

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
FAKULTA STAVEBNÍ

---

Ing. Jana Hřebíčková, RNDr. Jana Slaběňáková,  
RNDr. Hana Šafářová

**SBÍRKA PŘÍKLADŮ  
Z MATEMATIKY II**

MODUL BA01-M11

NEURČITÝ A URČITÝ INTEGRÁL, DIFERENCIÁLNÍ  
POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH,  
DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE



STUDIJNÍ OPORY  
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU  
FORMOU STUDIA

---



# Obsah

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Neurčitý integrál</b>                          | <b>5</b>  |
| 1.1      | Integrace užitím základních vzorců . . . . .      | 5         |
| 1.2      | Integrace substituční metodou . . . . .           | 9         |
| 1.3      | Integrace metodou per partes . . . . .            | 12        |
| 1.4      | Integrace racionálních funkcí . . . . .           | 16        |
| 1.5      | Integrace iracionálních funkcí . . . . .          | 19        |
| 1.6      | Integrace goniometrických funkcí . . . . .        | 22        |
| <b>2</b> | <b>Určitý integrál</b>                            | <b>27</b> |
| 2.1      | Výpočet určitého integrálu . . . . .              | 27        |
| 2.1.1    | Výpočet úpravou . . . . .                         | 27        |
| 2.1.2    | Výpočet metodou per partes . . . . .              | 28        |
| 2.1.3    | Výpočet substitucí . . . . .                      | 29        |
| 2.2      | Aplikace určitého integrálu . . . . .             | 32        |
| 2.2.1    | Obsah rovinného obrazce . . . . .                 | 32        |
| 2.2.2    | Objem rotačního tělesa . . . . .                  | 36        |
| 2.2.3    | Délka oblouku rovinné křivky . . . . .            | 38        |
| 2.2.4    | Povrch rotačního tělesa . . . . .                 | 41        |
| 2.2.5    | Fyzikální aplikace . . . . .                      | 42        |
| <b>3</b> | <b>Diferenciální počet funkcí více proměnných</b> | <b>47</b> |
| 3.1      | Definiční obory funkcí více proměnných . . . . .  | 47        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.2      | Parciální derivace . . . . .                                     | 48        |
| 3.3      | Tečná rovina a normála plochy, gradient, . . . . .               | 55        |
| 3.4      | Taylorův polynom . . . . .                                       | 58        |
| 3.5      | Lokální, vázané a absolutní extrémý . . . . .                    | 60        |
| 3.5.1    | Stacionární body . . . . .                                       | 60        |
| 3.5.2    | Lokální extrémý . . . . .  | 60        |
| 3.5.3    | Vázané extrémý . . . . .   | 63        |
| 3.5.4    | Absolutní extrémý . . . . .                                      | 64        |
| 3.5.5    | Slovní příklady . . . . .  | 65        |
| 3.6      | Funkce dané implicitně . . . . .                                 | 67        |
| 3.7      | Parametrizace křivek . . . . .                                   | 72        |
| 3.8      | Tečna a normálová rovina prostorové křivky . . . . .             | 73        |
| <b>4</b> | <b>Diferenciální rovnice</b>                                     | <b>75</b> |
| 4.1      | Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými . . . . .       | 75        |
| 4.2      | Lineární diferenciální rovnice 1. řádu . . . . .                 | 78        |
| 4.3      | Exaktní diferenciální rovnice . . . . .                          | 79        |
| 4.4      | LDR s konstantními koeficienty, homogenní . . . . .              | 80        |
| 4.5      | LDR s konstantními koeficienty, nehomogenní . . . . .            | 82        |
| 4.5.1    | Metoda variace konstant . . . . .                                | 82        |
| 4.5.2    | Metoda neurčitých koeficientů - speciální pravá strana . . . . . | 84        |
| 4.5.3    | Různé příklady . . . . .   | 86        |

# Kapitola 1

## Neurčitý integrál

### 1.1 Integrace užitím základních vzorců

- $\int \left( x + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$   $\left[ \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c \right]$
- $\int \left( \frac{14}{3}\sqrt{x^3} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{4}{3x^2} \right) dx$   $\left[ \frac{28}{15}\sqrt{x^5} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{3x} + c \right]$
- $\int (10^x - 2^x + 5^{2x}) dx$   $\left[ \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c \right]$
- $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3} dx$   $\left[ x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + c \right]$
- $\int \left( \frac{1-x}{x} \right)^2 dx$   $\left[ -\frac{1}{x} + x - 2\ln|x| + c \right]$
- $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$   $\left[ \frac{2x^2}{\sqrt{5}}\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c \right]$
- $\int \frac{a}{b \sin^2 x} dx$   $\left[ -\frac{a}{b} \cot x + c \right]$
- $\int \frac{5 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}{2 \sin^2 x \cos^2 x} dx$   $\left[ \frac{5}{2} \tan x - \frac{3}{2} \cot x + c \right]$
- $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$   $\left[ \tan x - x + c \right]$
- $\int \frac{3 - 2 \cot^2 x}{\cos^2 x} dx$   $\left[ 3 \tan x + 2 \cot x + c \right]$
- $\int \cot^2 x dx$   $\left[ -\cot x - x + c \right]$

12.  $\int \frac{5 \cos^2 x}{3 \sin^2 x} dx$   $\left[ -\frac{5}{3} \cot x - \frac{5}{3}x + c \right]$
13.  $\int \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$   $\left[ x + \cos x + c \right]$
14.  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$   $\left[ \tan x - \cot x + c \right]$
15.  $\int \frac{\cos^2 x + 1}{1 + \cos 2x} dx$   $\left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \tan x + c \right]$
16.  $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$   $\left[ \sin x - \cos x + c \right]$
17.  $\int 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx$   $\left[ x - \sin x + c \right]$
18.  $\int \frac{3}{1 + \cos 2x} dx$   $\left[ \frac{3}{2} \tan x + c \right]$
19.  $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$   $\left[ -\cot x - x + c \right]$
20.  $\int \frac{1}{1 - \cos 2x} dx$   $\left[ -\frac{1}{2} \cot x + c \right]$
21.  $\int a^x \left( 1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$   $\left[ a^x \frac{1}{\ln a} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c \right]$
22.  $\int e^x \left( 1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$   $\left[ e^x + \tan x + c \right]$
23.  $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$   $\left[ e^x + x + c \right]$
24.  $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$   $\left[ \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + c \right]$
25.  $\int \frac{4}{\sqrt{4 - 4x^2}} dx$   $\left[ 2 \arcsin x + c \right]$
26.  $\int \frac{3 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$   $\left[ 3 \arcsin x - x + c \right]$
27.  $\int \frac{1}{8 + 8x^2} dx$   $\left[ \frac{1}{8} \arctan x + c \right]$
28.  $\int \frac{3x^4 - 7x^2 + 5}{x^2 + 1} dx$   $\left[ x^3 - 10x + 15 \arctan x + c \right]$
29.  $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$   $\left[ x - \arctan x + c \right]$
30.  $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$   $\left[ x - 2 \arctan x + c \right]$
31.  $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$   $\left[ \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + c \right]$

32.  $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$   $\left[ -\frac{1}{x} + \arctan x + c \right]$
33.  $\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2+2x^2}} dx$   $\left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + c \right]$
34.  $\int \frac{5}{\sqrt{9x^2-18}} dx$   $\left[ \frac{5}{3} \ln |x + \sqrt{x^2-2}| + c \right]$
35.  $\int \frac{2\sin^2 x - 3\cos^2 x}{5\cos^2 x} dx$   $\left[ \frac{2}{5} \tan x - x + c \right]$
36.  $\int \frac{4+e^x\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{x^2+2}} dx$   $\left[ e^x + 4 \ln |x + \sqrt{x^2+2}| + c \right]$
37.  $\int \frac{3+e^{-x}\sin x}{e^{-x}} dx$   $\left[ 3e^x - \cos x + c \right]$
38.  $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$   $\left[ \frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}} + c = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c \right]$
39.  $\int \tan x dx$   $\left[ -\ln |\cos x| + c \right]$
40.  $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$   $\left[ -\ln |\cos x| + \ln |\sin x| + c \right]$
41.  $\int \frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x+1}} dx$   $\left[ x + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c \right]$
42.  $\int \frac{x^2+3}{x^2+1} dx$   $\left[ x + 2 \arctan x + c \right]$
43.  $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$   $\left[ \cos x - \cot x + c \right]$
44.  $\int \frac{2\tan^2 x+5}{3\sin^2 x} dx$   $\left[ \frac{2}{3} \tan x - \frac{5}{3} \cot x + c \right]$
45.  $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$   $\left[ -\cot x - \tan x + c \right]$
46.  $\int \frac{4\cos 2x}{\sin 2x} dx$   $\left[ 2(\ln |\sin x| + \ln |\cos x|) + c \right]$
47.  $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} dx$   $\left[ \frac{1}{4}(-\cot x - \tan x) + c \right]$
48.  $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$   $\left[ \frac{1}{2}(\tan x + x) + c \right]$
49.  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$   $\left[ \frac{1}{2}(x + \sin x) + c \right]$
50.  $\int \frac{3}{1+\cos 2x} dx$   $\left[ \frac{3}{2} \tan x + c \right]$
51.  $\int \frac{1+\sin^2 x+\cos^2 x}{1-\cos 2x} dx$   $\left[ -\frac{3}{2} \cot x - \frac{x}{2} + c \right]$

52.  $\int \frac{4x^2}{2x+1} dx$   $\left[ x^2 - x + \frac{1}{2} \ln |2x + 1| + c \right]$
53.  $\int \frac{x^2-3}{1+x^2} dx$   $\left[ x - 4 \arctan x + c \right]$
54.  $\int \frac{\cos^2 x \sin^2 \frac{x}{2} + 1}{\cos^2 x} dx$   $\left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x + \tan x + c \right]$
55.  $\int \frac{3-2 \cot^2 x}{\cos^2 x} dx$   $\left[ 3 \tan x + 2 \cot x + c \right]$
56.  $\int \frac{3 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + 5}{4 \cos^2 x} dx$   $\left[ 2 \tan x - \frac{5}{4}x + c \right]$
57.  $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+4} dx$   $\left[ \ln |x^3 - x + 4| + c \right]$
58.  $\int \frac{3x^5+4}{x^6+8x+5} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln |x^6 + 8x + 5| + c \right]$
59.  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$   $\left[ \ln |\ln x| + c \right]$
60.  $\int \frac{10x^4+6}{x^5+3x-7} dx$   $\left[ 2 \ln |x^5 + 3x - 7| + c \right]$
61.  $\int (e^x + 1)^3 dx$   $\left[ \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{2}e^{2x} + 3e^x + x + c \right]$
62.  $\int \frac{x^3+2x^2+x+5}{x^2+1} dx$   $\left[ \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \arctan x + c \right]$
63.  $\int \frac{1-\sin 2x}{\sin x - \cos x} dx$   $\left[ -\cos x - \sin x + c \right]$
64.  $\int \frac{2 \tan^2 x + 5}{3 \sin^2 x} dx$   $\left[ \frac{1}{3}(2 \tan x - 5 \cot x) + c \right]$
65.  $\int \frac{6x^3-4x^2+2x-3}{2x-1} dx$   $\left[ x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{4} \ln |2x - 1| + c \right]$
66.  $\int \frac{x+2}{2x-1} dx$   $\left[ \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \ln |2x - 1| + c \right]$
67.  $\int \frac{2x-1}{x-2} dx$   $\left[ 2x + 3 \ln |x - 2| + c \right]$
68.  $\int \frac{\cos x}{\sin x+1} dx$   $\left[ \ln |\sin x + 1| + c \right]$
69.  $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$   $\left[ \ln |e^x + 1| + c \right]$
70.  $\int \frac{dx}{(x^2+1) \arctan x}$   $\left[ \ln |\arctan x| + c \right]$



## 1.2 Integrace substituční metodou

1.  $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$   $\left[ \tan \frac{x}{2} + c \right]$
2.  $\int \frac{1}{1-\cos x} dx$   $\left[ -\cot \frac{x}{2} + c \right]$
3.  $\int \frac{1}{1-\cos 4x} dx$   $\left[ -\frac{1}{4} \cot 2x + c \right]$
4.  $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx$   $\left[ e^x + e^{-x} + c \right]$
5.  $\int (4x-3)^4 dx$   $\left[ \frac{1}{20}(4x-3)^5 + c \right]$
6.  $\int \left(1 - \frac{x}{6}\right)^5 dx$   $\left[ -\left(1 - \frac{x}{6}\right)^6 + c \right]$
7.  $\int \frac{1}{(2x-7)^5} dx$   $\left[ -\frac{1}{8} \frac{1}{(2x-7)^4} + c \right]$
8.  $\int \frac{1}{x^2-6x+9} dx$   $\left[ -\frac{1}{x-3} + c \right]$
9.  $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx$   $\left[ -\frac{5}{33}(8-3x)^{\frac{11}{5}} + c \right]$
10.  $\int \frac{1}{7x-a} dx$   $\left[ \frac{1}{7} \ln |7x-a| + c \right]$
11.  $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx$   $\left[ \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c \right]$
12.  $\int \frac{1}{\sin^2(3x-7)} dx$   $\left[ -\frac{1}{3} \cot(3x-7) + c \right]$
13.  $\int \frac{5}{\sqrt{2-49x^2}} dx$   $\left[ \frac{5}{7} \arcsin \frac{7x}{\sqrt{2}} + c \right]$
14.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} dx$   $\left[ \frac{1}{5} \arcsin 5x + c \right]$
15.  $\int \frac{1}{\sqrt{-3x^2+6x+4}} dx$   $\left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{7}} + c \right]$
16.  $\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$   $\left[ \arcsin \frac{x-1}{2} + c \right]$
17.  $\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}} dx$   $\left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + c \right]$
18.  $\int \frac{1}{\sqrt{-2x-x^2}} dx$   $\left[ \arcsin(x+1) + c \right]$
19.  $\int \frac{3}{\sqrt{4x-x^2}} dx$   $\left[ 3 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{2}} + c \right]$

20.  $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \arctan 2x + c \right]$
21.  $\int \frac{1}{9+4x^2} dx$   $\left[ \frac{1}{6} \arctan \frac{2}{3}x + c \right]$
22.  $\int \frac{2}{(x-1)^2+4} dx$   $\left[ \arctan \frac{x-1}{2} + c \right]$
23.  $\int \frac{4}{\sqrt{(x-3)^2+3}} dx$   $\left[ 4 \ln \left| (x-3) \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{(x-3)^2+3} \right| + c \right]$
24.  $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+5}} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{4x^2+5}| + c \right]$
25.  $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+3}} dx$   $\left[ \ln |x-1 + \sqrt{(x-1)^2+3}| + c \right]$
26.  $\int \frac{1}{\sqrt{1+(3-5x)^2}} dx$   $\left[ -\frac{1}{5} \ln |3-5x - \sqrt{1+(3-5x)^2}| + c \right]$
27.  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$   $\left[ \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x+3}| + c \right]$
28.  $\int \sin x \cos x dx$   $\left[ \frac{1}{2} \sin^2 x + c \right]$
29.  $\int \tan x \frac{1}{\cos^2 x} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \tan^2 x + c \right]$
30.  $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \arctan \frac{e^x}{2} + c \right]$
31.  $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8+1}} dx$   $\left[ \frac{1}{4} \ln |x^4 + \sqrt{x^8+1}| + c \right]$
32.  $\int \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$   $\left[ -\frac{1}{4} \frac{1}{(1+x^2)^2} + c \right]$
33.  $\int \sin x \cos^3 x dx$   $\left[ -\frac{1}{4} \cos^4 x + c \right]$
34.  $\int \frac{1}{x \sqrt[3]{\ln x}} dx$   $\left[ \frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 x} + c \right]$
35.  $\int \frac{1}{4x^2+9} dx$   $\left[ \frac{1}{6} \arctan \frac{2}{3}x + c \right]$
36.  $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$   $\left[ \arctan(x+2) + c \right]$
37.  $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}} dx$   $\left[ \frac{5}{3} \sqrt[5]{\sin^3 x} + c \right]$
38.  $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx$   $\left[ -\frac{1}{4} \frac{1}{\sin^4 x} + c \right]$
39.  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$   $\left[ -2\sqrt{1+\cos^2 x} + c \right]$

40.  $\int \frac{1+\ln(x+1)}{x+1} dx$   $\left[ \frac{1}{2}(1 + \ln(x + 1))^2 + c \right]$
41.  $\int e^x \cot e^x dx$   $\left[ \ln |\sin e^x| + c \right]$
42.  $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$   $\left[ \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + c \right]$
43.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$   $\left[ \frac{1}{2}(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}) + c \right]$
44.  $\int \frac{x^2}{x^6+4} dx$   $\left[ \frac{1}{6} \arctan \frac{x^3}{2} + c \right]$
45.  $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx$   $\left[ \frac{1}{\ln 2} \arcsin 2^x + c \right]$
46.  $\int x\sqrt{a^2 - x^2} dx$   $\left[ -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + c \right]$
47.  $\int \frac{1}{4x^2+4x+5} dx$   $\left[ \frac{1}{4} \arctan \frac{2x+1}{2} + c \right]$
48.  $\int e^{e^x+x} dx$   $\left[ e^{e^x} + c \right]$
49.  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx$   $\left[ \frac{4}{21} \sqrt[4]{(e^x + 1)^3} (3e^x - 4) + c \right]$
50.  $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx$   $\left[ \frac{1}{6} \sqrt{2+4x}(x-1) + c \right]$
51.  $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$   $\left[ 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2} \arctan \sqrt{\frac{x-2}{2}} + c \right]$
52.  $\int \frac{x}{x^4-x^2-2} dx$   $\left[ \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^2-2}{x^2+1} \right| + c \right]$
53.  $\int \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx$   $\left[ \ln x + \ln |\ln x| + c \right]$
54.  $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+2 \cos x}} dx$   $\left[ -\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1+2 \cos x)^2} + c \right]$
55.  $\int \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$   $\left[ -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + c \right]$
56.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$   $\left[ 2e^{\sqrt{x}} + c \right]$
57.  $\int e^{\sin x} \cos x dx$   $\left[ e^{\sin x} + c \right]$
58.  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$   $\left[ \frac{1}{3} \ln^3 x + c \right]$
59.  $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$   $\left[ \frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} + c \right]$
60.  $\int \frac{\arctan^3 x}{3(1+x^2)} dx$   $\left[ \frac{1}{12} \arctan^4 x + c \right]$

### 1.3 Integrace metodou per partes

1.  $\int x e^x dx$   $[x e^x - e^x + c]$
2.  $\int x \sin 2x dx$   $[-\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c]$
3.  $\int x \cos^2 x dx$   $[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + c]$
4.  $\int x^2 \cos x dx$   $[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c]$
5.  $\int x^2 e^{-2x} dx$   $[\frac{1}{2}e^{-2x}(-x^2 - x - \frac{1}{2}) + c]$
6.  $\int x^3 e^{x^2} dx$   $[\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + c]$
7.  $\int x \ln x dx$   $[\frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + c]$
8.  $\int x^2 \ln x dx$   $[\frac{1}{9}x^3(3 \ln x - 1) + c]$
9.  $\int x \arctan x dx$   $[\frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + c]$
10.  $\int \ln x dx$   $[x \ln x - x + c]$
11.  $\int \log_a x dx$   $[x \log_a x - \frac{1}{\ln a}x + c]$
12.  $\int \arctan \sqrt{x} dx$   $[x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c]$
13.  $\int x a^x dx$   $[\frac{1}{\ln a}x a^x - \frac{1}{\ln^2 a}a^x + c]$
14.  $\int x^2 \sin x dx$   $[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c]$
15.  $\int e^x \sin 2x dx$   $[\frac{1}{5}e^x(-2 \cos 2x + \sin 2x) + c]$
16.  $\int x e^{-x} dx$   $[-e^{-x}(x + 1) + c]$
17.  $\int x^2 \sin 2x dx$   $[-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c]$
18.  $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$   $[\frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + x + \frac{1}{2} \ln |\frac{x-1}{x+1}| + c]$
19.  $\int x \tan^2 x dx$   $[x(\tan x - x) + \frac{1}{2}x^2 + \ln |\cos x| + c]$

20.  $\int x^3 e^x dx$   $\left[ x^3 e^x - 3e^x x^2 + 6xe^x - 6e^x + c \right]$
21.  $\int \ln^2 x dx$   $\left[ x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c \right]$
22.  $\int (\arcsin x)^2 dx$   $\left[ x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + c \right]$
23.  $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$   $\left[ -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2} \cot x + c \right]$
24.  $\int \sin^2 x dx$   $\left[ \frac{1}{2}x - \frac{\sin x \cos x}{2} + c \right]$
25.  $\int \arcsin x dx$   $\left[ x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \right]$
26.  $\int x \sin^2 \frac{x}{2} dx$   $\left[ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \sin x - \frac{1}{2} \cos x + c \right]$
27.  $\int x^2 e^{-2x} dx$   $\left[ -\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 + x + \frac{1}{2}) + c \right]$
28.  $\int (x^2 - 3x + 2)e^x dx$   $\left[ (x^2 - 5x + 7)e^x + c \right]$
29.  $\int x^2 \ln(x+1) dx$   $\left[ \frac{1}{3}(x^3 + 1) \ln(x+1) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + c \right]$
30.  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$   $\left[ -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c \right]$
31.  $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$   $\left[ \frac{2x\sqrt{x}}{3}(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9}) + c \right]$
32.  $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$   $\left[ x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + c \right]$
33.  $\int e^{\sqrt{x}} dx$   $\left[ 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + c \right]$
34.  $\int \ln(x^2 + 1) dx$   $\left[ x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctan x + c \right]$
35.  $\int \frac{\sin \frac{x}{2}}{e^x} dx$   $\left[ -\frac{2}{5e^x}(2 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) + c \right]$
36.  $\int \frac{\ln x}{x} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln^2 x + c \right]$
37.  $\int e^{\frac{x}{2}} \cos 2x dx$   $\left[ \frac{2}{17}e^{\frac{x}{2}}(4 \sin 2x + \cos 2x) + c \right]$
38.  $\int e^{-\frac{x}{3}} \sin \frac{x}{3} dx$   $\left[ -\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{3}}(\sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}) + c \right]$
39.  $\int e^x \cos^2 x dx$   $\left[ \frac{1}{5}e^x(\sin 2x + \cos^2 x + 2) + c \right]$

40.  $\int \sin \ln x \, dx$   $\left[ \frac{1}{2}x(\sin \ln x - \cos \ln x) + c \right]$
41.  $\int \cos \ln x \, dx$   $\left[ \frac{1}{2}x(\cos \ln x + \sin \ln x) + c \right]$
42.  $\int x \cos x \, dx$   $\left[ x \sin x + \cos x + c \right]$
43.  $\int x^2 e^x \, dx$   $\left[ e^x(x^2 - 2x + 2) + c \right]$
44.  $\int \arctan x \, dx$   $\left[ x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c \right]$
45.  $\int \frac{x^2}{(4x^2+5)^2} \, dx$   $\left[ -\frac{x}{8(4x^2+5)} + \frac{\sqrt{5}}{80} \arctan \frac{2x}{\sqrt{5}} + c \right]$
46.  $\int \frac{\ln^3 x}{x} \, dx$   $\left[ -\frac{1}{x^2} \ln^3 x - \frac{3}{x} \ln^2 x - \frac{6}{x} \ln x - \frac{6}{x} + c \right]$
47.  $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}} \, dx$   $\left[ (\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}) \arctan x - 2\sqrt{x} + c \right]$
48.  $\int x^2 \arctan x \, dx$   $\left[ \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6} \ln(x^2 + 1) + c \right]$
49.  $\int e^{ax} \cos bx \, dx$   $\left[ \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c \right]$
50.  $\int \frac{1-\ln x}{x^2} \, dx$   $\left[ \frac{1}{x} \ln x + c \right]$
51.  $\int \arctan \sqrt{2x-1} \, dx$   $\left[ x \arctan \sqrt{2x-1} - \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + c \right]$
52.  $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$   $\left[ x \tan x + \ln(\cos x) + c \right]$
53.  $\int x(\arctan x)^2 \, dx$   $\left[ \frac{x^2+1}{2}(\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \right]$
54.  $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} \, dx$   $\left[ \tan x \ln(\cos x) + \tan x - x + c \right]$
55.  $\int x \ln(x+1) \, dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln(x+1)(x^2-1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + c \right]$
56.  $\int \arctan \frac{x-1}{x+1} \, dx$   $\left[ x \arctan \frac{x-1}{x+1} - \ln \sqrt{1+x^2} + c \right]$
57.  $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$   $\left[ x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + c \right]$
58.  $\int \sqrt{4-x^2} \, dx$   $\left[ \frac{1}{2}(x\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2}) + c \right]$

$$59. \int \sqrt{a+x^2} dx \quad \left[ \frac{1}{2}x\sqrt{a+x^2} + \frac{1}{2}a \ln|x + \sqrt{a+x^2}| + c \right]$$

$$60. \int x^2 \arccos x dx \quad \left[ \frac{1}{3}(x^2 \arccos x - \ln \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2)) + c \right]$$

Návod:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4-x^2} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{4-x^2} & u' = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \\ &= x\sqrt{4-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{4-x^2} - \int \frac{4-x^2-4}{\sqrt{4-x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} dx + \int \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} dx \end{aligned}$$

$$2 \int \sqrt{4-x^2} dx = x\sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2}$$

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2}) + c$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a+x^2} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{a+x^2} & u' = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{a+x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \\ &= x\sqrt{a+x^2} - \int \frac{a \pm x^2}{\sqrt{a+x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{a+x^2} - \int \frac{a+x^2}{\sqrt{a+x^2}} dx + \int \frac{a}{\sqrt{a+x^2}} dx = \\ &= \sqrt{a+x^2} - \int \sqrt{a+x^2} dx + a \ln|x + \sqrt{a+x^2}| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2 \int \sqrt{a+x^2} dx = x\sqrt{a+x^2} + a \ln|x + \sqrt{a+x^2}|$$

$$\int \sqrt{a+x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a+x^2} + \frac{1}{2}a \ln|x + \sqrt{a+x^2}| + c$$

## 1.4 Integrace racionálních funkcí

1.  $\int \frac{x}{2x^2-3x-2} dx$   $\left[ \frac{1}{5} \ln((x-2)^2 \sqrt{2x+1}) + c \right]$
2.  $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx$   $\left[ \ln \frac{x^2}{|x+1|} + \frac{6}{x+1} + c \right]$
3.  $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2} dx$   $\left[ \frac{3}{2x} - \frac{5}{4} \ln|x| + 20 \ln|x-3| - \frac{47}{4} \ln|x-2| + c \right]$
4.  $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx$   $\left[ \frac{x^2}{2} + x + \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \arctan x + c \right]$
5.  $\int \frac{x^4}{x^3-x^2+x-1} dx$   $\left[ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctan x + c \right]$
6.  $\int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} dx$   $\left[ \ln|2x-1| - 6 \ln|2x-3| + 5 \ln|2x-5| + c \right]$
7.  $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{x} dx$   $\left[ 4 \ln|x| - 3 \ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + c \right]$
8.  $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$   $\left[ \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + c \right]$
9.  $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx$   $\left[ \ln(x^2+4) + \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+2) - \frac{3}{2} \sqrt{2} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{2} + c \right]$
10.  $\int \frac{5x^2-12}{x^2-6x+13} dx$   $\left[ 5x + 15 \ln|x^2-6x+13| + \frac{13}{2} \arctan \frac{x-3}{2} + c \right]$
11.  $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$   $\left[ \frac{1}{4}x + \ln|x| - \frac{7}{16} \ln|2x-1| - \frac{9}{16} \ln|2x+1| + c \right]$
12.  $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$   $\left[ x + \frac{1}{x} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|} + c \right]$
13.  $\int \frac{x}{x^3-1} dx$   $\left[ \frac{1}{3} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \right]$
14.  $\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2(x+1)} + c \right]$
15.  $\int \frac{x}{x^4-1} dx$   $\left[ \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| + c \right]$
16.  $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+5} dx$   $\left[ \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \arctan \frac{x+1}{2} + c \right]$



17.  $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+5} dx$   $\left[ \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+5| - 7 \arctan(x+2) + c \right]$
18.  $\int \frac{x}{x^2-3x+3} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln|x^2-3x+3| + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-3}{\sqrt{3}} + c \right]$
19.  $\int \frac{5e^{2x}-e^x}{e^{2x}+3e^x+3} dx$   $\left[ \frac{5}{2} \ln|e^{2x}+3e^x+3| - \frac{17}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2e^x+3}{\sqrt{3}} + c \right]$
20.  $\int \frac{2 \ln x - 3}{x(\ln^2 x + \ln x + 1)} dx$   $\left[ \ln|\ln^2 x + \ln x + 1| - \frac{8}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \ln x + 1}{\sqrt{3}} + c \right]$
21.  $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)} dx$   $\left[ \ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + c \right]$
22.  $\int \frac{1}{2x^2+9x-5} dx$   $\left[ \frac{1}{11} \ln \left| \frac{2x-1}{x+5} \right| + c \right]$
23.  $\int \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$   $\left[ -\ln|e^x| + 2 \ln|e^x-1| + c \right]$
24.  $\int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)} dx$   $\left[ -\frac{3}{2} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln|(x-1)(x+1)^2| + c \right]$
25.  $\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1} dx$   $\left[ \frac{2}{3(3x-1)} + \ln|3x-1| + c \right]$
26.  $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx$   $\left[ -2 \ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + 2 \ln|x+4| - \frac{4}{x+4} + c \right]$
27.  $\int \frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2} dx$   $\left[ \ln(x^2+1) - 2 \arctan x + \frac{4}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c \right]$
28.  $\int \frac{1}{1+x^3} dx$   $\left[ \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c \right]$
29.  $\int \frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)} dx$   $\left[ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + c \right]$
30.  $\int \frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+3| + c \right]$
31.  $\int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1} dx$   $\left[ \frac{x^2}{2} + x + \ln|x^2-1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \arctan x + c \right]$
32.  $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$   $\left[ \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \arctan x + \frac{1}{x^2+1} + c \right]$

33.  $\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx$   $\left[ -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + c \right]$
34.  $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$   $\left[ -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{33}\ln|2x-3| + \frac{3}{11}\ln|3x+1| + c \right]$
35.  $\int \frac{2x+2}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx$   $\left[ -2\ln|x| + 2\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + c \right]$
36.  $\int \frac{6x^2-x+1}{x^3-x} dx$   $\left[ -\ln|x| + 3\ln|x-1| + 4\ln|x+1| + c \right]$
37.  $\int \frac{6x^2+4x+2}{(x+1)(x^2+2x+3)} dx$   $\left[ 2\ln(|x+1|(x^2+2x+3)) - 4\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c \right]$
38.  $\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} dx$   $\left[ \frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + c \right]$
39.  $\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)} dx$   $\left[ \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{9}{4(x-1)} + \frac{31}{8}\ln|x-1| + \frac{1}{8}\ln|x+1| + c \right]$
40.  $\int \frac{3x^3+x^2+5x+4}{x^4+8x^2+16} dx$   $\left[ \frac{3}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \frac{7}{2}\frac{1}{x^2+4} + c \right]$

## 1.5 Integrace iracionálních funkcí

1.  $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$   $\left[ 2(\sqrt{x} - \ln|\sqrt{x} + 1|) + c \right]$
2.  $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx$   $\left[ -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)}} + c \right]$
3.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$   $\left[ 2(\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}) + c \right]$
4.  $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^3} dx$   $\left[ 2 \ln|1 + \sqrt{x}| + \frac{4}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} + c \right]$
5.  $\int \frac{\sqrt[4]{x^3-7} \sqrt[3]{x^2+12\sqrt{x}}}{x(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x})} dx$   $\left[ \frac{12}{5} t^5 - 21t^4 + 4t^3 + 30t^2 + 12t + 36 \ln|t-1| + \right.$   
 $\left. + 24 \ln|t+1| + c, \text{ kde } t = \sqrt[12]{x} \right]$
6.  $\int \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} \frac{1}{(x+2)(x-1)} dx$   $\left[ \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + c \right]$
7.  $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2} dx$   $\left[ \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right| - \frac{\sqrt{2x+1}}{x} + c \right]$
8.  $\int \frac{1+\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x+1} dx$   $\left[ -2\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 2 \ln \left| \sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1 \right| + c \right]$
9.  $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$   $\left[ 6 \left( \frac{t^{16}}{16} - \frac{t^{10}}{5} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^4}{4} \right) + c, \right.$   
 $\left. \text{kde } t = \sqrt[6]{1+x} \right]$
10.  $\int \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx$   $\left[ x - 2\sqrt{x} + 2 \ln|\sqrt{x} + 1| + c \right]$
11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$   $\left[ 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c \right]$
12.  $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$   $\left[ \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c, \text{ kde } t = \sqrt{x+1} \right]$
13.  $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$   $\left[ 4\sqrt{x+1} + 4 \ln|\sqrt{x+1} - 1| + x + 1 + c \right]$
14.  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$   $\left[ 2(\sqrt{x+1} - \ln|\sqrt{x+1} + 1|) + c \right]$
15.  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$   $\left[ \ln|1-t| - \ln|1+t| + 2 \arctan t + c, \right.$   
 $\left. \text{kde } t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right]$
16.  $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$   $\left[ 2 \arctan \sqrt{x+1} + c \right]$
17.  $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$   $\left[ \frac{2}{35} \sqrt{x-1} (5x^3 + 6x^2 + 8x + 16) + c \right]$

18.  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)} dx$   $[3\sqrt[3]{x} + 3 \ln |\sqrt[3]{x} - 1| + c]$
19.  $\int \frac{1}{(3x+5)\sqrt{(2x+3)(x+2)}} dx$   $[-2 \arctan t + c, \text{ kde } t = \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}]$
20.  $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx$   $[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c]$
21.  $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx$   $[6 \ln |\frac{t}{t+1}| + c, t = \sqrt[6]{x}]$
22.  $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} dx$   $[2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln |\sqrt[4]{x} + 1| + c]$
23.  $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1}$   $[\frac{1}{2} \ln |t^2 + t + 1| \sqrt{3} + \arctan \frac{2t+1}{3} - \ln |t - 1| + c, \text{ kde } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}]$
24.  $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} dx$   $[2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln |t + 1| + c, \text{ kde } t = \sqrt[6]{x+1}]$
25.  $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} dx$   $[\frac{2}{3}t^9 - \frac{3}{4}t^8 + \frac{6}{7}t^7 - t^6 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^4 + c, \text{ kde } t = \sqrt[6]{x+1}]$
26.  $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx$   $[\text{návod: } t = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}, \ln |\frac{1+t}{1-t}| + c]$
27.  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} dx$   $[-\sqrt{2} \arctan \sqrt{2}t + \ln |\frac{t+1}{t-1}| + c, \text{ kde } t = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}]$
28.  $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1-\sqrt[3]{x})} dx$   $[-3 \ln |t+1| - \frac{3}{2}t^4 - 9 \ln |1-t| - 6t^2 + c, \text{ kde } t = \sqrt[6]{x}]$
29.  $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}} dx$   $[2t^3 + 6t + 3 \ln |\frac{t-1}{t+1}| + c, \text{ kde } t = \sqrt[6]{x}]$
30.  $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$   $[3(\frac{t^2}{2} - t + \ln |t+1|) + c, \text{ kde } t = \sqrt[3]{1+x}]$
31.  $\int \frac{\sqrt[4]{4x+1}}{1+\sqrt{4x+1}} dx$   $[\frac{t^3}{3} - t + \arctan t + c, \text{ kde } t = \sqrt[4]{4x+1}]$
32.  $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} dx$   $[\frac{1}{2} \ln |\frac{t-1}{t+1}| - \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} + c, \text{ kde } t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}]$

33.  $\int \frac{dx}{x - \sqrt[3]{3x+2}}$   $\left[ \frac{5}{3} \ln |t+1| + \frac{1}{t+1} + \frac{4}{3} \ln |t-2| + c, \right.$   
 $\left. \text{kde } t = \sqrt[3]{3x+2} \right]$
34.  $\int \frac{1}{(3x+5)(x+2)} \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} dx$   $\left[ -2 \arctan \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} + c \right]$
35.  $\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})} dx$   $\left[ 3t^2 - 6t + 6 \ln |t| + \frac{6}{t} - \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + c, \right.$   
 $\left. \text{kde } t = \sqrt[6]{x} \right]$
36.  $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx$   $\left[ 2\sqrt{x} + \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + c \right]$
37.  $\int \frac{x^2 dx}{3\sqrt[3]{x+2}}$   $\left[ \frac{t^8}{8} - \frac{4t^5}{5} + 2t^2 + c, \text{ kde } t = \sqrt[3]{x+2} \right]$
38.  $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{-\sqrt{x+1}+(x+1)^2} dx$   $\left[ 2 \ln |t-1| - \ln |t^2+t+1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \right.$   
 $\left. + c, \text{ kde } t = \sqrt{x+1} \right]$
39.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt[4]{x^3}}$   $\left[ \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} \ln |1+t^3| + c, \text{ kde } t = \sqrt[4]{x} \right]$
40.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$   $\left[ 4 \left( \frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln |t+1| \right) + c, \right.$   
 $\left. \text{kde } t = \sqrt[4]{x} \right]$

## 1.6 Integrace goniometrických funkcí

1.  $\int \sin x \cos x \, dx$   $\left[ \frac{1}{2} \sin^2 x + c \right]$
2.  $\int \tan x \, dx$   $\left[ -\ln |\cos x| + c \right]$
3.  $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} \, dx$   $\left[ \frac{\sin x - 2}{\cos x} + c \right]$
4.  $\int \cos x \sqrt{1 + 4\sin x} \, dx$   $\left[ \frac{1}{6}(1 + 4\sin x)^{\frac{3}{2}} + c \right]$
5.  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}} \, dx$   $\left[ -\sqrt{1 + 2\cos x} + c \right]$
6.  $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} \, dx$   $\left[ -\frac{1}{3} \ln |1 + 3\cos x| + c \right]$
7.  $\int \cos^3 x \, dx$   $\left[ \frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin x + c \right]$
8.  $\int \cos^4 x \, dx$   $\left[ \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \right]$
9.  $\int \frac{1}{\cos^3 x} \, dx$   $\left[ \text{rozšířit funkcí } \cos x, \text{ subst. } t = \sin x; \right.$   
 $\left. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| - \frac{1}{4(1-\sin x)} - \frac{1}{4(1+\sin x)} + c \right]$
10.  $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$   $\left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x} + c \right]$
11.  $\int 2 \sin^2 \frac{x}{2} \, dx$   $\left[ x - \sin x + c \right]$
12.  $\int \frac{1}{1-\cos 2x} \, dx$   $\left[ -\frac{1}{2} \cot x + c \right]$
13.  $\int \frac{\cos^2 x + 1}{1 + \cos 2x} \, dx$   $\left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \tan x + c \right]$
14.  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} \, dx$   $\left[ -\cot x - \tan x + c \right]$
15.  $\int \frac{1-\sin x}{\cos x} \, dx$   $\left[ \text{nápověda: subst. } t = \tan \frac{x}{2}; \text{ výsledek:} \right.$   
 $\left. \ln \frac{(\tan \frac{x}{2} + 1)^2}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} + c, \text{ nebo rozšířit funkcí } \cos x, \right.$   
 $\left. \text{subst. } t = \sin x; \text{ výsledek } \ln |1 + \sin x| + c \right]$
16.  $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} \, dx$   $\left[ \text{nápověda: } \cos^4 x \cdot \cos x, \text{ subst. } t = \sin x, \right.$   
 $\left. \text{výsledek: } -\frac{1}{4} \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \ln |\sin x| + c; \right]$

- nebo: subst.  $t = \tan x$ , výsledek:  
 $-\frac{1}{4} \cot^4 x + \frac{1}{2} \cot^2 x - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sin^2 x}$
17.  $\int \frac{1}{\cos x} dx$  [rozšířit  $\cos x$ , subst.  $t = \sin x$ , výsledek  
 $\ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + c$ , nebo  
 subst.  $t = \tan \frac{x}{2}$ ;  $\ln \left| \frac{1+\tan \frac{x}{2}}{1-\tan \frac{x}{2}} \right| + c$
18.  $\int \frac{1}{\sin x} dx$  [rozšířit  $\sin x$ , subst.  $t = \cos x$ , výsledek:  
 $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c$ , nebo  
 subst.  $t = \tan \frac{x}{2}$ ;  $\ln |\tan \frac{x}{2}| + c$
19.  $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$   $\left[ \frac{-2}{1+\tan \frac{x}{2}} + c \right]$
20.  $\int \frac{2+\cos x}{2-\sin x} dx$  [pro substituci:  $t = \tan \frac{x}{2}$ :  
 $\ln |1 + \tan^2 \frac{x}{2}| - \ln |\tan^2 \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} + 1| +$   
 $+ \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + c]$
21.  $\int \frac{1}{(2+\cos x) \sin x} dx$   $\left[ \frac{1}{3} \ln |2 + \cos x| + \frac{1}{6} \ln |1 - \cos x| -$   
 $-\frac{1}{2} \ln |1 + \cos x| + c \right]$
22.  $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx$  [subst.  $t = \sin x$ ,  $\frac{3}{4} \ln \left| \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \right| +$   
 $+\frac{1}{4(1-\sin x)} - \frac{1}{4(1+\sin x)} + \sin x + c]$
23.  $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$  [subst.  $t = \tan x$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \sqrt{2} \tan x + c]$
24.  $\int \frac{1}{\sin^6 x} dx$  [subst.  $t = \tan x$ ,  $-\frac{1}{5 \tan^5 x} - \frac{2}{3 \tan^3 x} -$   
 $-\frac{1}{\tan x} + c]$
25.  $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$  [subst.  $t = \tan x$ ,  $\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c]$
26.  $\int \frac{\cot x}{\sin x + \cos x - 1} dx$   $\left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c \right]$
27.  $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$   $[\cos x - 2 \arctan(\cos x) + c]$
28.  $\int \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2} dx$   $\left[ -\frac{1}{1+\tan x} + c \right]$

29.  $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx$   $\left[ \arctan(\sin^2 x) + c \right]$
30.  $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \ln |2 + \cos x| + c \right]$
31.  $\int \frac{\cos x \sin 2x}{\sin^2 x(1+\cos^2 x)} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + \arctan(\cos x) + c \right]$
32.  $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$   $\left[ \text{subst. } t = \cos x, -\frac{1}{4} \cos^4 x + \frac{1}{6} \cos^6 x + c \right]$
33.  $\int \cos^6 x \sin^5 x dx$   $\left[ -\frac{1}{7} \cos^7 x + \frac{2}{9} \cos^9 x - \frac{1}{11} \cos^{11} x + c \right]$
34.  $\int \cot^3 x dx$   $\left[ \text{subst. } t = \sin x, -\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln |\sin x| + c \right]$
35.  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$   $\left[ -\frac{1}{\sin x} - \sin x + c \right]$
36.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$   $\left[ -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + c \right]$
37.  $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$   $\left[ \frac{\cos^2 x + \sin x + 1}{\cos x} + c \right]$
38.  $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx$   $\left[ -\frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + x + c \right]$
39.  $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$   $\left[ \text{subst. } t = \sin 2x, -\frac{1}{48} \sin^3 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{x}{16} + c \right]$
40.  $\int \cos^4 x dx$   $\left[ \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + c \right]$
41.  $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$   $\left[ \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + c \right]$
42.  $\int \sin^4 x dx$   $\left[ -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \right]$
43.  $\int \cos^6 x dx$   $\left[ \frac{5}{16}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + c \right]$
44.  $\int \cos^4 x \sin^4 x dx$   $\left[ \text{úpravy pomocí vzorců, } \frac{1}{1024} \sin 8x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{3}{128}x + c \right]$
45.  $\int \sin^5 x \cos^5 x dx$   $\left[ \frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{4} + \frac{t^{10}}{10} + c, \text{ kde } t = \sin x \right]$
46.  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$   $\left[ \frac{1}{16} \left( x + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 6x}{12} \right) + c \right]$
47.  $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} dx$   $\left[ \tan x - \frac{2}{\cos x} + c \right]$



48.  $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x} dx$   $\left[ \frac{4}{1-\tan \frac{x}{2}} - x + c \right]$
49.  $\int \frac{1}{1-\cos x} dx$   $\left[ -\frac{1}{\tan \frac{x}{2}} + c \right]$
50.  $\int \cos x \sqrt{1+4\sin x} dx$   $\left[ \frac{1}{6} \sqrt{(1+4\sin x)^3} + c \right]$
51.  $\int \frac{1}{3\sin x - 4\cos x} dx$   $\left[ \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2\tan \frac{x}{2} - 1}{\tan \frac{x}{2} + 2} \right| + c \right]$
52.  $\int \frac{1}{5-4\sin x+3\cos x} dx$   $\left[ \frac{1}{2-\tan \frac{x}{2}} + c \right]$
53.  $\int \frac{1}{\sin 2x - 2\sin x} dx$   $\left[ \text{subst. } t = \tan \frac{x}{2}, \frac{1}{8\tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c, \right.$   
nebo subst.  $t = \cos x$ , výsledek:  
 $\left. \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} - \frac{1}{4} \frac{1}{\cos x - 1} \right| \right]$
54.  $\int \frac{1}{5-3\cos x} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \arctan(2 \tan \frac{x}{2}) + c \right]$
55.  $\int \frac{1}{5+4\sin x} dx$   $\left[ \frac{2}{3} \arctan \left( \frac{5 \tan \frac{x}{2} + 4}{3} \right) + c \right]$
56.  $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5} dx$   $\left[ \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan \left( \frac{\sqrt{5}}{5} (3 \tan \frac{x}{2} + 1) \right) + c \right]$
57.  $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx$   $\left[ -\frac{x}{5} - \frac{3}{5} \ln \left| \tan^2 \frac{x}{2} - 1 - \tan \frac{x}{2} \right| + \right.$   
 $\left. + \frac{3}{5} \ln \left| \tan^2 \frac{x}{2} + 1 \right| + c \right]$
58.  $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx$   $\left[ \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c \right]$
59.  $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx$   $\left[ \ln \left| \cos x + \sin x \right| + c \text{ nebo} \right.$   
subst.  $t = \tan x$ ,  $\ln \left| 1 + \tan x \right| -$   
 $\left. -\frac{1}{2} \ln \left| 1 + \tan^2 x \right| + c \right]$
60.  $\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x} dx$   $\left[ \frac{1}{2} (\ln \left| \tan x \right| + \tan x) + c \right]$
61.  $\int \sin 2x \cos 6x dx$   $\left[ -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{8} \cos 4x + c \right]$
62.  $\int \sin 3x \sin 5x dx$   $\left[ \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + c \right]$
63.  $\int \frac{1}{4} (\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x) dx$   $\left[ -\frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{24} \cos 6x + c \right]$

64.  $\int \frac{1}{\sin^5 x \cos^5 x} dx$  subst.  $t = \tan x$ ,  $\left[ \frac{1}{4}(\tan^4 x - \cot^4 x) + 2(\tan^2 x - \cot^2 x) + 6 \ln |\tan x| + c \right]$
65.  $\int \frac{1}{1-\sin x} dx$   $\left[ \frac{\cos x + \sin x + 1}{\cos x} + c \right]$
66.  $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx$   $\left[ \frac{1}{\cos x - 1} + c \right]$
67.  $\int \tan^2 x \sin^2 x dx$   $\left[ \tan x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \right]$
68.  $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$   $\left[ \text{subst. } t = \tan \frac{x}{2}, \ln |2 + \cos x| + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c \right]$
69.  $\int \frac{1}{\sin^2 x + \tan^2 x} dx$   $\left[ -\frac{1}{2} \left( \cot x + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) \right) + c \right]$
70.  $\int \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2} dx$   $\left[ \text{subst. } t = \tan \frac{x}{2}, \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \cot^3 \frac{x}{2} + c \right]$

# Kapitola 2

## Určitý integrál

### 2.1 Výpočet určitého integrálu

#### 2.1.1 Výpočet úpravou

$$1. \int_3^5 \frac{1}{x} dx \quad \left[ \ln \frac{5}{3} \right]$$

$$2. \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin^2 x} dx \quad [2]$$

$$3. \int_0^3 |1 - 3x| dx \quad \left[ \frac{65}{6} \right]$$

$$4. \int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} dx \quad [0]$$

$$5. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} dx \quad \left[ 2 - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$6. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx \quad [2]$$

$$7. \int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+4} dx \quad \left[ \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} \right]$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^2 x dx \quad \left[ \frac{\pi}{32} \right]$$

$$9. \int_{-2}^2 \left(\frac{x^2}{2} + 2\right) dx \quad \left[\frac{32}{3}\right]$$

$$10. \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx \quad [\ln 2]$$

$$11. \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 + 1) dx \quad [0]$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \quad \left[\frac{1}{2} \ln 2\right]$$

$$13. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \quad \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

$$14. \int_{-2}^0 (x^2 + 4x + 5) dx \quad \left[\frac{14}{3}\right]$$

$$15. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad [2]$$

### 2.1.2 Výpočet metodou per partes

$$16. \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad [\pi]$$

$$17. \int_{-1}^1 \ln(x+2) dx \quad [3 \ln 3 - 2]$$

$$18. \int_{-1}^1 \arccos x dx \quad [\pi]$$

$$19. \int_0^1 \arctan x dx \quad \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2\right]$$

$$20. \int_0^1 e^{3x} x dx \quad \left[\frac{2}{9} e^3\right]$$

$$21. \int_{-4}^4 x^2 \arctan x dx \quad [0]$$

$$22. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx \quad \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \text{obtížný}\right]$$

23.  $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$   $\left[ \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$
24.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$   $\left[ \frac{\pi}{2} - 1 \right]$
25.  $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$   $\left[ \pi^2 - 4 \right]$
26.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$   $\left[ \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) \right]$
27.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \tan^2 x \, dx$   $\left[ \ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{18}\pi + \frac{\pi^2}{72} \right]$
28.  $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$   $\left[ 2 \ln 2 - \ln e \right]$
29.  $\int_1^e x \ln x \, dx$   $\left[ \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right]$
30.  $\int_1^e \sin(\ln x) \, dx$   $\left[ \frac{1}{2}(e \sin 1 - e \cos 1 + 1) \right]$

### 2.1.3 Výpočet substitucí

31.  $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$   $\left[ \frac{\pi a^4}{16} \right]$
32.  $\int_1^5 \frac{\ln x}{x} \, dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln^2 5 \right]$
33.  $\int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{5+\sqrt{x}} \, dx$   $\left[ 100 \ln \frac{7}{6} - 14 \right]$
34.  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$   $\left[ \pi \right]$
35.  $\int_{\ln 4}^{\ln 8} e^x \frac{\sqrt{e^x-3}}{e^x+2} \, dx$   $\left[ 2(\sqrt{5}-1) + 2\sqrt{5}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right]$
36.  $\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$   $\left[ \frac{2}{5} \right]$

37.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+2\sin x} dx$   $\left[ \frac{2\sqrt{5}}{5} (\arctan \sqrt{5} - \arctan \frac{2\sqrt{5}}{5}) \right]$
38.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$   $\left[ \frac{2}{15} (8\sqrt{2} - 7) \right]$
39.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx$   $\left[ \frac{1}{2} \ln 3 \right]$
40.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$   $\left[ \frac{1}{3} \right]$
41.  $\int_0^1 x \frac{x^2-1}{\sqrt{4-x^2}} dx$   $\left[ \frac{10-6\sqrt{3}}{3} \right]$
42.  $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4x+5} dx$   $\left[ \arctan 4 - \arctan 2 \right]$
43.  $\int_0^{\ln 5} e^x \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$   $\left[ 4 - \pi \right]$
44.  $\int_2^5 \frac{x-1}{\sqrt{4x-2}} dx$   $\left[ \frac{3\sqrt{2}}{2} \right]$
45.  $\int_{-\pi}^0 \frac{3\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$   $\left[ 0 \right]$
46.  $\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx$   $\left[ \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} \right]$
47.  $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$   $\left[ \arctan e - \frac{\pi}{4} \right]$
48.  $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$   $\left[ 3(e - 1) \right]$
49.  $\int_1^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} dx$   $\left[ 2 \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right]$
50.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx$   $\left[ \frac{1}{3} \right]$
51.  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$   $\left[ \frac{1}{3} \right]$

52.  $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{1}{a^2+x^2} dx$   $\left[ \frac{\pi}{12a} \right]$
53.  $\int_{-1}^2 x\sqrt{4-x^2} dx$   $\left[ \sqrt{3} \right]$
54.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$   $\left[ \frac{1}{2}(1 - \ln 2) \right]$
55.  $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{1+2x}} dx$   $\left[ 2 - \ln 2 \right]$
56.  $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx$   $\left[ \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{\pi} \right) \right]$
57.  $\int_0^a \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx$   $\left[ a \left( e - \frac{1}{e} \right) \right]$
58.  $\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1} dx$   $\left[ -\frac{4}{15} \right]$
59.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$   $\left[ \frac{1}{4}\pi \right]$
60.  $\int_1^5 \frac{1}{x^2+x} dx$   $\left[ \ln \frac{5}{3} \right]$
61.  $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$   $\left[ \frac{3}{2} \right]$
62.  $\int_0^\pi e^x \sin e^x dx$   $\left[ \cos 1 - \cos e^\pi \right]$
63.  $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx$   $\left[ \frac{\pi}{2} \right]$
64.  $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} dx$   $\left[ 1 + 2\sqrt{3} \right]$
65.  $\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{x^3}{\sqrt{3x^2+4}} dx$   $\left[ \frac{8}{27}(2 - \sqrt{2}) \right]$
66.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$   $\left[ \frac{4}{3} \right]$

67.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin^2 x \, dx$   $\left[ \frac{\pi}{64} + \frac{1}{48} \right]$
68.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x^4-1} \, dx$   $\left[ \frac{1}{2} (\ln \frac{\sqrt{5}}{5} + \arctan \frac{1}{2}) \right]$
69.  $\int_{-1}^0 x \sqrt[5]{3+x^2} \, dx$   $\left[ \frac{5}{12} (3\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[5]{4}) \right]$
70.  $\int_0^{\ln 2} \frac{5e^{2x}-e^x}{e^{2x}+3e^x+3} \, dx$   $\left[ \frac{5}{2} \ln \frac{13}{7} - \frac{17\sqrt{3}}{4} (\arctan \frac{7}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{5}{\sqrt{3}}) \right]$

## 2.2 Aplikace určitého integrálu

### 2.2.1 Obsah rovinného obrazce

Obsah  $P$  křivočarého lichoběžníku ohraničeného křivkou  $y = f(x)$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$ :

$$P = \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Křivka dána parametricky  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ :

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)\varphi'(t)| \, dt.$$

**Příklady:** Vypočtete obsah oblasti v rovině vymezené danými křivkami nebo podmínkami

1.  $y = \ln x$ ,  $x = 0$ ,  $y = \ln a$ ,  $y = \ln b$ ,  $a, b > 0$ ,  $a < b$   $[b - a]$
2.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$   $[\frac{32}{3}]$
3.  $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ ,  $x = a$ ,  $x = -a$ ,  $a > 0$   $[a^2(e - e^{-1})]$
4.  $yx = 1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$   $[\ln 3]$
5.  $y = \ln x$ ,  $x = 1$ ,  $x = e$ ,  $y = 0$   $[1]$



6.  $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$   $\left[ \frac{101}{12} \right]$
7.  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $y \geq 1 - x$   $\left[ \frac{\pi-2}{4} \right]$
8.  $9x^2 + 16y^2 - 36x - 96y + 36 = 0$   $\left[ 12\pi \right]$
9.  $y = e^{-x} \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x \in \langle 0, \pi \rangle$   $\left[ \frac{1+e^\pi}{2e^\pi} \right]$
10.  $y = x^2 - x - 6$ ,  $y = -x^2 + 5x + 14$   $\left[ \frac{343}{3} \right]$
11.  $y(1 + x^2) - 1 = 0$ ,  $y = \frac{1}{2}x^2$   $\left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right]$
12.  $y = x^2$ ,  $y^2 = x$   $\left[ \frac{1}{3} \right]$
13.  $xy = 4$ ,  $x + y = 5$   $\left[ \frac{15}{2} - 4 \ln 4 \right]$
14.  $y = -x^2 + 4x - 2$ ,  $x - y = 2$   $\left[ \frac{9}{2} \right]$
15.  $xy = 4$ ,  $y = 1$ ,  $y = 4$ ,  $x = 0$   $\left[ 4 \ln 4 \right]$
16.  $y = |\ln x|$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{1}{e}$ ,  $x = e^2$   $\left[ 2 - \frac{2}{e} + e^2 \right]$
17.  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $x = \ln 2$   $\left[ \frac{1}{2} \right]$
18.  $y = 2x^3$ ,  $y = \frac{2}{x}$ ,  $x - y - 1 = 0$ ,  $x \geq 0$   $\left[ 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \right]$
19.  $y^2 = 2x + 1$ ,  $x - y - 1 = 0$   $\left[ \frac{16}{3} \right]$
20.  $y = \ln^2 x$ ,  $y = \ln x$   $\left[ 3 - e \right]$
21.  $y = x^3 + x^2 - 6x$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ , osa  $x$   $\left[ \frac{86}{3} \right]$
22. Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného  
křivkou  $y = e^x$ , její tečnou v bodě  $A = (0, 1)$   
a přímkou  $x = -1$ .  $\left[ \frac{e-2}{2e} \right]$
23. Vypočítejte plošný obsah části roviny ohraničené  
parabolou  $y = x^2 - 6x + 8$  a jejími tečnami v bodech  
 $A = (1, 3)$ ,  $B = (4, 0)$   $\left[ \frac{9}{4} \right]$

24.  $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0, b > 0$   $[\pi ab]$
25.  $x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle$   
– jedna větev cykloidy  $[3\pi r^2]$
26.  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$   
– asteroida  $[\frac{3}{8}a^2\pi]$
27.  $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}, t \in \langle 0, \sqrt[4]{8} \rangle$   $[\frac{32}{15}\sqrt{2}]$
28.  $x = a \sin 2t, y = a \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle, a > 0$   $[\frac{4}{3}a^2]$
29.  $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$   $[\frac{a^2}{48}(12\pi - \pi^3)]$
30.  $x = 2(2 \cos t - \cos 2t), y = 2(2 \sin t - \sin 2t), t \in \langle 0, \pi \rangle$   $[12\pi]$
31.  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in \langle 1, 2 \rangle \\ \frac{16}{x}, & x \in \langle 2, 10 \rangle \end{cases}, x = 1, x = 10, y = 0$   $[\frac{15}{4} + 16 \ln 5]$
32.  $y = x^2 - 4, y = 0, x = 6, x = 0$   $[\frac{176}{3}]$
33.  $y = \arccos x, y = 0, x \in \langle -1, 1 \rangle$   $[\pi]$
34.  $y = x^2 - 1, y = 0, x \in \langle -3, 2 \rangle$   $[\frac{28}{3}]$
35.  $y = \tan x, y = 0, x = \frac{\pi}{3}$   $[\ln 2]$
36.  $y = \frac{1}{3}x^2, y = 4 - \frac{2}{3}x^2$   $[\frac{32}{3}]$
37.  $x = 1, x = 3, y = -x, y = x + 2$   $[12]$
38.  $y = \arcsin x, x = 0, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$   $[\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{4} + 1) - 1]$
39.  $y = 0, x = -3, x = 3, y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$   $[\frac{1643}{10}]$
40.  $4x^2 - 8x - y + 5 = 0, 2x - y + 1 = 0$   $[\frac{9}{4}]$
41.  $y = 0, x = 0, x = \frac{1}{2}, y = xe^{-2x}$   $[\frac{e-2}{4e}]$

42.  $x + y - 7 = 0, xy = 6$   $\left[ \frac{35}{2} - 6 \ln 6 \right]$
43.  $x^2 + y^2 = 16, y^2 = 6x$   $\left[ \frac{16}{3}\pi + \frac{4\sqrt{3}}{3} \right]$
44.  $x^2 - 8x - 4y + 20 = 0, 4y = -3x^2 + 12x + 20$   $\left[ \frac{125}{6} \right]$
45.  $y = 2x - x^2, x + y = 0$   $\left[ \frac{9}{2} \right]$
46.  $y \leq x^3, y^2 \geq 4x, 2x - y - 4 \leq 0, y \leq 1$   $\left[ \frac{29}{3} \right]$
47. Odvoďte obsah kruhu o poloměru  $r$ .  $\left[ \pi r^2 \right]$
48. Určete plochu  $\triangle ABC$ ,  $A[-1, 1], B[3, 4], C[0, 0]$ .  $\left[ \frac{7}{2} \right]$
49.  $y = x + 2, y = -2x, x = 0, x = 3$   $\left[ \frac{39}{2} \right]$
50.  $x^2 + y^2 \leq 6, y \leq -x^2$   $\left[ -\frac{4\sqrt{2}}{3} + \right.$   
 $\left. + 6(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3})) \right]$
51.  $y^2 = x, y = x - 2$   $\left[ \frac{9}{2} \right]$
52.  $y = 6 - x - x^2, y = 0$   $\left[ \frac{125}{6} \right]$
53.  $y = \sin x, y = \cos x, x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \rangle$   $\left[ \sqrt{2} + 1 \right]$
54.  $y = x^2, y = \frac{1}{x}, x = 2$   $\left[ \frac{7}{3} - \ln 2 \right]$
55.  $x = t, y = \frac{2}{1+t^2}, t \in \langle -1, 2 \rangle$  a osou  $x$ .  $\left[ 2 \arctan 2 + \frac{\pi}{2} \right]$
56.  $x = t, y = e^{-2t}$  a osou  $x, t \in \langle 0, 1 \rangle$   $\left[ \frac{1-e^{-2}}{2} \right]$
57.  $y = -x^3 - x^2 + 2x, y = 0$   $\left[ \frac{37}{12} \right]$
58.  $\sin 2x + 1, y = e^{-x}$   $\left[ \frac{\pi}{2} + e^{-\frac{\pi}{2}} \right]$
59.  $y = x^2 + 1, y = 2x^2$   $\left[ \frac{4}{3} \right]$
60.  $y = 4x, y = x^2 + 2x - 3$   $\left[ \frac{32}{3} \right]$

### 2.2.2 Objem rotačního tělesa

Objem tělesa, které vznikne rotací plochy  $P$  (omezené křivkami  $y = f(x)$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$ ) kolem osy  $x$ :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Je-li křivka dána parametricky  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , pak:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) |\varphi'(t)| dt.$$

**Příklady:** Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací plochy  $P$  kolem osy  $x$ .

1.  $P : xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$   $[12\pi]$
2.  $P : y = -x^2 + 1, y = -2x^2 + 2$   $[\frac{16}{5}\pi]$
3.  $P : y = x^2 + 2, y = 2x^2 + 1$   $[\frac{24}{5}\pi]$
4.  $P : y = 1 - x^2, y = x^2$   $[\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi]$
5.  $P : y = \arcsin x, y = 0, x = 1$   $[\pi(\frac{\pi^2}{4} - 2)]$
6.  $P : y = x^2, y^2 = x$   $[\frac{3}{10}\pi]$
7.  $P : y = x, y = e^2, x \geq 0$   $[\frac{2}{3}\pi e^6]$
8.  $P : \{(x, y) : x \leq e^2, 1 \leq y \leq \ln x\}$   $[\pi e^2]$
9.  $P : y - 1 = \sin 2x, y = e^{-x}, x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$   $[\pi(\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2} + \frac{1}{2e^\pi})]$
10. Určete číslo  $b$  tak, aby objem tělesa, které vznikne rotací křivky  $x = 2 \cos t, y = b + 2 \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  kolem osy  $x$ , byl  $40\pi$ .  $[\pm \sqrt{\frac{7}{3}}]$
11.  $P : x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}, t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$   $[\frac{3}{4}\pi]$

12.  $P : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0$   $\left[ 5\pi^2 a^3 \right]$
13.  $P : x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$   $\left[ \frac{16\pi ab^2}{105} \right]$
14.  $P : y^2 = 4 - x, x = 0$ , rotace kolem osy  $y$   $\left[ \frac{512}{15} \pi \right]$
15.  $P : y = x + \sin x, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$   $\left[ \pi \left( \frac{8\pi^3}{3} - 3\pi \right) \right]$
16.  $P : y = x^3 \sqrt{\arctan x}, x \in \langle 0, 1 \rangle$   $\left[ \frac{\pi^2}{28} - \frac{5\pi}{84} + \frac{\pi}{14} \ln 2 \right]$
17.  $P : y = \ln x, x \in \langle 1, e \rangle$   $\left[ \pi(e - 2) \right]$
18.  $P : y = \sqrt{2x - 3}, x \in \langle 2, a \rangle, a > 2$   $\left[ \pi(a - 2)(a - 1) \right]$
19.  $P : y = \frac{1}{2}(e^x + x^{-x}), x \in \langle 0, 1 \rangle$   $\left[ \frac{\pi}{8}(e^2 + 4 - e^{-2}) \right]$
20. Vypočtete objem kužele vzniklého rotací úsečky  $AB$ ,  
 $A = [0, 0], B = [v, r]$  kolem osy  $x$ .  $\left[ \frac{1}{3} \pi r^2 v \right]$
21. Vypočtete objem rotačního elipsoidu vzniklého rotací  
elipsy  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$  kolem  
a) hlavní osy elipsy  $\left[ \frac{4}{3} \pi a b^2 \right]$   
b) vedlejší osy elipsy  $\left[ \frac{4}{3} \pi a^2 b \right]$
22.  $P : y = 4ax, y = x$   $\left[ \frac{32\pi a^3}{3} \right]$
23. Vypočtete objem protáhlého (vejčitého) elipsoidu  
vzniklého rotací elipsy dané parametrickými rovnicemi:  
 $x = 4 \cos t, y = 2 \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$   $\left[ \frac{64}{3} \pi \right]$
24.  $P : y = \ln(2x - 1)$ , osa  $x, x \in \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$   $\left[ \pi \left( \frac{3}{2} \ln^2 2 - 2 \ln 2 + 1 \right) \right]$
25.  $P : y = \cos^2 x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0$   $\left[ \frac{3\pi^2}{16} \right]$
26.  $P : y = \sqrt{\ln 2x}, x \in \langle 1, 2 \rangle$   $\left[ \pi(3 \ln 2 - 1) \right]$
27.  $P : \sqrt[3]{y^2} = 1 - x^{\frac{2}{3}},$  osa  $x, x \in \langle 0, 1 \rangle$   $\left[ \frac{16\pi}{105} \right]$

28. Vypočítejte objem tělesa (anuloidu) vzniklého rotací kruhu

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2, \quad b > 0 \text{ kolem osy } x. \quad \left[2\pi^2 a^2 b\right]$$

29.  $P : y = 2x - x^2, y = 0 \quad \left[\frac{16\pi}{15}\right]$

30.  $P : x^2 y^2 + y^2 - x^2 = 0, x \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle \quad \left[\pi(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})\right]$

31.  $P : 9y^2 = x(3 - x)^2, x \in \langle 0, 3 \rangle \quad \left[\frac{3}{4}\pi\right]$

32.  $P : x = 2t - t^2, y = 4t - t^3$  a osou  $x \quad \left[\frac{9871}{210}\pi\right]$

33.  $P : y = 1 - x^2, y = x^2 + 2, x = -1, x = 1 \quad \left[10\pi\right]$

34.  $P : y = \sin x, y = \cos x, y = 0, x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \quad \left[\pi(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4})\right]$

35.  $P : \triangle ABC, A = [-1, 1], B = [3, 4], C = [0, 0] \quad \left[\frac{35}{3}\pi\right]$

36.  $P : y = -x^2 - x + 6$  a osa  $x \quad \left[\frac{625}{6}\pi\right]$

37. Odvoďte objem kulové plochy o poloměru  $r \quad \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]$

38.  $P : y = \tan x, x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle \quad \left[\pi(1 - \frac{\pi}{4})\right]$

39.  $P : y = \frac{1}{x}$  v  $x \in \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle \quad \left[\frac{3}{2}\pi\right]$

40.  $P : y = x^2 + 1$  v  $x \in \langle -3, 3 \rangle \quad \left[\frac{696}{5}\pi\right]$

### 2.2.3 Délka oblouku rovinné křivky

Je-li křivka dána rovnicí  $y = f(x), x \in \langle a, b \rangle$ , pak:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Je-li křivka dána parametricky  $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , pak:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

**Příklady:**

1.  $y = \arcsin e^{-x}$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$   $[\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})]$
2.  $y = \sqrt{e^{2x} - 1} - \arctan \sqrt{e^{2x} - 1}$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$   $[e - 1]$
3.  $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$   $[2]$
4.  $y = \ln(1 - x^2)$ ,  $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$   $[\ln 3 - \frac{1}{2}]$
5.  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ ,  $x \in \langle 1, 2 \rangle$   $[\ln \frac{e^2 + 1}{e}]$
6.  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$ ,  $x \in \langle 1, 3 \rangle$   $[2 + \frac{1}{2} \ln 3]$
7.  $y = \ln \sin x$ ,  $x \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$   $[\frac{1}{2} \ln 3]$
8.  $y = \frac{(x-3a)\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}$ ,  $a > 0$ ,  $x \in \langle 0, 4a \rangle$   $[\frac{14}{3}a]$
9.  $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ ,  $x \in \langle -1, 1 \rangle$   $[4]$
10.  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ ,  
 $a > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ , evolventa  $[2a\pi^2]$
11.  $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$ ,  $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$ ,  
 $t \in \langle 0, \pi \rangle$   $[\frac{\pi^3}{3}]$
12.  $x = e^t \sin t$ ,  $y = e^t \cos t$ ,  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$   $[\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)]$
13.  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $a > 0$ ,  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$   $[\frac{3}{2}a]$
14.  $x = t^2$ ,  $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ , mezi průsečíky s osou  $x$   $[4\sqrt{3}]$
15.  $x = \frac{1}{6}t^6$ ,  $y = 2 - \frac{1}{4}t^4$ , mezi průsečíky s osami  
souřadnic,  $t > 0$   $[\frac{13}{3}]$
16.  $y^2 = x^3$  vyřatý přímkou  $x = \frac{4}{3}$   $[\frac{112}{27}]$
17.  $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ ,  $a > 0$  v intervalu  $\langle -a, a \rangle$   $[a \frac{e^2 - 1}{e}]$
18.  $y = \ln x$  v intervalu  $\langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle$   $[1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}]$

19.  $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$  v intervalu  $\langle -\frac{4}{9}a, 1 - \frac{4}{9}a \rangle$ ,  $a > 0$   $\left[ \frac{1}{\sqrt{a}} \right]$
20.  $y = e^x$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$   $\left[ \sqrt{e^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{e^2+1}-1}{\sqrt{e^2+1}+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right]$
21.  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$   $\left[ e - \frac{1}{e} \right]$
22.  $y = \ln \cos x$  pro  $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$   $\left[ \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \right]$
23.  $y = a \ln \frac{a^2}{a^2-x^2}$  v intervalu  $\langle 0, b \rangle$ ,  $a, b > 0$   $\left[ -b + a \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right| \right]$
24.  $y = a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sqrt{a^2-x^2}$ ,  $x \in \langle b, a \rangle$   $\left[ a \ln \frac{a}{b} \right]$
25.  $x = \cos^4 t$ ,  $y = \sin^4 t$ ,  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$   $\left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \right]$
26.  $x = \cos^2 t$ ,  $y = \sin^2 t$ ,  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$   $\left[ \sqrt{2} \right]$
27.  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ ,  $t \in \langle 0, \pi \rangle$   $\left[ 3 \right]$
28.  $x = t$ ,  $y = \ln t$ ,  $t \in \langle 1, e \rangle$   $\left[ \sqrt{e^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{e^2+1}-1}{\sqrt{e^2+1}+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right]$
29.  $x = t$ ,  $y = \frac{1}{2}t^2 - 1$  mezi průsečíky s osou  $x$   $\left[ \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \right]$
30.  $y = t$ ,  $x = \sqrt[3]{t^2} - 1$  mezi průsečíky s přímkou  $x = 4$   $\left[ \frac{458\sqrt{229}-16}{27} \right]$
31.  $y = \ln x$ ,  $x \in \langle 1, 3 \rangle$   $\left[ \sqrt{10} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right]$
32.  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $x \in \langle 1, 4 \rangle$   $\left[ \frac{1}{2}(\ln \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} + 4\sqrt{5} - \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}) \right]$
33.  $y = \sqrt{4-x^2}$ ,  $x \in \langle -2, 2 \rangle$   $\left[ 2\pi \right]$
34.  $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}|)$ ,  
 $x \in \langle 1, a+1 \rangle$ ,  $a > 1$   $\left[ \frac{1}{2}(a^2 + 2a) \right]$
35.  $x = \frac{1}{6}t^6$ ,  $y = 4 - \frac{1}{4}t^4$  pro  $t \in \langle -2, 2 \rangle$   $\left[ \frac{1}{3}(17\sqrt{17} - 1) \right]$



## 2.2.4 Povrch rotačního tělesa

Povrch tělesa, které vznikne rotací křivky  $y = f(x)$ ,  $x \in \langle a, b \rangle$  kolem osy  $x$ :

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Je-li křivka dána parametricky  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , pak:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

**Příklady:** Vypočtete povrch tělesa, které vznikne rotací křivky (obrazce omezeného křivkami) kolem osy  $x$ .

1.  $y^2 = x$ ,  $y = x^3$   $\left[ \frac{\pi}{54}(20\sqrt{10} + 45\sqrt{5} - 11) \right]$
2.  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $y = 0$ ,  
 $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $a > 0$   $\left[ \frac{64\pi a^2}{3} \right]$
3.  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ ,  $a > 0$   $\left[ \frac{6\pi a^2}{2} \right]$
4.  $y = 4 + x$ ,  $x \in \langle -4, 2 \rangle$ ,  $\left[ 36\sqrt{2}\pi \right]$
5.  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$   $\left[ \frac{\pi}{4}(e^2 - e^{-2} + 4) \right]$
6.  $x = t^2$ ,  $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ ,  $t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$   $\left[ 3\pi \right]$
7.  $x = a \sin 2t$ ,  $y = 2a \sin^2 t$ ,  $a > 0$ ,  $t \in \langle 0, \pi \rangle$   $\left[ 4\pi^2 a^2 \right]$
8.  $x = e^t \sin t$ ,  $y = e^t \cos t$ ,  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$   $\left[ \frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(e^\pi - 2) \right]$
9.  $\triangle ABC$ ,  $A(1, 1)$ ,  $B(5, 1)$ ,  $C(3, 4)$   $\left[ 2\pi(5\sqrt{13} + 4) \right]$
10. povrch anuloidu  $(y - b)^2 + x^2 = a^2$ ,  $b > a$   $\left[ 4\pi^2 ab \right]$
11. odvoďte vzorec pro povrch kulové plochy  $\left[ 4\pi r^2 \right]$
12.  $y^2 = 4 + x$ ,  $x \in \langle -4, 2 \rangle$   $\left[ \frac{62\pi}{3} \right]$

13.  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $x \in \langle 1, 2 \rangle$  ... kulový vrchlík  $[\pi]$
14.  $y^2 = 4ax$ ,  $a > 0$ ,  $x \in \langle 0, 3a \rangle$   $[\frac{56\pi a^2}{3}]$
15.  $y = 3 \sin \frac{x}{2}$ ,  $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$   $[8\pi(\frac{3}{4}\sqrt{13} + \ln(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}))]$
16.  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ ,  
 $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  ... evolventa  $[3\pi a^2]$
17.  $y = e^{-x}$ ,  $x \in \langle -1, 3 \rangle$   $[\pi(e\sqrt{1+e^2} + \ln|e + \sqrt{1+e^2}| + \ln \frac{e+\sqrt{1+e^2}}{e^{-3}+\sqrt{1+e^{-6}}})]$
18. obsah plochy vzniklé otáčením smyčky  
 křivky  $9ax^2 = y(3a - y)^2$  kolem osy  $y$ ,  $a > 0$   $[3\pi a^2]$
19.  $y = \frac{x^3}{3}$  pro  $x \in \langle 0, 2 \rangle$   $[\frac{\pi}{9}(17\sqrt{17} - 1)]$
20.  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$   $[\text{návod: jedná se o asteroidu, meze pro } x \in \langle -a, a \rangle, S = \frac{12}{5}\pi a^2]$

## 2.2.5 Fyzikální aplikace

### Příklady:

A. Najděte souřadnice těžiště  $T$  homogenní hmotné oblasti omezené křivkami:

1.  $y = x^2$ ,  $y = \frac{2}{1+x^2}$   $T[0, \frac{24+15\pi}{30\pi-20}]$
2.  $y^2 = 6x$ ,  $x - 5 = 0$   $T[3, 0]$
3.  $y^2 = x^3$ ,  $x = 1$   $T[\frac{5}{7}, 0]$
4.  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$   $T[\frac{49}{3\pi}, \frac{4(a+b)}{3\pi}]$
5.  $y = 0$ ,  $y = \cos x$ ,  $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$   $T[0, \frac{\pi}{8}]$

$$6. \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad a > 0, \quad 0 \leq x \leq a \quad \left[ S_x = S_y, \quad S_y = \frac{a^3}{30}k, \quad m = \frac{a^2}{6}k, \right. \\ \left. T\left[\frac{a}{5}, \frac{a}{5}\right] \right]$$

$$7. x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 6 \quad T[2, 2]$$

$$8. x + y = a, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \left[ S_x = \frac{a^3}{6}k, \quad S_y = \frac{a^3}{6}k, \quad m = \frac{a^2}{2}k \right]$$

Zkontrolujte výsledek pro  $a = 6$ .

$$9. y = 0, \quad y = 4 - x^2 \quad T\left[0, \frac{8}{5}\right]$$

$$10. \text{Najděte těžiště jedné čtvrtiny plochy elipsy } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \\ \left[ S_x = \frac{ka^2b}{3}, \quad S_y = \frac{ka^3}{3}, \quad m = \frac{k\pi a^2}{4}, \quad T\left[\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right] \right]$$

$$11. \text{Najděte } S_x, S_y, m \text{ pro } y = e^x, \quad y = e^{2x}, \quad x = 1 \quad \left[ S_y = \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4}, \quad m = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}, \right. \\ \left. S_x = \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8} \right]$$

$$12. y = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle, \quad y = 0 \quad T\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right]$$

$$13. y = x^2, \quad y = x^2 + 2, \quad x = 0, \quad x = 4 \quad \left[ m = 8k, \quad S_x = 136k, \quad S_y = \right. \\ \left. 16k, \quad T[2, 17] \right]$$

$$14. y = 3 - 2x^2 \text{ a osa } x \quad T\left[0, \frac{4}{5}\right]$$

$$15. y = 2x - x^2, \quad y = 0 \quad T\left[1, \frac{2}{5}\right]$$

$$16. y = \cos x, \quad y = x^2 - \frac{\pi^2}{4} \quad T\left[0, \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^5}{60}}{2(1 + \frac{\pi^3}{12})}\right]$$

$$17. x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \quad T\left[\frac{256a}{315\pi}, \frac{256a}{315\pi}\right]$$

$$18. x = t^2 - t, \quad y = t^3 + t^2, \quad y = 0 \quad T\left[\frac{83}{77}, \frac{9}{154}\right]$$

$$19. x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad T\left[a\pi, \frac{5a}{6}\right]$$

B. Najděte souřadnice těžiště  $T$  nehomogenní hmotné oblasti omezené křivkami:

$$20. \text{parabolou } y = -ax^2 + b, \quad a > 0, \quad b > 0 \text{ a osou } x \quad T\left[0, \frac{2}{5}b\right]$$

21.  $x^2 + y^2 = 4$  a osou  $x$   $\left[ m = 2\pi, S_x = \frac{16}{3}, y_T = \frac{8}{3}\pi \right]$
22. Najděte těžiště oblasti ohraničené půlkou kružnice  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ ,  $t \in \langle 0, \pi \rangle$ , kde hustota je přímo úměrná parametru  $t$  ( $\sigma(t) = kt$ ).  
 $\left[ m = \frac{\pi^2 kr}{2}, S_x = \pi kr, S_y = -2kr^2, T \left[ -\frac{4r}{\pi^2}, \frac{2r}{\pi} \right] \right]$
23.  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x \in \langle 0, \pi \rangle$ , kde hustota je rovna  $x$ -ové souřadnici bodu.  
 $\left[ m = \pi, S_x = \frac{\pi^2}{8}, S_y = \pi^2 - \frac{4}{\pi}, T \left[ \frac{\pi^3 - 4}{\pi^2}, \frac{\pi}{8} \right] \right]$
24.  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ ,  $\sigma(x) = \sin x$ ,  
 pouze  $y_T$   $\left[ y_T = \frac{e^{2\pi} + 1}{5e^\pi} \right]$
25.  $y = \frac{x^2}{4} + 2$ ,  $y = \frac{x^2}{4}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ , jestliže hustota je v každém bodě úměrná souřadnici  $x$ .  $T \left[ \frac{42}{15}, \frac{375}{120} \right]$
26.  $y^2 = 12x$ ,  $y \geq 0$ ,  $x \in \langle 1, 2 \rangle$   
 $\left[ m = \frac{2}{3} 2\sqrt{3}(2\sqrt{2} - 1), S_x = 9, S_y = \frac{2}{5} 2\sqrt{3}(4\sqrt{2} - 1), T \left[ \frac{3 \cdot 4\sqrt{2} - 1}{5 \cdot 2\sqrt{2} - 1}, \frac{27}{4\sqrt{3}(2\sqrt{2} - 1)} \right] \right]$
- C. Najděte souřadnice těžiště  $T$  daných hmotných oblouků:
27. homogenní polokružnice  $x^2 + y^2 = r^2$   $T \left[ 0, \frac{2r}{\pi} \right]$
28. čtvrtkružnice  $x^2 + y^2 = r^2$  v 1. kvadrantu, je-li hustota v každém bodě úměrná součinu souřadnic příslušného bodu [ $\sigma = kxy = kx\sqrt{r^2 - x^2}$ ]  $T \left[ \frac{2}{3}r, \frac{2}{3}r \right]$
29.  $x = t^2$ ,  $y = t - \frac{t^3}{3}$ ,  $t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$ , homogenní  $T \left[ \frac{7}{5}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right]$
30. křivky  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $a > 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , hustota je v bodě přímo úměrná  $x$ -ové souřadnici bodu  $T \left[ \frac{\pi a}{8}, \frac{15\pi a}{256} \right]$
31. půlkružnice  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ ,  $t \in \langle 0, \pi \rangle$ , kde hustota je úměrná parametru [ $\sigma(t) = kt$ ].  $T \left[ -\frac{4r}{\pi^2}, \frac{2r}{\pi} \right]$
32. homogenní  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $t \in \langle 0, \pi \rangle$   $T \left[ 0, \frac{2a}{5} \right]$
33. homogenní, 1 oblouk cykloidy  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$   $T \left[ \pi a, \frac{4a}{3} \right]$

34.  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$ ,  $x \in \langle 1, 2 \rangle$ , homogenní  
 $\left[ m = \frac{k}{2} \left( \frac{3}{2} + \ln 2 \right), S_x = \frac{k}{8} \left( \frac{27}{4} - \ln 2 (\ln 2 + 4) \right), S_y = \frac{5}{3} k, T[1, 520; 0, 397] \right]$
35.  $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ ,  $x \in \langle 0, a \rangle$   $T\left[ \frac{2a}{e+1}, \frac{a(e^4+4e^2-1)}{4e(e^2-1)} \right]$



# Kapitola 3

## Diferenciální počet funkcí více proměnných

### 3.1 Definiční obory funkcí více proměnných

Zapište a zakreslete definiční obory funkcí.

Výsledné obrázky k daným příkladům jsou v příloze.

1.  $z = x^3y + y^2x$   $[\mathbf{R} \times \mathbf{R}]$
2.  $z = \frac{1}{x} + y$   $[\mathbf{R} \times \mathbf{R} - \{x = 0\}]$
3.  $z = \frac{1}{x+y}$   $[\mathbf{R} \times \mathbf{R} - \{y = -x\}]$
4.  $z = \frac{1}{x^2+y^2}$   $[\mathbf{R} \times \mathbf{R} - [0, 0]]$
5.  $z = \frac{4xy}{4-x^2-y^2}$   $[\mathbf{R} \times \mathbf{R} - \{x^2 + y^2 = 4\}]$
6.  $z = \ln(xy)$   $[x > 0 \wedge y > 0, y < 0 \wedge x < 0]$
7.  $z = \sin x + \sqrt{\sin y}$   $[y \in \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle]$
8.  $z = \ln(x^2 + y^2)$   $[\mathbf{R} \times \mathbf{R} - [0, 0]]$
9.  $z = \ln \frac{1}{xy}$   $[x > 0 \wedge y > 0, y < 0 \wedge x < 0]$

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| 10. $z = \arctan \sqrt{x+y}$          | $[y \geq -x]$   |
| 11. $z = \arcsin(x-y)$                | $[(x-y) \in \langle -1, 1 \rangle]$                       |
| 12. $z = \arcsin \frac{x}{y}$         | $[\frac{x}{y} \in \langle -1, 1 \rangle \wedge y \neq 0]$ |
| 13. $z = \ln(\ln xy)$                 | $[\ln xy > 0 \wedge xy > 0]$                              |
| 14. $z = \cot(x+y)$                   | $[y \neq -x + k\pi]$                                      |
| 15. $z = \ln \sin(x+y)$               | $[\sin(x+y) > 0]$   |
| 16. $z = \frac{\ln(xy^2)}{x-y}$       | $[x \neq 0, y \neq 0, y \neq x, x > 0]$                   |
| 17. $z = 5x - \ln(x + \ln y)$         | $[y > e^{-x}]$  |
| 18. $z = \frac{1}{x^2-y} \ln(y-x^2)$  | $[y > x^2]$   |
| 19. $z = \ln(x \ln(y-x))$             | $[y > x \wedge x \ln(y-x) > 0]$                           |
| 20. $z = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$      | $[\frac{x+y}{x-y} \geq 0 \wedge x \neq y]$                |
| 21. $z = \sqrt{\sin x \sin y}$        | $[\sin x \sin y \geq 0]$                                  |
| 22. $z = \tan(x-y)$                   | $[y \neq x + (2k+1)\frac{\pi}{2}]$                        |
| 23. $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}$    | $[-1 \leq (x^2 + y^2) \leq 1]$                            |
| 24. $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$       | $[-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1 \wedge x \neq 0]$          |
| 25. $z = \sqrt{\sin(\pi(x^2 + y^2))}$ | $[\sin(\pi(x^2 + y^2)) \geq 0]$                           |

### 3.2 Parciální derivace

Příklady: Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkcí dvou proměnných.

$$1. z = |x|y^2 \quad \left[ z'_x = \begin{cases} -y^2 & x < 0 \\ y^2 & x > 0, \end{cases} \quad z'_y = 2y|x| \right]$$



2.  $z = e^x(x - y)$   $\left[ z'_x = e^x(x - y + 1), z'_y = -e^x \right]$
3.  $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$   $\left[ z'_x = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, z'_y = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right]$
4.  $z = e^{xy} \ln(x + y)$   $\left[ z'_x = e^{xy}(y \ln(x + y) + \frac{1}{x + y}), z'_y = e^{xy}(x \ln(x + y) + \frac{1}{x + y}) \right]$
5.  $z = e^{\frac{x}{y}}$   $\left[ z'_x = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}, z'_y = -\frac{x e^{\frac{x}{y}}}{y^2} \right]$
6.  $z = \sqrt{x} \arctan \sqrt{y}$   $\left[ z'_x = \frac{\arctan \sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, z'_y = \frac{\sqrt{x}}{2(1 + y)\sqrt{y}} \right]$
7.  $z = \arcsin \frac{x}{x + y}$   $\left[ z'_x = \sqrt{\frac{y}{2x + y}} \frac{1}{x + y}, x + y > 0, \right.$   
 $\left. z'_y = -\frac{x}{\sqrt{y(2x + y)(x + y)}}, x + y > 0 \right]$
8.  $z = \ln(x \ln(x - y))$   $\left[ z'_x = \frac{1}{x \ln(x - y)} (\ln(x - y) + \frac{x}{x - y}), \right.$   
 $\left. z'_y = \frac{1}{(y - x) \ln(x - y)} \right]$
9.  $z = \tan^2 \frac{x}{y}$   $\left[ z'_x = \frac{2 \tan \frac{x}{y}}{y \cos^2 \frac{x}{y}}, z'_y = -\frac{2x \tan \frac{x}{y}}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \right]$
10.  $z = \arctan x^{\frac{y}{2}}$   $\left[ z'_x = \frac{yx^{\frac{y}{2}-2}}{2(1 + x^y)}, z'_y = \frac{x^{\frac{y}{2}} \ln x}{2(1 + x^y)} \right]$
11.  $z = \arctan \frac{x + y}{x - y}$   $\left[ z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2} \right]$
12.  $z = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x + y}$   $\left[ z'_x = 2x \sin \frac{1}{x + y} - \frac{(x^2 + y^2)}{(x + y)^2} \cos \frac{1}{x + y}, \right.$   
 $\left. z'_y = 2y \sin \frac{1}{x + y} - \frac{(x^2 + y^2)}{(x + y)^2} \cos \frac{1}{x + y} \right]$
13.  $z = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{y}}}$   $\left[ z'_x = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x - \sqrt{y}})^2}, z'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x - \sqrt{y}})^2} \right]$
14.  $z = e^{xy}xy$   $\left[ z'_x = e^{xy}y(xy + 1), z'_y = e^{xy}x(xy + 1) \right]$
15.  $z = 3^{x \ln y}$   $\left[ z'_x = 3^{x \ln y} \ln 3 \ln y, z'_y = \frac{x}{y} 3^{x \ln y} \ln 3 \right]$
16.  $z = \sin(x^{\cos y})$   $\left[ z'_x = \cos(x^{\cos y}) \cos y \cdot x^{\cos y - 1}, \right.$   
 $\left. z'_y = -\ln x \cos(x^{\cos y}) x^{\cos y} \sin y \right]$
17.  $z = \sin^y x$   $\left[ z'_x = y \sin^{y-1} x \cos x, z'_y = \sin^y x \ln \sin x \right]$

18.  $z = (4xy^2 - xy)^3$   $\left[ z'_x = 3(4xy^2 - xy)^2(4y^2 - y), \right.$   
 $\left. z'_y = 3(4xy^2 - xy)^2(8xy - x) \right]$
19.  $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$   $\left[ z'_x = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}, z'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} \right]$
20.  $z = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$   $\left[ z'_x = \frac{y}{\sqrt{2y(x+y)}\sqrt{x-y}}, z'_y = \frac{-x}{\sqrt{2y(x-y)(x+y)}} \right]$
21.  $z = \arctan \sqrt{1+xy}$   $\left[ z'_x = \frac{y}{(2+xy)2\sqrt{1+xy}}, z'_y = \frac{x}{(2+xy)2\sqrt{1+xy}} \right]$
22.  $z = \frac{1}{xy}$   $\left[ z'_x = -\frac{1}{yx^2}, z'_y = -\frac{1}{xy^2} \right]$
23.  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$   $\left[ z'_x = \frac{x}{x^2+y^2}, z'_y = \frac{y}{x^2+y^2} \right]$
24.  $z = \frac{3xy}{x-y}$   $\left[ z'_x = -\frac{3y^2}{(x-y)^2}, z'_y = \frac{3x^2}{(x-y)^2} \right]$
25.  $z = (\sin x)^{\cos y}$   $\left[ z'_x = \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1}, \right.$   
 $\left. z'_y = -\sin y \ln \sin x (\sin x)^{\cos y} \right]$
26.  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$   $\left[ z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}} \right]$
27.  $z = xy e^{\sin \pi xy}$   $\left[ z'_x = e^{\sin \pi xy} y (1 + \pi xy \cos \pi xy), \right.$   
 $\left. z'_y = e^{\sin \pi xy} x (1 + \pi xy \cos \pi xy) \right]$
28.  $z = x e^{\frac{y}{x}}$   $\left[ z'_x = e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right), z'_y = e^{\frac{y}{x}} \right]$
29.  $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{xy}$   $\left[ z'_x = -\frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}, z'_y = -\frac{1}{y^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}} \right]$
30.  $z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$   $\left[ z'_x = -\frac{4xy^2}{(x^2-y^2)^2}, z'_y = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2} \right]$
31.  $z = \frac{1}{\arctan \frac{y}{x}}$   $\left[ z'_x = \frac{y}{(x^2+y^2)(\arctan \frac{y}{x})^2}, z'_y = \frac{-x}{(x^2+y^2)(\arctan \frac{y}{x})^2} \right]$
32.  $z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$   $\left[ z'_x = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, z'_y = \frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \right]$
33.  $z = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$   $\left[ z'_x = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}} \right]$
34.  $z = \ln \frac{x-y}{x+y}$   $\left[ z'_x = \frac{2y}{x^2-y^2}, z'_y = -\frac{2x}{x^2-y^2} \right]$

35.  $f(t, r) = \frac{1}{\sin^2 \pi t + \sin^2 \pi r}$   $\left[ f'_t = -\frac{\pi \sin 2\pi t}{(\sin^2 \pi t + \sin^2 \pi r)^2}, f'_r = -\frac{\pi \sin 2\pi r}{(\sin^2 \pi t + \sin^2 \pi r)^2} \right]$
36.  $f(t, r) = \sqrt{tr^2 - 1}$   $\left[ f'_t = \frac{r^2}{2\sqrt{tr^2 - 1}}, f'_r = \frac{tr}{\sqrt{tr^2 - 1}} \right]$
37.  $f(t, r) = \sqrt{3r^2 - 2t^3}$   $\left[ f'_t = -\frac{3t}{\sqrt{3r^2 - 2t^3}}, f'_r = \frac{3r}{\sqrt{3r^2 - 2t^3}} \right]$
38.  $f(t, r) = \ln t^r$   $\left[ f'_t = \frac{r}{t}, f'_r = \ln t \right]$
39.  $f(t, r) = \frac{t-r}{t+r^2}$   $\left[ f'_t = \frac{r^2+r}{(t+r^2)^2}, f'_r = \frac{r^2-t-2rt}{(t+r^2)^2} \right]$
40.  $f(t, r) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{r}}$   $\left[ f'_t = -\frac{1}{r} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{r}} \ln 3, f'_r = \frac{t}{r^2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{r}} \ln 3 \right]$

**Příklady:** Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkcí tří proměnných.

1.  $u = f(x, y, z) = xy^z$   $\left[ u'_x = y^z, u'_y = xzy^{z-1}, u'_z = xy^z \ln y \right]$
2.  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$   $\left[ u'_x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-z^2)^3}}, u'_y = -\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2-z^2)^3}}, u'_z = \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2-z^2)^3}} \right]$
3.  $u = x^{y^z}$   $\left[ u'_x = y^z x^{y^z-1}, u'_y = x^{y^z} \ln xzy^{z-1}, u'_z = x^{y^z} \ln xy^z \ln y \right]$
4.  $u = xe^{xyz}$   $\left[ u'_x = e^{xyz}(1+xyz), u'_y = x^2ze^{xyz}, u'_z = x^2ye^{xyz} \right]$
5.  $u = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{z}{2}}$   $\left[ u'_x = -\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{z}{2}} z}{2x}, u'_y = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{z}{2}} \frac{z}{2y}, u'_z = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{z}{2}} \ln \frac{y}{x} \right]$
6.  $u = e^{xy} \ln yz$   $\left[ u'_x = e^{xy} y \ln yz, u'_y = e^{xy} \left(x \ln yz + \frac{1}{y}\right), u'_z = \frac{e^{xy}}{z} \right]$
7.  $u = e^{xy} + e^{1+z}$   $\left[ u'_x = e^{xy} y, u'_y = xe^{xy}, u'_z = e^{1+z} \right]$
8.  $u = x \ln y + y \ln z + z \ln x$   $\left[ u'_x = \ln y + \frac{z}{x}, u'_y = \frac{x}{y} + \ln z, u'_z = \frac{y}{z} + \ln x \right]$
9.  $u = y^{\frac{z}{x}}$   $\left[ u'_x = y^{\frac{z}{x}} \ln y \left(-\frac{z}{x^2}\right), u'_y = \frac{z}{x} y^{\frac{z}{x}-1}, u'_z = y^{\frac{z}{x}} \ln y \frac{1}{x} \right]$
10.  $u = xyz e^{x+y}$   $\left[ u'_x = e^{x+y} yz(1+x), u'_y = e^{x+y} xz(1+y), u'_z = xye^{x+y} \right]$

11.  $u = \arctan \frac{yz}{x^2}$   $\left[ u'_x = -\frac{2xyz}{x^4+x^2z^2}, u'_y = \frac{zx^2}{x^4+y^2z^2}, u'_z = \frac{yx^2}{x^4+y^2z^2} \right]$
12.  $f(p, q, r) = \ln \cot \frac{p}{q} + \ln r$   $\left[ f'_p = -\frac{2}{\sin 2\frac{p}{q}}, f'_q = \frac{2p}{\sin 2\frac{p}{q} \cdot q^2}, f'_r = \frac{1}{r} \right]$
13.  $f(p, q, r) = p^{qr}$   $\left[ f'_p = qrp^{qr-1}, f'_q = rp^{qr} \ln p, f'_r = qp^{qr} \ln p \right]$
14.  $f(p, q, r) = e^{3p} \cos \frac{q}{r}$   $\left[ f'_p = 3e^{3p} \cos \frac{q}{r}, f'_q = -\frac{e^{3p}}{r} \sin \frac{q}{r}, f'_r = \frac{q}{r^2} e^{3p} \sin \frac{q}{r} \right]$
15.  $f(p, q, r) = \ln \cos \frac{pq}{\sqrt{r}}$   $\left[ f'_p = -\frac{q}{\sqrt{r}} \tan \frac{pq}{\sqrt{r}}, f'_q = -\frac{p}{\sqrt{r}} \tan \frac{pq}{\sqrt{r}}, \right.$   
 $\left. f'_r = \frac{1}{2} \frac{pq}{\sqrt{r^3}} \tan \frac{pq}{\sqrt{r}} \right]$
16.  $f(t, v, w) = \sqrt{\frac{tv}{w}}$   $\left[ f'_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{tw}}, f'_v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{vw}}, f'_w = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{tv}{w^3}} \right]$
17.  $f(t, v, w) = e^{\frac{t}{v}} + e^{\frac{v}{w}}$   $\left[ f'_t = \frac{e^{\frac{t}{v}}}{v}, f'_v = e^{\frac{t}{v}} \left(-\frac{t}{v^2}\right) + \frac{1}{w} e^{\frac{v}{w}}, f'_w = e^{\frac{v}{w}} \left(-\frac{v}{w^2}\right) \right]$
18.  $f(t, v, w) = \sin t \sin v \sin w$   $\left[ f'_t = \cos t \sin v \sin w, f'_v = \cos v \sin t \sin w, \right.$   
 $\left. f'_w = \cos w \sin t \sin v \right]$
19.  $f(t, v, w) = \ln(-t + 2v + 3w)$   $\left[ f'_t = -\frac{1}{-t+2v+3w}, f'_v = \frac{2}{-t+2v+3w}, f'_w = \frac{3}{-t+2v+3w} \right]$
20.  $f(t, v, w) = tve^{\frac{v}{w}}$   $\left[ f'_t = ve^{\frac{v}{w}}, f'_v = te^{\frac{v}{w}} \left(1 + \frac{v}{w}\right), f'_w = -\frac{tv^2 e^{\frac{v}{w}}}{w^2} \right]$

**Příklady:** Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu.

1.  $z = x^y$   $\left[ z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, z''_{yy} = x^y \ln^2 x, z''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \right]$
2.  $z = x^2y + e^{xy^2}$   $\left[ z''_{xx} = 2y + y^4 e^{xy^2}, z''_{yy} = 2xe^{xy^2} (1 + 2xy^2), \right.$   
 $\left. z''_{xy} = 2(x + e^{xy^2} y^3 x + ye^{xy^2}) \right]$
3.  $z = \frac{\cos x^2}{y}$   $\left[ z''_{xx} = -\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y}, z''_{yy} = \frac{2 \cos x^2}{y^3}, z''_{xy} = \frac{2x \sin x^2}{y^2} \right]$
4.  $z = \frac{\cos^2 y}{x}$   $\left[ z''_{xx} = \frac{2 \cos^2 y}{x^3}, z''_{yy} = \frac{-2 \cos 2y}{x}, z''_{xy} = \frac{\sin 2y}{x^2} \right]$
5.  $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$   $\left[ z''_{xx} = \frac{4y}{9x^{\frac{5}{3}}}, z''_{yy} = \frac{-x}{4\sqrt{y^3}}, z''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} \right]$
6.  $z = y^{x+1}$   $\left[ z''_{xx} = y^{x+1} \ln^2 y, z''_{xy} = y^x [1 + (x+1) \ln y], \right.$   
 $\left. z''_{yy} = x(x+1)y^{x-1} \right]$

7.  $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$   $\left[ z''_{xx} = \frac{-3xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}, z''_{xy} = \frac{y(2x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}, z''_{yy} = \frac{-x(x^2-2y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}} \right]$
8.  $z = x \sin(x+y)$   $\left[ z''_{xx} = 2 \cos(x+y) - x \sin(x+y), z''_{xy} = \cos(x+y) - x \sin(x+y), z''_{yy} = -x \sin(x+y) \right]$
9.  $z = \tan \frac{x^2}{y}$   $\left[ z''_{xx} = \frac{2}{y \cos^2 \frac{x^2}{y}} + \frac{8x^2 \sin \frac{x^2}{y}}{y^2 \cos^3 \frac{x^2}{y}}, z''_{xy} = -2 \frac{x[2x^2 \sin \frac{x^2}{y} + y \cos \frac{x^2}{y}]}{y^3 \cos^3(\frac{x^2}{y})}, \right.$   
 $\left. z''_{yy} = 2 \frac{x^2[x^2 \sin \frac{x^2}{y} + y \cos \frac{x^2}{y}]}{y^4 \cos^3(\frac{x^2}{y})} \right]$
10.  $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$   $\left[ z''_{xx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, z''_{xy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, z''_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right]$
11.  $z = \arctan \frac{y}{x}$   $\left[ z''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, z''_{xy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, z''_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right]$
12.  $u(x, y, z) = e^{x+2y+3z}$   $\left[ u''_{xx} = e^{x+2y+3z}, u''_{yy} = 4e^{x+2y+3z}, u''_{zz} = 9e^{x+2y+3z}, \right.$   
 $\left. u''_{xy} = 2e^{x+2y+3z}, u''_{xz} = 3e^{x+2y+3z}, u''_{yz} = 6e^{x+2y+3z} \right]$
13.  $u(x, y, z) = \frac{x+y}{x+z}$   $\left[ u''_{xx} = -2 \frac{z-y}{(x+z)^3}, u''_{yy} = 0, u''_{zz} = 2 \frac{x+y}{(x+z)^3}, \right.$   
 $\left. u''_{xy} = -\frac{1}{(x+z)^2}, u''_{xz} = \frac{x-z+2y}{(x+z)^3}, u''_{yz} = -\frac{1}{(x+z)^2} \right]$
14.  $u(x, y, z) = xye^{yz}$   $\left[ u''_{xx} = 0, u''_{yy} = 0, u''_{zz} = xy^3e^{yz}, u''_{xy} = e^{yz}(1+yz), \right.$   
 $\left. u''_{xz} = y^2e^{yz}, u''_{yz} = e^{yz}xy(2+yz) \right]$
15.  $u(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$   $\left[ u''_{xx} = z(z-1) \frac{x^{z-2}}{y^z}, u''_{yy} = \frac{z(z+1)x^z}{y^{z+2}}, u''_{zz} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln^2 \frac{x}{y}, \right.$   
 $\left. u''_{xy} = -\frac{z^2 x^{z-1}}{y^{z+1}}, u''_{xz} = \frac{x^{z-1}(1+z \ln x - z \ln y)}{y^z}, \right.$   
 $\left. u''_{yz} = -\frac{x^z(1+z \ln x - z \ln y)}{y^{z+1}} \right]$

**Příklady:** Vypočtěte všechny požadované derivace daných funkcí.

1.  $z = x^2 \sin^2 y, z'''_{xxy} = ?$   $\left[ z'''_{xxy} = 2 \sin 2y \right]$
2.  $z = e^x \ln y + \sin y \ln x, z'''_{xyy} = ?, z'''_{yyy} = ?$   $\left[ z'''_{xyy} = -\frac{e^x}{y^2} - \frac{\sin y}{x}, z'''_{yyy} = \frac{2e^x}{y^3} - \cos y \ln x \right]$
3.  $z = x^2 y + e^{xy^2}, z'''_{xxy} = ?$   $\left[ z'''_{xxy} = 2 + e^{xy^2} y^3 (4 + 2xy^2) \right]$
4.  $z = x \ln(xy), z'''_{xxy} = ?$   $\left[ z'''_{xxy} = 0 \right]$

5.  $z = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$ , spočítejte všechny parciální derivace 3. řádu  
 $\left[ z'''_{xxx} = -2 \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}, z'''_{xxy} = 0, z'''_{yyx} = 0, z'''_{yyy} = 2 \frac{1-3y^2}{(y^2+1)^3} \right]$
6.  $z = \cos(\sin y + x)$ ,  $z'''_{xxx} = ?$ ,  $z'''_{xxy} = ?$ ,  $z'''_{yyy} = ?$   
 $\left[ z'''_{xxx} = \sin(\sin y + x), z'''_{xxy} = \sin(\sin y + x) \cos y, z'''_{yyy} \sin(\sin y + x) (\cos^3 y + \cos y) + 3 \sin y \cos y \cos(\sin y + x) \right]$
7.  $z = e^{2y} \sin x$ ,  $z'''_{yyx} = ?$   $\left[ z'''_{yyx} = 4e^{2y} \cos x \right]$
8.  $z = x \sin(x+y) + y \cos(x+y)$ ,  $z'''_{xxy} = ?$   $\left[ z'''_{xxy} = (y-2) \sin(x+y) - (1+x) \cos(x+y) \right]$
9.  $z = y^{\ln x}$ ,  $z'''_{xxx} = ?$ ,  $z'''_{xyy} = ?$   $\left[ z'''_{xxx} = \frac{(\ln y - 2)(\ln y - 1) \ln y y^{\ln x}}{x^3}, \right.$   
 $\left. z'''_{xyy} = \frac{y^{\ln x - 2}}{x} [(\ln x - 1)(\ln x \ln y + 1) + \ln x] \right]$
10.  $u(x, y, z) = \cos(xyz)$ ,  $u'''_{xyz} = ?$   $\left[ u'''_{xyz} = x^2 y^2 z^2 \sin(xyz) - 3xyz \cos(xyz) - \sin(xyz) \right]$

**Příklady:** Dokažte, že daná funkce vyhovuje dané diferenciální rovnici.

1.  $z = \ln(e^x + e^y)$ ,  $z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$
2.  $z = \arctan(2x - y)$ ,  $z''_{xx} + 2z''_{xy} = 0$
3.  $z = 2 \cos^2(x - \frac{y}{2})$ ,  $2z''_{yy} + z''_{xy} = 0$
4.  $z = \frac{x}{\sqrt{x+y}} - y\sqrt{x+y}$ ,  $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$
5.  $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$ ,  $z''_{xx} = a^2 z''_{yy}$
6.  $z = e^{\frac{x}{y}}$ ,  $yz''_{xy} = z'_y - z'_x$
7.  $z = \frac{x^2 y^2}{x+y}$ ,  $xz''_{xx} + yz''_{xy} = 2z'_x$
8.  $z = xe^{-\frac{y}{x}}$ ,  $xz''_{xy} + 2(z'_x + z'_y) = yz''_{yy}$
9.  $u = xe^y + ye^x$ ,  $u'''_{xxx} + u'''_{yyy} = xu'''_{xyy} + yu'''_{xxy}$
10.  $u = \ln \frac{x^2 - y^2}{xy}$ ,  $u'''_{xxx} + u'''_{xxy} - u'''_{xyy} - u'''_{yyy} = 2(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3})$

### 3.3 Tečná rovina a normála plochy, gradient, derivace ve směru, totální diferenciál

Příklady: Pro zadané funkce určete a) tečnou rovinu v bodě  $T$

b) normálu v bodě  $T$  plochy  $z = f(x, y)$

c) gradient v bodě  $A$

d)  $dz$  v bodě  $A$

e)  $d^2z$  v bodě  $A$  funkce  $z = f(x, y)$

f) derivaci ve směru  $\vec{s}$  v bodě  $A$

1.  $z = \sin x \cos y$ ,  $T = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, ?]$ ,  $A = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ,  $\vec{s} (4, 3)$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a) } x - y - 2z + 1 = 0 & \text{d) } \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy \\ \text{b) } x = \frac{\pi}{4} + 4, y = \frac{\pi}{4} - t, z = \frac{1}{2} - 2t & \text{e) } -\frac{1}{2}dx^2 - dx dy - \frac{1}{2}dy^2 \\ \text{c) } \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} & \text{f) } \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

2.  $z = y \ln x$ ,  $T = [1, 1, ?]$ ,  $A = [1, 1]$ ,  $\vec{s}$  je směr osy 1. a 3. kvadrantu

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a) } x - z - 1 = 0 & \text{d) } dx \\ \text{b) } x = 1 + t, y = 1, z = -t & \text{e) } -dx^2 + 2dx dy \\ \text{c) } \vec{i} & \text{f) } \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right]$$

3.  $z = x \sin^2 y$ ,  $T = [1, \frac{\pi}{2}, ?]$ ,  $A = [1, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\vec{s} (-3, -4)$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a) } x - z = 0 & \text{d) } dx \\ \text{b) } z = 1 + t, y = \frac{\pi}{2}, z = 1 - t & \text{e) } -2dy^2 \\ \text{c) } \vec{i} & \text{f) } -\frac{3}{5} \end{array} \right]$$

4.  $z = e^{xy}$ ,  $T = [1, 2, ?]$ ,  $A = [1, 2]$ ,  $\vec{s} (1, 2)$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a) } 2e^2x + e^2y - z - 3e^2 = 0 & \text{d) } 2e^2dx + e^2dy \\ \text{b) } x = 1 + 2e^2t, y = 2 + e^2t, z = e^2 - t & \text{e) } 4e^2dx^2 + 6e^2dx dy + e^2dy^2 \\ \text{c) } 2e^2\vec{i} + e^2\vec{j} & \text{f) } 2e^2 \end{array} \right]$$

$$5. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5, T = [1, 1, ?], A = [1, 1], \vec{s} = \vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a) } 3x - 18y + z + 7 = 0 & \text{d) } -3dx + 18dy \\ \text{b) } x = 1 - 3t, y = 1 + 18t, z = 8 - t & \text{e) } 6d^2x - 12dxdy + 48d^2y \\ \text{c) } -3\vec{i} + 18\vec{j} & \text{f) } -\frac{51}{\sqrt{10}} \end{array} \right]$$

$$6. z = x \ln(x^2 + y), T = [1, 0, ?], A = [1, 0], \vec{s} = \vec{CD}, C = [2, 3], D = [3, 2]$$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a) } 2x + y - z - 2 = 0 & \text{d) } 2dx + dy \\ \text{b) } x = 1 + 2t, y = t, z = -t & \text{e) } 2d^2x - 2dxdy - d^2y \\ \text{c) } 2\vec{i} + \vec{j} & \text{f) } \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right]$$

$$7. z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2), T = [2, 2, ?], A = [2, 2], \vec{s} = (-1, 1)$$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a) } 4y + z - 4 = 0 & \text{d) } -4dy \\ \text{b) } x = 2, y = 2 + 4t, z = -4 + t & \text{e) } 6d^2x - 16dxdy + 8d^2y \\ \text{c) } -4\vec{j} & \text{f) } -2\sqrt{2} \end{array} \right]$$

**Příklady:** U zadaných funkcí určete a) tečnou rovinu v bodě  $T$

b) normálu v bodě  $T$  plochy  $z = f(x, y)$

c) gradient v bodě  $A$

d) derivaci ve směru  $\vec{s}$  v bodě  $A$

$$8. z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, T = [3, 4, ?], A = [3, 4], \vec{s} = (3, 4)$$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a) } 17x + 11y + 5z - 60 = 0 & \text{c) } -\frac{17}{5}\vec{i} - \frac{11}{5}\vec{j} \\ \text{b) } x = 3 + 17t, y = 4 + 11t, z = -7 + 5t & \text{d) } -\frac{19}{5} \end{array} \right]$$

$$9. z = \sin \frac{x}{y}, T = [\pi, 1, ?], A = [\pi], \vec{s} = (1, 1)$$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a) } x - \pi y + z = 0 & \text{c) } -\vec{i} + \pi\vec{j} \\ \text{b) } x = \pi - t, y = 1 + \pi t, z = -t & \text{d) } \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \pi) \end{array} \right]$$

$$10. z = \frac{1}{xy}, T = [1, 1, ?], A = [1, 1], \vec{s} = (1, 1)$$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a) } x + y + z - 3 = 0 & \text{c) } -\vec{i} - \vec{j} \\ \text{b) } x = 1 - t, y = 1 - t, z = 1 - t & \text{d) } -\sqrt{2} \end{array} \right]$$

$$11. z = 3x^2 + 5y^2, T = [1, -1, ?], A = [1, -1], \vec{s} = (\cos \alpha, \cos \beta), \alpha = \beta = 45^\circ$$



$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a)} 6x - 10y - z - 8 = 0 & \text{c)} 6 \vec{i} - 10 \vec{j} \\ \text{b)} x = 1 + 6t, y = -1 - 10t, z = 8 - t & \text{d)} -2\sqrt{2} \end{array} \right]$$

12.  $z = \arctan \frac{y}{x}$ ,  $T = [1, 1, ?]$ ,  $A = [1, 1]$ ,  $\vec{s} = (1, 1)$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a)} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z - \frac{\pi}{4} = 0 & \text{c)} -\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \\ \text{b)} x = 1 + \frac{1}{2}t, y = 1 - \frac{1}{2}t, z = \frac{\pi}{4} + t & \text{d)} 0 \end{array} \right]$$

13.  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $T = [1, 0, ?]$ ,  $A = [1, 0]$ ,  $\vec{s} = (2, 1)$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a)} 2x - z - 2 + 0 & \text{c)} 2 \vec{i} \\ \text{b)} 1 + 2t, y = 0, z = -t & \text{d)} \frac{4}{\sqrt{5}} \end{array} \right]$$

14.  $z = xy^2 - x^2y$ ,  $T = [2, 1, ?]$ ,  $A = [2, 1]$ ,  $\vec{s} = [B, C]$ ,  $B = [1, -3]$ ,  $C = [2, 1]$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a)} 3x + z - 4 = 0 & \text{c)} -3 \vec{i} \\ \text{b)} x = 2 + 3t, y = 1, z = -2 + t & \text{d)} -\frac{3}{\sqrt{17}} \end{array} \right]$$

15.  $z = \frac{y^2}{x^2}$ ,  $T = [-1, 2, ?]$ ,  $A = [-1, 2]$ ,  $\vec{s} = (5, -2)$

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{a)} 8x - 4y + z + 12 = 0 & \text{c)} 8dx + 4dy \\ \text{b)} x = -1 + 8t, y = 2 + 4t, z = 4 - t & \text{d)} \frac{32}{\sqrt{29}} \end{array} \right]$$

16. Určete tečnou rovinu plochy  $z = \arctan \frac{y}{x}$ , která je rovnoběžná s rovinou  $\rho : x - y + 2z - 1 = 0$ .  
 $[x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0]$

17. Nalezte body, v nichž velikost gradientu funkce  $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$  je rovna 2.

$$[\text{body ležící na kružnici } x^2 + y^2 = \frac{2}{3}]$$

18. Určete derivaci funkce  $z = \ln(x^2 + y^2)$  v bodě  $A = [1, 2]$

a) ve směru tečného vektoru v bodě  $A$  ke křivce  $y = 2\sqrt{x}$   $[\frac{3\sqrt{2}}{5}]$   
 b) ve směru, v němž je derivace maximální.  $[\frac{2\sqrt{5}}{5}]$

19. Napište rovnici tečné roviny k ploše  $z = 4 - x^2 - y^2$ , která je rovnoběžná s rovinou  $\rho : 2x + 2y + z = 0$ .  
 $[2x + 2y + z - 6 = 0]$

20. Napište rovnici tečné roviny k ploše  $az = x^2 + y^2$ , ( $a \neq 0$ ) v bodech, v nichž přímka  $x = y = z$  plochu protíná.  
 $[x + y - z - \frac{a}{2} = 0, z = 0]$

21. Dokažte, že funkce  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  vyhovuje rovnici  $u = 2 \ln 2 - \ln |\text{grad } u|^2$ .
22. Najděte tečnou rovinu procházející bodem  $A[0, 0, -1]$  a rovnoběžnou s přímkou  $p$  :  
 $x = 4 + 2t, y = 2 + t, z = 4 + 2t$  k funkci  $x^2 - y^2 - 3z = 0$ .  $[4x - 2y - 3z - 3 = 0]$
23. Najděte délku úsečky na přímce  $x = 2, y = 3, z = t$  mezi plochou  $z = x^2 + y^2$  a její tečnou rovinou v bodě  $T[1, 1, 2]$ .  $[5]$
24. Určete objem čtyřstěnu, který je tvořen souřadnými rovinami a tečnou rovinou plochy  $xyz = a^3$  v obecném bodě  $T[x_0, y_0, z_0]$ .  $[\frac{9}{2}x_0y_0z_0]$
25. Určete součet velikostí úseků, které vytíná na souřadných osách tečná rovina plochy  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  v libovolném bodě  $A[x_0, y_0, z_0]$ .  $[\text{součet je konstanta } a]$

### 3.4 Taylorův polynom

**Příklady:** Napište Taylorův polynom stupně  $n$  pro funkci  $z = f(x, y)$  v bodě  $A$ .

- $z = \sin x \sin y$   $A = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], n = 3$   
 $[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(y - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 -$   
 $-\frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{4})(y - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3]$
- $z = e^x \sin y$   $A = [0, 0], n = 3$   
 $[y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3]$
- $z = \sin(xy)$   $A = [0, \frac{\pi}{2}], n = 2$   
 $[\frac{\pi}{2}x + x(y - \frac{\pi}{2})]$
- $z = \frac{\cos x}{\cos y}$   $A = [0, 0], n = 2$   
 $[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2]$
- $z = \ln(1 + x + y)$   $A = [0, 0], n = 3$   
 $[x + y - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)]$

6.  $z = \ln(1-x)\ln(1-y)$   $A = [0, 0], n = 3$   
 $\left[xy + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2\right]$
7.  $z = 3x^2y + \sin^2 x + 5y - 2$   $A = [0, 0], n = 3$   
 $\left[-2 + 5y + x^2 + 3x^2y\right]$
8.  $z = y \ln x$   $A = [1, 1], n = 2$   
 $\left[(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)(y-1)\right]$
9.  $z = \frac{y^2}{x^2}$   $A = [-1, 2], n = 2$   
 $\left[4 + 8(x+1) + 4(y-2) + 12(x+1)^2 + 8(x+1)(y-2) + (y-2)^2\right]$
10.  $z = x \sin^2 y$   $A = [1, \frac{\pi}{2}], n = 2$   
 $\left[1 + (x-1) - (y - \frac{\pi}{2})^2\right]$
11.  $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 3y + 1$   $A = [1, 2], n = 2$   
 $\left[-2 - y + 3(x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) + (y-2)^2\right]$
12.  $z = x^3 + y^3 - 2xy$   $A = [1, 1], n = 3$   
 $\left[x - 2 + y + 3(x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2 + (x-1)^3 + (y-1)^3\right]$
13.  $z = \cos(x - y^2)$   $A = [0, 0], n = 3$   
 $\left[1 - \frac{x^2}{2}\right]$
14.  $z = \frac{1}{1-x-y+xy}$   $A = [0, 0], n = 2$   
 $\left[1 + x + y + x^2 + y^2 + xy\right]$
15.  $z = x^y$   $A = [1, 1], n = 3$   
 $\left[x + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)\right]$
16.  $z = e^{x+y+1}$   $A = [0, 0], n = 3$   
 $\left[e + ex + ey + \frac{ex^2}{2} + exy + \frac{ey^2}{2} + \frac{ex^3}{6} + \frac{ex^2y}{2} + \frac{exy^2}{2} + \frac{ey^3}{6}\right]$
17.  $z = e^y \sin x$   $A = [\frac{\pi}{2}, 0], n = 2$   
 $\left[1 + y - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right]$

18.  $z = \ln x \ln(1 + y)$   $A = [1, 1], n = 3$   
 $\left[ \ln 2(x - 1) - \frac{\ln 2}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)(y - 1) + \frac{1}{3} \ln 2(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^2(y - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)(y - 1)^2 \right]$
19.  $z = \ln(x + 2y)$   $A = [1, 0], n = 3$   
 $\left[ x - 1 + 2y - \frac{(x-1)^2}{2} - 2(x - 1)y - 2y^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 + 2(x - 1)^2y + \frac{8}{3}y^3 \right]$
20.  $z = \frac{\cos y}{e^x}$   $A = [0, \frac{\pi}{4}], n = 3$   
 $\left[ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}(y - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(y - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}x^3 - \frac{\sqrt{2}}{4}x^2(y - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{4}x(y - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}(y - \frac{\pi}{4})^3 \right]$

## 3.5 Lokální, vázané a absolutní extrémy

### 3.5.1 Stacionární body

**Příklady:** Určete stacionární body daných funkcí  $z = f(x, y)$ .

1.  $z = (5x + 7y - 25)e^{-x^2+y}$   $\left[ S = \left[ -\frac{5}{14}, \frac{277}{98} \right] \right]$
2.  $z = x - 2y + 3 \arctan \frac{y}{x}$   $\left[ S_1 = [0, 0] \text{ nevyhovuje } D(f), S_2 = \left[ \frac{6}{5}, \frac{3}{5} \right] \right]$
3.  $z = 2x + y + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$   $\left[ S_1 = [0, 0] \text{ nevyhovuje } D(f), S_2 = \left[ -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5} \right] \right]$
4.  $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$   $\left[ S = \left[ -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right] \right]$
5.  $z = \cos^2 x + \cos^2 y$   $\left[ S = \left[ \frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} \right], k \in \mathbf{Z} \right]$

### 3.5.2 Lokální extrémy

**Příklady:** Určete lokální extrémy daných funkcí.

1.  $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$   $\left[ \left[ \frac{1}{2}, -1 \right], \text{ lokální minimum} \right]$
2.  $z = x^2 - y^2 + 2x - 2y$   $\left[ \text{stacionární bod } [-1, -1], \text{ není extrém} \right]$
3.  $z = x^3 - 3xy + y^3$   $\left[ [1, 1] \text{ je lokální minimum, } [0, 0] \text{ je stac. bod} \right]$

4.  $z = (x - y + 1)^2$  [v bodech přímky  $y = x + 1$  jsou neostrá lok. min.]
5.  $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$   $[-1, -2]$  je stac. bod,  $[-\frac{5}{3}, 0]$  je lok. max.]
6.  $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$   $[-1, 2]$  je stac. bod,  $[0, 0]$  je lok. min.]
7.  $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$   $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}]$  je stac. bod,  $[0, 0]$  je lok. min.]
8.  $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$   $[5, 2]$  je lokální minimum]
9.  $z = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}$ ,  $x, y > 0$   $[\frac{5}{2}, \frac{4}{5}]$  je lokální minimum]
10.  $z = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$   $[1, 1]$  je lok. min.,  $[-1, -1]$  lok. max.,  
 $[\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{3}{\sqrt{14}}], [-\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{3}{\sqrt{14}}]$  jsou stac. body]
11.  $z = \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$   $[3, 6]$  je lokální maximum]
12.  $z = x^3 + 3y^2x - 15x - 12y$   $[2, 1]$  je lok. min.,  $[-2, -1]$  je lok. max.,  
 $[1, 2], [-1, -2]$  jsou stacionární body]
13.  $z = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$   $[0, 0]$  lok. min.,  $[0, 1], [0, -1]$  lok. max.,  
 $[1, 0], [-1, 0]$  jsou stacionární body]
14.  $z = xy \ln(x^2 + y^2)$   $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}], [-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$  lok. min.,  
 $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}], [\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$  lok. max.,  
 $[1, 0], [-1, 0]$  jsou stacionární body]
15.  $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$   $[-4, 1]$  je lokální minimum]
16.  $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$   $[0, 0]$  je lok. min. a  $[-\frac{5}{3}, 0], [1, 4], [1, -4]$  jsou  
další stacionární body]
17.  $z = y^3 + 3xy^2 + 2x^3 + 9x^2$   $[-3, 0]$  lok. max., stac. body:  $[-1, 2]$  a  $[0, 0]$ ,  
o bodu  $[0, 0]$  nelze rozhodnout]

18.  $z = (1 - x^2)^{\frac{2}{3}}(1 - y^2)^{\frac{2}{3}}$   $\left[ [0, 0] \text{ je lok. max., v bodech přímek } x = 1, x = -1, y = -1, y = 1 \text{ jsou neostrá lokální minima} \right]$
19.  $z = x^2y^2(1 - x - y)$   $\left[ \left[ \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right] \text{ je lok. max., v bodech } [0, y], y > 1 \text{ a } [x, 0], x > 1 \text{ jsou neostrá lok. minima., v bodech } [0, y], y < 1 \text{ a } [x, 0], x < 1 \text{ jsou neostrá lok. maxima} \right]$
20.  $z = x^3 + xy^2 - 2xy - 8x$   $\left[ [\sqrt{3}, 1] \text{ lok. min., } [-\sqrt{3}, 1] \text{ je lok. max., } [0, 4], [0, -2] \text{ jsou další stacionární body} \right]$
21.  $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$   $\left[ [1, 4] \text{ je lokální minimum} \right]$
22.  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$   $\left[ \left[ 1, \frac{1}{2} \right] \text{ je lok. min., } [0, 0] \text{ je stacionární bod} \right]$
23.  $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$   $\left[ [-1, 1] \text{ je lokální minimum} \right]$
24.  $z = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$   $\left[ \left[ -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right] \text{ je lok. min., } [0, 0] \text{ je stacionární bod} \right]$
25.  $z = x^3y^2 + 3x^2y + \frac{1}{2}y^2 + 3y$   $\left[ \text{stacionární body: } [0, -3], [-2, 1], [1, -2], \text{ u bodu } [1, -2] \text{ nelze o extrému rozhodnout} \right]$
26.  $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$   $\left[ [-4, -2] \text{ je lok. max., } [0, 0] \text{ je stacionární bod} \right]$
27.  $z = x \ln(x^2 + y)$   $\left[ [0, 1] \text{ je stacionární bod} \right]$
28.  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$   $\left[ \left[ 1, \frac{1}{2} \right] \text{ lok. min., } [0, 0] \text{ je stacionární bod} \right]$
29.  $z = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \arctan \frac{y}{x}$   $\left[ [1, 1] \text{ je stacionární bod} \right]$
30.  $z = (2 + x)^{\frac{2}{5}}(2 - y)^{\frac{2}{5}}$   $\left[ \text{v bodech přímek } x = -2, y = 2 \text{ jsou neostrá lokální minima} \right]$
31.  $z = 1 - \sqrt[5]{(x - 2)^4} - \sqrt[5]{y^4}$   $\left[ [2, 0] \text{ je lokální minimum} \right]$

32.  $z = \sqrt[3]{(x+1)^2} \sqrt[3]{(1-y)^2}$  [v bodech přímek  $x = -1$ ,  $y = 1$  jsou neostrá lokální minima]
33.  $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$   $[4, 4]$  je lokální maximum
34.  $z = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2$   $[-2, 4]$  je lokální maximum
35.  $z = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y - 5$   $[7, -3]$  je lokální minimum
36.  $z = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$   $[1, -2]$  je stacionární bod
37.  $z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 4$   $[\frac{1}{2}, 1]$  je lok. min.,  $[0, 0]$  je stacionární bod
38.  $z = x^3 + xy^2 + 6xy$   $[\sqrt{3}, -3]$  je lok. min.,  $[-\sqrt{3}, -3]$  je lok. max., další stacionární body jsou  $[0, 0]$ ,  $[0, -6]$
39.  $z = 3 + (x^2 + y)e^y$   $[0, -1]$  je lokální minimum
40.  $z = xe^{-(x^2+y^2)}$   $[-1, 0]$  je lokální minimum

### 3.5.3 Vázané extrémny

1.  $z = x^3 + y^3$ , za podmínky  $x + y - 3 = 0$   $[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$  lok. min.]
2.  $z = x + 2y$ , za podmínky  $x^2 + y^2 = 5$   $[1, 2]$  lok. max.,  $[-1, -2]$  lok. min.]
3.  $z = 2(x^2 + y^2)$ , za podmínky  $x + y - 1 = 0$   $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  lok. min.]
4.  $z = 6 - 4x - 3y$ , za podmínky  $x^2 + y^2 = 1$   $[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$  lok. min.,  $[-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$  lok. max.]
5.  $z = xy$ , za podmínky  $x + y = 1$   $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  lok. max.]
6.  $z = 2(x^2 + y^2)$ , za podmínky  $x + y = 2$   $[1, 1]$  lok. min.]
7.  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , za podmínky  $x + y = 2$   $[1, 1]$  lok. min.]
8.  $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ , za podmínky  $x - y = \frac{\pi}{4}$   $[\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}]$ , lok. max. pro  $k$  sudé, lok. min. pro  $k$  liché ]

9.  $z = xy(4 - x - y)$ , za podmínky  $x + y = 1$   $\left[\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ lok. max.}\right]$
10.  $z = x + y$ , za podmínky  $xy = 1$   $\left[\left[1, 1\right] \text{ lok. max.}, \left[-1, -1\right] \text{ lok. min.}\right]$
11.  $z = e^y(2x + y)$ , za podmínky  $x - y - 3 = 0$   $\left[\left[0, -3\right] \text{ lok. min.}\right]$
12.  $z = 2e^y x^2$ , za podmínky  $x = 3 + y$   $\left[\left[-2, -5\right] \text{ lok. max.}, \left[0, -3\right] \text{ lok. min.}\right]$
13.  $z = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y$ , za podmínky  $x^2 + 4y^2 = 0$   $\left[\left[0, 0\right], \left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right], \left[\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right] \text{ lok. min.}\right]$
14.  $z = 2(x^2 + y^2) - x^2 y^2$ , za podmínky  $x + y + 2 = 0$   $\left[x_1 = -1 \text{ lok. min.}, x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3} \text{ lok. max.}\right]$
15.  $z = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ , za podmínky  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$   $\left[\left[2, 2\right] \text{ lok. min.}\right]$

### 3.5.4 Absolutní extrém

1.  $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$  na čtverci  $x \in \langle 0, 4 \rangle$ ,  $y \in \langle 0, 4 \rangle$   
 $\left[\left[3, 3\right] \text{ abs. min.}, \left[4, 0\right], \left[0, 4\right] \text{ abs. max.}\right]$
2.  $z = 3xy$  v kruhu  $x^2 + y^2 \leq 2$   
 $\left[\left[-1, 1\right], \left[1, -1\right] \text{ abs. min.}, \left[1, 1\right], \left[-1, -1\right] \text{ abs. max.}\right]$
3.  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$  na obdélníku  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$   
 $\left[\left[1, 0\right] \text{ abs. min.}, \left[1, 2\right] \text{ abs. max.}\right]$
4.  $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  na oblasti dané nerovnicí  $x^2 + y^2 \leq 25$   
 $\left[\left[3, -4\right] \text{ abs. min.}, \left[-3, 4\right] \text{ abs. max.}\right]$
5.  $z = x^2 - y^2$  v uzavřené oblasti  $x^2 + y^2 \leq 4$   
 $\left[\left[2, 0\right], \left[-2, 0\right] \text{ abs. max.}, \left[0, 2\right], \left[0, -2\right] \text{ abs. min.}\right]$
6.  $z = x^2 + y^2 - 2y + 1$  na  $M = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0\}$   
 $\left[\left[0, 1\right] \text{ abs. min.}, \left[0, -2\right] \text{ abs. max.}\right]$



7.  $z = x^2 - xy + y^2$  na  $M: |x| + |y| \leq 1$   
 $[[0, 0] \text{ abs. min.}, [0, 1], [0, -1], [1, 0], [-1, 0], \text{abs. max.}]$
8.  $z = xy^2(4 - x - y)$  na oblasti omezené přímkami  $x = 0, y = 0, x + y = 6$   
 $[[2, 4] \text{ abs. min.}, [1, 2] \text{ abs. max.}]$
9.  $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$  na  $M = \{[x, y]; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$   
 $[[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}] \text{ abs. max.}]$
10.  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1$  na oblasti vymezené přímkami  $x = 0, y = 0, x + y - 2 = 0$   
 $[[0, 0] \text{ abs. min.}, [2, 0], [0, 2] \text{ abs. max.}]$
11.  $z = xy(4 - x - y)$  na trojúhelníku omezeném přímkami  $x = 1, y = 0, x + y = 6$   
 $[[3, 3] \text{ abs. min.}, [\frac{4}{3}, \frac{4}{3}] \text{ abs. max.}]$
12.  $z = x^3 + 2xy^2 + y^2 - 2$  v uzavřené oblasti omezené křivkami  $y = 4, y = x^2$   
 $[[ -2, 4] \text{ abs. min.}, [2, 4] \text{ abs. max.}]$
13.  $z = x^2 - xy - y^2$  na čtverci tvořeném body  $[1, 0], [0, 1], [-1, 0], [0, -1]$   
 $[[0, -1], [0, 1] \text{ abs. min.}, [-1, 0], [1, 0] \text{ abs. max.}]$
14.  $z = \arctan(2x^2 + y^2)$  na  $y^2 - 1 \leq x \leq 1$   
 $[[0, 0] \text{ abs. min.}, [1, \sqrt{2}], [1, -\sqrt{2}] \text{ abs. max.}]$
15.  $z = 4 - (x - 2)^2 - (y + 3)^2$  na oblasti omezené křivkami  $y = 0, x = 1, y = \sqrt{x}$   
 $[[1, 1] \text{ abs. min.}, [1, 0] \text{ abs. max.}]$

### 3.5.5 Slovní příklady

- Rozložte číslo  $a > 0$  na tři kladné sčítance tak, aby jejich součin byl co největší.  
 $[\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}]$
- V rovině  $(x, y)$  najděte takový bod, že součet čtverců jeho vzdáleností od přímek  $x = 0, y = 0, x + 2y - 16 = 0$  je minimální.  
 $[\frac{8}{5}, \frac{16}{5}]$

3. Do trojosého elipsoidu s poloosami  $a, b, c$  vepište kvádr maximálního objemu tak, aby jeho hrany byly rovnoběžné s osami elipsoidu.  $\left[\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}\right]$
4. Určete rozměry pravoúhlého rovnoběžnostěnu tak, aby jeho objem byl maximální. Součet hran je roven  $12d$ .  $\left[\text{krychle}\right]$
5. Určete rozměr betonové nádrže tvaru čtyřbokého hranolu tak, aby spotřeba betonu byla minimální pro daný objem  $V$  nádrže. Tloušťku stěn neuvažujte.  $\left[\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}\right]$
6. Z plechového plátu 12 cm širokého se má zhotovit žlábek o průřezu rovnoramenného lichoběžníka. Jak velkou část z šířky  $x$  je nutno ohnout a jaký úhel  $\varphi$  mají svírat tyto stěny s podstavou, aby byl průřez maximální.  $\left[\varphi = 60^\circ, x = 4\right]$
7. Do polokoule vepište pravoúhlý rovnoběžnostěn maximálního objemu. Poloměr  $r = 1$ .  $\left[1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
8. Bodem  $A = [a, b, c]$  ved'te rovinu tak, aby se souřadnými rovinami tvořila čtyřstěn s minimálním objemem. Určete její rovnici.  $\left[\frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 1\right]$
9. Rozložte kladné číslo  $a$  na součin čtyř kladných čísel tak, aby jejich součet byl maximální.  $\left[\sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}\right]$
10. V rovině  $\rho : x + 2y - z + 3 = 0$  určete bod, jehož součet čtverců vzdáleností od bodů  $[1, 1, 1], [2, 2, 2]$  je nejmenší.  $\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$
11. Určete rozměry válce s maximálním objemem, je-li jeho povrch  $S$  roven  $6 \text{ dm}^2$ .  $\left[r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, v = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]$
12. Na křivce  $x + 2y + 3 = 0$  určete bod, který je nejbližší počátku.  $\left[\left[-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right]\right]$
13. Pro jaké rozměry má odkrytá vana tvaru poloviny válce s povrchem  $S = 27$  maximální objem?  $\left[r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}, v = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\right]$

14. Mezi všemi trojúhelníky s obvodem  $l$  najděte ten, který má největší obsah.

[rovnostranný]

Návod:  $l = 2s = a + b + c$ ,  $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

15. Na parabole  $y^2 = 4x$  najděte bod, který je nejbližší přímce  $x - y + 4 = 0$ .

[[1, 2]]

### 3.6 Funkce dané implicitně

**Příklady:** Určete první a druhé parciální derivace v bodě  $A$  funkce  $y = f(x)$ , která je dána implicitně rovnicí.

1.  $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$

$A = [0, 1], \left[0, -\frac{2}{3}\right]$

2.  $xy + y^3 - 2x^2 = 0$

$A = [1, 1], \left[\frac{3}{4}, -\frac{7}{32}\right]$

3.  $e^{x-y} - y + x^2 - 1 = 0$

$A = [1, 1], \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right]$

4.  $\cos(xy) - y = 0$

$A = [0, 1], [0, -1]$

5.  $ye^{xy} = c$

$A = [1, 1], \left[-\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\right]$

**Příklady:** Určete první derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně danou rovnicí.

6.  $\cos(ax + by - cz) = k(ax + by - cz)$

$\left[z'_x = \frac{a}{c}, z'_y = \frac{b}{c}\right]$

7.  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$

$\left[z'_x = \frac{z}{(x+z)}, z'_y = \frac{z^2}{y(x+z)}\right]$

8.  $z = \sqrt{x^2 - y^2} \tan \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

$\left[z'_x = \frac{xz}{(x^2 - y^2)}, z'_y = \frac{-yz}{(x^2 - y^2)}\right]$

9.  $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$

$\left[z'_x = -1, z'_y = -1\right]$

10.  $x + y + z = e^z$

$\left[z'_x = \frac{1}{(x+y+z-1)} = z'_y\right]$

**Příklady:** Vypočtěte parciální derivace prvního řádu v bodě  $A$  funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně danou rovnicí.

11.  $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 1 = 0$   $A = [0, 1, 1], [z'_x = 1, z'_y = 1]$
12.  $x^3 + y^3 + z^3 - z - 1 = 0$   $A = [1, 0, 1], [z'_x = \frac{3}{2}, z'_y = 0]$
13.  $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = 0$   $A = [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}], [z'_x(A) = -1, z'_y(A) = 0]$
14.  $e^z + x^2y + z + 5 = 0$   $A = [1, -6, 0], [z'_x(A) = 6, z'_y(A) = -\frac{1}{2}]$
15.  $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a$   $A = [0, 0, a], [z'_x(A) = -1, z'_y(A) = -\cos a]$

**Příklady:** Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně danou rovnicí.

16.  $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 1 = 0$   $\left[ z''_{xx} = \frac{-(z+1)^2 - (2-x)^2}{(z+1)^3}, z''_{yy} = \frac{2(z+1)^2 - 4y^2}{(z+1)^3}, \right.$   
 $\left. z''_{xy} = \frac{-(2-x)2y^3}{z+1} \right]$
17.  $3xyz - z^3 + 1 = 0$   $\left[ z''_{xx} = \frac{2y^3xz}{(xy-z^2)^3}, z''_{yy} = \frac{2x^3yz}{(xy-z^2)^3}, \right.$   
 $\left. z''_{xy} = \frac{2z^3xy - z^5 + x^2y^2z}{(xy-z^2)^3} \right]$
18.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$   $\left[ z''_{xx} = \frac{(1-z)^2 + x^2}{(1-z)^3}, z''_{yy} = \frac{(1-z)^2 + y^2}{(1-z)^3}, \right.$   
 $\left. z''_{xy} = \frac{xy}{(1-z)^3} \right]$
19.  $xyz = e^z$   $\left[ z''_{xx} = \frac{-z^3 + 2z^2 - 2z}{x^2(z-1)^3}, z''_{yy} = \frac{-z^3 + 2z^2 - 2z}{y^2(z-1)^3}, \right.$   
 $\left. z''_{xy} = -\frac{z}{xy(z-1)^3} \right]$
20.  $e^{2z} + z \sin x - \cos y + 5 = 0, z''_{xy} = ?$   $\left[ z''_{xy} = -\frac{\sin y \cos x}{(2e^{2z} + \sin x)^3} (-2e^{2z} - \sin x + 4ze^{2z}) \right]$

**Příklady:** Vypočtěte parciální derivace druhého řádu v bodě  $A$  funkce  $z = f(x, y)$ , která je daná implicitně danou rovnicí.

21.  $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 1 = 0$   $A = [0, 1, 1], [z''_{xx} = -1, z''_{yy} = \frac{1}{2}, z''_{xy} = -\frac{1}{2}]$
22.  $x^3 + y^3 + z^3 - z - 1 = 0$   $A = [1, 0, 1], [z''_{xx} = -\frac{39}{4}, z''_{yy} = 0, z''_{xy} = 0]$
23.  $e^z - xyz + x^2 - 2 = 0$   $A = [1, 2, 0], [z''_{xx} = -2, z''_{yy} = 0, z''_{xy} = -2]$
24.  $x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$   $A = [0, 0, 1], [z''_{xx} = 1, z''_{yy} = -\sin 2,$   
 $z''_{xy} = -\sin 1]$

$$25. z^3 - 3xyz - a^3 = 0 \quad A = [0, 1, a], \left[ z''_{xx} = 0, z''_{yy} = 0, z''_{xy} = \frac{1}{a} \right]$$

**Příklady:** Určete rovnici tečny a normály v bodě  $A$  funkce  $y = f(x)$  dané implicitní rovnicí.

$$26. x^2 + 9y^2 - 13 = 0 \quad A = [2, -1], \left[ t: 9y - 2x + 13 = 0, n: 2y + 9x - 16 = 0 \right]$$

$$27. \cos(xy) - x - 2y = 0 \quad A = [1, 0], \left[ t: 2y + x - 1 = 0, n: y - 2x + 2 = 0 \right]$$

$$28. e^y - \sin x = \frac{1}{2} \quad A = [?, 0], x_A \in \langle 0, \pi \rangle \\ \left[ t: y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}), n: y = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{6}) \right]$$

$$29. \ln y + 3e^x = 0 \quad A = [0, ?], \left[ t: y - \frac{1}{e^3} = -\frac{3}{e^3}x, n: y - \frac{1}{e^3} = \frac{e^3}{3}x \right]$$

$$30. xy - \ln y - \frac{1}{x} + 2 = 0 \quad A = [e^{-1}, e^2], \left[ t: y - e^2 = -\frac{2e^4}{e-1}(x - \frac{1}{e}), \right. \\ \left. n: y - e^2 = \frac{e-1}{2e^4}(x - \frac{1}{e}) \right]$$

**Příklady:** Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě  $A$  plochy  $z = f(x, y)$  zadané implicitně danou rovnicí.

$$31. x^2 - y^2 + z^2 - 6 = 0, A = [1, 2, -3] \quad \left[ x - 2y - 3z - 6 = 0, x = 1 + t, \right. \\ \left. y = 2 - 2t, z = -3 - 3t \right]$$

$$32. 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z, \quad \left[ 5x + 4y + z - 28 = 0, x = 2 + 5t, \right. \\ A = [2, 3, 6] \quad \left. y = 3 + 4t, z = 6 + t \right]$$

$$33. x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0, A = [2, -6, ?] \quad \left[ 2x - 6y + 3z - 49 = 0, x = 2 + 2t, \right. \\ \left. y = -6 - 6t, z = 3 + 3t; 2x - 6y - 3z - 49 = 0, x = 2 + 2t, y = -6 - 6t, z = -3 - 3t \right]$$

$$34. (z^2 - x^2)xyz - y^5, A = [1, 1, 2] \quad \left[ 2x + y + 11z - 25 = 0, x = 1 + 2t, \right. \\ \left. y = 1 + t, z = 2 + 11t \right]$$

$$35. z - y - \ln \frac{x}{z} = 0, A = [1, 1, 1] \quad \left[ x + y - 2z = 0, x = 1 + t, \right. \\ \left. y = 1 + t, z = 1 - 2t \right]$$

$$36. x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0, A = [-1, ?, 1] \quad \left[ 5x + 11y + z - 18 = 0, x = -1 + 5t, \right. \\ \left. y = 2 + 11t, z = 1 + t \right]$$

$$37. e^z - z + xy = 3, A = [2, 1, ?] \quad \left[ \begin{array}{l} x + 2y - 4 = 0, x = 2 + t, \\ y = 1 + 2t, z = 0 \end{array} \right]$$

$$38. 8 = 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}}, A = [2, ?, 1] \quad \left[ \begin{array}{l} x + y - 4z = 0, x = 2 + t, \\ y = 2 + t, z = 1 - 4t \end{array} \right]$$

$$39. e^{xz} + yz = 0, A = [0, -1, 1] \quad \left[ \begin{array}{l} x + y - z + 2 = 0, x = t, \\ y = -1 + t, z = 1 - t \end{array} \right]$$

$$40. x \cos z + \arctan \frac{y}{z} = 0, A = [0, ?, 1] \quad \left[ x \cos 1 + y = 0, x = t \cos 1, y = t, z = 1 \right]$$

**Příklady:** Nalezněte rovnici tečné roviny plochy  $z = f(x, y)$  určené implicitně danou rovnicí, která je rovnoběžná s rovinou  $\rho$ . V dotykovém bodě určete rovnici normály.

$$41. 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 21 = 0, \rho : 6x + 4y + z = 0 \\ \left[ \begin{array}{l} 6x + 4y + z - 21 = 0; 6x + 4y + z + 21 = 0; x = 2 + 6t, y = 2 + 4t, z = 1 + t; \\ x = -2 + 6t, y = -2 + 4t, z = -1 + t \end{array} \right]$$

$$42. x(y + z) + z^2 = 1, \rho : 3x - 2y + 6z = 2 \\ \left[ \begin{array}{l} 3x - 2y + 6z - \sqrt{40} = 0; 3x - 2y + 6z + \sqrt{40} = 0; x = -\frac{2}{\sqrt{10}} + 3t, y = -\frac{1}{\sqrt{10}} - 2t, \\ z = \frac{4}{\sqrt{10}} + 6t; x = \frac{2}{\sqrt{10}} + 3t, y = \frac{1}{\sqrt{10}} - 2t, z = -\frac{4}{\sqrt{10}} + 6t \end{array} \right]$$

$$43. x^2 + 4y^2 + z^2 - 36 = 0, \rho : x + y - z = 0 \\ \left[ \begin{array}{l} x + y - z - 9 = 0; x + y - z + 9 = 0; x = 4 + t, y = 1 + t, z = -4 - t; \\ x = -4 + t, y = -1 + t, z = 4 - t \end{array} \right]$$

$$44. z - \arctan \frac{y}{x} = 0, \rho : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \left[ x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0; x = 1 + t, y = 1 - t, z = \frac{\pi}{4} + 2t \right]$$

$$45. x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21, \rho : x + 4y + 6z = 0 \\ \left[ \begin{array}{l} x + 4y + 6z - 21 = 0; x + 4y + 6z + 21 = 0; x = 1 + t, y = 2 + 4t, z = 2 + 6t; \\ x = -1 + t, y = -2 + 4t, z = -2 + 6t \end{array} \right]$$

46.  $16x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 88, \rho : 8x + 9y + 6z = 0$

$$\left[ 8x + 9y + 6z - 44 = 0; 8x + 9y + 6z + 44 = 0; x = 1 + 8t, y = 2 + 9t, z = 3 + 6t; \right. \\ \left. x = -1 + 8t, y = -2 + 9t, z = -3 + 6t \right]$$

47.  $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 88, \rho : 6x + 9y + 8z - 82 = 0$

$$\left[ 6x + 9y + 8z - 44 = 0; 6x + 9y + 8z + 44 = 0; x = 3 + 6t, y = 2 + 9t, z = 1 + 8t; \right. \\ \left. x = -3 + 6t, y = -2 + 9t, z = -1 + 8t \right]$$

48. Nalezněte tečnou rovinu ke grafu funkce dané implicitní rovnicí  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2$ , která je kolmá k rovinám  $2x - 2y - z = 3, x - y - z = 0$ .

$$\left[ x + y - 3 = 0; x + y + 1 = 0 \right]$$

49. Na ploše dané implicitně rovnicí  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$  určete body, v nichž jsou tečné roviny rovnoběžné se souřadnými rovinami.

$$\left[ [0, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}], [0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}], [2, -4, 2], [-2, 4, -2], [4, -2, 0], [-4, 2, 0] \right]$$

50. Určete tečnou rovinu grafu funkce  $e^z - z + xy = 3$  kolmou k přímkce  $x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1$ .

$$\left[ x + 2y - 4 = 0, x + 2y + 4 = 0 \right]$$

**Příklady:** Určete stacionární body funkce  $z = f(x, y)$  dané implicitně rovnicí.

51.  $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 72$   $\left[ [1, 1], [-1, -1] \right]$

52.  $x^2 - 2xy + z^2 - 4x + 4z = 5$   $\left[ [0, -2] \right]$

53.  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x - 4y - 12z + 8 = 0$   $\left[ [-1, 1] \right]$

54.  $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z = 0$   $\left[ [2, -3] \right]$

55.  $x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y + 2z + 16 = 0$   $\left[ [2, -3] \right]$

**Příklady:** Nalezněte totální diferenciál prvního řádu funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí.

56.  $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$   $\left[ -\frac{1}{\sin 2z} (\sin 2x dx + \sin 2y dy) \right]$

57.  $e^z - xyz = 0$   $\left[ \frac{z}{x(z-1)} dx + \frac{z}{y(z-1)} dy \right]$
58.  $\ln(xyz) + z^2y = 0$   $\left[ -\frac{z}{x(1+2z^2y)} dx - \frac{z(1+z^2y)}{y(1+2z^2y)} dy \right]$
59.  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$   $\left[ -\frac{x}{3z} dx - \frac{2y}{3z} dy \right]$
60.  $\arcsin \frac{z}{x} + 3y^2 = 0, x > 0$   $\left[ \frac{z}{x} dx - 6y\sqrt{x^2 - z^2} dy \right]$

### 3.7 Parametrizace křivek

**Příklady:** Najděte obecnou rovnici křivky dané parametricky.

1.  $x = t^2 - 2t + 3, y = t^2 - 2t + 1, t \in (1, \infty)$   $[y = x - 2]$
2.  $x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}, t \in \mathbf{R}$   $[x^2 + y^2 = a^2]$
3.  $x = t^2 + t + 1, y = t^2 - t + 1$   $[(x - y)^2 - 2x - 2y + 4 = 0]$
4.  $x = 4 + 4t^2, y = 3 + 4t$   $[(y - 3)^2 = 4(x - 4)]$
5.  $x = \frac{a}{\cos t}, y = b \tan t$   $\left[ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right]$

**Příklady:** Najděte parametrické rovnice křivky, která je průnikem dvou daných ploch.

6.  $z = xy, y = \ln x$   $[x = t, y = \ln t, z = t \ln t, t > 0]$
7.  $y^2 = x, z^2 = y$   $[x = t^4, y = t^2, z = t, t \in \mathbf{R}]$
8.  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x^2 + y^2 - z^2 = 0$   $\left[ x = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos t, y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin t, \right.$   
 $\left. z = \frac{r}{\sqrt{2}}, t \in \langle 0, 2\pi \rangle \right]$
9.  $x^2 + y^2 = r^2, z = x^2 - y^2$   $\left[ x = r \cos t, y = r \sin t, \right.$   
 $\left. z = r^2 \cos 2t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle \right]$
10.  $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = b^2, x > 0$   $\left[ x = \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 t}, y = b \cos t \right.$   
 $\left. z = b \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle \right]$



### 3.8 Tečna a normálová rovina prostorové křivky

Vzorce:

$$k : x = x(t), y = y(t), z = z(t); t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

$$\text{směrový vektor tečny } \vec{t} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

$$\text{normálová rovina } \rho \equiv (T, \vec{n}_\rho = \vec{t})$$

**Příklady:** Najděte tečnu a obecnou rovnici normálové roviny prostorové křivky.

1.  $k : t^4 + t^2 + 1, y = 4t^3 + 5t + 2, z = t^4 - t$  v bodě  $T = [3, -7, 2]$   
 $[t : x = 3 - 6t, y = -7 + 17t, z = 2 - 5t; \rho : 6x - 17y + 5z - 147 = 0]$
2.  $k : x = t^3 - t^2 - 5, y = 3t^2 + 1, z = 2t^3 - 16$  v bodě  $T$  pro  $t_0 = 2$   
 $[t : x = -1 + 2t, y = 13 + 3t, z = 6t; \rho : 2x + 3y + 6z - 37 = 0]$
3.  $k : t^2 - t, y = t^3, z = 3t^4 - 2t^2$  v bodě  $T$  pro  $t_0 = 1$   
 $[t : x = t, y = 1 + 3t, z = 1 + 10t; \rho : x + 3y + 10z - 13 = 0]$
4.  $k$  je proniková křivka ploch  $z = x^2 + y^2$  a  $x = y$  v bodě  $T = [1, 1, 2]$   
 $[t : x = 1 + t, y = 1 + t, z = 2 + 4t; \rho : x + y + 4z - 10 = 0]$
5.  $k : x^2 + y^2 + z^2 = 25, x + z = 5, T = [2, 2\sqrt{3}, 3]$   
 $[t : x = 2 + t, y = 2\sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}t, z = 3 - t; \rho : x + \frac{1}{2\sqrt{3}}y - z = 0]$



# Kapitola 4

## Diferenciální rovnice

**Příklady:** Zjistěte, zda daná funkce je řešením dané diferenciální rovnice.

1.  $y = \sin x$ ,  $y \cos x - \sin xy' = 0$  [ano]

2.  $y = x^2 + x + 2$ ,  $y'' + 3x = 0$  [ne]

3.  $y = x \cos x$ ,  $y'' + 2y' - y = 3x$  [ne]

4.  $y = y = 3 - \sin^2 x$ ,  $y'' + 2y' = -4 \cos 2x$  [ne]

5.  $y = 2e^x - e^{-x}$ ,  $y'' - y' = -\frac{2}{e^x}$  [ano]

### 4.1 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

**Příklady:** Nalezněte obecné, případně partikulární řešení daných diferenciálních rovnic.

1.  $2y' \sqrt{x} = y$  [ $y = ce^{\sqrt{x}}$ ]

2.  $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$  [ $y^2 = c|x^2 - 1| - 1$ ]

3.  $y' \sqrt{1 - x^2} - y^2 - 1 = 0$  [ $\arctan y = \arcsin x + c$ ]

4.  $y' = 2\sqrt{y} \ln x$ ,  $y(e) = 1$  [ $y = (x \ln x - x + 1)^2$ ]

5.  $x + xy + y'(y + xy) = 0$   $[e^{x+y} = c|(y+1)(x+1)|]$
6.  $y' = (2y + 1) \cot x, y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$   $[y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}]$
7.  $yy' = \frac{1-2x}{y}$   $[y^3 = 3x(1-x) + c]$
8.  $y' = 10^{x+y}$   $[10^x + 10^{-y} = c]$
9.  $y' = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$   $[\arcsin y + \arcsin x = c]$
10.  $e^{-s}(1 + \frac{ds}{dt}) = 1$   $[(1 - e^{-s})c = e^t]$
11.  $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx, y(0) = \frac{\pi}{4}$   $[\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x]$
12.  $xy' + y = 0$   $[xy = c]$
13.  $y' = y \cos x$   $[y = ce^{\sin x}]$
14.  $\frac{1}{2y+1} dy - \cot x dx = 0, y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$   $[y = \frac{4 \sin^2 x - 1}{2}]$
15.  $xy^2 y' + y = xy' - x^3 y$   $[\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = \ln c |\frac{y}{x}|]$
16.  $x(1 + y^2) dx - y(1 + x^2) dy = 0, y(-2) = 1$   $[y^2 = \frac{2}{5} x^2 - \frac{3}{5}]$
17.  $y' = \frac{x+2}{x^3-2x^2}$   $[y = \frac{1}{x} + \ln c \frac{|x-2|}{|x|}]$
18.  $(y-1)(y-2) - y' = 0$   $[y-2 = ce^x(y-1)]$
19.  $y - y^2 + xy' = 0$   $[y = \frac{1}{1-cx}]$
20.  $y' - xy^2 - y^2 - xy - y = 0$   $[ce^{\frac{x^2}{2}+x} = \frac{y}{y+1}]$
21.  $y' - y^2 \ln x = 0$   $[y = -\frac{1}{x \ln x - x} + c]$
22.  $y' + 2 \cos x \sin^2 y = 0$   $[\cot y = 2 \sin x + c]$
23.  $y' \sin x - y \cos x = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$   $[y = c \sin x, y_0 = \sin x]$
24.  $e^y(1 + x^2) dy - 2x(1 + e^y) dx = 0$   $[y = \ln |c(1 + x^2) - 1|]$

25.  $y' \cot x + y = 2, y(\pi) = -1$   $[y_0 = 2 - 3 \cos x]$
26.  $y' e^{x^2} - 2x = 0$ , partikulární řešení jdoucí  
bodem  $[0, -1]$   $[y = -e^{-x^2}]$
27.  $\sin xy' - y \ln y = 0$   $[\ln y = c \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}}]$
28.  $e^{x+y} - y' = 0$   $[e^x + e^{-y} = c]$
29.  $y \ln y + xy' = 0, y(1) = 1$   $[x \ln y = c, y = 1]$
30.  $xy' + y = y^2, y(1) = \frac{1}{2}$   $[\frac{y-1}{y} = xc, 1 = y(x+1)]$
31.  $(x+1)y' = 1 - y, y(0) = 5$   $[y = \frac{5+x}{x+1}]$
32.  $e^{x-y} dx - e^{y-x} dy = 0$   $[e^{2y} - e^{2x} = c]$
33.  $y - xy' = 1 + x^2 y', y(1) = 1$   $[y = 1]$
34.  $e^{x+y}(1 - e^{-y}) + (1 + e^x)^2 y' = 0$   $[y - \ln |e^y - 1| = c - \frac{1}{1+e^x}]$
35.  $x^2 \sqrt{1+y^2} + y^2 \sqrt{1+x^2} y' = 0$   $[y \sqrt{1+y^2} + x \sqrt{1+x^2} = \ln(|y + \sqrt{1+y^2}| |x + \sqrt{1+x^2}|) + c]$
36.  $2(1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 0$   $[y^2 = \ln |1 + e^x| - \ln 2]$
37.  $y' + y \cos x = \cos x$   $[y = 1 + ke^{-\sin x}]$
38.  $\cos^2 xy' = (1 + \cos^2 x) \sqrt{1 - y^2}$   $[y = \arcsin(\tan x + x + c) \wedge y = 1 \wedge y = -1]$
39.  $y' = \tan x \tan y, y(0) = \frac{\pi}{2}$   $[\sin y = \frac{1}{\cos x}]$
40.  $y' = \sqrt{1 - y^2}$   $[\arcsin y = x + c]$

## 4.2 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

**Příklady:** Nalezněte obecné, případně partikulární řešení daných diferenciálních rovnic.

1.  $y' \tan x - y = a$   $[y = c \sin x - a]$
2.  $y' + 2y = 4x$   $[y = ce^{-2x} + 2x - 1]$
3.  $y' + 2xy = e^{-x^2}x$   $[y = e^{-x^2}(c + \frac{x^2}{2})]$
4.  $y' \cos x = y \sin x + \cos^2 x$   $[y = \frac{c}{\cos x} + \frac{x}{2 \cos x} + \frac{\sin x}{2}]$
5.  $y' = 2xy - x^3 + x$   $[y = ce^{x^2} + \frac{1}{2}x^2]$
6.  $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$   $[y = (1 + x^2)(c + x)]$
7.  $y' + y = \cos x$   $[y = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)]$
8.  $y' + ay = e^{mx}$   $[y = ce^{-ax} + \frac{1}{m+a}e^{mx}]$
9.  $xy' + y - e^x = 0$   $[y = \frac{1}{x}(c + e^x)]$
10.  $xy' + y = 1 + \ln x$   $[y = \frac{c}{x} + \ln x]$
11.  $2xy' - 6y = x^2$   $[y = cx^3 - \frac{1}{2}x^2]$
12.  $y' \cos x + y \sin x = 1$   $[y = c \cos x + \sin x]$
13.  $xy' \ln x - 2y = \ln x$   $[y = c \ln^2 x - \ln x]$
14.  $y' - \frac{1}{x}y = x^2$   $[y = cx + \frac{x^3}{2}]$
15.  $y' + y = 4x$   $[y = ce^{-x} + 4x - 4]$
16.  $y' + \frac{y}{1+x} = e^x, x \neq -1$   $[y = \frac{xe^x+c}{1+x}]$
17.  $y' - y \tan x = \cot x$   $[y = \frac{\ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + c}{\cos x}]$
18.  $(2x + 1)y' + y = x$   $[y = \frac{x-1}{3} + \frac{c}{\sqrt{2x+1}}]$

19.  $y' + y \cos x = \sin 2x$   $\left[ y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x} \right]$
20.  $y' - y \tan x = 2 \cos^2 x$   $\left[ y = 2 \tan x - \frac{2 \sin^3 x}{3 \cos x} + \frac{c}{\cos x} \right]$
21.  $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1, y(\sqrt{2}) = \sqrt{e}$   $\left[ y = x^2 \left[ 1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) e^{\frac{1}{x}} \right] \right]$
22.  $y' + \sqrt{x}y = 3x^2, y(1) = -\frac{3}{2}$   $\left[ y = 3\sqrt{x^3} - \frac{9}{2} \right]$
23.  $x^2y' = 2xy^{-3}, y(-1) = 1$   $\left[ y = 2x^2 + \frac{1}{x} \right]$
24.  $y' \sin x - y \cos x = e^x \sin^2 x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$   $\left[ y = \sin x (e^x - e^{\frac{\pi}{2}}) \right]$
25.  $y' + \frac{y}{1+x} = \sin x, y(0) = 0, x \neq -1$   $\left[ y = -\cos x + \frac{\sin x}{1+x} + \frac{2}{1+x} \right]$
26.  $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^2, y(0) = 1$   $\left[ y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + \frac{1}{2}(x+1)^2 \right]$
27.  $y' - 2xy = 2xe^{x^2}, y(0) = 4$   $\left[ y = (x^2 + 4)e^{x^2} \right]$
28.  $xy' - \frac{y}{x+1} = x, y(1) = 1, x \neq -1$   $\left[ y = \frac{x}{x+1}(1+x + \ln x) \right]$
29.  $y' + y \cot x = \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$   $\left[ y = \frac{2x - \sin 2x + 4 - \pi}{4 \sin x} \right]$
30.  $xy' + 2y = 2x \cos 2x + 2 \sin 2x, y(\pi) = 1$   $\left[ y = \sin 2x + \frac{\pi^2}{x^2} \right]$

### 4.3 Exaktní diferenciální rovnice

1.  $x dx + y dy = 0, y(0) = 1$   $\left[ x^2 + y^2 = 1 \right]$
2.  $\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0$   $\left[ y = xc \right]$
3.  $(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0$   $\left[ x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c \right]$
4.  $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$   $\left[ x^2 - y^2 = cy^3 \right]$
5.  $(2x^3 - xy^2) dx + (2y^3 - x^2y) dy = 0$   $\left[ \frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{2} + c = 0 \right]$
6.  $\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0$   $\left[ \arctan \frac{x}{y} = c \right]$

7.  $\frac{x}{x^2+y^2} dy + (1 - \frac{y}{x^2+y^2}) dx = 0$   $[x - \arctan \frac{x}{y} = c]$
8.  $(x + y + 1) dx + (x - y^2 + 3) dy = 0, y(0) = 1$   $[\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + xy + x + 3y - \frac{8}{3} = 0]$
9.  $3x^2y dx + (x^3 + y^2) dy = 0$   $[x^3y + \frac{y^3}{3} = c]$
10.  $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0, y(0) = 0$   $[xe^y - y^2 = 0]$
11.  $(x + xy^2) dx + (y + x^2y) dy = 0$   $[x^2 + x^2y^2 + y^2 = c]$
12.  $(4x^3y^3 - 2xy) dx + (3x^4y^2 - x^2) dy = 0$   $[x^4y^3 - x^2y = c]$
13.  $(3e^{3x}y - 2) dx + e^{3x} dy = 0, y(0) = e$   $[ye^{3x} - x^2 + e = 0]$
14.  $(\cos y + y \cos x) dx + (\sin x - x \sin y) dy = 0$   $[x \cos y + y \sin x = c]$
15.  $\cos y \cos x dx + (\frac{1}{y} - \sin x \sin y) dy = 0,$   
partikulární řešení jdoucí bodem  $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$   $[\sin x \cos y + \ln y - \ln \frac{\pi}{2} = 0]$
16.  $(\frac{y}{x} + 2x)dx + \ln x dy = 0$   $[y \ln x + x^2 + c = 0]$
17.  $(\sin^2 y + e^x) dx + x \sin 2y dy = 0, y(0) = \frac{\pi}{2}$   $[x \sin^2 y + e^x - 1 = 0]$
18.  $e^{xy}y dx + e^{xy}x dy = 0, y(0) = 0$   $[e^{xy} - 1 = 0]$
19.  $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y) dx + (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x) dy = 0$   $[\sqrt{x^2 + y^2} - xy + c = 0]$
20.  $(-\frac{y}{x^2+y^2} + 6x) dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = 0, y(1) = 1$   $[\arctan \frac{y}{x} + 3x^2 - \frac{\pi}{4} - 3 = 0]$

#### 4.4 Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, homogenní

**Příklady:** Najděte obecné nebo partikulární řešení daných diferenciálních rovnic.

1.  $y'' - y' - 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -1$   $[y = -\frac{1}{5}e^{3x} + \frac{1}{5}e^{-2x}]$



2.  $y''' - 4y'' + 4y' = 0$   $[y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x}]$
3.  $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$   $[y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}]$
4.  $y'' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$   $[y = \frac{2}{3} \sin 3x + \cos 3x]$
5.  $y'' + y' = 0, y(1) = 2, y'(-1) = -2$   $[y = 2 - \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e}e^{-x}]$
6.  $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$   $[y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 2x + c_4 \cos 2x]$
7.  $y''' - 6y'' + 13y' = 0$   $[y = c_1 + c_2e^{3x} \sin 2x + c_3e^{3x} \cos 2x]$
8.  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$   $[y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^x]$
9.  $y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 0,$   
 $y(0) = 26, y'(0) = 54, y''(0) = 108$   $[y = 21e^{2x} + 8e^{3x} - 3e^{4x}]$
10.  $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$   $[y = c_1 + c_2 \sin 2x + c_3 \cos 2x + c_4x \sin 2x + c_5x \cos 2x]$
11.  $y'' - 4y = 0$   $[y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}]$
12.  $y''' - 8y = 0$   $[y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} \cos \sqrt{3}x + c_3e^{-x} \sin \sqrt{3}x]$
13.  $y''' - y' = 0, y(0) = 3,$   
 $y'(0) = -1, y''(0) = 1$   $[y = 2 + e^{-x}]$
14.  $y^{(4)} - y = 0$   $[c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x]$
15.  $y^{(4)} + 4y = 0$   $[y = c_1e^x \cos x + c_2e^x \sin x + c_3e^{-x} \cos x + c_4e^{-x} \sin x]$

## 4.5 Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, nehomogenní

### 4.5.1 Metoda variace konstant

1.  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$   $\left[ y = (c_1 - \frac{1}{2}x) \cos 2x + (c_2 + \frac{1}{4} \ln |\sin 2x|) \sin 2x \right]$
2.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$   $\left[ y = c_1 e^x + c_2 x e^x + x e^x \ln |x| \right]$
3.  $y'' + y' = \frac{1}{1+e^x}$   $\left[ y = c_1 + c_2 e^{-x} + \ln \frac{e^x}{e^x+1} - \ln(1+e^x) e^{-x} \right]$
4.  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$   $\left[ y = (c_1 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}) e^{-2x} + (c_2 + x \ln x - x) x e^{-2x} \right]$
5.  $y'' + y = \tan x$   $\left[ y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \cos x \right]$
6.  $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$   $\left[ y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \frac{1}{2} x \sin 2x \right]$
7.  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^{x+1}}$   $\left[ y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + e^{-x-1}(x-1) \right]$
8.  $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$   $\left[ y = (c_1 + c_2 x + \frac{1}{2x}) e^{-2x} \right]$
9.  $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$   $\left[ y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - \frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \ln |\sin 3x| \sin 3x \right]$
10.  $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$   $\left[ y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x \right]$
11.  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^{x+1}}$   $\left[ y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) \right]$
12.  $y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}$   $\left[ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + e^{2x} \ln(1+e^{-x}) + e^x \ln(1+e^x) \right]$

13.  $y'' - y = \frac{2}{e^x + 1}$   $\left[ y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x \ln(1 + e^{-x}) - e^{-x} \ln(1 + e^x) - 1 \right]$
14.  $y'' + 4y = \cot 2x$   $\left[ y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \ln |\tan x| \sin 2x \right]$
15.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$   $\left[ y = c_1 e^x + c_2 x e^x - e^x \ln \sqrt{x^2 + 1} + e^x x \arctan x \right]$
16.  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$   $\left[ y = (\ln |\sin x| + k_1) \sin x + (k_2 - x) \cos x \right]$
17.  $y'' - y = \cos^2 x$   $\left[ \text{Návod: } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \right. \\ \left. y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cos 2x \right]$
18.  $y'' + 2y' + y = 4e^{-x} \ln x$   $\left[ y = k_1 e^{-x} + k_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x} (2 \ln x - 3) \right]$
19.  $y'' + 2y' + y = e^{-x} \sqrt{1+x}$   $\left[ y = \left( \frac{2}{5} (\sqrt{1+x})^5 - \frac{2}{3} (\sqrt{1+x})^3 + c_1 \right) e^{-x} + \left( \frac{2}{3} (\sqrt{1+x})^3 + c_2 \right) x e^{-x} \right]$
20.  $y'' + y = \cot^2 x$   $\left[ y = \left( \cos x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c_1 \right) \cos x + \left( c_2 - \sin x - \frac{1}{\sin x} \right) \sin x \right]$
21.  $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{e^x + 2}$   $\left[ y = (\ln(e^x + 2) + c_1) e^{2x} + (e^x + 2 - 2 \ln(e^x + 2) + c_2) e^x \right]$
22.  $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}$   $\left[ y = 2\sqrt{1+e^x} - \frac{2}{3} (\sqrt{1+e^x})^3 + c_1 + 2e^x \sqrt{1+e^x} + c_2 e^x \right]$
23.  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 2x}$   $\left[ y = \left( -\frac{1}{8} \ln \left| \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} \right| + c_1 \right) \cos 2x + \left( c_2 - \frac{1}{\sin 2x} \right) \sin 2x \right]$
24.  $y'' + y = \frac{1}{\sin 2x}$   $\left[ y = \left( \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c_1 \right) \cos x + \left( c_2 - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| \right) \sin x \right]$
25.  $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$   $\left[ y = \left( \frac{x^2}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + c_1 \right) e^x + \left( x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c_2 \right) x e^x \right]$

### 4.5.2 Metoda neurčitých koeficientů - speciální pravá strana

**Příklad:** Lineární diferenciální rovnice má tyto kořeny charakteristické rovnice:  $-1$  je trojnásobný kořen,  $\pm 2i$ ,  $3 \pm 4i$ ,  $0$  jsou dvojnásobné kořeny a  $+3$  je jednonásobný. Navrhněte partikulární řešení pro dané pravé strany:

1.  $3xe^{-x}$   $[y_0 = x^3(ax + b)e^{-x}]$
2.  $2x \cos 3x$   $[y_0 = (ax + b) \sin 3x + (cx + d) \cos 3x]$
3.  $2e^{-3x}$   $[y_0 = ae^{-3x}]$
4.  $x^2e^{3x} \sin 4x$   $[y_0 = xe^{3x}((ax^2 + bx + c) \sin 4x + (dx^2 + ex + f) \cos 4x)]$
5.  $10x^3$   $[y_0 = x^2(ax^3 + bx^2 + cx + d)]$
6.  $x \sin x + 5x^2e^{3x}$   $[y_0 = y_{01} + y_{02}, y_{01} = (ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x, y_{02} = xe^{3x}(ax^2 + bx + c)]$
7.  $x^2e^{2x \cos 3x}$   $[y_0 = e^{2x}((ax^2 + bx + c) \cos 3x + (dx^2 + ex + f) \sin 3x)]$
8.  $5x^2 \sin 2x$   $[y_0 = x((ax^2 + bx + c) \sin 2x + (dx^2 + ex + f) \cos 2x)]$

**Příklady :** Najděte obecné řešení dané diferenciální rovnice.

1.  $y'' - 4y = 8x^3$   $[y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - 3x - 2x^3]$
2.  $y'' + y = e^x \sin 2x$   $[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{10}e^x(2 \cos 2x + \sin 2x)]$
3.  $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$   $[y = (c_1 + c_2x + \frac{3}{2}x^2)e^{2x}]$
4.  $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$   $[y = c_1e^{2x} + c_2e^x + \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x]$
5.  $y^{(5)} - y^{(3)} = x^2 - 1$   $[y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x + \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3]$
6.  $y'' + y = 4x \sin x$   $[y = (c_1 - x^2) \cos x + (c_2 + x) \sin x]$

7.  $y'' + 4y' - 5y = 1$   $\left[ y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} - \frac{1}{5} \right]$
8.  $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$   $\left[ y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{9} e^{-x} \right]$
9.  $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$   $\left[ y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x} \right]$
10.  $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$   $\left[ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + \left( \frac{1}{10} x - \frac{3}{25} \right) \cos x - \left( \frac{3}{10} x + \frac{17}{50} \right) \sin x \right]$
11.  $y'' - 2y' + y = e^{2x}$   $\left[ y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{2x} \right]$
12.  $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$   $\left[ y = c_1 e^{4x} + c_2 e^x + (2x - 2x^2 - 3) e^{2x} \right]$
13.  $y'' - 3y' + 2y = x + 1 - e^{-2x}$   $\left[ y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{1}{12} e^{-2x} + \frac{1}{2} x + \frac{5}{4} \right]$
14.  $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$   $\left[ y = c_1 e^{2x} \cos 2x + c_2 e^{2x} \sin 2x + \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{20} \sin 2x \right]$
15.  $y'' + y = \sin x + \cos 2x$   $\left[ y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x \right]$
16.  $y'' - 4y = \sin x + 3x \cos x$   $\left[ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \left( -\frac{3}{5} x + \frac{3}{25} \right) \cos x - \frac{3}{25} \sin x \right]$
17.  $y'' + 4y' = x^3 + x + 2$   $\left[ y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{16} x^4 - \frac{1}{16} x^3 + \frac{11}{64} x + \frac{53}{32} \right]$
18.  $y'' - 2y' = e^x \sin x$   $\left[ y = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \sin x \right]$
19.  $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$   $\left[ y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{12} x^3 \cos 2x + \frac{1}{16} x^2 \sin 2x + \frac{1}{32} x \cos 2x \right]$
20.  $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^x$   $\left[ y = e^{3x} (c_1 + c_2 x) + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} x - 2e^x \right]$
21.  $2y'' + 5y' = e^x$   $\left[ y = c_1 + c_2 e^{-\frac{2}{5}x} + \frac{1}{7} e^x \right]$
22.  $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x} \sin \frac{4}{5}x$   $\left[ e^{\frac{3}{5}x} (c_1 \cos \frac{4}{5}x + c_2 \sin \frac{4}{5}x) - \frac{1}{8} x e^{\frac{3}{5}x} \cos \frac{4}{5}x \right]$
23.  $y''' + 2y'' + y' = -2e^{2x}$   $\left[ y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} - \frac{1}{9} e^{2x} \right]$
24.  $y^{IV} - 3y''' = x$   $\left[ y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{3x} - \frac{1}{72} x^4 - \frac{1}{6} x \right]$
25.  $y'' + 2y = 2x e^x$   $\left[ y = c_1 \sin \sqrt{2}x + c_2 \cos \sqrt{2}x + e^x \left( \frac{2}{3} x - \frac{4}{9} \right) \right]$

## 4.5.3 Různé příklady

**Příklady:** Určete partikulární řešení dané diferenciální rovnice s danými počátečními podmínkami:

1.  $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -\frac{11}{2}$   $\left[ y = (1+x)e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{5}{2}x} \right]$
2.  $y'' + 6y' + 9y = (2x+1)e^x$ ,  $y(0) = 5$ ,  $y'(0) = \frac{1}{8}$   $\left[ y = e^{-3x}(15x+5) + \frac{1}{8}xe^x \right]$
3.  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = 10$   $\left[ y = 4e^x + 2e^{3x} \right]$
4.  $4y'' + 4y' + y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$   $\left[ y = e^{-\frac{1}{2}x}(x+2) \right]$
5.  $y'' + 3y' + 2y = 20 \cos 2x$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 6$   $\left[ y = -\cos 2x + 3 \sin 2x \right]$
6.  $y'' + 4y' + 5y = 0$ ,  $y(0) = -3$ ,  $y'(0) = 0$   $\left[ y = -6e^{-2x} \sin x - 3e^{-2x} \cos x \right]$
7.  $y'' + 9y = 0$ ,  $y(\pi) = -1$ ,  $y'(\pi) = 1$   $\left[ y = \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x = \right.$   
 $\left. = -\cos 3(x-\pi) + \frac{1}{3} \sin 3(x-\pi) \right]$
8.  $y'' + 4y' + 29y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 15$   $\left[ y = 3e^{-2x} \sin 5x \right]$
9.  $y'' - y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$   $\left[ y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]$
10.  $y'' - 2y' + 5y = 0$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ ,  $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$   $\left[ y = -\frac{1}{2}e^{x-\frac{\pi}{2}} \sin 2x \right]$
11.  $y'' + y' - 2y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$   $\left[ y = \frac{5}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-2x} \right]$
12.  $y'' + 4y' + 5y = 0$ ,  $y(0) = -3$ ,  $y'(0) = 0$   $\left[ y = -3e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x) \right]$
13.  $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$ ,  $s(0) = 1$ ,  $s'(0) = 1$   $\left[ s = e^{-t}(\cos t + 2 \sin t) \right]$
14.  $y'' + 2ay' + a^2y = 0$ ,  $y(0) = a$ ,  $y'(0) = 0$   $\left[ y = ae^{-ax}(1+ax) \right]$
15.  $y'' + 9y = 15 \sin 2x$ ,  $y(0) = -7$ ,  $y'(0) = 0$   $\left[ y = 3 \sin 2x - 7 \cos 3x - \right.$   
 $\left. - 2 \sin 3x \right]$