3, \quad (11.405)$$

neboli krátce

$$\hat{\mathbf{X}}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle, \quad (11.406)$$

vyhovující normalizační podmínce

$$\langle x_1, x_2, x_3 | x'_1, x'_2, x'_3 \rangle = \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3), \quad (11.407)$$

tj.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (11.408)$$

kde δ je Diracova funkce.

Z kvantovací podmínky (11.404) plyne, že operátory jednotlivých komponent impulsu $\hat{\mathbf{P}}_j$ ($j = 1, 2, 3$) musí splňovat komutační relace

$$[\hat{\mathbf{P}}_j, \hat{\mathbf{P}}_k] = 0 \quad (11.409)$$

$$[\hat{\mathbf{P}}_j, \hat{\mathbf{X}}_k] = -i\hbar\delta_{jk}. \quad (11.410)$$

Pod \mathbf{P} je přitom nutno rozumět impuls kanonicky sdružený k \mathbf{X} .

Z komutačních relací (11.404), (11.409), (11.410) snadno nalezneme, že platí

$$[\hat{\mathbf{X}}_j, \hat{\mathbf{L}}_k] = [\hat{\mathbf{L}}_j, \hat{\mathbf{X}}_k] = i\epsilon_{jkl}\hat{\mathbf{X}}_l, \quad (11.411)$$

$$[\hat{\mathbf{P}}_j, \hat{\mathbf{L}}_k] = [\hat{\mathbf{L}}_j, \hat{\mathbf{P}}_k] = i\epsilon_{jkl}\hat{\mathbf{P}}_l, \quad (11.412)$$

tj.

$$[\hat{\mathbf{L}}_j, \hat{\mathbf{L}}_k] = i\epsilon_{jkl}\hat{\mathbf{L}}_l. \quad (11.413)$$

Pod pojmem operátor impulsmomentu (měřeného v jednotkách \hbar) rozumíme

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \equiv \hat{\mathbf{L}}_1^2 + \hat{\mathbf{L}}_2^2 + \hat{\mathbf{L}}_3^2 . \quad (11.414)$$

Díky komutačním relacím (11.413) platí

$$\left[\hat{\mathbf{L}}_j, \hat{\mathbf{L}}^2 \right] = 0 . \quad (11.415)$$

Z formule (11.413) je zřejmé, že komponenty impulsmomentu nejsou navzájem kompatibilní.

Na druhé straně, vzorec (11.415) zaručuje současnou měřitelnost kterékoli komponenty impulsmomentu s jeho kvadrátem.

V Hilbertově prostoru \mathcal{H} tedy existuje báze tvořená společnými vlastními vektory operátorů $\hat{\mathbf{L}}^2$ a $\hat{\mathbf{L}}_j$, kde j je jedno z čísel 1, 2, 3.

Určení jejich spektra provedeme v X-reprezentaci, kde

$$\hat{\mathbf{L}}_j = -i\varepsilon_{jkl}x_k \frac{\partial}{\partial x_l} . \quad (11.416)$$

Později uvidíme, že existuje úzká souvislost mezi operátory impulsmomentu a generátory rotací.

Nepřekvapuje tedy, že řešení problému vlastních hodnot se značně zjednoduší, přejdeme-li ke sférickým souřadnicím:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta , \\ x_2 &= r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \vartheta , \\ x_3 &= r \cdot \cos \vartheta . \end{aligned} \quad (11.417)$$

Standardním postupem nalezneme

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}_1 &= i \cdot \left(\sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \hat{\mathbf{L}}_2 &= i \cdot \left(-\cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \hat{\mathbf{L}}_3 &= -i \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\end{aligned}\quad (11.418)$$

a odtud

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = - \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (11.419)$$

Fáze kulových funkcí (11.397) jsou nyní zvoleny tak, že je respektována **Condonova – Shortleyova konvence**

$$\hat{\mathbf{L}}_{\pm} \cdot Y_{lm}(\mathbf{n}) = \left\| \hat{\mathbf{L}}_{\pm} |l, m\rangle \right\| Y_{l, (m \pm 1)}(\mathbf{n}), \quad (11.420)$$

kde

$$\hat{\mathbf{L}}_{\pm} \equiv \hat{\mathbf{L}}_1 \pm i \cdot \hat{\mathbf{L}}_2 = \exp(\pm i \cdot \varphi) \left[\pm \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cdot \cot \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]. \quad (11.421)$$

Při této volbě fází také platí

$$Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{l, -m}(\vartheta, \varphi). \quad (11.422)$$

Kulové funkce mají jednoduché transformační vlastnosti vzhledem k inverzi souřadných os.

Definujeme operátor $\hat{\mathbf{P}}_x$ tak, že pro libovolnou funkci $f(x, y, z)$ platí

$$\hat{\mathbf{P}}_x f(x, y, z) = f(-x, y, z). \quad (11.423)$$

Operátory $\hat{\mathbf{P}}_y, \hat{\mathbf{P}}_z$ mají analogický význam.
Speciálně pro sférické úhly platí:

$$\hat{\mathbf{P}}_x \varphi = \pi - \varphi \pmod{2\pi} , \quad (11.424)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_y \varphi = 2\pi - \varphi \pmod{2\pi} , \quad (11.425)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_z \varphi = \varphi , \quad (11.426)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_x \vartheta = \vartheta , \quad (11.427)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_y \vartheta = \vartheta , \quad (11.428)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_z \vartheta = \pi - \vartheta . \quad (11.429)$$

Pomocí formulí (11.383), (11.384) snadno nalezneme

$$\hat{\mathbf{P}}_x \cdot Y_{lm}(\mathbf{n}) = Y_{l,-m}(\mathbf{n}) , \quad (11.430)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_y \cdot Y_{lm}(\mathbf{n}) = (-1)^m \cdot Y_{l,-m}(\mathbf{n}) , \quad (11.431)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_z \cdot Y_{lm}(\mathbf{n}) = (-1)^{l+m} \cdot Y_{lm}(\mathbf{n}) , \quad (11.432)$$

Prostorové inverzi všech tří souřadných os odpovídá operátor

$$\hat{\mathbf{P}} \equiv \hat{\mathbf{P}}_x \hat{\mathbf{P}}_y \hat{\mathbf{P}}_z . \quad (11.433)$$

Z formulí (11.430), (11.431), (11.432) vidíme, že

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot Y_{lm}(\mathbf{n}) = (-1)^l \cdot Y_{lm}(\mathbf{n}) . \quad (11.434)$$

Shrňme nyní nejdůležitější z výše nalezených výsledků:

Dvojice operátorů $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{L}}_3$ tvoří úplnou soustavu komutujících operátorů v prostoru \mathcal{H}_Ω funkcí bodů na jednotkové kouli.

Spektrum operátoru $\hat{\mathbf{L}}^2$ je dáno jeho vlastními hodnotami $l(l+1)$, kde l probíhá všechna přirozená čísla včetně nuly.

Spektrum operátoru $\hat{\mathbf{L}}_3$ je dáno množinou všech celých čísel.

V prostoru \mathcal{H}_Ω existuje $(2l+1)$ nezávislých vlastních vektorů operátoru $\hat{\mathbf{L}}^2$ příslušejících vlastní hodnotě $l(l+1)$.

Tyto nezávislé vektory je vždy možno zvolit tak, že jsou současně vlastními vektory operátoru $\hat{\mathbf{L}}_3$ příslušejícími vlastním hodnotám

$$m = -l, -l+1, \dots, l. \quad (11.435)$$

10) Konstrukce kubického subchronoru

a) Grupa rotací

Uvažujme dvě navzájem splývající ortogonální soustavy souřadné, a natočme druhou z nich vůči první o R kolem počátku.

Označme (x_1, x_2, x_3) souřadnice bodu pevně spojeného s druhou soustavou.

Jeho souřadnicemi vůči první soustavě budou

$$x_j(R) = \sum_{k=1}^3 R_{jk} x_k \quad ; j = 1, 2, 3, \quad (11.436)$$

kde koeficienty R_{jk} závisejí na R .

Vektor

$$\mathbf{X}(R) = \sum_{j=1}^3 x_j(R) \mathbf{e}_j \quad (11.437)$$

tedy vznikne z vektoru

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}_j \quad (11.438)$$

rotací R .

Transformaci (11.436) lze snadno vyjádřit v maticovém tvaru:

$$\hat{\mathbf{X}}(R) = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{X} . \quad (11.439)$$

Snadno se přesvědčíme, že operátor $\hat{\mathbf{R}}$ je ortogonální a unimodulární. Libovolná rotace kolem počátku je ekvivalentní rotaci kolem nějaké osy procházející počátkem.

Otočení o úhel φ kolem osy určené jednotkovým vektorem \mathbf{n} označíme $R(\mathbf{n}, \varphi)$.

Pootočením kolem jednotlivých souřadných os odpovídají transformační matice

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_1, \varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_2, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_3, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11.440)$$

Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_j, \varphi) = \exp(-i \cdot \varphi \cdot \mathbf{M}_j) , \quad (11.441)$$

kde

$$\mathbf{M}_j \equiv i \frac{d}{d\varphi} \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_j, 0), \quad (11.442)$$

tj.

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.443)$$

což můžeme stručně zapsat jako

$$(M_j)_{kl} = -i\epsilon_{jkl}. \quad (11.444)$$

Pootočení o úhel φ kolem libovolné osy \mathbf{n} odpovídá operátor

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{n}, \varphi) \equiv \exp(-i \cdot \varphi \cdot \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{M}}) \equiv \exp\left(-i \cdot \varphi \cdot \sum_{j=1}^3 n_j \mathbf{M}_j\right), \quad (11.445)$$

kde n_j jsou komponenty jednotkového vektoru \mathbf{n} ve výchozí soustavě souřadné.

Všechny možné rotace tvoří grupu zvanou **grupa rotací** třírozměrného prostoru.

Protože libovolnou třírozměrnou ortogonální unimodulární matici lze zapsat ve tvaru (11.445), jedná se o tříparametrickou kompaktní Lieovu grupu **Special ortogonal (SO(3))**.

Matice

$$-i \cdot \mathbf{M}_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (11.446)$$

jsou jejími generátory.

Z formule (11.444) zjistíme, že matice (11.443) vyhovují komutačním relacím pro impulsmoment

$$[\mathbf{M}_j, \mathbf{M}_k] = i\epsilon_{jkl} \mathbf{M}_l. \quad (11.447)$$

S Lieovou algebrou $SO(3)$ jsme se tedy již v dostatečné míře seznámili v předchozí kapitole.

Povšimněme si, že strukturními konstantami $SO(3)$ jsou

$$C_{jk}^l = \varepsilon_{jkl} \quad (11.448)$$

a

$$\eta_{jk} = -2\delta_{jk}, \quad (11.449)$$

tj. Levi-Civitův a Metrický tenzor. **Casimirův operátor**

$$\hat{C} \equiv \sum_{kl} \eta^{kl} \mathbf{M}_k \mathbf{M}_l, \quad (11.450)$$

kde η^{kl} jsou elementy matice $\boldsymbol{\eta}^{-1}$, pak není ničím jiným, než dvojnásobkem kvadrátu impulsmomentu.

Z uvedeného je zřejmé, že když $\hat{\mathbf{L}}_k$ jsou operátory impulsmomentu v Hilbertově prostoru \mathcal{H} , potom operátory

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varphi}) = \exp(-i \cdot \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{L}}), \quad (11.451)$$

realizují v \mathcal{H} unitární reprezentaci grupy $SO(3)$.

Doplňme $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{L}}_3$ operátory komutujícími s $\hat{\mathbf{L}}$ na úplnou soustavu komutujících operátorů.

Ortonormální bázi utvoříme z odpovídajících vlastních vektorů

$$|l, m, a\rangle. \quad (11.452)$$

Všechny níže uváděné maticové elementy jsou diagonální v a a na hodnotě tohoto parametru nezávislé.

Od explicitního uvádění parametru a proto v dalším upustíme.

Z formule (11.451) vidíme, že

$$\langle l, m | \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{n}, \varphi) | l', m' \rangle = \delta_{ll'} D_{mm'}^{(l)}(\mathbf{n}, \varphi), \quad (11.453)$$

kde $(2l + 1)$ -rozměrná matice

$$\mathbf{D}^{(l)}(\mathbf{n}, \varphi) \equiv \exp(-i \cdot \varphi \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}^{(l)}) \quad (11.454)$$

tvoří unitární ireducibilní reprezentaci grupy $\mathbf{SO}(3)$.

Necháme-li l probíhat všechna celá a polocelá nezáporná čísla, obdržíme všechny unitární reprezentace grupy rotací.

Pro libovolné pootočení kolem třetí souřadné osy z formule (11.454) dostáváme

$$D_{mm'}^{(l)}(\mathbf{e}_3, \varphi) = \delta_{mm'} \exp(-i \cdot m \cdot \varphi), \quad (11.455)$$

a tedy

$$D_{mm'}^{(l)}(\mathbf{e}_3, \varphi + 2\pi) = \exp(-2\pi \cdot i \cdot m) \cdot D_{mm'}^{(l)}(\mathbf{e}_3, \varphi). \quad (11.456)$$

Uvědomíme-li si, že při polocelém resp. celém l je také m polocelé resp. celé, vidíme, že platí

$$\mathbf{D}^{(l)}(\mathbf{e}_3, \varphi + 2\pi) = (-1)^{2l} \cdot \mathbf{D}^{(l)}(\mathbf{e}_3, \varphi). \quad (11.457)$$

Transformace $R(\mathbf{e}_3, \varphi + 2\pi)$ je však identická s transformací $R(\mathbf{e}_3, \varphi)$ takže matice (11.454) představují pro polocelá l dvojnásobně reprezentace grupy $\mathbf{SO}(3)$.

Jejich existence je odrazem dvojnásobné souvislosti grupy $\mathbf{SO}(3)$.

Úlohu univerzální pokrývací grupy v tomto případě hraje grupa $\mathbf{SU}(2)$.

Nyní ukážeme jakým způsobem je realizován homomorfismus

$$\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3). \quad (11.458)$$

Libovolnou matici $\mathbf{U} \in \mathbf{SU}(2)$ lze zapsat ve tvaru

$$\hat{U}(\mathbf{n}, \varphi) = \exp\left(-i \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \cdot \frac{\varphi}{2}\right), \quad \varphi \in \langle 0; 4\pi \rangle. \quad (11.459)$$

Jestliže elementu $\mathbf{U} \in SU(2)$ odpovídá transformace

$$\left(\xi^j\right)' = \sum_{k=1}^2 U_k^j \xi^k, \quad j = 1, 2, \quad (11.460)$$

kde U_k^j je (j, k) -tý element matice (11.459), pak veličiny ξ^1, ξ^2 jsou **kontravariantními komponentami spinoru**.

Definujme

$$x_1 \equiv \frac{1}{2} \left[(\xi^2)^2 - (\xi^1)^2 \right], \quad x_2 \equiv \frac{1}{2i} \left[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \right], \quad x_3 \equiv \xi^1 \xi^2. \quad (11.461)$$

Snadno se přesvědčíme, že transformaci (11.460) spinoru odpovídá

$$x_j \rightarrow x'_j = \sum_{k=1}^3 R_{jk}(\mathbf{n}, \varphi) x_k. \quad (11.462)$$

Veličiny (11.461) se tedy transformují při pootočení o úhel φ kolem osy \mathbf{n} jako souřadnice vektoru.

Tím jsme dokázali monomorfismus zobrazení (11.458).

Vzhledem k tomu, že

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{n}, \varphi + 2\pi) = \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{n}, \varphi) \quad (11.463)$$

ale

$$\hat{U}(\mathbf{n}, \varphi + 2\pi) = -\hat{U}(\mathbf{n}, \varphi), \quad (11.464)$$

není toto zobrazení izomorfním, ale pouze homomorfním. ☺

Označme $\hat{\mathbf{R}}(\alpha, \beta, \gamma)$ operátor přechodu k soustavě vzniklé z výchozí následující sekvencí pootočení:

- 1) kolem osy \mathbf{e}_3 o úhel $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$
- 2) kolem osy \mathbf{e}'_2 o úhel $\beta \in \langle 0; \pi \rangle$
- 3) kolem osy \mathbf{e}''_3 o úhel $\gamma \in \langle 0; 2\pi \rangle$

tj.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(\alpha, \beta, \gamma) &\equiv \exp(-i \cdot \gamma \cdot \mathbf{e}''_3 \cdot \hat{\mathbf{M}}) \cdot \exp(-i \cdot \beta \cdot \mathbf{e}'_2 \cdot \hat{\mathbf{M}}) \cdot \exp(-i \cdot \alpha \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{M}}) = \\ &= \exp(-i \cdot \alpha \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{M}}) \cdot \exp(-i \cdot \beta \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{M}}) \cdot \exp(-i \cdot \gamma \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{M}}) = \\ &= \exp(-i \cdot \alpha \cdot \mathbf{M}_3) \cdot \exp(-i \cdot \beta \cdot \mathbf{M}_2) \cdot \exp(-i \cdot \gamma \cdot \mathbf{M}_3). \end{aligned} \quad (11.465)$$

Díky komutační relaci (11.447) se totiž matice \mathbf{M}_k transformují jako komponenty vektoru, tj.

$$\hat{\mathbf{R}}\mathbf{M}_k\hat{\mathbf{R}}^{-1} = \sum_l R_{lk}\mathbf{M}_l, \quad (11.466)$$

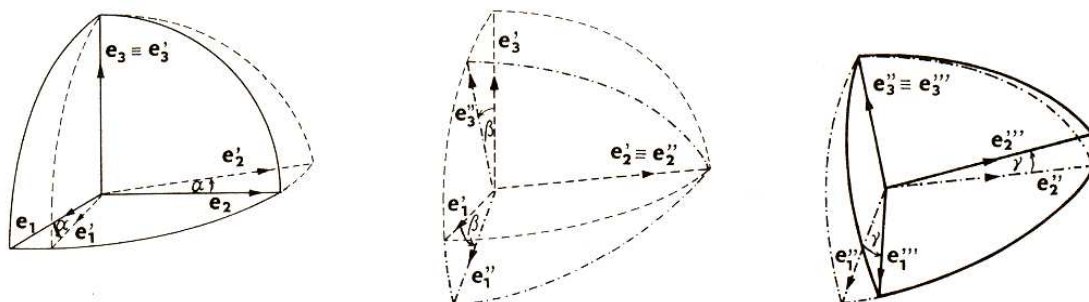
což lze ekvivalentně vyjádřit jako

$$\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{M}} \cdot \hat{\mathbf{R}}^{-1} = \mathbf{n}' \cdot \hat{\mathbf{M}}, \quad (11.467)$$

kde \mathbf{n}' je vektor vzniklý natočením R vektoru \mathbf{n} , tj.

$$n'_j = \sum_k R_{jk}n_k. \quad (11.468)$$

Obr. 11.28



Z formule (11.467) ihned plyne, že také

$$\hat{\mathbf{R}} \cdot \exp(-i \cdot \varphi \cdot \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{M}}) \hat{\mathbf{R}}^{-1} = \exp(-i \cdot \varphi \cdot \mathbf{n}' \cdot \hat{\mathbf{M}}), \quad (11.469)$$

a tedy speciálně pro Eulerovy rotace

$$\exp(-i \cdot \beta \cdot \mathbf{e}'_2 \cdot \hat{\mathbf{M}}) = \exp(-i \cdot \alpha \cdot \mathbf{M}_3) \exp(-i \cdot \beta \cdot \mathbf{M}_2) \exp(i \cdot \alpha \cdot \mathbf{M}_3) \quad (11.470)$$

a

$$\begin{aligned} \exp(-i \cdot \gamma \cdot \mathbf{e}''_3 \cdot \hat{\mathbf{M}}) &= \exp(-i \cdot \alpha \cdot \mathbf{M}_3) \cdot \exp(-i \cdot \beta \cdot \mathbf{M}_2) \cdot \exp(-i \cdot \gamma \cdot \mathbf{M}_3) \cdot \\ &\cdot \exp(i \cdot \beta \cdot \mathbf{M}_2) \cdot \exp(i \cdot \alpha \cdot \mathbf{M}_3). \end{aligned} \quad (11.471)$$

Po dosazení z posledních dvou formulí do prvního řádku výrazu (11.465) obdržíme vskutku výraz na pravé straně (11.465), čímž je rovnost (11.465) dokázána. ☺

Rotace (11.465) je v Hilbertově prostoru \mathcal{H} reprezentována unitárním operátorem

$$\hat{\mathbf{D}}(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \exp(-i \cdot \alpha \cdot \hat{\mathbf{L}}_3) \cdot \exp(-i \cdot \beta \cdot \hat{\mathbf{L}}_2) \cdot \exp(-i \cdot \gamma \cdot \hat{\mathbf{L}}_3) \quad (11.472)$$

(srov. (11.451)).

Přitom (srov. (11.453))

$$\langle l, m | \hat{\mathbf{D}}(\alpha, \beta, \gamma) | l', m' \rangle = \delta_{ll'} D_{mm'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (11.473)$$

a $(2l + 1)$ -rozměrná matice

$$\mathbf{D}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{D}^{(l)}(\mathbf{e}_3, \alpha) \cdot \mathbf{D}^{(l)}(\mathbf{e}_2, \beta) \cdot \mathbf{D}^{(l)}(\mathbf{e}_3, \gamma) . \quad (11.474)$$

Rovnost (11.474) můžeme zapsat ve složkách jako

$$D_{mm'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-i \cdot \alpha \cdot m) \cdot d_{mm'}^{(l)}(\beta) \cdot \exp(-i \cdot \gamma \cdot m') , \quad (11.475)$$

kde

$$d_{mm'}^{(l)} \equiv \langle l, m | \exp(-i \cdot \beta \cdot \hat{\mathbf{L}}_2) | l, m' \rangle . \quad (11.476)$$

Díky realitě maticových elementů operátoru $i \cdot \hat{\mathbf{L}}_2$ je také unitární matice $\mathbf{d}^{(l)}(\beta)$ reálnou a tedy ortogonální.

Platí tedy

$$\left[\mathbf{d}^{(l)}(\beta) \right]^T = \left[\mathbf{d}^{(l)}(\beta) \right]^{-1} . \quad (11.477)$$

Na druhé straně víme, že

$$\left[\exp(-i \cdot \beta \cdot \hat{\mathbf{L}}_2) \right]^{-1} = \exp(i \cdot \beta \cdot \hat{\mathbf{L}}_2) , \quad (11.478)$$

tedy

$$\left[\mathbf{d}^{(l)}(\beta) \right]^{-1} = \mathbf{d}^{(l)}(-\beta) . \quad (11.479)$$

Pro funkce $d_{mm'}^{(l)}(\beta)$ tak dostáváme vztah

$$d_{mm'}^{(l)}(-\beta) = d_{m'm}^{(l)}(\beta) . \quad (11.480)$$

Rotace $R(\mathbf{e}_2, \pi/2) \cdot R(\mathbf{e}_3, \pi/2)$ přenesou vektor ležící ve směru osy \mathbf{e}_2 do směru osy \mathbf{e}_3 .

Z formule (11.469) pak plyne, že

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_2, \beta) = \hat{\mathbf{R}}\left(\mathbf{e}_3, -\frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{\mathbf{R}}\left(\mathbf{e}_2, -\frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_3, \beta) \cdot \hat{\mathbf{R}}\left(\mathbf{e}_2, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{\mathbf{R}}\left(\mathbf{e}_3, \frac{\pi}{2}\right) , \quad (11.481)$$

a tedy

$$\mathbf{d}^{(l)}(\beta) = \mathbf{D}^{(l)}\left(-\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) \cdot \mathbf{d}^{(l)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{D}^{(l)}(\beta, 0, 0) \cdot \mathbf{d}^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{D}^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) \quad (11.482)$$

Ze složkového zápisu této maticové rovnosti dostáváme pro funkce $d_{mm'}^{(l)}(\beta)$ vyjádření

$$d_{mm'}^{(l)}(\beta) = i^{m-m'} \cdot \sum_{m''=-l}^l \exp(-i \cdot \beta \cdot m'') \cdot d_{m''m}^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot d_{m''m'}^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) . \quad (11.483)$$

Formule (11.483) umožňuje výpočet matice $\mathbf{d}^{(l)}(\beta)$ pro libovolné β , známe-li konstantní matici $\mathbf{d}^{(l)}(\pi/2)$.

Navíc z ní ihned vidíme, že platí

$$d_{m'm}^{(l)}(\beta) = (-1)^{m-m'} \cdot d_{mm'}^{(l)}(\beta) . \quad (11.484)$$

Ze vztahu ke grupě $SU(2)$ je možno odvodit vzorec

$$d_{mm'}^{(l)}(\beta) = (-1)^{m-m'} \cdot \left[\frac{(l+m)! \cdot (l-m)!}{(l+m')! \cdot (l-m')!} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2l} \cdot \sum_n \left[(-1)^n \cdot \binom{l+m'}{n} \cdot \binom{l-m'}{l-m-n} \cdot \left(\tan \frac{\beta}{2} \right)^{m-m'+2n} \right] ,$$

(11.485)

kde suma probíhá přes všechna n , pro něž mají kombinační symboly smysl.

Speciálně odtud dostáváme

$$d_{mm'}^{(l)}(\pi) = (-1)^{l+m} \cdot d_{m,-m'} . \quad (11.486)$$

Pomocí poslední formule se snadno dokáže relace

$$d_{mm'}^{(l)}(\beta) = d_{-m',-m}^{(l)}(\beta) . \quad (11.487)$$

Z formulí (11.475), (11.484), (11.487) vidíme, že platí

$$D_{-m,-m'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{m-m'} \cdot \left[D_{mm'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) \right]^* . \quad (11.488)$$

Nyní je na čase, abychom výsledky získané v posledních dvou kapitolách přeložili do fyzikálního jazyka:

Výsledkem měření kvadrátu impulsmomentu může být pouze některá z hodnot $\hbar^2 l(l+1)$, kde $l \in \mathbb{N}_0$.

Výsledkem měření libovolné komponenty impulsmomentu může být pouze celočíselný násobek \hbar .

Jestliže při měření kvadrátu impulsmomentu byla nalezena hodnota $\hbar^2 l(l+1)$, potom výsledkem simultánního měření jeho jedné komponenty může být pouze některá z $(2l+1)$ hodnot $\hbar \cdot m$, kde $m = l, l-1, \dots, -l$.

Tento fakt souvisí s tzv. **prostorovým kvantováním**.

Impulsmoment \mathbf{B} pro nějž platí

$$\|\mathbf{B}\| = \hbar \cdot [l(l+1)]^{1/2} \quad (11.489)$$

může s daným směrem \mathbf{n} svírat pouze úhly Θ_m , pro nějž platí

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \hbar \cdot m ; \quad m = -l, \dots, l , \quad (11.490)$$

tj.

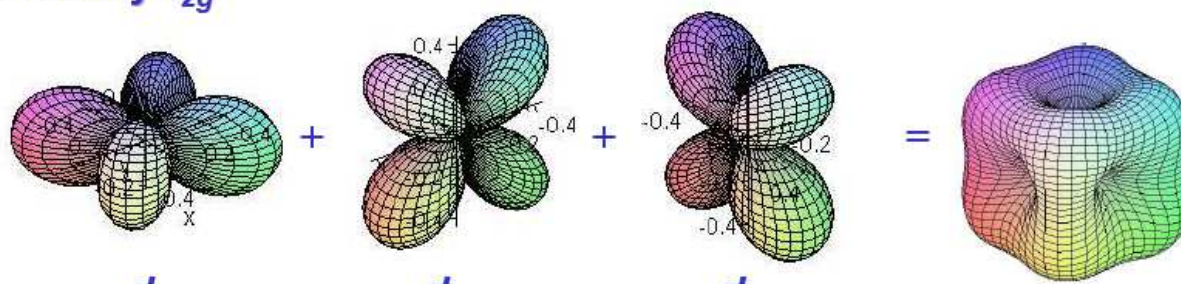
$$\cos \Theta_m = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}. \quad (11.491)$$

Vektor \mathbf{B} rotuje kolem vektoru \mathbf{n} opisujíc kuželovou plochu s vrcholovým úhlem 2Θ .

Z tohoto důvodu je střední hodnota projekce impulsmomentu do libovolného směru kolmého k \mathbf{n} nulová.

Pro kvantion ($l = 1, m = 1$) má vrcholový úhel velikost $\pi/2$.

Obr. 11.29

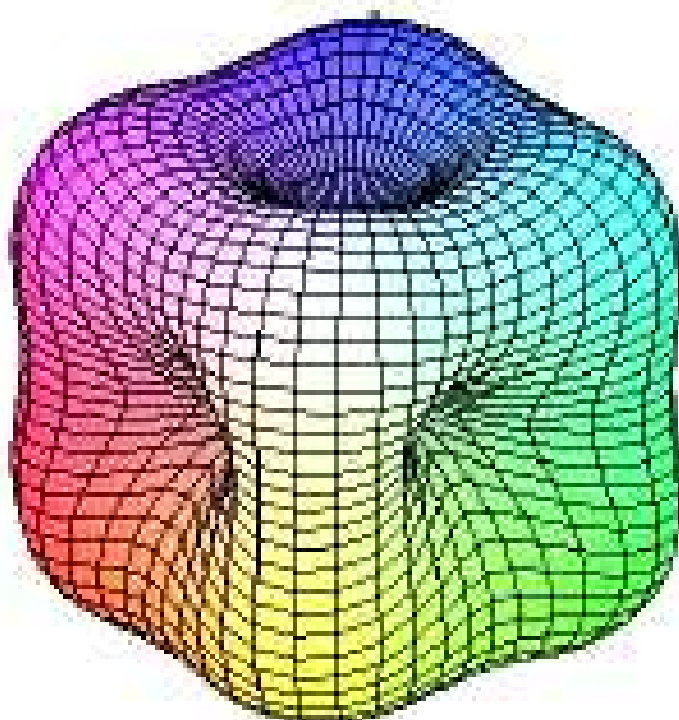
orbitaly t_{2g} 

To ukazuje na možnou existenci nějakého druhu subchronoru, nacházejícího se kdesi uvnitř sférického chronoru, vykazujícího zjevnou hexaedrickou symetrii.

Proto si jej zatím pracovníčně nazveme **kubickým subchronorem**.

V následující sekci podrobněji prozkoumáme možnost existence tohoto útvaru.

Obr. 11.30



b) Spinorová grupa

Algebra $SO(n)$ je lineárním obalem antisymetrických matic $\mathbf{e}_{ij} = -\mathbf{e}_{ji}$, které mají jednotku na místě (i, j) a minus jednotku na (j, i) , a tak splňují komutační relace

$$[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{kl}] = \delta_{jk} \mathbf{e}_{il} - \delta_{jl} \mathbf{e}_{ik} + \delta_{il} \mathbf{e}_{jk} - \delta_{ik} \mathbf{e}_{jl} . \quad (11.492)$$

Není těžké nahlédnout, že tytéž komutační relace budou splňovat matice Γ_{ij} , které získáme jako

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{4} (\Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i) , \quad (11.493)$$

pokud matice Γ_i navzájem antikomutují a čtvercem každé z nich je jednotková matice \mathbf{E} , tj. platí

$$\Gamma_i \Gamma_j + \Gamma_j \Gamma_i = 2\delta_{ij} \mathbf{E} . \quad (11.494)$$

Jsou tedy **Diracovými γ -maticemi pro eukleidovský prostor.**

Takovéto matice lze získat např. tenzorovými součiny ($n \bmod 2$)

Pauliho matic rozměru 2×2 , tedy maticemi rozměru

$$2^{(n \bmod 2)} \times 2^{(n \bmod 2)}.$$

Společně s Pauliho maticemi budou i tyto jejich tenzorové součiny hermitovské ve všech ortonormálních bázích, z čehož je zřejmá antihermitovost Γ_{ij} .

Explicitně lze psát

$$\Gamma_{2i-1} = (\boldsymbol{\sigma}_3)^{\otimes(i-1)} \otimes \boldsymbol{\sigma}_1 \otimes (\mathbf{E}_2)^{\otimes[(n \bmod 2)-i]}, \quad (11.495)$$

$$\Gamma_{2i} = (\boldsymbol{\sigma}_3)^{\otimes(i-1)} \otimes \boldsymbol{\sigma}_2 \otimes (\mathbf{E}_2)^{\otimes[(n \bmod 2)-i]}, \quad (11.496)$$

$$\Gamma_{2m+1} = (\boldsymbol{\sigma}_3)^{\otimes m} \quad \text{pro } n = 2m + 1, \quad (11.497)$$

kde \mathbf{E}_2 zde značí jednotkovou matici rozměru 2×2 .

Zároveň vidíme, že jsme získali co jsme chtěli, neboť zatímco pro generátory \mathbf{e}_{ij} grupy $SO(n)$ bylo nejmenší kladné číslo φ , pro které

$$\exp(\varphi \cdot \mathbf{e}_{ij}) = \mathbf{E} \quad (11.498)$$

rovno 2π , u matic Γ_{ij} je to 4π (tedy až rotací o 4π dostaneme jednotkový prvek grupy).

Pro lepší názornost si lze operátory Γ_k představit jako kombinace kreačních b_k^* a anihilačních b_k operátorů pro $k = 1, \dots, l$ a $Spin(2l - 1)$, operátory Γ_{2k} pak jako kombinace kreačních a anihilačních operátorů pro $k = l$ a $Spin(2l)$.

$$\Gamma_{2k-1} = (b_k + b_k^*), \quad (11.499)$$

$$\Gamma_{2k} = i(b_k - b_k^*).$$

Tyto operátory splňují relace

$$\begin{aligned} \{b_j, b_k^*\} &= \delta_{jk}, \\ \{b_j, b_k\} &= \{b_j^*, b_k^*\} = 0, \\ b_k |0\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (11.500)$$

kde $\{a, b\} = ab + ba$ je antikomutátor a $|0\rangle$ je vakuum – základní prvek báze, pomocí něhož vytváříme ostatní, působením kreačních operátorů $b_1^* b_2^* |0\rangle \dots$.

Snadno zkonstruujeme rovnost

$$\{\Gamma_j, \Gamma_k\} = 2\delta_{jk}. \quad (11.501)$$

Operátory Γ_{ij} pak převádějí bosonové stavy na bosonové a fermionové stavy na fermionové (bosonové stavy vznikají působením sudého počtu operátorů na vakuum).

U $Spin(2l - 1)$ jsou pak bosonové a fermionové prostory ekvivalentní, protože je lze na sebe vzájemně převádět operátorem Γ_{2k} , který komutuje se všemi Γ_{ij} pro $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, 2l - 1\}$.

Proto má grupa $Spin(2l - 1)$ jen jednu fundamentální reprezentaci o dimenzi 2^{l-1} .

(Ponecháme čtenáři jako cvičení dokázat, že bosonový a fermionový prostor tvoří vzájemně komplexně sdružené reprezentace).

Operátor chiralita γ je součinem všech Γ matic

$$\gamma = i^{(n \bmod 2)} \cdot \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdot \dots \cdot \Gamma_n. \quad (11.502)$$

U lichého n , kde nehraje chiralita takovou roli, neboť je jen jedna spinorová reprezentace, je otázkou konvence, zda vše ještě vynásobíme Γ_{n+1} .

Mocninu imaginární jednotky jsme napsali proto, aby byl γ hermitovský a jeho čtvercem byl jednotkový operátor, tj. aby jeho vlastní hodnoty byly ± 1 .

Nyní je pomalu na čase, abychom vysvětlili kosmetický rozdíl mezi grupou $SO(n)$ a $Spin(n)$.

Ekvivalencí dvou rotování $\hat{\mathbf{R}}_{(0)}$ a $\hat{\mathbf{R}}_{(1)}$ mějme na mysli fakt, že existuje spojitě zobrazení

$$\{v \mapsto \hat{\mathbf{R}}_v\} : \langle 0,1 \rangle \rightarrow P, \quad (11.503)$$

kde P je **prostor rotování**, takové, že

$$\forall v \in \langle 0,1 \rangle : \hat{\mathbf{R}}_v(1) = \hat{\mathbf{R}}_0(1), \hat{\mathbf{R}}_{(0)}(t) = \hat{\mathbf{R}}_0(t), \hat{\mathbf{R}}_{(1)}(t) = \hat{\mathbf{R}}_1(t). \quad (11.504)$$

Jsou ekvivalentní, pokud lze plynule přejít od jednoho rotování ke druhému.

Nutnou podmínkou ekvivalence je rovnost koncových matic

$$\hat{\mathbf{R}}_{(0)}(1) = \hat{\mathbf{R}}_{(1)}(1).$$

Na rotováních zavedeme rozumnou binární operaci.

$$[\hat{\mathbf{R}}_0 \cdot \hat{\mathbf{R}}_1](t) = \begin{cases} \hat{\mathbf{R}}_0(2t) & \text{pro } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \hat{\mathbf{R}}_0(1) \cdot \hat{\mathbf{R}}_1(2t-1) & \text{pro } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (11.505)$$

(Polovinu času provádíme dvojnásobně zrychlenou rotaci $\hat{\mathbf{R}}_0$ a druhou polovinu $\hat{\mathbf{R}}_1$).

Jelikož $[\hat{\mathbf{R}}_0 \cdot \hat{\mathbf{R}}_1](1) = \hat{\mathbf{R}}_0(1) \cdot \hat{\mathbf{R}}_1(1)$, dostaneme grupu téměř izomorfní s $SO(n)$, až na jednu drobnost:

Rotování o 2π kolem osy z

$$\hat{\mathbf{R}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ 0 & \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix} \quad (11.506)$$

je ekvivalentní rotaci o 2π kolem kterékoli jiné osy ξ (spojitým přechodem bude rotování o 2π kolem osy, která bude plynule přecházet od osy z k ose ξ s tím, jak se v mění od 0 do 1).

Proto je také „nehybné“ rotování ($\hat{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{E}$) ekvivalentní rotaci o 4π kolem jakékoli osy (z tohoto důvodu nemohou existovat žádné částice se spinem, jehož dvojnásobek není celé číslo), ale plynulý přechod od nehybného rotování k rotování o 2π nenajdete.

Matematicky řečeno, grupa $SU(2)$ je na rozdíl od grupy $SO(3)$ **jednoduše souvislá**, protože každá uzavřená křivka (rotování) v ní je stažitelná do bodu.

A tak tvoří všechny třídy ekvivalentních rotování grupu $Spin(n)$ (pro $n = 3$ izomorfní $SU(2)$) takovou, že existuje monomorfismus na $SO(n)$, který přiřadí vždy dvěma prvkům $Spin(n)$ jeden prvek $SO(n)$.

c) Geometrické vlastnosti kubického subchronoru

Z předchozího je zřejmé, že sférický chronor je současně exponován primární cytorezonancí vždy ve směru a proti směru všech tří cytoprostorových souřadných os, tj. v navzájem ortogonálních směrech.

Na prostředí uvnitř sférického chronoru přitom můžeme nahlížet jako na fyzikální kontinuum, neboť na úrovni sférického chronoru zatím nelze předpokládat žádnou strukturovanou vnitřní stavbu.

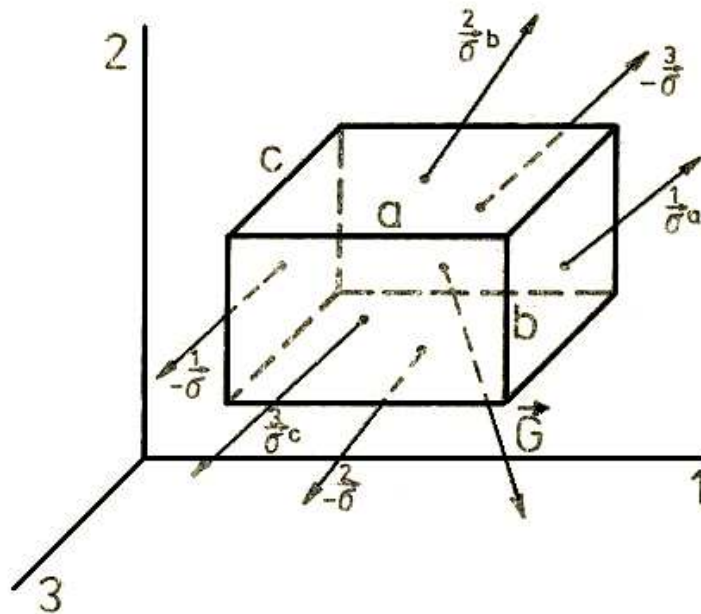
Cílem této kapitoly bude ukázat, že vnitřní struktura kvantionu skutečně existuje ale vzniká teprve coby sekundární produkt opakované expozice již jednou vytvořené primární struktury sférického chronoru.

O kontinuu v rovnováze hovoříme tehdy, je-li v rovnováze každá jeho část.

Při odvozování rovnice rovnováhy kontinua vyjdeme z úvah týkajících se konečného objemu kontinua.

Výhodné je zvolit za zkoumanou soustavu objem kontinua ve tvaru kvádrů s hranami délky a , b , c , rovnoběžnými se souřadnými osami.

Obr. 11.31



Podmínka rovnováhy o nulové výslednici vnějších sil pro uvažovaný kvádr zní

$$(\sigma^{1a} - \sigma^1)bc + (\sigma^{2b} - \sigma^2)ac + (\sigma^{3c} - \sigma^3)ab + \mathbf{G} \cdot abc = 0, \quad (11.507)$$

kde σ^i je vektor tenze působící na tu stranu plochy kolmé k i -té ose souřadného systému, která je obrácena k jejímu kladnému směru. Postupujeme-li ve směru růstu souřadnic x_i , napětí na první ploše kvádrů kolmé k první ose souřadné značíme $-\sigma^1$, napětí na druhé ploše kvádrů kolmé k první ose značíme σ^{1a} .

Obdobný je význam symbolů $-\sigma^2$, σ^{2b} , $-\sigma^3$, σ^{3c} .

Objemovou sílu \mathbf{G} zavádíme obdobně jako hustotu limitním vztahem

$$\mathbf{G} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{V}. \quad (11.508)$$

Plošné síly $\sigma^{1a}bc$, $-\sigma^1bc$, $\sigma^{2b}ac$, $-\sigma^2ac$, $\sigma^{3c}ab$, $-\sigma^3ab$, jsou stejně jako objemové síly $\mathbf{G} \cdot abc$ vnějšími silami působícími na danou soustavu a proto klademe jejich součet v (11.507) roven nule.

Složky vektorů σ^i tvoří **tenzor napětí** σ_{ij} .

Vektorovou rovnici (11.507) pak můžeme zapsat ve tvaru
($j = 1, 2, 3$)

$$\left(\sigma_{1j}^a - \sigma_{1j}\right)bc + \left(\sigma_{2j}^b - \sigma_{2j}\right)ac + \left(\sigma_{3j}^c - \sigma_{3j}\right)ab + G_j \cdot abc = 0 . \quad (11.509)$$

Podle diferenciálních vět o střední hodnotě lze rozdíly hodnot složek tenzoru napětí na dvou protilehlých stěnách vyjádřit jako součin vzdálenosti obou ploch a derivace složky podle souřadnice kolmé k uvažovaným plochám, přičemž hodnota derivace přísluší některému vnitřnímu bodu soustavy.

Tedy

$$\begin{aligned} \sigma_{1j}^a - \sigma_{1j} &= \left(\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1}\right) \cdot a , \\ \sigma_{2j}^b - \sigma_{2j} &= \left(\frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_2}\right) \cdot b , \\ \sigma_{3j}^c - \sigma_{3j} &= \left(\frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_3}\right) \cdot c . \end{aligned} \quad (11.510)$$

S uvážením rovnic (11.510) přepíšeme (11.509) na tvar

$$\left(\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1}\right) \cdot abc + \left(\frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_2}\right) \cdot abc + \left(\frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_3}\right) \cdot abc + G_j \cdot abc = 0 . \quad (11.511)$$

Provedeme-li limitní zmenšení objemu soustavy, hodnotu objemu abc můžeme v rovnici (11.511) vykrátit, a hodnoty jednotlivých partiálních derivací a složek G_j , které původně příslušely různým bodům uvnitř soustavy, přejdou v limitě na hodnoty příslušné stejnému bodu, ke kterému limitním postupem soustavu stáhneme. Pro tento bod pak platí rovnice

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + G_j = 0 , \quad (11.512)$$

což je hledaná **rovnice rovnováhy kontinua**.

Síly uvažované v rovnici (11.507) představují všechny vnější síly působící na soustavu, i když kontinuum není v rovnováze.

Pro uvažovanou soustavu pak můžeme napsat větu o pohybu hmotného středu.

$$\left(\sigma^{1a} - \sigma^1\right) bc + \left(\sigma^{2b} - \sigma^2\right) ac + \left(\sigma^{3c} - \sigma^3\right) ab + \mathbf{G} \cdot abc = m \cdot \mathbf{a}_s , \quad (11.513)$$

kde m je hmotnost soustavy a \mathbf{a}_s je zrychlení jejího hmotného středu.

Hmotnost m vyjádříme jako $\rho \cdot abc$, kde ρ je hustota v kterémkoli vnitřním bodě soustavy.

Translační vektor je

$$\mathbf{u}_j = x_j - y_j , \quad (11.514)$$

kde x_j je souřadnice vnitřního bodu v čase $t = 0$ a y_j je souřadnice tohoto bodu v čase Δt .

Zrychlení bodu kontinua je

$$a_j = \frac{d^2 y_j}{dt^2} = \frac{d^2 u_j}{dt^2} , \quad (11.515)$$

(výchozí poloha x_i je časově invariantní).

Zrychlení těžiště soustavy bude

$$\mathbf{a}_s = \frac{d^2 \mathbf{u}_s}{dt^2} , \quad (11.516)$$

kde \mathbf{u}_s je translační vektor končící v hmotném středu soustavy.

Rovnici (11.513) můžeme pak přepsat na tvar

$$\left(\sigma^{1a} - \sigma^1\right) bc + \left(\sigma^{2b} - \sigma^2\right) ac + \left(\sigma^{3c} - \sigma^3\right) ab + \mathbf{G} \cdot abc = \rho \cdot \frac{d^2 \mathbf{u}_s}{dt^2} \cdot abc , \quad (11.517)$$

neboli

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + G_j = \rho \frac{d^2 u_j}{dt^2}, \quad (11.518)$$

což je **pohybová rovnice kontinua**.

Vyjádříme si nyní rovnici (11.514) v diferenciálním tvaru

$$dy_j = dx_j + du_j = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot dx_i. \quad (11.519)$$

Velikost vektoru dx_j na počátku děje činí $(dx_j dx_j)^{1/2}$.

Konečná vzdálenost dvou bodů původně se nalézajících v místech x_j, x'_j , kde

$$x'_j - x_j = dx_j, \quad (11.520)$$

je

$$dy_j = y'_j - y_j = (dy_j dy_j)^{1/2}. \quad (11.521)$$

Rozdíl čtverců těchto vzdáleností

$$dy_j dy_j - dx_j dx_j \quad (11.522)$$

nyní použijeme k popisu deformace kontinua v okolí bodu, jehož původní souřadnice jsou x_i a konečné y_i .

Vypočteme je jako funkci výchozích poloh bodů a zvoleného diferenciálního posunutí dx_i z těchto poloh.

Z rovnice (11.519) dostáváme

$$\begin{aligned}
dy_j dy_j &= (dx_j + du_j)(dx_j + du_j) = \left[dx_j + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \cdot dx_l \right] \left[dx_j + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \cdot dx_k \right] = \\
&= \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \cdot dx_l \cdot \left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \cdot dx_k = \\
&= \left[\delta_{jl} \delta_{jk} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \cdot \delta_{jk} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \cdot \delta_{jl} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right] \cdot dx_l dx_k .
\end{aligned} \tag{11.523}$$

Uvážíme-li, že

$$\delta_{jl} \delta_{jk} dx_l dx_k = dx_j dx_j , \tag{11.524}$$

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \delta_{jk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} , \tag{11.525}$$

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \delta_{jl} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k} , \tag{11.526}$$

Můžeme psát

$$dy_j dy_j = dx_j dx_j + \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right] \cdot dx_l dx_k . \tag{11.527}$$

Označíme-li

$$\varepsilon_{lk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right] = \varepsilon_{kl} , \tag{11.528}$$

což je tzv. **tenzor deformací**, dostáváme pro hledaný výraz (11.522) vyjádření

$$dy_j dy_j - dx_j dx_j = 2\varepsilon_{lk} dx_l dx_k . \tag{11.529}$$

Zvolíme-li nyní vektor dx_m , tj. směr výchylky z počátečního bodu x_i , udávají nám rovnice (11.529) změnu čtverce délky příslušnou danému směru.

Jsou-li deformace malé, potom jsou malé i změny translačního vektoru u_i se souřadnicemi x_j , takže parciální derivace $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ nabývají

malých hodnot.

Jejich vzájemné násobky jsou pak malými veličinami druhého řádu a lze je proto v tenzoru deformací zanedbat na rozdíl od členů kde se parciální derivace vyskytují samostatně.

Přímou úměrnost mezi napětím a deformací můžeme nyní vyjádřit vztahem

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} , \quad (11.530)$$

který udává, že složky σ_{ij} tenzoru napětí jsou lineární kombinací složek ε_{kl} tenzoru deformace.

Koeficienty C_{ijkl} tvoří tenzor čtvrtého řádu, charakteristický pro daný typ kontinua, pro nějž se užívá označení **tenzor elasticity kontinua**. V homogenním kontinuu jsou při dané orientaci souřadného systému hodnoty jednotlivých koeficientů C_{ijkl} v každém bodě tytéž.

Kdyby byly všechny složky tenzoru elasticity vzájemně nezávislé, bylo by jich $3^4 = 81$.

Symetrie tenzorů σ_{ij} , ε_{kl} a další podmínky redukuje počet nezávislých koeficientů tenzoru elasticity v izotropním kontinuu na pouhé dva.

Tyto dva nezávislé koeficienty obvykle značíme λ a μ a nazýváme je **Laméovými koeficienty**.

Využijeme-li Laméových koeficientů pro charakteristiku elastických vlastností izotropního kontinua, redukuje se rovnice (11.530) na tvar

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \text{tr} \varepsilon_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} \right) + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} . \quad (11.531)$$

Zanedbáme-li v tenzoru deformací člen vyššího řádu (viz poznámka na předchozí straně), obdržíme tzv. **tenzor malých deformací**

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (11.532)$$

S jeho pomocí můžeme rovnici (11.531) pro malá napětí velmi dobře aproximovat jednodušší formulí

$$\tau_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \text{tr } e_{ij} + 2\mu \cdot e_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu \cdot e_{ij}, \quad (11.533)$$

kde τ_{ij} je tzv. **tenzor malých napětí**, který je limitní formou tenzoru σ_{ij} pro malé deformující síly.

Po dosazení (11.533) do (11.518) dostaneme rovnici

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div } \mathbf{u} + \mu \cdot \nabla^2 u_i. \quad (11.534)$$

Jestliže se rozruch šíří pouze v jednom směru, např. ve směru osy x , závisí výchylka \mathbf{u} pouze na této jedné souřadnici, tj.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t). \quad (11.535)$$

Máme tak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (11.536)$$

První rovnice (11.536) popisuje longitudiální vlnu šířící se ve směru osy x .

Zbylé dvě rovnice popisují transversální vlnění šířící se v tomtéž směru.

Rychlosti šíření obou druhů vln jsou dány vztahy (srov. (11.534))

$$c_l = \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11.537)$$

$$c_t = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11.538)$$

jejichž vzájemné porovnání poskytne pozoruhodnou nerovnost mezi oběmi rychlostmi:

$$c_l \geq \sqrt{2} \cdot c_t . \quad (11.539)$$

Stojí za povšimnutí, že fyzikální rozměr Laméových koeficientů je $[\text{N} \cdot \text{m}^{-2}]$.

Naším úkolem nyní bude vypočítat poměr rychlostí jakými se informace šíří po povrchu, resp. nitrem sférického chronoru.

Vyjdeme-li z hodnot vnitřní tenze F kvantionu dané vztahem (11.217), snadno vypočteme velikost vnitřního tlaku pod sférickým chronorem:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi \cdot l_h^2} . \quad (11.540)$$

Pro povrchové napětí sférického chronoru odtud plyne

$$\sigma = \frac{dE}{dS} = \frac{p \cdot r}{2} = \frac{p \cdot l_h}{4} = \frac{F}{4\pi \cdot l_h} , \quad (11.541)$$

odkud získáme výraz pro celkovou energii kvantionu:

$$E = \sigma \cdot \int dS = E_p - E_v = \frac{F \cdot l_h}{4} = h , \quad (11.542)$$

kde E_p resp. E_v jsou potenciální energie při povrchu, resp. uvnitř kvantionu.

Aby mohly kvantiony vytvářet složité komplexy, od elementárních částic až po živé organismy, musí být fermiony, tj. jejich spin I_m musí být poločíselný.

Jak brzy ukážeme, nemůže být $I_m > \hbar/2$.

Jistě bude přirozené předpokládat, že

$$E_p = \hbar \cdot I_m + h = \frac{1}{2} \hbar (4\pi + 1) . \quad (11.543)$$

Z rovností (11.542), (11.540) plyne, že

$$E_v = \frac{\hbar}{2} \quad (11.544)$$

a tedy podíl

$$\frac{E_p}{E_v} = 4\pi + 1 . \quad (11.545)$$

Podle (11.538) je hledaný poměr rychlostí

$$\frac{v_p}{v_v} = \left[\frac{\rho_v}{\rho_p} (4\pi + 1) \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (11.546)$$

kde ρ_p resp. ρ_v je hustota kinetické energie při povrchu resp. v nitru kvantionu.

Platí tedy

$$\frac{\rho_v}{\rho_p} = \frac{J_k \cdot \omega^2}{J_s \cdot \omega^2} = \frac{J_k}{J_s}, \quad (11.547)$$

přičemž J_k resp. J_s je inerciální moment kubického subchronoru resp. sférického chronoru.

S přihlédnutím k formuli (11.539) můžeme tedy psát

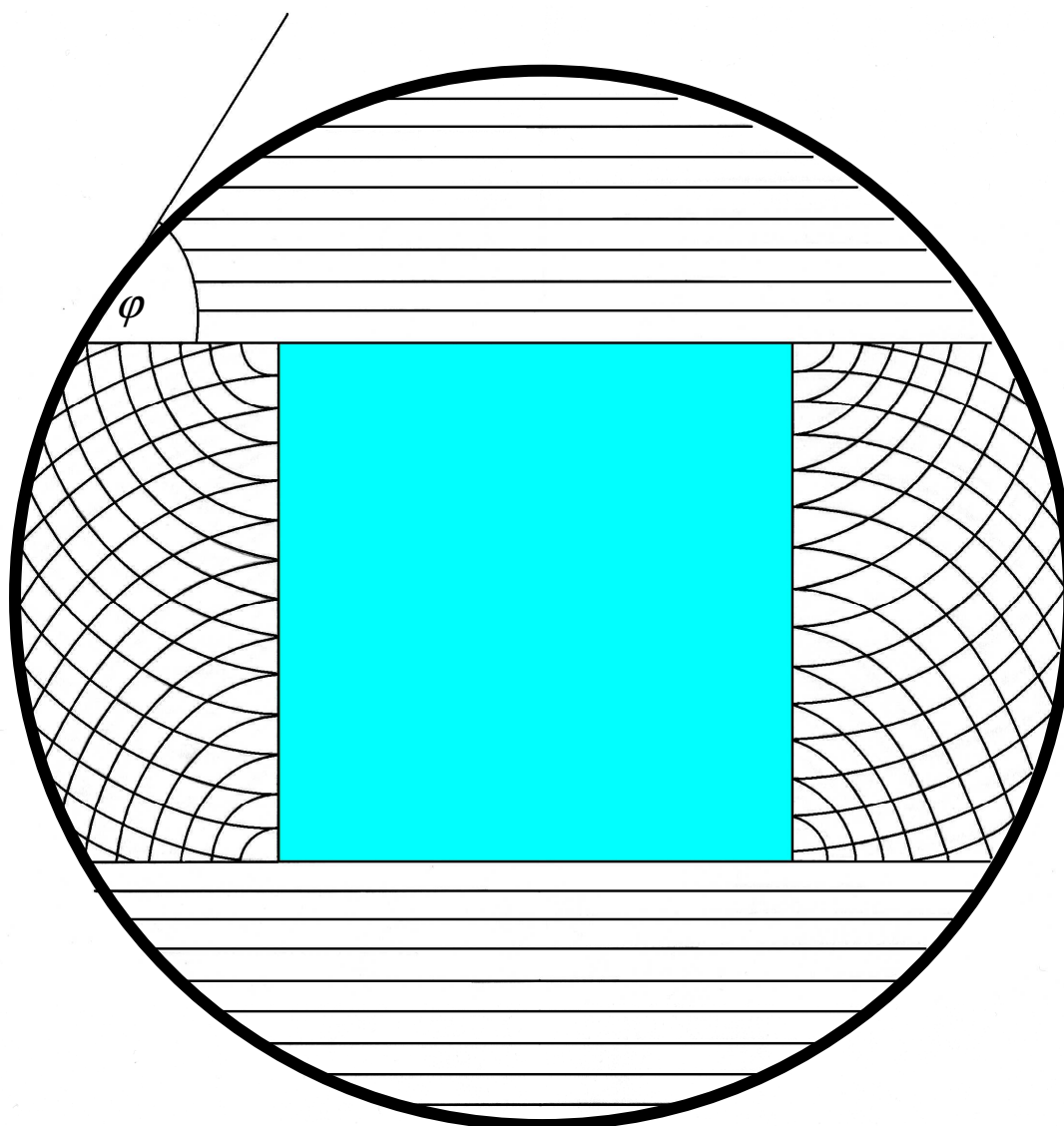
$$v_p = \left(\frac{E_p}{\rho_p} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \left[\frac{\hbar \cdot (4\pi + 1)}{2J_s \cdot \omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (11.548)$$

$$v_v = \left(\frac{E_v}{\rho_v} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\hbar}{J_k \cdot \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11.549)$$

Projekce rychlosti rovinné cytoresonanční vlny, pohybující se napříč kvantonem, do sférického chronoru je zřejmě vyjádřena funkcí

$$v_{vs} = v_v \cdot (1 + \cot \varphi)^{1/2}, \quad (11.550)$$

Obr. 11.32



Máme tedy

$$\frac{v_p}{v_{vs}} = \left[\frac{J_k \cdot (4\pi + 1)}{2J_s \cdot (1 + \cot \varphi)} \right]^{\frac{1}{2}} = \sin \varphi . \quad (11.551)$$

Snadno nahlédneme, že úhel φ udává množinu bodů na povrchu sférického chronoru tvořící hranici oddělující oblast, na níž se rozruch šířící se formou transversálního vlnění stálou rychlostí v_p pohybuje pomaleji, než projekce rychlosti v_{vs} longitudiální rovinné vlny

postupující nitrem kvantionu rychlostí v_v , od oblasti, kde je již nerovnost mezi oběma rychlostmi opačná.

Odtud tedy poslední rovnost v (11.551).

Nyní vypočteme momenty J_s a J_p .

Pro inerciální moment sférického chronoru máme

$$J_s = \rho_v \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-r}^r \sqrt{(r^2 + x^2)^4} dx = \frac{8}{15} \rho_v \cdot \pi \cdot r^5 . \quad (11.552)$$

Pro výpočet inerciálního momentu kubického subchronoru použijeme ortonormální souřadný systém s osami rovnoběžnými s hranami subchronoru a počátkem v jeho geometrickém (tj. i hmotném) středu. Pro inerciální moment vůči ose z tak dostáváme

$$\begin{aligned} J_k &= \rho_v \cdot \int_V (x^2 + y^2) dV = \rho_v \cdot \left(\int_V x^2 dV + \int_V y^2 dV \right) = \\ &= \rho_v \left(\int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx dy dz + \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dx dy dz \right) = \rho_v \cdot \frac{1}{6} \cdot L^5 , \end{aligned} \quad (11.553)$$

kde L je délka hrany kubického subchronoru, kterou je naším úkolem určit.

Dosadíme-li nyní (11.552) a (11.553) do (11.551), dostaneme rovnici

$$\sin \varphi = \left[\frac{15L^5 (4\pi + 1)}{48\pi \cdot r^5 (1 + \cot \varphi)} \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (11.554)$$

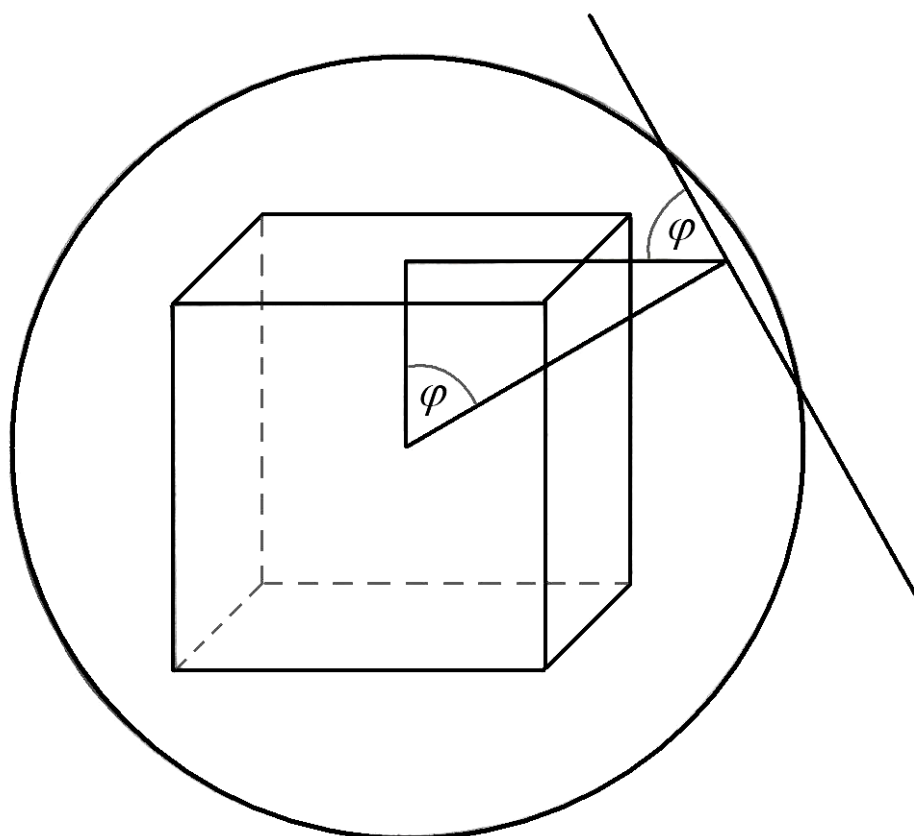
Velikost hrany L kubického subchronoru je zřejmě funkcí úhlu φ . Jednoduchá geometrická úvaha z pomoci obr. 11.33 ukáže, že tato závislost zní

$$L = l_h \cdot \cos \varphi , \quad (11.555)$$

takže po dosazení (11.555) do (11.554) získáme rovnici

$$\pi(1 + \cot \varphi) \cdot \sin^2 \varphi = 10(4\pi + 1) \cdot \cos^5 \varphi . \quad (11.556)$$

Obr. 11.33



Řešením je úhel

$$\varphi \approx 1,0617 \text{ rad} \approx 60^\circ 50' . \quad (11.557)$$

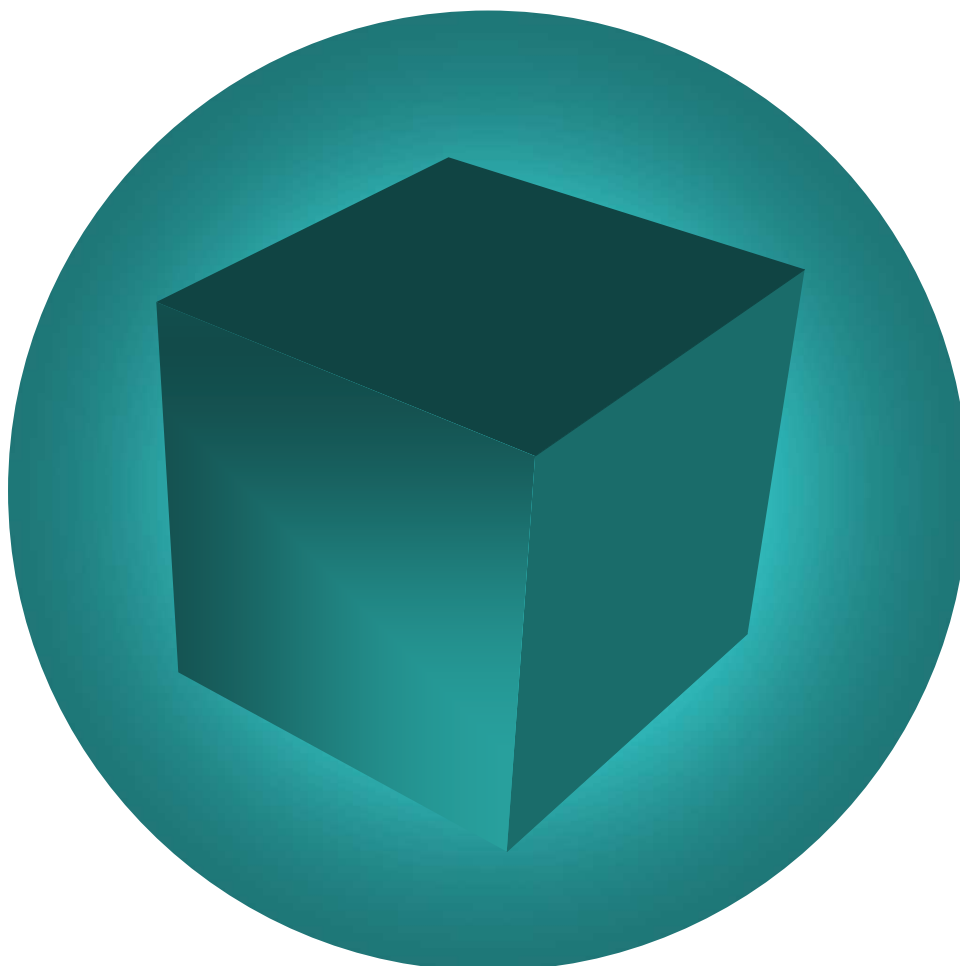
Dosadíme-li toto řešení zpět do vztahu (11.555), obdržíme dosti přesnou představu o skutečných rozměrech kubického subchronoru. Za předpokladu $\lambda/\mu = 1$ kladeného na Laméovy koeficienty elastického tenzoru C_{ijkl} odtud vychází délka hrany kubického subchronoru

$$L \approx 7,8 \cdot 10^{-36} \text{ m} .$$

(11.558)

na následujícím obrázku si již můžeme prohlédnout nitro kvantionu téměř v celé jeho kráse.

Obr. 11.34



Vidíme, že délka hrany kubického subchronoru je téměř rovna poloměru sférického chronoru.

Vnořme se nyní do nitra tohoto zcela nového a nanejvýš pozoruhodného subkvantového světa.

V následujících kapitolách bude postupně podkryta jemná struktura existující uvnitř kubického subchronoru.

Již nyní však stojí za povšimnutí vnitřní jemná struktura vyplňující prostor mezi kubickým subchronorem a sférickým chronorem, jejíž dvourozměrný náčrt vidíme na obr. 11.32.

Právě tato struktura, kterou ztotožňujeme s Blandriem, je, jak jsme se již mohli přesvědčit, pro fungování cytoprostoru zcela klíčovou a stala se proto předmětem intenzivního bádání nově se rodícího vědního oboru zvaného **teologická fyzika**, či **fyzikální teologie**.

Protože výzkum je teprve na počátku, bylo by předčasné informovat již nyní o dílčích úspěších jichž bylo zatím na tomto poli bádání dosaženo.

Rozhodně se však k tomuto tématu ještě vrátím v některé ze svých budoucích prací, v době, kdy již tento mladičkový obor vykrytalizuje ve skutečnou vědu.

Pronikněme nyní společně do hlubin našeho subkvantového vesmíru a prozkoumejme podrobněji vibrační módy vyskytující se uvnitř kubického subchronoru.

11) Vnitřní struktura kubického subchronoru

Přepišme nyní první rovnici systému (11.536), popisující longitudiální vlnu, která jediná může vstupovat do nitra kubického subchronoru, na tvar s výchylkou označenou jako Ψ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} . \quad (11.559)$$

Obecným řešením rovnice (11.559) netlumené monochromatické harmonické vlny šířící se ve směru x je funkce

$$\Psi = A \cdot \exp \left[-i \cdot \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] . \quad (11.560)$$

Všimněme si, že jednorozměrnou vlnovou funkci Ψ můžeme upravit do tvaru

$$\Psi = A \cdot \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = A \cdot \exp(-i\omega t) \exp \left(i\omega \frac{x}{v} \right) \equiv \psi \cdot \exp(-i\omega t) , \quad (11.561)$$

v němž je Ψ součinem časově závislé funkce $\exp(-i\omega t)$ a funkce polohy ψ .

Ve skutečnosti mají všechny vlny v konzervativních silových polích časovou závislost tohoto tvaru.

Dosadíme-li nyní Ψ do vlnové rovnice (11.559) a provedeme dvojnásobnou časovou derivaci, obdržíme po drobné úpravě rovnici

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \psi = 0 , \quad (11.562)$$

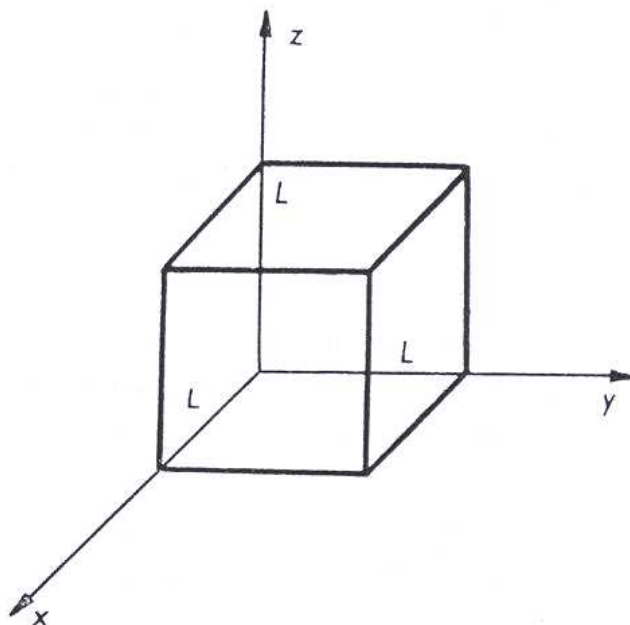
což je tzv. **stacionární vlnová rovnice**.

Její trojrozměrný tvar je

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{c^2} \psi = 0 . \quad (11.563)$$

Řešme nyní tuto rovnici pro nitro kubického subchronoru, kde je na ψ kladena hraniční podmínka $\psi = 0$ všude na stěnách subchronoru.

Obr. 11.35



Srovnáním (11.563) s (3.79) dostaneme separací proměnných formálně identické řešení ve tvaru degenerovaných stojatých vln,

příčemž v našem případě krychlové dutiny bude opět stupeň degenerace vůbec největší.

K tomu aby v krychlové dutině o straně L existoval mód (11.560), musí délka každé komponenty jeho vlnového vektoru být rovna celočíselnému násobku hodnoty π/L .

Módy můžeme znázornit zobrazením bodů (k_x, k_y, k_z) v třírozměrném prostoru.

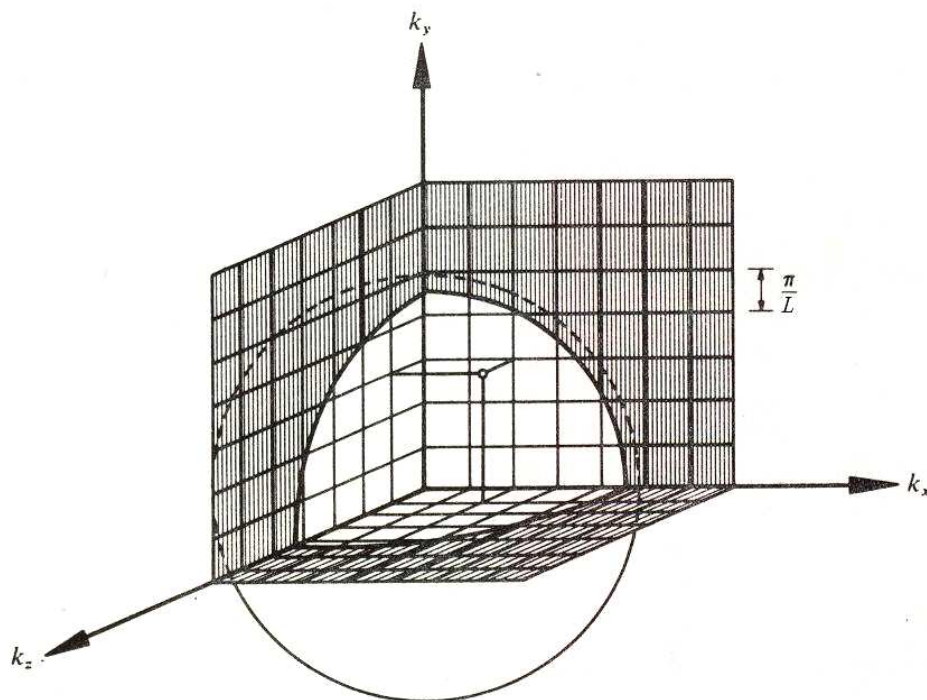
Z toho, co jsme si řekli o dovolených hodnotách komponent vlnového vektoru \mathbf{k} vidíme, že body reprezentující módy tvoří kubickou mřížku.

Počet módů s vlnovými vektory nepřesahujícími svou délkou k je zřejmě roven počtu módů obsažených v kouli o poloměru k .

Pokud se speciálně nezajímáme o těch několik módů, které mají vlnové délky srovnatelné s rozměry dutiny, bude k mnohem větší než mřížková konstanta π/L .

Koule pak obsahuje velmi veliký počet mřížkových bodů, které lze spočítat metodou ignorující zrnitost mřížky.

Obr. 11.36



Zjistili jsme, že každý bod mřížky zaujímá objem $\left(\frac{\pi}{L}\right)^3$.

Protože objem koule o poloměru k je $\frac{4\pi \cdot k^3}{3}$ a protože mřížkové body, jež odpovídají módům, leží pouze v oktantu ve kterém všechny tři složky vlnového vektoru nabývají kladných hodnot, je hledaný počet módů dán vztahem

$$N(k) \equiv \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi \cdot k^3}{3} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 = \left(\frac{L^3}{6\pi^2}\right) \cdot k^3 = \left(\frac{V}{6\pi^2}\right) \cdot k^3, \quad (11.564)$$

kde V je objem dutiny.

Tuto metodu lze zobecnit na dutinu libovolného tvaru.

Pokud k odpovídá vlnovým délkám jež jsou mnohem menší než rozměry dutiny, nezávisí výsledek (11.564) na tvaru dutiny.

Zderivováním (11.564) můžeme určit počet módů v intervalu $\langle k ; k + dk \rangle$.

Označíme-li jejich počet $g(k) dk$, máme

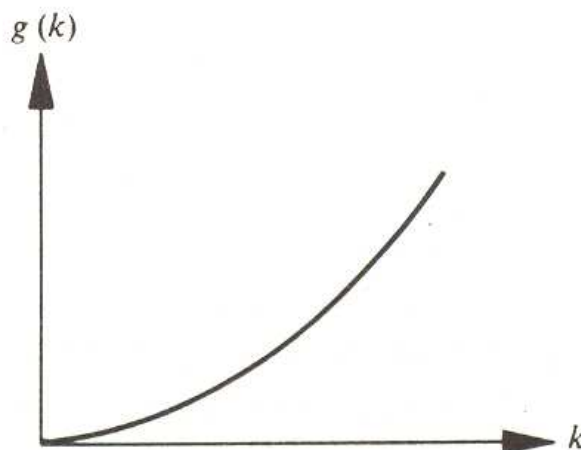
$$g(k) \equiv \frac{dN}{dk} = \left(\frac{V}{2\pi^2}\right) \cdot k^2. \quad (11.565)$$

veličinu $g(k)$ nazveme **hustotou módů**.

Tento termín se vztahuje k hustotě se kterou jsou módy nahromaděny v jednotkovém intervalu k , nikoli k nějaké prostorové hustotě.

Reciproká hodnota hustoty módů odpovídá průměrnému přírůstku k , při přechodu od libovolného módu k nejbližšímu dalšímu.

Obr. 11.37

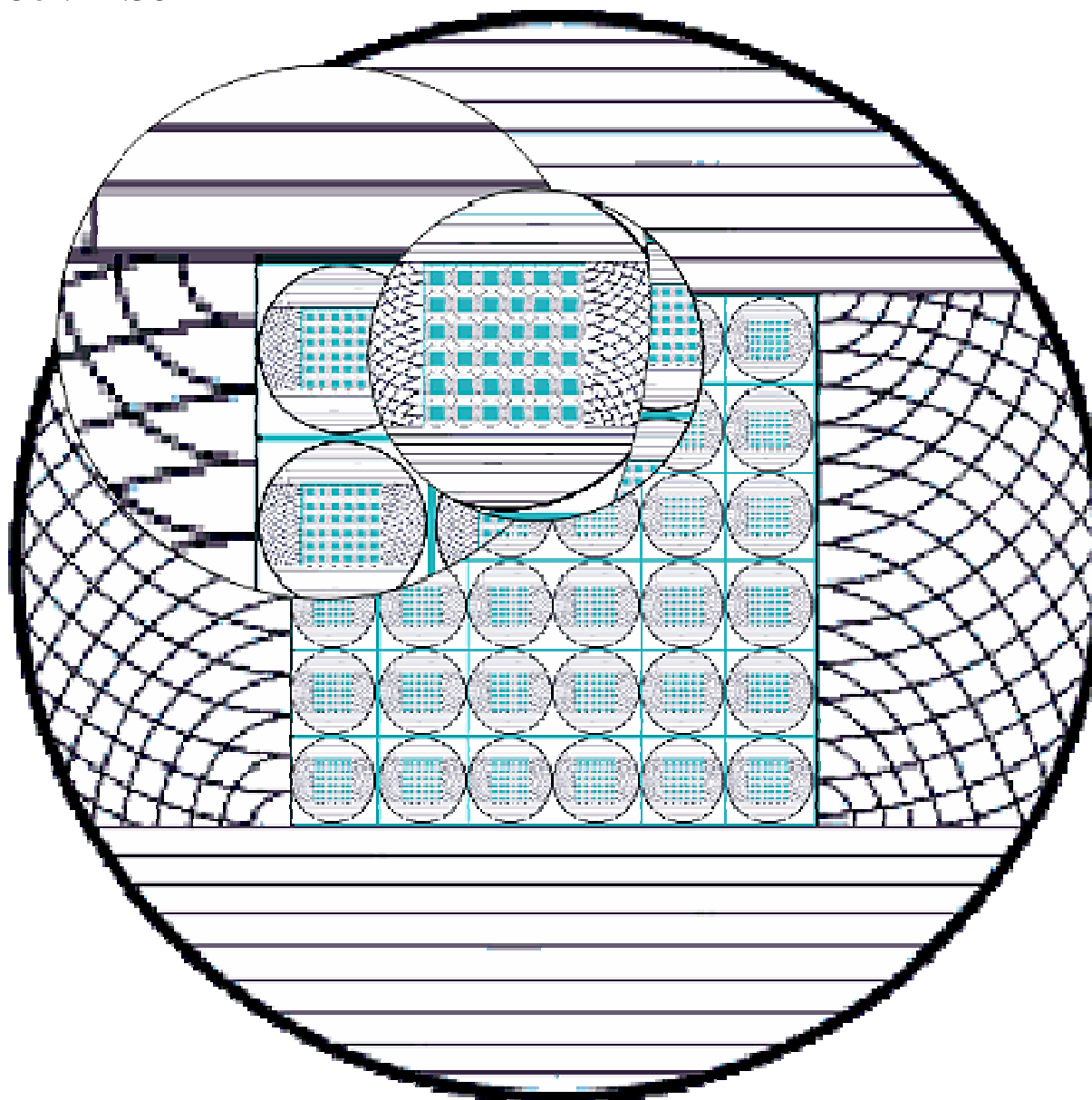


Nyní je již více než zřejmé, že se nám zde rýsuje první konkrétní důkaz existence fraktální struktury cytoprostoru.

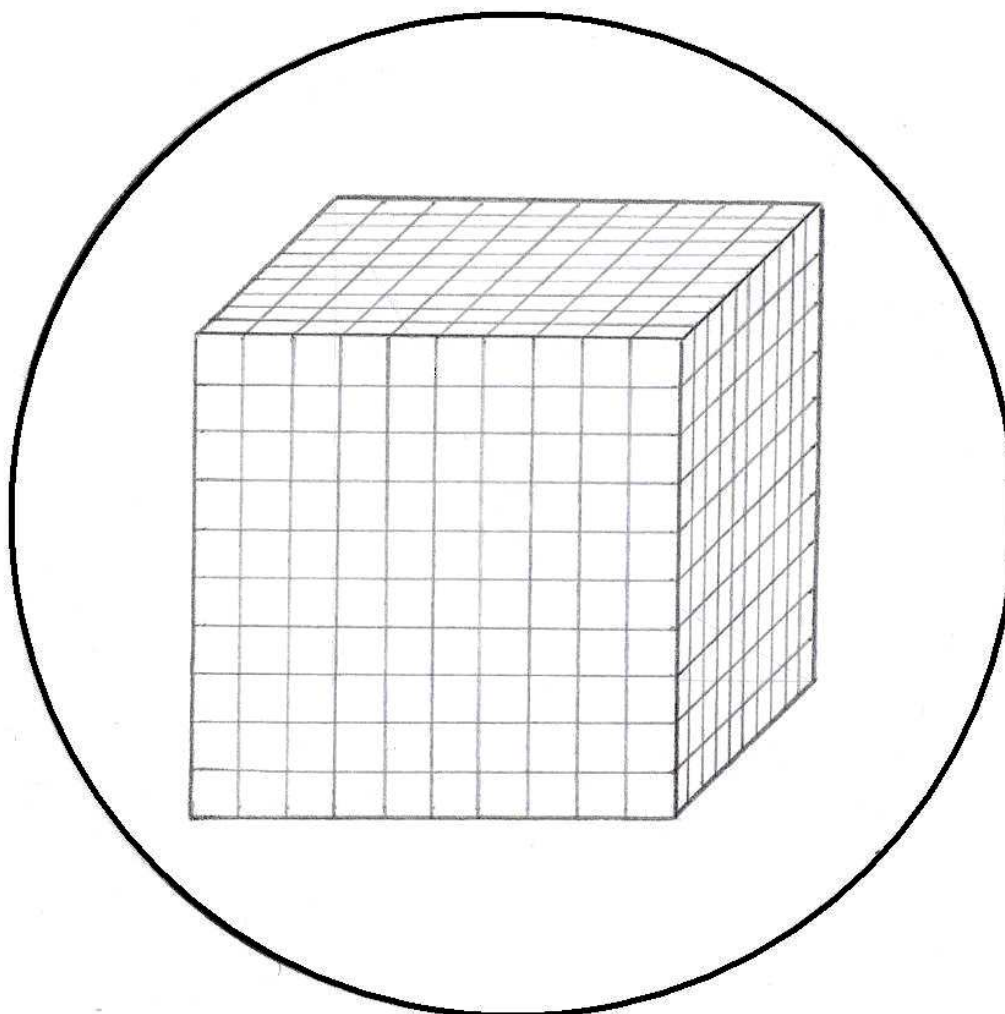
Ukázali jsme, že uvnitř kubického subchronoru, tj. na subkvantové délkové škále, existuje přesná analogie cytoprostoru (obr. 11.38), s nímž jsme se dosud byli zvyklí setkávat pouze v mega – a gigakosmickém měřítku.

To ukazuje na fascinující skutečnost, že se náš svět donekonečna opakuje na různých úrovních soběpodobnostního zobrazení, jakožto určitý nekonečný řetězec morfismů.

Obr. 11.38



Obr. 11.39



Tohoto poznatku můžeme využít mimo jiné pro odhad celkové životnosti vesmíru.

Proces generování kvantionu můžeme formálně přirovnat k lámání cytoresonančních vln na rozhraní dvou prostředí s odlišnými indexy lomu.

Index lomu cytoresonance na rozhraní cytoprostoru a kvantionu se určí jednoduchým způsobem: Rychlost postupu cytoresonanční vlny prostředím je dána obvyklým vztahem

$$v = \lambda \cdot f \quad (11.566)$$

čili

$$f = \frac{v}{\lambda}, \quad (11.567)$$

kde λ a f jsou vlnová délka a frekvence této vlny.

Na rozhraní oněch dvou prostředí, kde se střetávají dvě cytorezonanční vlny uvnitř cytoprostorové buňky, tvarující zde kubický subchronor s vlastním cytoprostorem uvnitř, pak musí platit $f = \text{konst.}$, tj.

$$\frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}, \quad (11.568)$$

kde λ_2 je délka cytorezonanční vlny uvnitř kvantionu, která je vůči vlnové délce λ_1 iniciační cytorezonanční vlny ve stejném poměru, jako je nově vytvořený cytoprostor vůči iniciačnímu cytoprostoru. Platí tedy rovnost

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{6 \cdot 10^{61}}. \quad (11.569)$$

Index lomu cytorezonance na membráně kvantionu pak snadno určíme ze známého vztahu

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 6 \cdot 10^{61}. \quad (11.570)$$

Index lomu kvantionu tedy udává poměr doby průběhu fyzikálních procesů v kupovesmíru oproti době průběhu týchž procesů uvnitř kvantionu.

Odtud můžeme ihned stanovit dobu trvání jedné vesmírné periody:

$$T = n \cdot t_h \approx 3,2 \cdot 10^{18} \text{ s} \quad (11.571)$$

neboť víme, že doba života klidového kvantionu je rovna Planckovu času t_h .

Jelikož, dle posledních měření, uplynula od počátku vesmíru již doba

$T = 4 \cdot 10^{17}$ s, nalézáme se nyní zhruba v jedné osmině jeho celkové doby života.

12) Termodynamika kubického subchronoru

Celkový počet módů, ve kterých se může hromadit energie v mřížce je roven $3N$, kde N je počet hmotných elementů v mřížce.

Podle ekvipartičního teorému je střední energie systému připadající na jeden stupeň volnosti při termodynamické teplotě T rovna

$$W = \frac{k \cdot T}{2}, \quad (11.572)$$

kde k je Boltzmannova konstanta.

Každý mód mřížky má dva stupně volnosti: svoji kinetickou energii a svou energii potenciální.

Mřížka má tedy jako celek $6N$ stupňů volnosti, což dává celkovou energii

$$W = \frac{6N \cdot k \cdot T}{2} = 3N \cdot k \cdot T. \quad (11.573)$$

Položíme-li $W = h$ snadno přiřadíme kubickému subchronoru

termodynamickou teplotu $T \approx 8 \cdot 10^{-197}$ K.

Dosazením této hodnoty do vztahu pro střední kvadratickou rychlost elementů mřížky dostaneme (viz (11.129))

$$v = \sqrt{\frac{3k \cdot T}{m_y^{(-1)}}} = \sqrt{\frac{3k \cdot T \cdot N \cdot c^2}{h}} = c. \quad (11.574)$$

Hmota je tedy tvořena časem oscilujícím fázovou rychlostí c .

Při teplotě $T \rightarrow 0$ se oscilace času zastaví a hmota ztratí svůj základní atribut – hmotnost.

To odpovídá bodu A Zoevistianovy pohybové tabulky.

Čas v tomto bodě plyne nekonečnou a zároveň nulovou rychlostí.

Dodáváme-li takovému hmotnému kontinuu termodynamickou teplotu, počne se stáčet tok času, čímž se čas zkvantuje a časové intervaly počnou dilatovat.

Jakmile urychlíme vibrace částice na úroveň bodu B Zoevistianovy pohybové tabulky, dosáhne dilatace času nekonečné hodnoty a čas počne plynout konečnou rychlostí.

Vnitřní struktury částic – kvantiony – zde již oscilují rychlostí světla c .

Nastává klidový stav hmoty.

Hmota se tedy tvoří z původní hodnoty $m = 0$, v důsledku takřka nekonečné dilatace času, jakožto inerciální hmotnost kmitajících kvantionů, pro něž se Lorentzovská transformace hybnosti blíží nekonečnu.

Vzhledem k tomu, že $p = m \cdot v$, pak i m vzroste nekonečněkrát, z nuly na konečnou hodnotu.

Při dalším zvyšování rychlosti, až do bodu C pohybové tabulky, čas a hmotnost nadále dilatují a prostor kontrahuje.

Při rychlosti $v \rightarrow c$ již rychlost toku času a prostorové intervaly konvergují k nule, zatímco veličiny m , p , E divergují k nekonečnu.

Při nadsvětelné rychlosti, těsně za bodem C, je pak situace na systému paracyt obdobná opět stavu při teplotě $T \rightarrow -0$ K.

(Termodynamické nuly nelze konečným počtem kroků dosáhnout, viz třetí zákon termodynamiky, lze ji však překročit směrem do záporných hodnot).

Poznámka: Všechny částice, pro které platí

$$\frac{G \cdot m}{c^2} < l_h \quad , \quad (11.575)$$

tj. částice s hmotností menší než **Planckova hmota**, již samostatně nevytvářejí žádné gravitační pole, neboť jejich geometrodynamická hmotnost, jež je mírou zakřivování okolitého prostoročasu příslušnou částicí, nedosahuje ani nejmenší povolené délky – Planckovy délky.

Její inerciální hmotnost jí však zřejmě zůstává, o čemž se lze snadno přesvědčit experimentálně.

Situace na přechodové hranici cyt/paracyt je pak taková, že tok času se zde rovná nekonečnu a nule zároveň.

Doba života kvantionu zde totiž diverguje k ∞ , což je analogické situaci, kdy kvantion nehybně setrvává na jedné jediné cytoprostorové buňce a rozpadá se nekonečněkrát za sekundu (nehybnost kvantionů vyžaduje sama definice termodynamické nuly).

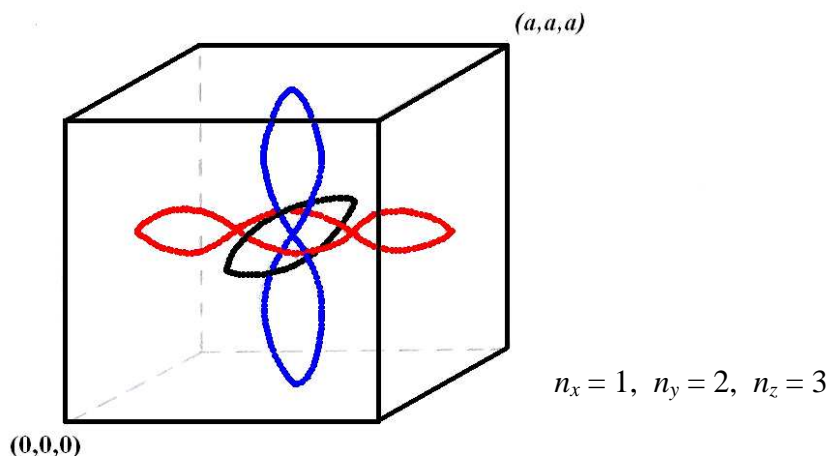
Připomeňme si, a mějme stále na paměti, že limitních bodů Zoevistianovy pohybové tabulky nelze žádným fyzikálně přípustným způsobem dosáhnout.

Fyzikální systémy se jim mohou vždy pouze do jisté, poměrně značné míry přiblížit z kterékoli strany, popř. kolem nich oscilovat.

Výše naznačené časoprostorové symetrie dovolují prodloužit řešení mnoha kvantově – mechanických problémů i do zdánlivě nepřipustných oblastí záporných hodnot.

Demonstrujme si to na příkladu základního vztahu kvantové optiky - **Planckova vyzařovacího zákona**. Uvažujme dutinu tvaru krychle o straně a .

Obr. 11.40



Umístíme-li do této dutiny elektromagnetické vlnění, pak Pro něj budou platit vztahy (11.559), (11.562) tj.

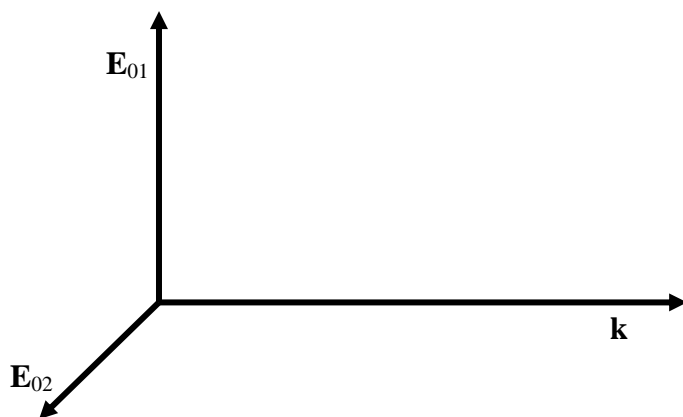
$$\frac{\pi^2}{a^2} \cdot (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\omega^2}{c^2} . \quad (11.576)$$

odkud pro frekvenci konkrétního módu plyne

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \|\mathbf{k}\| \cdot \frac{c}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} . \quad (11.577)$$

každému k nyní přísluší dva lineárně polarizované módy, neboť elektromagnetické vlnění je transversální (viz obr. 11.41)

Obr. 11.41

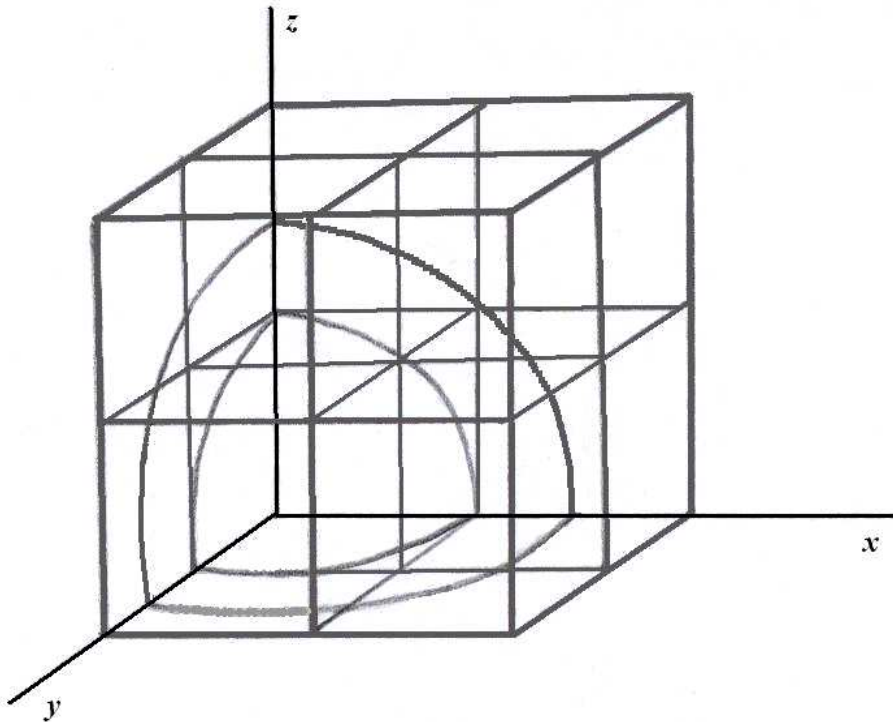


Spočtěme nyní celkový počet módů v dutině, ležících v intervalu frekvencí $(f; f + df)$.

Objem k -prostoru V se určí jako podíl polarizace módů a počtu oktantů, násobený objemem infinitesimální kulové vrstvy, tj.

$$V = \frac{2}{8} \cdot 4\pi \cdot k^2 dk = \pi \cdot k^2 dk . \quad (11.578)$$

Obr. 11.42



Hledaný počet módů pak dostaneme coby podíl objemu k -prostoru a objemu elementární buňky, tj.

$$N(k) = \frac{V}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^3} = \frac{a^3 \cdot k^2}{\pi^2} dk . \quad (11.579)$$

Z formule (11.577) nyní můžeme vyjádřit

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{c^2} \cdot f^2 , \quad (11.580)$$

odkud

$$dk = \frac{2\pi}{c} df , \quad (11.581)$$

což dosazeno do (11.579) dá hledané vyjádření

$$N(f) = \frac{a^3 \cdot \frac{4\pi^2 f^2}{c^2} \cdot \frac{2\pi}{c}}{\pi^2} df = \frac{8\pi \cdot a^3 \cdot f^2}{c^3} df . \quad (11.582)$$

Pro hustotu módů odtud plyne

$$g(f) = \frac{N(f)}{a^3} = \frac{8\pi \cdot f^2}{c^3} . \quad (11.583)$$

Celková energie záření připadající na jeden mód činí

$$E_n = n \cdot h \cdot f . \quad (11.584)$$

Rozdělení pravděpodobnosti energie jednoho módu v závislosti na teplotě dutiny je určeno Boseho – Einsteinovou statistikou:

$$P_f = C_n \cdot \exp\left(-\frac{E_n}{k \cdot T}\right) = C_n \cdot \exp\left(-\frac{n \cdot h \cdot f}{k \cdot T}\right) , \quad (11.585)$$

kde k je Boltzmannova konstanta a C_n je tzv. normovací konstanta. Součet energie záření přes všechny módy zřejmě tvoří geometrickou řadu, takže platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_f(n) = \frac{C_n}{1 - \exp\left(-\frac{h \cdot f}{k \cdot T}\right)} = 1 . \quad (11.586)$$

Střední hodnota energie fotonů rovnovážného záření emitovaných do jednotlivých módů dutinového rezonátoru pak činí

$$\begin{aligned}\bar{E}_f &= \sum_{n=0}^{\infty} [P_f(n) \cdot E_n] = \\ &= \left[1 - \exp\left(-\frac{h \cdot f}{k \cdot T}\right) \right] \cdot h \cdot f \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[n \cdot \exp\left(-\frac{n \cdot h \cdot f}{k \cdot T}\right) \right].\end{aligned}\quad (11.587)$$

Označíme-li pro zjednodušení

$$\beta \equiv \frac{h \cdot f}{k \cdot T}, \quad (11.588)$$

potom můžeme řadu (11.587) snadno sečíst:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} [n \cdot \exp(-n \cdot \beta)] &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\beta} [\exp(-n \cdot \beta)] = \\ &= - \frac{d}{d\beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \cdot \beta} = - \frac{d}{d\beta} \frac{1}{1 - e^{-\beta}} = \frac{e^{-\beta}}{(1 - e^{-\beta})^2},\end{aligned}\quad (11.589)$$

odkud

$$\bar{E}_f = (1 - e^{-\beta}) \cdot \frac{h \cdot f \cdot e^{-\beta}}{(1 - e^{-\beta})} \cdot \frac{e^{\beta}}{e^{\beta} - 1} = \frac{h \cdot f}{e^{\beta} - 1}, \quad (11.590)$$

takže rozdělení intenzity vyzařování v závislosti na teplotě a frekvenci udává funkce

$$u_f(T, f) = g(f) \cdot \bar{E}_f = \frac{8 \cdot \pi \cdot f^2}{c^3} \cdot \frac{h \cdot f}{\exp\left(\frac{h \cdot f}{k \cdot T}\right) - 1} df. \quad (11.591)$$

Protože platí (11.577), tj.

$$df = \frac{f^2}{c} d\lambda; \quad \frac{f^3}{c^3} = \frac{1}{\lambda^3}, \quad (11.592)$$

platí rovněž

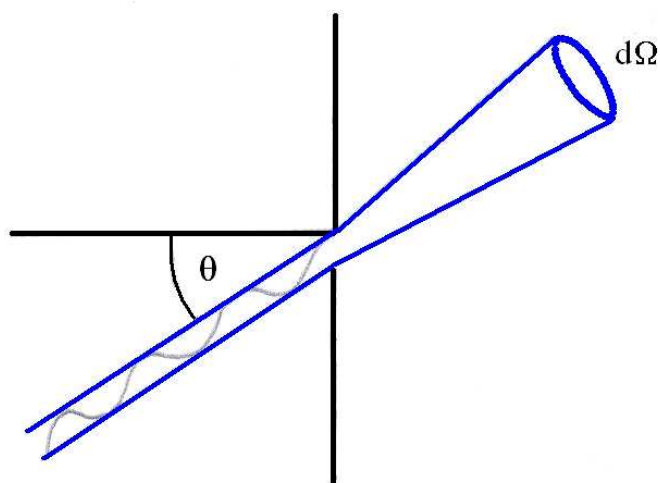
$$u_\lambda(T; \lambda) = \frac{8\pi \cdot h}{\lambda^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT \cdot \lambda}} - 1} \cdot \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = \frac{8\pi \cdot h \cdot c}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT \cdot \lambda}} - 1} d\lambda. \quad (11.593)$$

nyní již můžeme vypočítat distribuční funkci pro hustotu energie vyzařované absolutně černým tělesem, v závislosti na teplotě rezonátoru.

Měrnou zářivost dutiny udává vztah (viz obr. 11.43)

$$L d\Omega = a \cdot u \cdot c \cdot \cos\theta d\Omega. \quad (11.594)$$

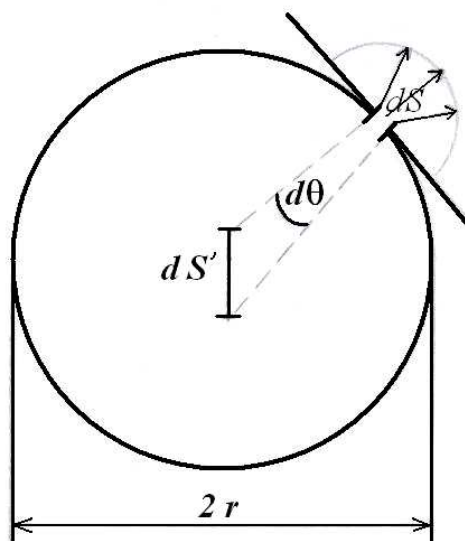
Obr. 11.43



Diferenciál výkonu vyzařovaného dutinou z plochy dS' štěrbinou dS pak činí (viz obr. 11.44)

$$dP = L d\Omega dS = L \frac{dS'}{r^2} dS. \quad (11.595)$$

Obr. 11.44



Odtud pro diferenciál intenzity vyzařování plyne

$$du = \frac{1}{c} \cdot \frac{dP}{dS} = \frac{L}{c \cdot r^2} dS . \quad (11.596)$$

Intenzita vyzařování absolutně černého tělesa z celého jeho povrchu tedy bude

$$u = 4\pi \cdot r^2 \cdot \frac{L}{c \cdot r^2} = \frac{4\pi \cdot L}{c} , \quad (11.597)$$

odkud plyne vyjádření měrné zářivosti ve tvaru

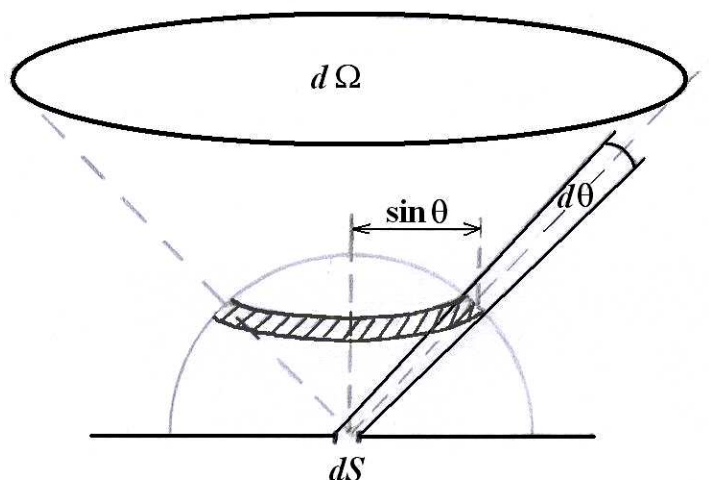
$$L = \frac{u \cdot c}{4\pi} . \quad (11.598)$$

podle obr. 11.45 vypočteme úhel $d\Omega$:

$$d\Omega = 2\pi \cdot \sin\theta d\theta , \quad (11.599)$$

kde $\theta \in (0; \pi/2)$

Obr. 11.45



Dosazením (11.594) do (11.595) dostaneme pro diferenciál **zářivého výkonu** vyjádření

$$dP = S \cdot L \cdot \cos \theta \, d\Omega , \quad (11.600)$$

odkud integrací plyne

$$P = 2\pi \cdot S \cdot L \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \sin \theta \, d\theta = \pi \cdot S \cdot L . \quad (11.601)$$

Hledané vyjádření **hustoty vyzařované energie** pak zní

$$H_\lambda(T, \lambda) = \frac{P}{S} = \pi \cdot L(T, \lambda) . \quad (11.602)$$

Srovnáním (11.602) a (11.597) dospíváme ke tvaru pro intenzitu

$$u = \frac{4}{c} \cdot H_\lambda , \quad (11.603)$$

a srovnáním (11.603) a (11.593) získáme konečné vyjádření hustoty energie vyzařované absolutně černým tělesem:

$$H_{\lambda} = \frac{u \cdot c}{4} = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k \cdot T}\right) - 1 \right]} . \quad (11.604)$$

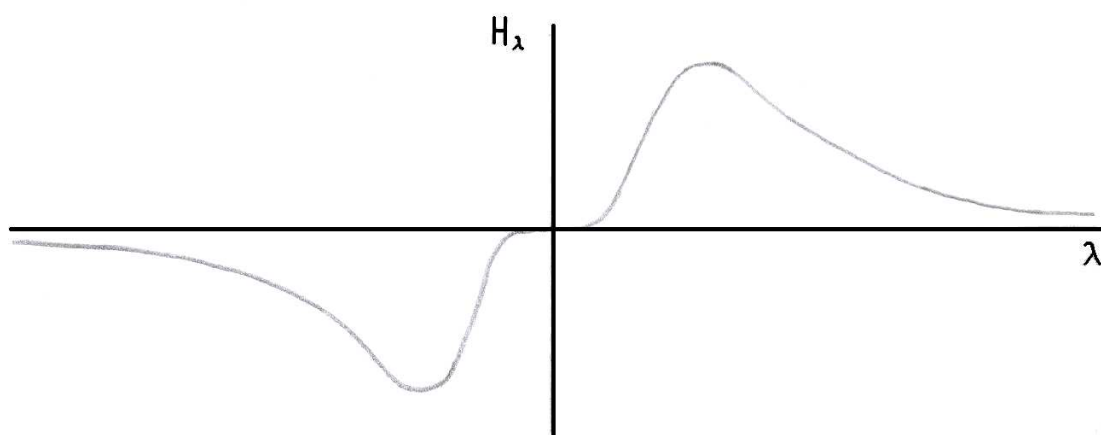
největší vadou na kráse tohoto vztahu je jeho výrazná asymetrie vůči inverzi času a termodynamické teploty.

Z hlediska cytu totiž musí energie záření pro kladné teploty ležet v prvním kvadrantu, zatímco pro teploty záporné v kvadrantu čtvrtém. Z hlediska paracytu to bude kvadrant druhý pro kladné teploty a třetí pro teploty záporné.

Úplně symetrický tvar Planckova vyzařovacího zákona tedy získáme drobnou úpravou vztahu (11.604) do finální podoby

$$H_{\lambda} = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2 \cdot T}{\lambda^5 \cdot |T| \cdot \left[\exp\left(\frac{h \cdot c}{k \cdot |T \lambda|}\right) - 1 \right]} . \quad (11.605)$$

Obr. 11.46



Verlindeova teorie gravitace

V létě roku 2009 použil Erik Verlinde teorii cytoprostoru k rozpracování konceptu gravitace jako entropické síly, který v lednu 2010 publikoval. Jeho článek ukazuje, že gravitaci (Newtonovu i Einsteinovu) lze odvodit ze statistického chování mikroskopických objektů, aniž by mezi nimi nějaká síla vůbec působila. Gravitaci tak popsal jako emergentní sílu.



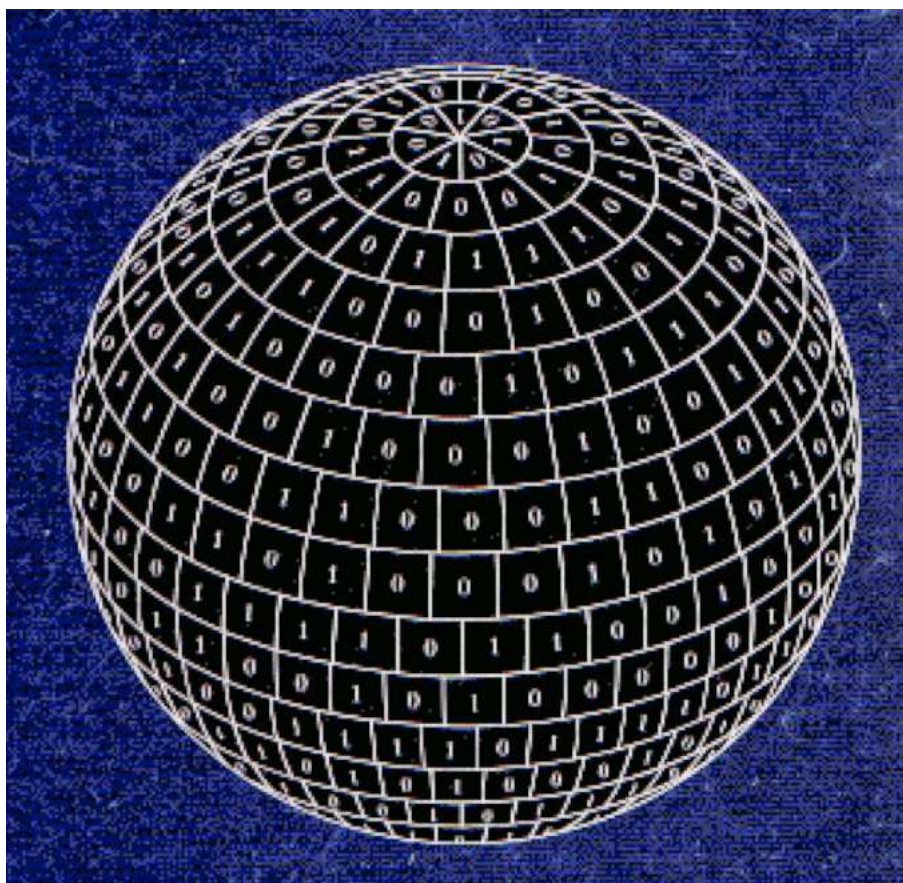
Erik Peter Verlinde (1962)

Když rozbijeme v místnosti lahvičku s voňavkou, ucítíme ji po chvíli v celé místnosti. Je to způsobeno difúzí, při které se molekuly vůně pohybují chaoticky a postupně se šíří prostorem. Dokonce lze zavést tzv. termodynamickou sílu (je úměrná gradientu koncentrace vůně), která je z makroskopického hlediska za šíření vůně zodpovědná. Původ této síly je v růstu entropie na mikroskopické úrovni a jde o typický příklad entropické síly. Erik Verlinde založil svou teorii gravitace na dvou předpokladech:

1. **V mikrosvětě platí holografický princip.** K primárním pojmům patří informace (entropie) lokalizovaná na hranici určité malé oblasti. Můžeme vyjít z představy, že svět malých rozměrů je rozdělen na cytoprostorové buňky, na jejichž hranicích (holografickém plátně) je nesena informace o vlastnostech jejich nitra. Existence prostoru a času uvnitř je důsledkem informace na povrchu buňky (jde o zásadní odlišnost od obecné relativity, kde jsou zdrojem času a prostoru tělesa

samotná). Mikrosvět je na elementární úrovni tvořen prostorovou mřížkou základních buněk (tzv. pixelizace světa). Na jejich tvaru nezáleží, podstatné je, že veškerá informace je uložena na hranicích buněk.

2. **V mikrosvětě platí druhá věta termodynamická**, tj pohyb částic způsobuje růst entropie na hranicích buněk (těm je přiřazena entropie a teplota). Pokud se částice v blízkosti stěny (holografického plátna) pohne o Δx , způsobí změnu entropie stěny o ΔS . Na částici přitom působí síla daná energetickou bilancí $T\Delta S = F\Delta x$. V případě uzavřeného holografického plátna je tato entropická síla gravitací.



11.47: Informace lokalizovaná na hranici prostoru

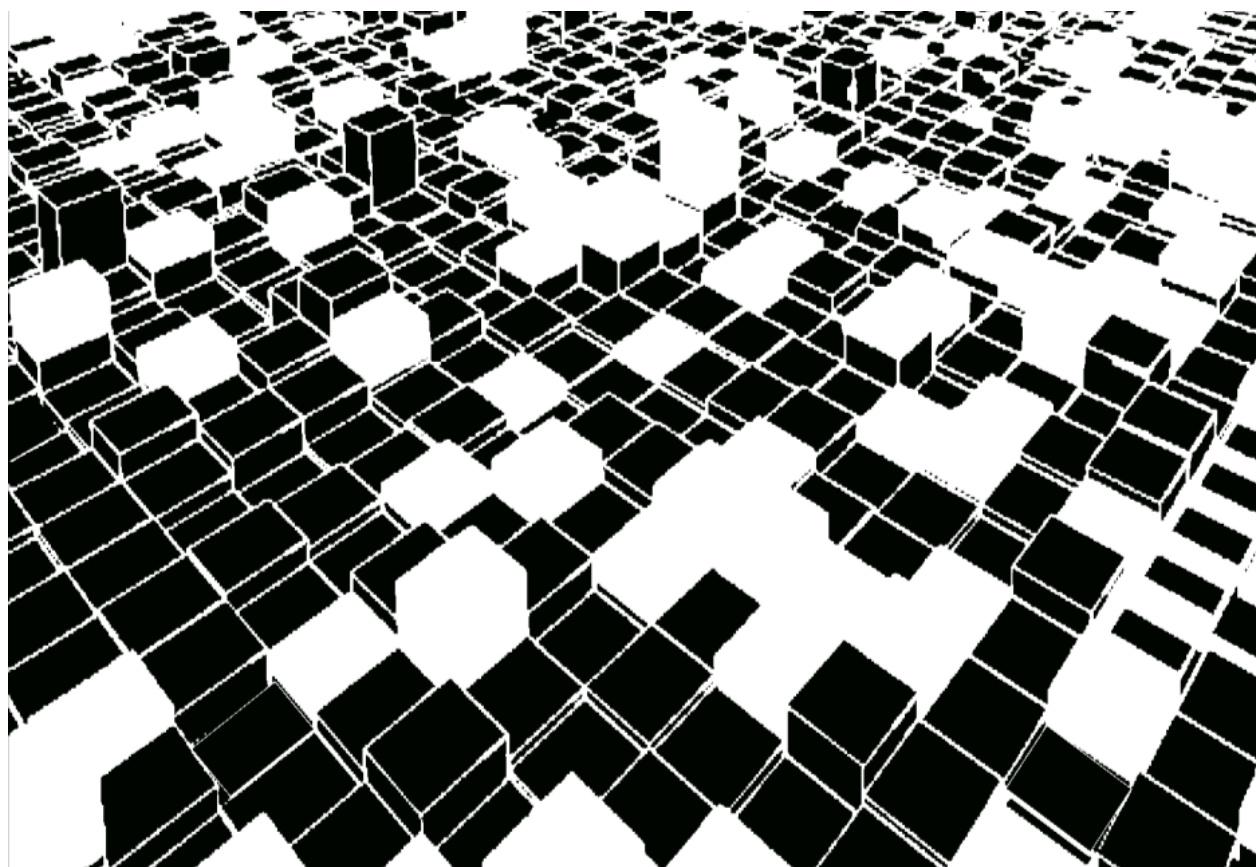
Verlindeovo pojetí řeší zcela neobvykle existenci prostoru a času. Prostor a čas se automaticky vynoří v důsledku existence informace (entropie) na uzavřeném holografickém plátně (hranici oblasti). Stejně tak jako vznikne prostor a čas, je i zákon setrvačnosti důsledkem existence informace na hranici oblasti. Verlinde ukázal, že růst

entropie v jeho holografickém světě vede na gravitační sílu (ať v Newtonově nebo v Einsteinově pojetí). Gravitační sílu tak chápe jako entropickou sílu, což znamená, že gravitace jakožto primární interakce neexistuje, je jen důsledkem statistického chování objektů mikrosvětla, stejně jako síla elastická. Základním vztahem pro entropickou sílu je energetická bilance

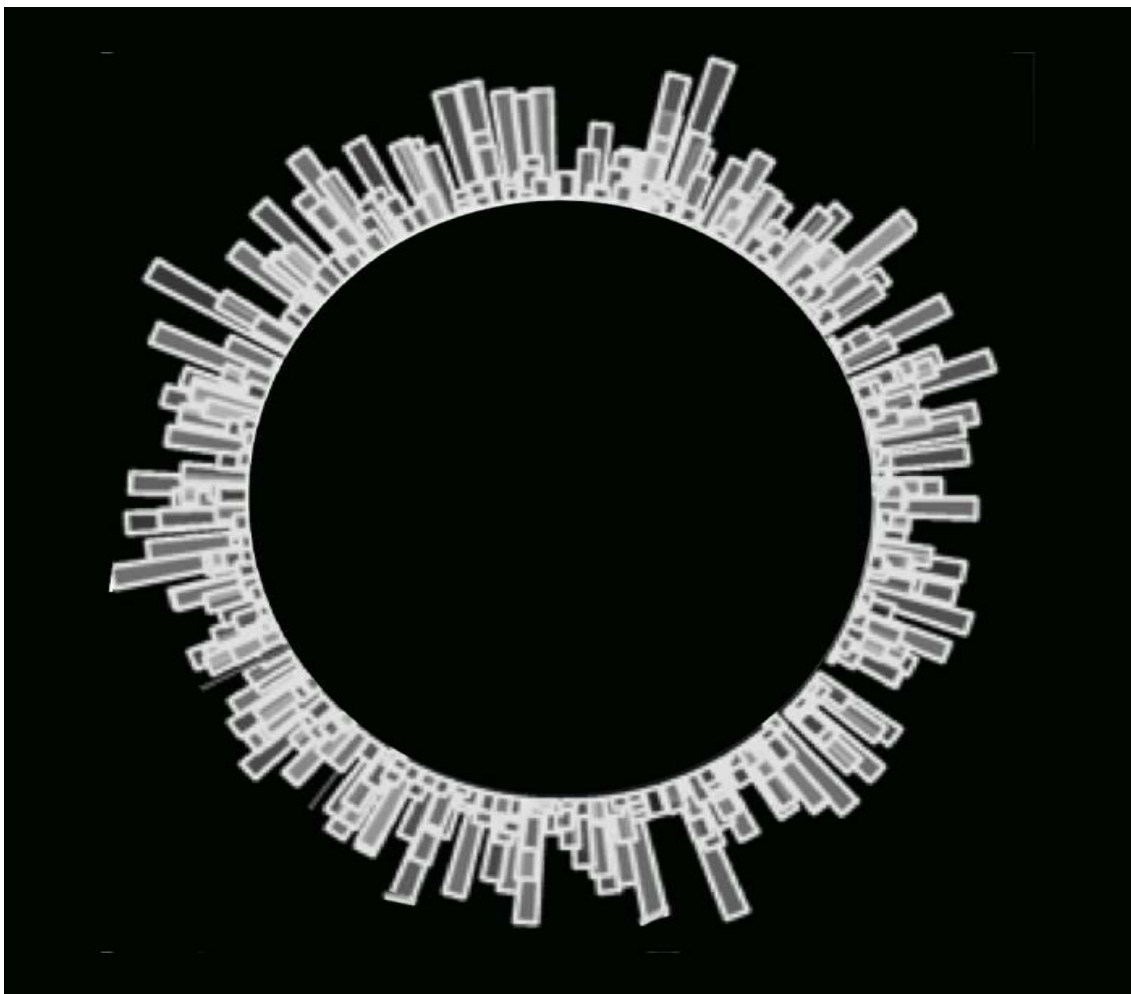
$$T\Delta S = F\Delta x. \quad (11.606)$$

kde $T\Delta S$ je v klasické termodynamice tepelná energie, $F\Delta x$ je práce vykonaná při pohybu částice.

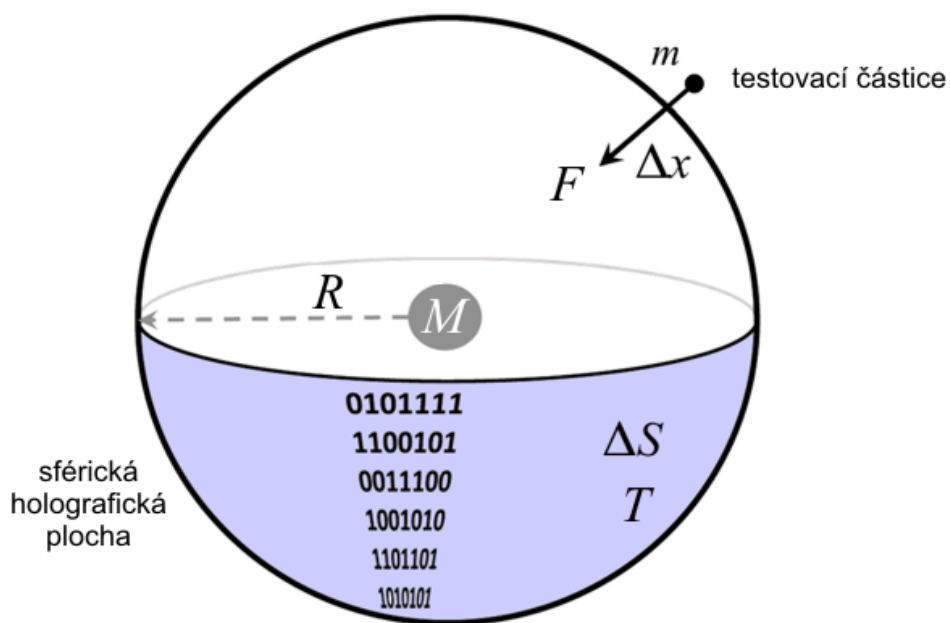
Předpokládejme nyní, že prostoročas není spojitý, ale je tvořen celulární sítí cytoprostorových buňek o Planckových rozměrech, jejichž povrch tvoří tzv. **holografické plátno**, na nějž se promítají veškeré informace z nitra buňky (holografický princip).



11.48: Informace lokalizovaná na hranici prostoru – 2D model



11.49: Povrch sférického subchronoru jako hologram



Obr. 11.50: Verlindeova holografická plocha

Informací na povrchu buňky jsou určeny vlastnosti prostoru a času a také rozložení hmoty M uvnitř buňky. Necht' se v blízkosti buňky pohybuje malá testovací částice o hmotnosti m . V důsledku jejího pohybu se změní entropie buňky o

$$\Delta S \sim m\Delta x. \quad (11.607)$$

Změna entropie je úměrná hmotnosti částice (dělením větší hmoty získáme více informace) a velikosti posunu částice. Teplotu povrchu sféry určíme z následující úvahy. Energie hmoty uvnitř musí být dána ekvipartičním teorémem, tj

$$Mc^2 = \frac{Nk_B T}{2}, \quad (11.608)$$

kde N je počet informačních bitů úměrný ploše holografického plátna, tedy R^2 . Odsud máme:

$$T \sim \frac{M}{R^2}. \quad (11.609)$$

Prostým dosazením (11.608) a (11.609) do Verlindeovy formule pro entropickou sílu (11.606) máme okamžitě

$$F \sim \frac{Mm}{R^2}, \quad (11.610)$$

tedy Newtonův gravitační zákon. Nikde jsme přitom nepředpokládali, že by na mikroskopické úrovni existovala gravitační síla. Gravitační síla se vynořila z informace uložené na povrchu holografického plátna spolu s časem, prostorem i zákonem setrvačnosti.

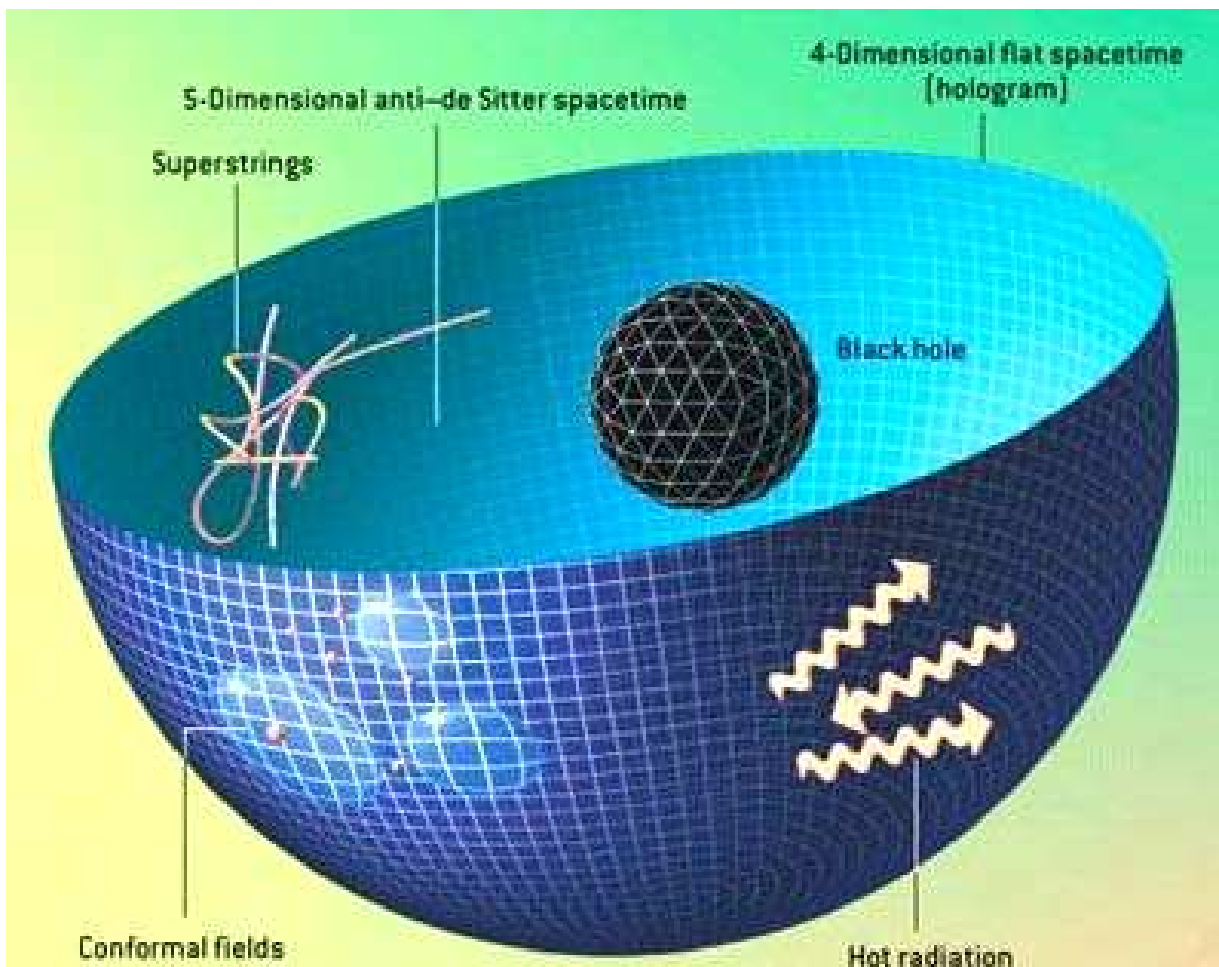
V únoru 2011 se britským fyzikům a odborníkům na kvantovou teorii informace Samuelu Braunsteinovi a Manasu Patrovi z Univerzity v Yorku podařilo na základě Verlindeových myšlenek odvodit spektrum Hawkingova vypařování černých děr bez použití časoprostoru zakřiveného obecnou relativitou. Publikovaný článek výrazně zdvihl vlnu zájmu o Verlindeovo pojetí gravitace.



Samuel Leon Braunstein (1961)



Manas Kumar Patra (1978)



Obr. 11.51: Havkingovo záření z Verlindeovy teorie gravitace

Gravitační konstanta

Podívejme se nyní, zda stacionární teorie cytoprostoru dokáže stanovit rovněž i správnou velikost konstanty úměrnosti ve vztahu (11.610) a tedy předpovědět správně nejen funkční závislost, ale i skutečnou velikost gravitační síly.

Vztah (11.608) nejprve přepíšeme do tvaru

$$T = \frac{2Mc^2}{Nk_B}. \quad (11.611)$$

Z formulí (11.611), (11.607), (11.606) pak plyne rovnost

$$F = \frac{2Mc^2}{Nk_B} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{2Mc^2}{Nk_B} \frac{m\Delta x}{\Delta x} = \frac{2mMc^2}{Nk_B} \equiv \frac{GmM}{R^2}. \quad (11.612)$$

Srovnáním (11.134), (11.135), (11,136) plyne pro poloměr vesmíru r vztah

$$r = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi\rho_v G}}. \quad (11.613)$$

Použitím rovnosti

$$R = 2\sqrt{2} \cdot r, \quad (11.614)$$

plynoucím z geometrie kubického subchronoru, dostáváme výraz (11.125), který jsme původně pouze postulovali. Dosazením z (11.134), (11.144), do (11.145), máme

$$N = \frac{8m_v}{m_y} = \frac{32rz^5}{5\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi c^3}{Gh}}, \quad (11.615)$$

odkud již, dosazením z (11.125) a (11.613), máme konečný výsledek

$$G = \frac{2R^2 c^2}{Nk_B} = \frac{5}{4\pi k_B z^5} \sqrt{\frac{3hc^3}{\rho_v}}. \quad (11.616)$$

Povšimněme si závislosti gravitační konstanty na aktuální hustotě hmoty ve vesmíru, která odpovídá přibližně jednomu protonu na krychlový metr.