VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Matematika 1

RNDr. Vlasta Krupková, CSc.
RNDr. Petr Fuchs, Ph.D.

ÚSTAV MATEMATIKY

Obsah

Seznam obrázků

1 Úvod

Tento učební text k předmětu Matematika 1 je určen především studentům prvního semestru kombinovaného studia. Tento typ studia je kombinací prezenční a distanční formy, přičemž těžiště studia je v samostatné práci, pro kterou je nezbytné mít k dispozici dosti podrobný a srozumitelný studijní materiál. Snažili jsme se proto zavádět pouze skutečně nezbytné pojmy a postupy potřebné v dalším studiu na FEKT, v mnoha případech uvedené motivací. Přitom ale nebylo možné slevit z přesnosti výkladu – proto, i když je to nepopulární, postupujeme cestou „definice – věta – důkaz“. Tato cesta přes veškerou kritiku nematematiků, jíž se jí v současné době dostává, zůstává nejpřehlednější a v podstatě jedinou možnou formou matematického výkladu. Aby byl usnadněn přechod od teoretického pochopení výkladu k schopnosti získané vědomosti a dovednosti aplikovat, uvádíme mnoho ilustrujících řešených příkladů a v závěru každé kapitoly cvičení pro samostudium.

Jak již bylo zmíněno, tento text je určen především pro studenty v kombinovaném studiu, ale vzhledem k tomu, že osnovy kombinovaného a prezenčního studia jsou stejné, věříme, že tento text bude plně použitelný i pro studenty studia prezenčního.

V našem kurzu Matematika 1 nebudeme postupovat systematicky od úplného začátku, ale budeme navazovat na látku ze střední školy. Úvodní kapitola je věnována přehlednému opakování, popřípadě doplnění nejdůležitějších pojmů, které budeme užívat. Sledujeme i cíl upřesnit a sjednotit některé názvy a označení.

1.1 Elementy matematické logiky

Výroky

Připomeňme, že ***výrok*** chápeme jako jazykové vyjádření myšlenek, jimiž přisuzujeme předmětům jisté vlastnosti nebo jimiž stanovíme vztahy mezi předměty; je to (jazykový) výraz, o němž má smysl říci, že je pravdivý nebo nepravdivý.

Například „číslo 3 je sudé“ je nepravdivý výrok, naproti tomu sdělení „přijď brzy domů“, „číslo Brno je modré“, „$\sin x > 0$“ výroky nejsou (druhé sdělení je nesmyslná snůška slov, třetí sdělení je tzv. výroková funkce s proměnnou x).

Výrokům přiřazujeme tzv. ***pravdivostní hodnoty***: je-li výrok pravdivý, má pravdivostní hodnotu 1, nepravdivý výrok má pravdivostní hodnotu 0.

Složené výroky sestavujeme pomocí výrokotvorných částic – spojek; jsou-li p, q výroky, definujeme:

definujeme:	***negace výroku*** p	$\bar{p},\ \neg p,\ p'$	opačný výrok
	konjunkce výroků p a q	$p \wedge q$	a, současně
	disjunkce výroků p a q	$p \vee q$	nebo (nevylučovací!)
	implikace výroků p a q	$p \Rightarrow q$	z p plyne q *
	ekvivalence výroků p a q	$p \Leftrightarrow q$	p je ekvivalentní s q **

* p implikuje q, jestliže p pak q, q je nutná podmínka pro p, p je postačující podmínka pro q,

** p právě když q, p tehdy a jen tehdy když q, p když a jen když q, p je nutná a postačující podmínka pro q.

Jednotlivé výrokové spojky mají specifické vlastnosti: například negací pravdivého výroku získáme výrok nepravdivý a naopak, konjunkce dvou výroků je pravdivá pouze v případě, jsou-li oba výroky pravdivé atd. Přehledněji vlastnosti jednotlivých výrokových spojek popíšeme pomocí pravdivostních hodnot:

p	$\neg p$	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	0	1	1	1	1	1
1		0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0		0	0	0	1	1

Stejně tak pomocí tabulky pravdivostních hodnot nejsnáze zjistíme, při jaké kombinaci elementárních výroků je pravdivý nebo nepravdivý komplikovanější výrok.

Příklad 1.1: Vyšetříme výrok $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$.

Řešení:

p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg(p \Rightarrow \neg q)$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Daný výrok je tedy pravdivý bez ohledu na to, jsou-li výroky p, q pravdivé nebo nepravdivé.

Složitější výroky jsou někdy nepřehledné vzhledem k vysokému počtu závorek, které udávají pořadí, ve kterém se mají jednotlivé spojky aplikovat; proto užíváme konvenci o pořadí, jak „silně“ spojky vážou elementární výroky. Pořadí je následující:

- negace,
- konjunkce a disjunkce,
- implikace a ekvivalence.

Tedy např. místo

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \qquad \text{píšeme} \qquad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

a místo

$$((\neg p) \wedge q) \Rightarrow (p \vee (\neg q)) \qquad \text{píšeme} \qquad \neg p \wedge q \Rightarrow p \vee \neg q.$$

V příkladu 1.1 jsme viděli, že složený výrok může mít takový tvar, že je vždy pravdivý bez ohledu na to, jsou-li jednotlivé elementární výroky, ze kterých je tento složený výrok sestaven, pravdivé nebo nepravdivé (tedy má pravdivostní hodnotu 1 při libovolném vyhodnocení); takové výroky se nazývají ***tautologie***; výrok, který je vždy nepravdivý (pro libovolné ohodnocení elementárních výroků má pravdivostní hodnotu 0), se nazývá ***kontradikce***.

Uvedeme si některé další tautologie (jako cvičení prověřte, že se o tautologie skutečně jedná):

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

negace implikace $\quad \neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

De Morganova pravidla	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
distributivita	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
dvojí negace	$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$
zákon vyloučeného třetího	$p \vee \neg p$

Až na poslední vztah mají všechny uvedené tautologie tvar ekvivalence; výroky napravo jsou pravdivé právě tehdy, když jsou pravdivé výroky nalevo. Pravdivostní hodnota složeného výroku se tedy nezmění, nahradíme-li dílčí výrok v něm vystupující výrokem s ním ekvivalentním (provedeme ekvivalentní úpravu). To nám umožňuje složité výroky postupně zjednodušovat.

Příklad 1.2: Pomocí výše uvedených ekvivalentních úprav zjednodušíme výrok $\neg\,[(p \wedge q \Rightarrow \neg q) \wedge (p \Rightarrow q)]$:

$$\begin{array}{rcccr}
 & \neg\,[(p \wedge q \Rightarrow \neg q) \wedge (p \Rightarrow q)] & \Leftrightarrow & & \text{(De Morganův vzorec)} \\
\Leftrightarrow & \neg(p \wedge q \Rightarrow \neg q) \vee \neg(p \Rightarrow q) & \Leftrightarrow & & \text{(negace implikace)} \\
\Leftrightarrow & [(p \wedge q) \wedge \neg\neg q] \vee (p \wedge \neg q) & \Leftrightarrow & & \text{(dvojí negace)} \\
\Leftrightarrow & (p \wedge q \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) & \Leftrightarrow & & \\
\Leftrightarrow & (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) & \Leftrightarrow & & \text{(distributivita)} \\
\Leftrightarrow & p \wedge (q \vee \neg q) & \Leftrightarrow & & \\
\Leftrightarrow & p & & &
\end{array}$$

Výrokové funkce – predikáty

Představme si, že pro $x \in \mathbb{R}$ zkoumáme výraz $x > 3$. Tento výraz není výrok; stane se jím, až za x dosadíme některé konkrétní reálné číslo, a v závislosti na tom, které číslo zvolíme, bude pravdivý nebo nepravdivý. Takový výraz se nazývá ***výroková funkce*** (***forma***), také ***predikát***. Výroková funkce obsahuje proměnné; ***proměnná*** se dá chápat jako prázdné místo, kam lze dosazovat libovolné prvky z určité množiny, např $\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, která se nazývá ***přípustný obor*** dané proměnné. Po dosazení za všechny proměnné se predikát stane výrokem – buď pravdivým nebo nepravdivým. Prvky množiny, pro něž je výrok pravdivý, tvoří ***obor pravdivosti*** výrokové formy.

Příklad 1.3: $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$ je predikát s přípustným oborem (například) $\mathbb{R}$;

dosadíme-li za x například π, 8, $-\frac{3}{2}$, dostaneme výroky $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{N},\ 4 \in \mathbb{N},\ -\frac{3}{4} \in \mathbb{N}$, z nichž druhý je pravdivý a první a třetí nepravdivý. Obor pravdivosti tvoří všechna kladná sudá čísla.

Kvantifikátory

Je-li V predikát obsahující proměnnou x (event. i další), pak výraz

$\exists x\,(V)$	nebo	$\exists x : V$	chápeme jako tvrzení	existuje x tak, že platí V
$\forall x\,(V)$	nebo	$\forall x : V$		pro každé x platí V

Přitom $\exists$ se nazývá ***existenční kvantifikátor***, $\forall$ se nazývá ***všeobecný kvantifikátor***.

Poznamenejme, že ve výrazech s kvantifikátory často uvádíme přímo přípustný obor pro proměnnou; píšeme $\forall x \in M : V(x),\ \exists x \in M : V(x)$.

Jestliže predikát V obsahuje jedinou proměnnou x, je $\exists x\,(V)$ resp. $\forall x\,(V)$ výrok; říkáme, že proměnná x je ***vázaná*** kvantifikátorem. V opačném případě jde zase o predikát s tzv. ***volnou proměnnou*** a můžeme utvořit nové výrazy (predikáty, výroky) $\forall y\,\exists x\,(V)$, $\exists y\,\exists x\,(V)$ a podobně.

Příklad 1.4: Máme zjistit, který z následujících predikátů s proměnnou $x \in \mathbb{R}$ je pravdivý výrok:

a) $x \leq 2$ b) $\forall x\,(x \leq 2)$ c) $\exists x\,(x \leq 2)$

d) $\forall x\,(x \in (-\infty, 2\rangle \Leftrightarrow x \leq 2)$

Řešení:

a) není výrok (proměnná x je volná);
b) je nepravdivý výrok; lze najít číslo $a \in \mathbb{R}$ (např. $a = 3$) tak, že výrok $a \leq 2$ je nepravdivý;
c) je pravdivý výrok; stačí najít jedno konkrétní číslo $a \in \mathbb{R}$ (např. $a = 0$) tak, že výrok $a \leq 2$ je pravdivý;
d) jedná se o pravdivý výrok, kterým definujeme interval.

Kvantifikátory tedy můžeme řadit za sebou, přičemž na jejich pořadí záleží. Např.

$\forall x \in \mathbb{R}\,\exists y \in \mathbb{R}\,(x^2 = y)$ je jiný výrok než $\exists y \in \mathbb{R}\,\forall x \in \mathbb{R}\,(x^2 = y)$

(první je pravdivý, druhý nepravdivý).

Příklad 1.5: Máme vyšetřit pravdivost následujících výroků pro reálné proměnné x a y:

a) $\forall x\, \exists y\, (x < y)$ b) $\exists y\, \forall x\, (x < y)$

Řešení:

a) Výrok je pravdivý; stačí pro libovolné pevně zvolené x položit $y = x + 1$ – výrok $x < x + 1$ je pravdivý pro každé reálné x.

b) Výrok je nepravdivý; jeho pravdivost by znamenala, že existuje největší reálné číslo. (∞ není reálné číslo!)

Při vyšetřování reálných čísel se osvědčilo zavést symbol $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Použijeme-li toto označení, můžeme formulovat pravdivý výrok $\exists y \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x < y)$.

Často potřebujeme utvořit negaci výroku s kvantifikátory. Užíváme přitom tyto ekvivalence:

$$\neg\,(\forall x \in M:\ V(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M:\ \neg V(x), \qquad \neg\,(\exists x \in M:\ V(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M:\ \neg V(x).$$

Příklad 1.6:

$$\neg\,[\forall x \in M:\ (P(x) \Rightarrow Q(x))] \Leftrightarrow \exists x \in M:\ \neg[P(x) \Rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow \exists x \in M:\ (P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

Shrnutí

V tomto odstavci jsme připomněli následující pojmy:

- výrok: jazykové spojení, o kterém lze říci, zda je pravdivé nebo nepravdivé,
- výrokové spojky, pomocí nichž sestavujeme složitější výroky: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;
- ohodnocení výroků pomocí pravdivostních hodnot,
- tautologie a kontradikce: výrok vždy pravdivý resp. vždy nepravdivý,
- výroková funkce (predikát): tvrzení, které obsahuje proměnnou a které se stane výrokem, jestliže za tuto proměnnou dosadíme prvek z přípustné množiny,
- kvantifikátory: $\forall$ – všeobecný a $\exists$ – existenční.

Cvičení

1. Formulujte, co rozumíme výrokem a uveďte příklady.

2. Nechť p znamená „je chladno“ a q „prší“. Vyjádřete slovně následující složené výroky:

   a) $\neg p$ b) $p \wedge q$ c) $p \vee q$ d) $q \vee \neg p$

3. Nechť p znamená „je vysoká“ a q „je hezká“. Zapište symbolicky následující výroky:

   a) Je vysoká a hezká.
   b) Je vysoká, ale není hezká.
   c) Není pravda, že je nevysoká a hezká.
   d) Není ani vysoká, ani hezká.
   e) Je vysoká, nebo je nevysoká a hezká.
   f) Není pravda, že je nevysoká nebo nehezká.

4. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků:

   a) Paříž je ve Francii a zároveň $2 + 2 = 4$.
   b) Paříž je v Anglii a zároveň $2 + 2 = 4$.
   c) Paříž je ve Francii a zároveň $2 + 2 = 5$.
   d) Paříž je v Anglii a zároveň $2 + 2 = 5$.

5. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků („nebo“ je zde ve smyslu nevylučovacím):

   a) $1 + 1 = 5$ nebo $2 + 2 = 4$ b) $2 + 5 = 9$ nebo $3 + 7 = 8$
   c) $1 + 1 = 5$ nebo $3 + 3 = 4$ d) $2 + 5 = 9$ nebo $1 + 7 = 8$

6. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků:

   a) Kodaň je v Dánsku, a $1 + 1 = 5$ nebo $2 + 2 = 4$.
   b) Paříž je v Anglii, nebo $1 + 1 = 2$ a $3 + 3 = 7$.
   c) Kodaň je v Dánsku, nebo $1 + 5 = 8$ a $3 + 3 = 6$.
   d) Paříž je v Anglii, a $3 + 4 = 7$ nebo $2 + 6 = 8$.

7. Pomocí tabulky pradivostních hodnot ohodnoťte výroky:

   a) $p \wedge (q \vee r)$ b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

8. Definujte tautologii a kontradikci a uveďte příklady.

9. Ověřte, že:

   a) $p \vee \neg(p \wedge q)$ je tautologie,

   b) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ je kontradikce,

   c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ je tautologie,

   d) $p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ je tautologie.

10. Sestavte tabulku pravdivostních hodnot pro logickou spojku ∇ – „vylučovací nebo“: $p\nabla q$ znamená „platí p nebo q, ale ne současně“.

11. Ověřte ekvivalenci $p{\vee}q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

12. Nechť $p(x)$ je výraz „$x + 2 > 5$“. Rozhodněte, zda je to výroková funkce; v kladném případě zjistěte, zda následující množiny jsou její přípustné obory:

    a) $\mathbb{N}$, b) $M = \{-1, -2, -3, \dots\}$, c) $\mathbb{C}$.

13. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků: (Přípustná množina je $\mathbb{R}$)

    a) $\forall x : |x| = x$, b) $\exists x : x^2 = x$, c) $\forall x : x + 1 > x$, d) $\exists x : x + 2 = x$.

14. Utvořte negace výroků z cv. 13 a vzniklé výroky co nejvíce zjednodušte.

15. Nechť $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků. Utvořte a co nejvíce zjednodušte jejich negace:

    a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$, b) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$,

    c) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$, d) $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$.

16. Utvořte negace výroků:

    a) $\forall x\, p(x) \wedge \exists y\, q(y)$, b) $\exists x\, p(x) \vee \forall y\, q(y)$.

17. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků s přípustnou množinou $\{1, 2, 3\}$:

    a) $\exists x \forall y : x^2 < y + 1$, b) $\forall x \exists y : x^2 + y^2 < 12$,

    c) $\forall x \forall y : x^2 + y^2 < 12$,

    d) $\exists x \forall y \exists z : x^2 + y^2 < 2z^2$, e) $\exists x \exists y \forall z : x^2 + y^2 < 2z^2$.

18. Nechť $A = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$ je přípustná množina pro následující predikáty. Jde-li o výroky, určete pravdivostní hodnotu. Jde-li o výrokové funkce, najděte obor pravdivosti:

    a) $\forall x \exists y : x + y < 14$, b) $\forall x \forall y : x + y < 14$,

    c) $\forall y : x + y < 14$, d) $\exists y : x + y < 14$.

19. Utvořte negace následujících výroků:

a) $\exists x \forall y : p(x,y)$, b) $\forall x \forall y : p(x,y)$,

c) $\exists y \exists x \forall z : p(x,y,z)$, d) $\forall x \exists y : (p(x) \vee q(y))$,

e) $\exists x \forall y : (p(x,y) \Rightarrow q(x,y))$, f) $\exists y \exists x : (p(x) \wedge \neg q(y))$.

Výsledky

2. a) není chladno, b) je chladno a prší, c) je chladno nebo prší (nebo je chladno a prší), d) prší nebo není chladno;

3. a) $p \wedge q$, b) $p \wedge \neg q$, c) $\neg(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee \neg q$, d) $\neg p \wedge \neg q$, e) $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$, f) $\neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow p \wedge q$;

4. a) 1, b) 0, c) 0, d) 0;

5. a) 1, b) 0, c) 0, d) 1;

6. a) 1, b) 0, c) 1, d) 0;

10.

p	q	$p \nabla q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

12. a),b) ano, c) ne;

13. a) 0, b) 1, c) 1, d) 0;

14. a) $\exists x : |x| \neq x$, b) $\forall x : x^2 \neq x$, c) $\exists x : x+1 \leq x$, d) $\forall x : x+2 \neq x$;

15. a) 0; $(\forall x \in A)(x+3 \neq 10)$, b) 1; $(\exists x \in A)(x+3 \geq 10)$, c) 1; $(\forall x \in A)(x+3 \geq 5)$, d) 0; $(\exists x \in A)(x+3 > 7)$;

16. a) $(\exists x : \neg p(x)) \vee (\forall y : \neg q(y))$, b) $(\forall x : \neg p(x)) \wedge (\exists y : \neg q(y))$;

17. a) 1, b) 1, c) 0, d) 1, e) 0;

18. a) 1, b) 0, c) $\{1,2,3\}$, d) A;

19. a) $\forall x \exists y\, (\neg p(x,y))$, b) $\exists x \exists y\, (\neg p(x,y))$, c) $\forall y \forall x \exists z\, (\neg p(x,y,z))$,
d) $\exists x \forall y\, (\neg p(x,y) \wedge \neg q(x,y))$, e) $\forall x \exists y\, (p(x,y) \wedge \neg q(x,y))$, f) $\forall x \forall y\, (\neg p(x,y) \vee q(x,y)$.

1.2 Množiny

Ze střední školy resp. z Matematického semináře je vám známo, že v matematice nazýváme jakýkoliv soubor či systém objektů ***množinou***. Množiny vymezujeme výčtem prvků nebo predikátem – charakterizací:

Je-li $V(x)$ predikát, potom symbol $\{x \,|\, V(x)\}$ označuje množinu všech prvků a, pro které je $V(a)$ pravdivý výrok; někdy uvádíme obor přípustný pro proměnnou x a píšeme např.: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, V(x)\}$.

Příklad 1.7: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 2\} = (-\infty, 2\rangle$.
Značí-li A množinu jistých objektů a x je jeden z těchto předmětů, říkáme, že x ***je prvkem*** množiny A (x patří do A) a píšeme $x \in A$. Není-li y prvkem množiny A, píšeme $y \notin A$.

Jestliže $\mathcal{S}$ je množina, jejíž prvky jsou opět množiny, nazýváme ji zpravidla ***systémem množin***.

Dvě množiny mají stejné prvky (tedy jsou si rovny), jestliže jsou charakterizovány ekvivalentními výroky:

$$\{x \,|\, U(x)\} = \{x \,|\, V(x)\} \Leftrightarrow \forall x\, (U(x) \Leftrightarrow V(x)).$$

Operace s množinami

Nechť A, B jsou množiny. Potom definujeme vztahy mezi množinami a operace s množinami pomocí následujících výroků:

rovnost množin	$A = B \;\Leftrightarrow\; \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
podmnožina	$A \subset B \;\Leftrightarrow\; \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$
průnik množin	$\forall x(x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$
sjednocení množin	$\forall x(x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$
rozdíl množin	$\forall x(x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$

Je-li $A \subset B$, označujeme množinu $B \setminus A$ symbolem $\overline{A}$ a nazýváme ji ***doplňkem (komplementem)*** množiny A v množině B. Tuto symboliku používáme především tehdy, zkoumáme-li komplementy více množin k jedné pevné množině.

Příklad 1.8: Nechť

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{2, 4, 6\},\ C = \{1, 2, 4, 8\} \text{ a } X = \{1, 2, \ldots, 10\}.$$

Máme popsat výčtem prvků množiny (doplňky se rozumí vzhledem k X):

$A \cup B,\ B \cap C,\ A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \cup (B \cap C),\ (A \cup B) \cap C,\ \overline{A \cup B},\ \overline{A} \cup \overline{B}.$

Řešení:

$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$B \cap C = \{x \,|\, x \in B \wedge x \in C\} = \{2, 4\}$

$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\} = \{1, 3\}$

$B \setminus A = \{x \,|\, x \in B \wedge x \notin A\} = \{6\}$

$A \cup (B \cap C) = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B \cap C\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$(A \cup B) \cap C = \{x \,|\, x \in A \cup B \wedge x \in C\} = \{1, 2, 4, \}$

$\overline{A \cup B} = \{x \,|\, x \in X \wedge x \notin A \cup B\} = \{5, 7, 8, 9, 10\}$

$\overline{A} = \{x \,|\, x \in X \wedge x \notin A\} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\},\ \overline{B} = \{x \,|\, x \in X \wedge x \notin B\} = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \{x \,|\, x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Množina neobsahující žádné prvky se nazývá ***prázdná množina***. Tuto množinu značíme symbolem $\emptyset$, výrok $\exists x\ (x \in \emptyset)$ je tedy nepravdivý. Prázdnou množinu můžeme definovat libovolnou kontradikcí, například $\emptyset = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\}$.

Prázdná množina má mnoho překvapivých vlastností, se kterými se setkáme později; některé jsou ověřeny v následujícím příkladu:

Příklad 1.9:

1. Ukažme, že pro libovolnou množinu A platí $\emptyset \subset A$.
2. Prověřme pravdivost následujících výroků:
   a) $\emptyset \notin \emptyset$ b) $\emptyset \subset \emptyset$ c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ d) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

Řešení:

1. Použijeme výrok definující podmnožinu:

   $$\emptyset \subset A \Leftrightarrow \forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

   $x \in \emptyset$ je *nepravda*, tedy implikace ve zkoumaném výroku je vždy pravdivá (*nepravda* $\Rightarrow$ *cokoliv*).

2. a) Prázdná množina nemá žádné prvky, tedy ani samu sebe.
   b) viz 1. pro $A = \emptyset$.
   c) $\{\emptyset\}$ je množina zadaná výčtem prvků, jediný její prvek je $\emptyset$; tedy $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
   d) viz 1. pro $A = \{\emptyset\}$.

Množinu všech podmnožin dané množiny A nazýváme ***potenční množinou*** a označujeme $\mathcal{P}(A)$. Tedy $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$.

Příklad 1.10: $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Ukážeme,že je-li A konečná množina o n prvcích, má její potenční množina 2^n prvků: Podmnožinu o k prvcích (v množině A) můžeme utvořit $\binom{n}{k}$ různými způsoby (je to počet kombinací k-té třídy z n prvků). Máme tedy

$\binom{n}{0}$ podmnožin o 0 prvcích (což je $\emptyset$)

$\binom{n}{1}$ jednoprvkových podmnožin

$\binom{n}{2}$ dvouprvkových podmnožin

$\binom{n}{k}$ k-prvkových podmnožin

$\vdots$

$\binom{n}{n}$ n-prvkových podmnožin

Celkem

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

Proto se také někdy množina všech podmnožin dané množiny A označuje symbolem 2^A.

Příklad 1.11: Pro množiny z příkladu 1.8 máme určit

$$\mathcal{P}(A \cap C),\ \mathcal{P}(B),\ \mathcal{P}(A \cap C) \cap \mathcal{P}(B) \quad \text{a} \quad \mathcal{P}(A \cap B \cap C).$$

Řešení:

$A \cap C = \{1, 2, 4\}$

$\mathcal{P}(A \cap C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$,

$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}\}$,

$\mathcal{P}(A \cap C) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}\}$;

$A \cap B \cap C = \{2, 4\}$,

$\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}\}$.

Kartézským součinem $A \times B$ množin A, B (v tomto pořadí) nazýváme množinu

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}.$$

Přitom (a, b) znamená ***uspořádanou dvojici*** prvků a, b.
Je-li speciálně $A = B$, pak $A \times A$ značíme A^2. Například $\mathbb{R}^2$ bude značit množinu všech uspořádaných dvojic (x, y) reálných čísel.

Jsou-li $A, B, A \neq B$ neprázdné množiny, pak $A \times B \neq B \times A$:

Příklad 1.12: Nechť $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$. Potom $A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\}$, a $B \times A = \{(3, 1), (3, 2)\}$.

Číselné množiny

Číselné obory se obvykle konstruují postupně tak, že se vychází od oboru ***přirozených čísel*** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Součet a součin přirozených čísel je přirozené číslo. $\mathbb{N}$ se rozšíří na obor celých čísel $\mathbb{Z}$ – ***celým číslem*** nazýváme každé číslo, které lze vyjádřit jako rozdíl přirozených čísel. Součet, součin a rozdíl celých čísel je celé číslo.

Každé číslo, které můžeme vyjádřit jako podíl celého čísla a celého čísla různého od nuly, nazýváme ***racionálním číslem***. Obor racionálních čísel značíme písmenem $\mathbb{Q}$. Součet, rozdíl, součin a podíl dvou racionálních čísel (kromě dělení nulou) je racionální číslo. Všechna racionální čísla můžeme vyjádřit ve tvaru konečných nebo nekonečných periodických desetinných zlomků. Číslo, které lze vyjádřit ve tvaru nekonečného neperiodického desetinného zlomku, nazýváme ***iracionálním číslem***. Takovými čísly jsou např. čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$, π atd. Množina všech racionálních a iracionálních čísel se nazývá obor ***reálných čísel*** $\mathbb{R}$.

Množina reálných čísel není uzavřená k opperaci tvoření odmocnin – sudé odmocniny ze záporných čísel nejsou reálná čísla; např. rovnice

$$x^2 + 1 = 0, \qquad x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \big(\text{tj. } (x + 1)^2 + 1 = 0\big)$$

nejsou v $\mathbb{R}$ řešitelné.

Při hledání kořenů algebraických rovnic je však vhodné se sudými odmocninami ze záporných čísel (především s druhou odmocninou z čísla -1) počítat:

Cardanův vzorec pro rovnici $x^3 = ax + b$ má tvar

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

a má smysl pouze pro

$$c = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 \geq 0.$$

Ale například rovnice

$$x^3 = 15x + 4 \quad \text{má řešení} \quad x = 4, \quad \text{přičemž} \quad c = 2^2 - 5^3 = -121.$$

Podívejme se, co dostaneme, jestliže formálně dosadíme do Cardanova vzorce:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = (*)$$

$$= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4,$$

přičemž rovnost označenou $(*)$ získáme následujícím způsobem:

$$\left(2 \pm \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 \pm 3 \cdot 2^2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right) + 3 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right)^2 \pm \left(\sqrt{-1}\right)^3 =$$

$$= 8 \pm 12\sqrt{-1} - 6 \pm (-1) \cdot \sqrt{-1} = 2 \pm 11\sqrt{-1}.$$

Tedy při formálně správném výpočtu s použitím „imaginární“ odmocniny z čísla -1 dostaneme správný (a přitom reálný) výsledek $x = 4$.

Podobné úvahy vedly k zavedení oboru ***komplexních čísel*** $\mathbb{C}$. Komplexním číslem rozumíme číslo z tvaru $z = x + j\,y$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ a j je tzv. imaginární jednotka, pro kterou platí $j^2 = -1$.

Reálná čísla

Množinu M, jejíž všechny prvky jsou čísla, nazýváme ***číselnou množinou***. Pokud neřekneme výslovně nic jiného, budeme v dalším hovořit o číselných množinách reálných čísel.

Nejčastěji užívanými množinami reálných čísel jsou ***intervaly***; připomeňme jejich definici:

Definice 1.13: Nechť platí $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množina

1. $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ se nazývá ***otevřený interval***,
2. $\langle a, b\rangle = \{x | a \leq x \leq b\}$ se nazývá ***uzavřený interval***,
3. $\langle a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ se nazývá ***zleva uzavřený a zprava otevřený interval***,
4. $(a, b\rangle = \{x | a < x \leq b\}$ se nazývá ***zleva otevřený a zprava uzavřený interval***.

Vzhledem k uspořádání reálných čísel je vhodné zavést symboly $-\infty$ a ∞ předpisem

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad (-\infty < x) \wedge (x < \infty).$$

Body $-\infty$ a ∞ se nazývají ***nevlastní body*** reálné osy.

Zavedeme označení: $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = \overline{\mathbb{R}}$.

Dále definujeme následující intervaly:

1. $(a, \infty) = \{x | a < x\}$,
2. $\langle a, \infty) = \{x | a \leq x\}$,
3. $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$,
4. $(-\infty, b\rangle = \{x | x \leq b\}$.

Podobně píšeme $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Speciálním případem intervalů jsou tzv. okolí bodu:

Definice 1.14: ***Okolím bodu*** $a \in \mathbb{R}$ (také ε- okolím) rozumíme množinu

$$\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} | \ |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

bod a se nazývá ***střed okolí*** a číslo ε ***poloměr*** okolí. Množinu

$$\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \mathcal{U}(a, \varepsilon) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} | \ 0 < |x - a| < \varepsilon\}$$

budeme nazývat ***redukovaným*** (***ryzím***) ***okolím*** bodu $a \in \mathbb{R}$.
(Pro naše potřeby obvykle předpokládáme, že ε je libovolně malé.)

Není-li poloměr okolí ε podstatný, píšeme místo $\mathcal{U}(a, \varepsilon)$ a $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon)$ pouze $\mathcal{U}(a)$ a $\mathcal{U}^*(a)$.

Okolím $\mathcal{U}(\infty)$ bodu ∞ budeme rozumět každý interval (K, ∞) a okolím $\mathcal{U}(-\infty)$ bodu $-\infty$ budeme rozumět každý interval $(-\infty, K)$.

Pomocí okolí můžeme definovat pojem tzv. hromadného bodu množiny, který budeme potřebovat při zavádění pojmu limity:

Definice 1.15: Bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je ***hromadný bod*** množiny $M \subseteq \mathbb{R}$, jestliže v každém jeho redukovaném okolí leží alespoň jeden bod $x \in M$.

Příklad 1.16:

a) Každý bod intervalu $(0, 1\rangle$ je hromadný. Navíc bod 0, který do intervalu nepatří, je jeho hromadným bodem.
b) Množina $\mathbb{N}$ má v $\overline{\mathbb{R}}$ jediný hromadný bod ∞.
c) Bod 2 množiny $M = (0, 1) \cup \{2\} \cup (3, \infty)$ není jejím hromadným bodem, neboť jeho okolí $\mathcal{U}(2) = (2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2})$ nemá s M jiný společný bod než 2. Takový bod se nazývá ***izolovaný*** bod množiny M.

Suprémum, infimum, maximum, minimum, ohraničené (omezené) množiny

Je-li $M \subset \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, zavedeme označení:

$$M \leq a \ (\text{resp. } a \leq M) \ \Leftrightarrow \ \forall x \in M : \ x \leq a \quad (\text{resp. } \forall x \in M : \ a \leq x).$$

Definice 1.17:

a) Platí-li $M \leq a$, $a \in \mathbb{R}$, řekneme, že a je ***horní mez*** (závora, ohraničení) ***množiny*** M a že množina M je ***shora ohraničená***,
b) platí-li $a \leq M$, $a \in \mathbb{R}$, řekneme, že a je ***dolní mez*** (závora, ohraničení) ***množiny*** M a že množina M je ***zdola ohraničená***,
c) řekneme, že $a \in \mathbb{R}$ je ***největší prvek množiny*** M a píšeme $a = \max M$, jestliže platí $M \leq a \ \wedge a \in M$,
d) řekneme, že $a \in \mathbb{R}$ je ***nejmenší prvek množiny*** M a píšeme $a = \min M$, jestliže platí $a \leq M \ \wedge a \in M$.

Příklad 1.18: $\min\,(-2, 3\rangle$ neex., $\max\,(-2, 3\rangle = 3$; $\max \mathbb{N}$ neex., $\min \mathbb{N} = 1$.

Definice 1.19: Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

a) Nejmenší horní mez množiny M nazýváme ***suprémum množiny*** M. Není-li množina M shora ohraničená, považujeme za její suprémum ∞. Píšeme

$$\sup M = \min\,\{x \,|\, x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge M \leq x\}.$$

b) Největší dolní mez množiny M nazýváme ***infimum množiny*** M. Není-li množina M zdola ohraničená, považujeme za její infimum $-\infty$. Píšeme

$$\inf M = \max\,\{x \,|\, x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x \leq M\}.$$

Příklad 1.20: $\inf\,(-2, 3\rangle = \max\,\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \leq (-2, 3\rangle\} = \max\,\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \leq -2\} = -2$,
$\sup\,(-2, 3\rangle = \min\,\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \geq (-2, 3\rangle\} = \min\,\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \geq 3\} = 3$.

Příklad 1.21: $\sup \mathbb{N} = \min \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, \mathbb{N} \leq x\} = \min \{\infty\} = \infty.$

Bez důkazu uvedeme velmi důležitou větu:

Věta 1.22: *Každá podmnožina* $\mathbb{R}$ *má právě jedno suprémum a právě jedno infimum.*

Při axiomatické výstavbě oboru reálných čísel se uvádí následující Archimedův axiom:

$$\forall\, a \in (0, \infty)\, \exists\, n \in \mathbb{N} : \; a \leq n.$$

Platnost tohoto axiomu využijeme v následujícím příkladu:

Příklad 1.23: Ukážeme, že platí tvrzení: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon.$

Řešení:

$$\forall \varepsilon : \; \varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\varepsilon} > 0 \;\Rightarrow |\text{Archimedův axiom}| \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon} < n$$

a poslední výrok je ekvivalentní s dokazovaným tvrzením.

Shrnutí

V tomto odstavci jsme zopakovali základní pojmy, které se týkají množin:

- dva hlavní způsoby zadání množiny: výčtem prvků resp. výrokovou funkcí,
- operace s množinami: rovnost, průnik, sjednocení a rozdíl množin, pojem podmnožiny a doplňku vzhledem k dané množině,
- prázdná množina, potenční množina a kartézský součin množin,
- množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a její podmnožiny: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, intervaly.

Dále jsme zavedli nové pojmy pro obor reálných čísel:

- rozšíření $\mathbb{R}$ o nevlastní body $\infty, -\infty$: $\overline{\mathbb{R}}$,
- okolí bodu $x \in \mathbb{R}$: interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$,
- redukované (ryzí) kolí bodu $x \in \mathbb{R}$: množina $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$,
- hromadný bod množiny: bod, v jehož libovolném redukovaném okolí leží alespoň jeden bod dané množiny,
- horní (resp. dolní) mez (závora) množiny: bod z $\mathbb{R}$, který je větší (resp. menší) nebo roven každému prvku této množiny,
- suprémum (resp. infimum) množiny: nejmenší z horních (resp. největší z dolních) mezí množiny.

Cvičení

1. Nechť $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Najděte množiny $A \cup A$, $A \cap A$, $A \setminus A$. Dají se výsledky zobecnit?

2. Nechť A je množina všech celých čísel dělitelných dvěma, B množina všech celých čísel dělitelných třemi, C množina všech celých čísel dělitelných šesti. Zjistěte, které z následujících vztahů jsou správné:

a)	$A \subset B$,	*b*)	$A \subset C$,	*c*)	$B \subset C$,
d)	$B \subset A$,	*e*)	$C \subset A$,	*f*)	$C \subset B$,
g)	$A \cup B = C$,	*h*)	$A \setminus B = C$,	*i*)	$A \cap B = C$.

3. Nechť M je množina všech přirozených čísel menších než 16, M_1 je její podmnožina, která obsahuje všechna sudá čísla, M_2 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelné třemi a M_3 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelná pěti. Najděte množiny:

a)	$M_1 \cup M_2$,	*b*)	$M_1 \cup M_2 \cup M_3$,
c)	$M_2 \cap M_3$,	*d*)	$M_1 \cap M_2 \cap M_3$,
e)	$(M_1 \cup M_2) \cap M_3$,	*f*)	$(M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3)$,
g)	$M_2 \setminus M_1$,	*h*)	$M_1 \setminus M_2$,
i)	$(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$,	*j*)	$(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$,
k)	$(M_1 \cap M_2) \cup M_3$,	*l*)	$(M_1 \cup M_2) \cap (M_2 \cup M_3)$.

4. Znázorněte množiny *a*)– *l*) z předchozího příkladu, jestliže pod M_1, M_2, M_3 rozumíme čtverce se stranou stejné délky, přičemž středy čtverců S_1, S_2, S_3 leží na přímce procházející protilehlými vrcholy uvedených čtverců a S_3 je střed úsečky S_1S_2.

5. Nechť A, B, C jsou soustředné kruhy s poloměry r_1, r_2, r_3, kde $0 < r_1 < r_2 < r_3$.

   a) Znázorněte množiny
   $$A \cup B \cup C, \quad A \cap B \cap C, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad B \setminus C, \quad C \setminus B.$$
   b) Znázorněte doplňky $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ vzhledem k C.

6. Najděte suprémum a infimum množiny

   a) $M_1 = \left\{x \,|\, x = \frac{2n+1}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$,

   b) $M_2 = \left\{x \,|\, x = \frac{2+(-1)^n}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$,

   c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} \,|\; |3x - 1| < x < |3x + 1|\}$.

7. $M = \{0{,}5;\ 0{,}55;\ 0{,}555;\ \dots\}$. Dokažte, že $\sup M = \frac{5}{9}$.

8. Dokažte: Je-li $\emptyset \neq N \subset M$, potom
   $$\inf M \leq \inf N, \quad \sup N \leq \sup M.$$

9. Nechť A, B jsou neprázdné omezené množiny v $\mathbb{R}$. Označme

$$A + B = \{x + y \,|\, x \in A \wedge y \in B\}.$$

Dokažte:

a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$
$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$,

b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$,
$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

Ukažte na příkladě, že zde nemusí platit rovnost.
Co platí pro infima množin $A \cup B$, $A \cap B$?

Výsledky

1. A, A, $\emptyset$;

2. e), f), i);

3. a) $M \setminus \{1, 5, 7, 11, 13\}$, b) $M \setminus \{1, 7, 11, 13\}$, c) $\{15\}$, d) $\emptyset$, e)f) $\{10, 15\}$, g) $\{3, 9, 15\}$;

6. a) $\sup M_1 = 3$, $\inf M_1 = 2$, b) $\sup M_2 = \frac{3}{2}$, $\inf M_2 = 0$, c) $\sup M_3 = \frac{1}{2}$, $\inf M_3 = \frac{1}{4}$.

1.3 Funkce, zobrazení

V této kapitole se budeme věnovat základnímu pojmu, se kterým pracuje matematická analýza – pojmu funkce. Opět připomeneme pojmy známé ze střední školy a sjednotíme a upřesníme terminologii.

Definice 1.24: ***Zobrazení*** f množiny D do množiny M je předpis, který každému prvku $x \in D$ přiřadí právě jeden prvek $y \in M$. Prvek y se nazývá ***hodnota*** zobrazení f v x, nebo také ***obraz*** x a značí se $f(x)$.

Skutečnost, že f je zobrazení množiny D do množiny M zapisujeme vztahem

$$f : D \to M, \quad x \mapsto f(x).$$

Množina D se nazývá ***definiční obor*** zobrazení f, množina $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$ se nazývá ***obor hodnot*** zobrazení f a značí se symbolem H_f.

Jestliže budeme současně mluvit o více funkcích, budeme pro jejich definiční obory užívat symboly $D_f, D_g, \ldots$

Dvě zobrazení f, g ***jsou si rovna*** $(f = g)$, jestliže mají tentýž definiční obor D a platí $\forall x \in D : \; f(x) = g(x)$.

Jsou-li A, B množiny, definujeme:

a) ***Zúžení*** f na A (nebo též ***parciální zobrazení***) je zobrazení $f/_A$ s definičním oborem $A \cap D$, dané předpisem

$$f/_A : f/_A(x) = f(x), x \in A \cap D.$$

b) ***Obraz*** množiny A při zobrazení f:

$$f(A) = \{f(x) | x \in A \cap D\}.$$

c) ***Vzor*** množiny B při zobrazení f:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D | f(x) \in B\}.$$

Poznamenejme, že a) a b) se nejčastěji používají v případech, že $A \subset D$, ale není to podmínkou.

V tomto učebním textu nás budou zajímat převážně zobrazení mezi číselnými množinami. V těchto případech se pro zobrazení vžil termín funkce.

Definice 1.25: ***Funkcí*** obvykle rozumíme takové zobrazení, jehož obor hodnot je číselná množina, tedy podmnožina množiny reálných (nebo komplexních) čísel.

Pojem a základní vlastnosti funkce

Definice 1.26: Zobrazení f, jehož definiční obor, stejně jako obor hodnot, jsou podmnožiny množiny $\mathbb{R}$, se nazývá ***reálná funkce jedné reálné proměnné***, dále krátce ***funkce***.

Příklad 1.27: **Důležité funkce:**

a) $[x]$ – celá část x : $[x] \leq x < [x] + 1, \quad [x] \in \mathbb{Z}$

b) $\chi_M(x) = \begin{cases} 0 & x \notin M \\ 1 & x \in M \end{cases}$ – charakteristická funkce množiny M

speciálně $\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ – charakt. funkce množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$

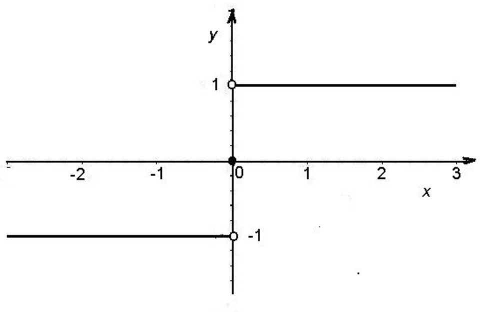
c) $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Je-li funkce f zadána formulí, např. $f(x) = a^x$, budeme často mluvit prostě o funkci a^x. V tomto případě musí být zadán definiční obor. Dohodneme se však, že v případě, kdy definiční obor nebude výslovně uveden, budeme za něj považovat množinu všech těch čísel x, pro která má daná formule smysl. Tuto množinu pak nazýváme ***přirozeným definičním oborem*** funkce.

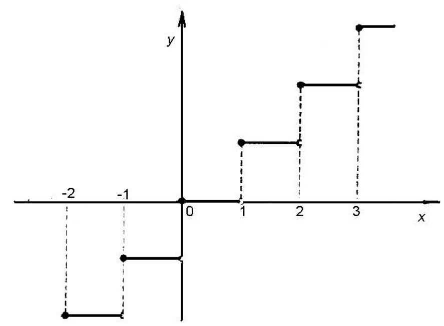
V rovině $\mathbb{R}^2$ můžeme funkci f znázornit pomocí jejího grafu:

Definice 1.28: ***Graf*** funkce f je množina všech bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ takových, že $x \in D$, $y = f(x)$. Rovnice $y = f(x)$ se nazývá ***rovnice grafu funkce*** f.

Grafy funkcí z příkladu 1.27 jsou v následujících obrázcích:



Obr. 1.1: $y = \mathrm{sgn}(x)$



Obr. 1.2: $y = [x]$

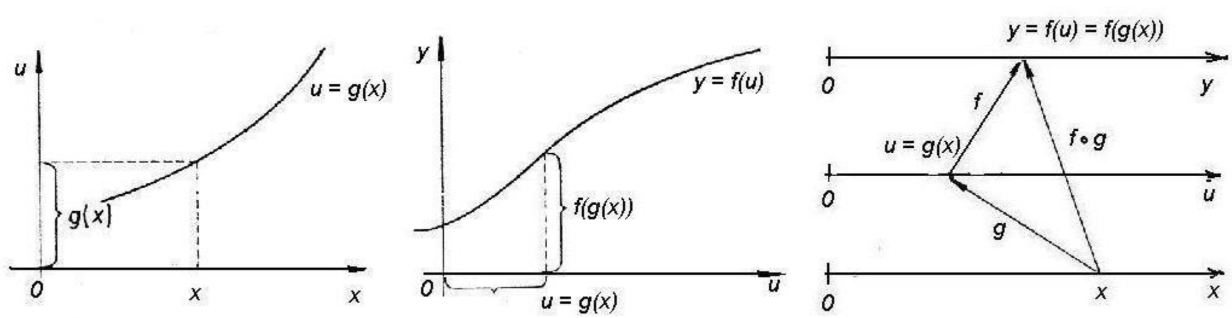
Složená funkce

Definice 1.29: Jsou-li f, g funkce, můžeme vytvořit novou funkci $f \circ g$ (čti f po g) předpisem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Funkce $f \circ g$ se nazývá ***složená funkce***, funkce f ***vnější složka*** a funkce g ***vnitřní složka*** složené funkce $f \circ g$.
Definičním oborem složené funkce je množina $D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f) = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$.

Vznik složené funkce ilustruje následující obrázek:



Obr. 1.3: Složená funkce

Příklad 1.30: Utvoříme složené funkce $f \circ g$ resp. $f \circ g \circ h$, jestliže jsou zadány jednotlivé složky:

a)

$$\begin{array}{ll} f: \quad f(y) = \sqrt{1+2y}; & y \in \langle -\frac{1}{2}, +\infty) \\ g: \quad g(x) = \sin x; & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \end{array}$$

$$f \circ g: \; f(g(x)) = \sqrt{1 + 2\sin x};$$

Určíme $D_{f \circ g}$:

$$D_{f \circ g} = \{x \,|\, (x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle) \wedge (1 + 2\sin x \geq 0)\,\}$$

Vyřešíme příslušnou nerovnost – druhý výrok vystupující v konjunkci zjednodušíme:

$$1 + 2\sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

konjunkce charakterizující definiční obor složené funkce má tedy tvar

$$(x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle) \wedge (-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \cap \langle -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \rangle \Leftrightarrow x \in \langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle \text{ (položili jsme } k = 0).$$

Tedy $D_{f \circ g} = \langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

b)

$$\begin{array}{ll} f: \quad f(u) = a^u; & u \in \mathbb{R}, \; (a \geq 0) \\ g: \quad g(y) = \cos y; & y \in \mathbb{R} \\ h: \quad h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}; & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$f \circ g \circ h: \; f(g(h(x))) = a^{\cos \frac{1-x^2}{1+x^2}}; \quad x \in \mathbb{R}$$

c)

$$f: \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - x & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad g: \quad g(x) = \operatorname{sgn} x$$

$$f \circ g: \; f(g(x)) = \begin{cases} 0 & \operatorname{sgn} x < 0 \\ 1 - \operatorname{sgn}(x) & \operatorname{sgn} x \geq 0 \end{cases};$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{tedy} \quad \operatorname{sgn} x \begin{cases} < 0 & x < 0 \\ \geq 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Odtud

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - 0 & x = 0 \\ 1 - 1 & x > 0 \end{cases} \text{ neboli } f(g(x)) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Dále připomeneme pojmy, které jsou vám jistě dobře známé ze střední školy:

Funkce prosté a funkce inverzní

Definice 1.31: Funkce f se nazývá ***prostá***, jestliže platí:

$$\forall x_1, x_2 \in D: \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Příklad 1.32: Funkce

$$f: \; f(x) = x; \quad x \in \mathbb{R} \qquad f: \; f(x) = x^2; \quad x \in \langle 0, \infty)$$

$$f: \; f(x) = \sin x; \quad x \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle \qquad f: \; f(x) = \cos x; \quad x \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$f: \; f(x) = a^x; \quad x \in \mathbb{R}, \; (a > 0, \, a \neq 1)$$

jsou prosté, avšak funkce

$$f_1: \; f_1(x) = x^2; \quad x \in \mathbb{R} \qquad f_2: \; f_2(x) = \sin x; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_3: \; f_3(x) = \cos x; \quad x \in \mathbb{R}$$

nejsou prosté:

Zřejmě je

$$f_1(1) = 1^2 = f_1(-1) = (-1)^2 = 1, \quad \text{dokonce platí} \quad \forall x \in \mathbb{R}: \; f_1(x) = f_1(-x),$$

analogicky

$$f_2(x) = \sin x = f_2(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi).$$

Definice 1.33: Je-li f prostá funkce, potom ***inverzní funkcí*** k funkci f rozumíme funkci f^{-1}, jejímž definičním oborem je obor hodnot funkce f a pro každou dvojici (x, y), $x \in D_f$, $y \in H_f$, platí $y = f(x)$ právě když $x = f^{-1}(y)$.

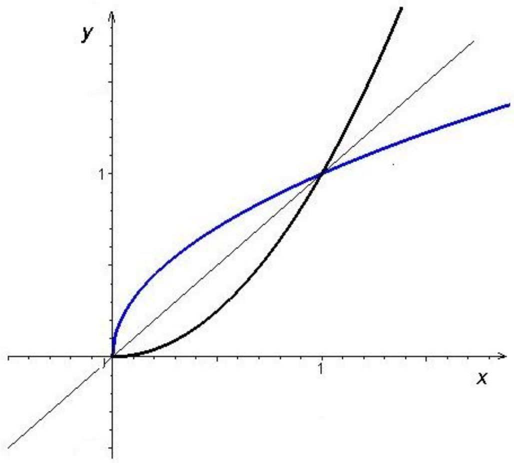
Jestliže tedy bod $[a, b]$ leží na grafu funkce f, takže $b = f(a)$, je $f^{-1}(b) = a$, tedy bod $[b, a]$ leží na grafu funkce f^{-1}; přitom body $[a, b]$, $[b, a]$ jsou symetrické podle přímky $y = x$. Platí tedy (jak se můžeme přesvědčit v obrázcích k příkladu 1.35):

Věta 1.34: *Grafy inverzních funkcí f, f^{-1} jsou symetrické podle přímky $y = x$.*

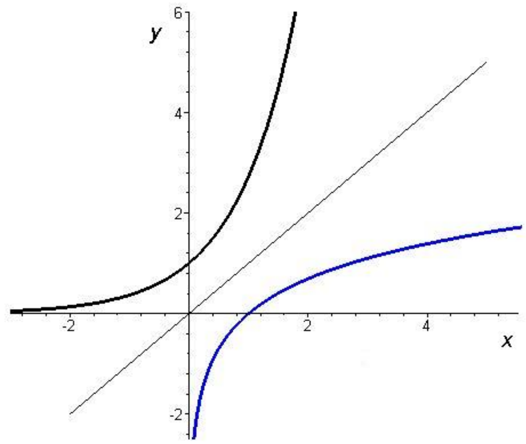
Příklad 1.35:

$$f: \; f(x) = x^2, \quad x \in \langle 0, \infty); \qquad f^{-1}: \; f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in \langle 0, \infty)$$

$$f: \; f(y) = a^y, \quad y \in \mathbb{R}; \qquad f^{-1}: \; f^{-1}(x) = \log_a x, \quad x \in (0, \infty)$$

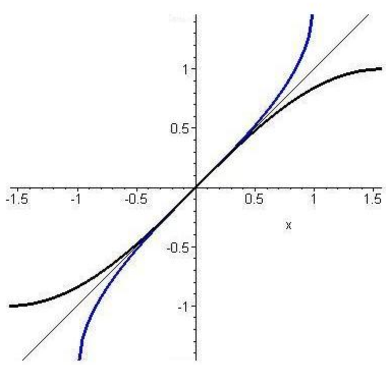


Obr. 1.4: $y = x^2, y = \sqrt{x}$

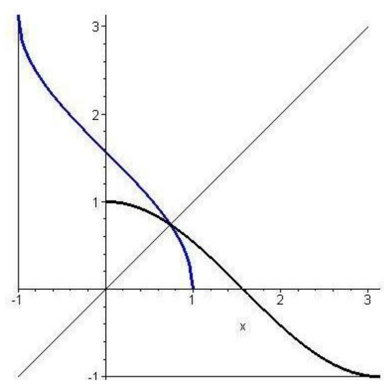


Obr. 1.5: $y = e^x, y = \ln x$

$$f: \ f(x) = \sin x, \quad x \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle; \quad f^{-1}: \ f^{-1}(x) = \arcsin x, x \in \langle -1, 1 \rangle$$
$$f: \ f(x) = \cos x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle; \qquad f^{-1}: \ f^{-1}(x) = \arccos x, x \in \langle -1, 1 \rangle$$

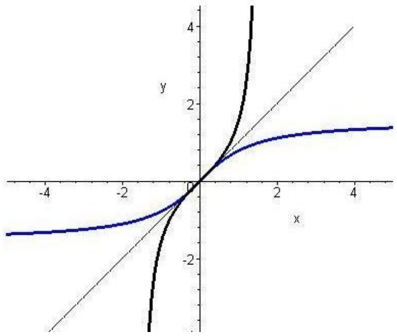


Obr. 1.6: $y = \sin x, y =$arcsin x

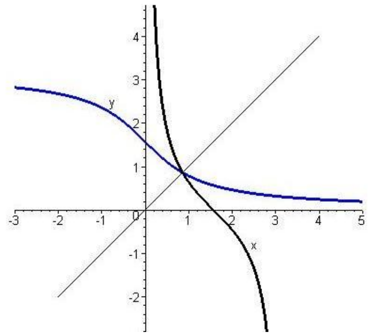


Obr. 1.7: $y = \cos x, y =$arccos x

$$f: \ f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}); \quad f^{-1}: \ f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}$$
$$f: \ f(x) = \operatorname{cotg} x, \quad x \in (0, \pi); \quad f^{-1}: \ f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x, x \in \mathbb{R}$$



Obr. 1.8: $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$

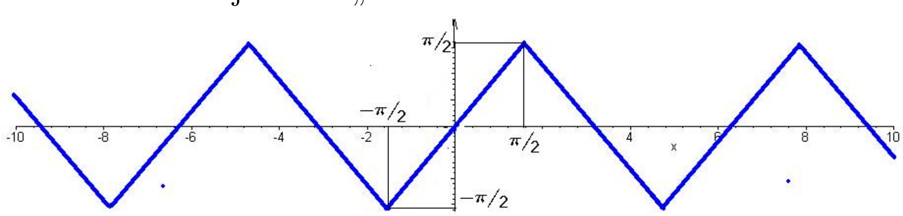


Obr. 1.9: $y = \mathrm{cotg}\, x$, $y = \mathrm{arccotg}\, x$

Povšimněme si, co se stane, vytvoříme-li kompozici dvou navzájem inverzních funkcí: Zřejmě platí:

$$f^{-1}[f(x)] = x,\ x \in D_f \quad \text{a} \quad f[f^{-1}(y)] = y,\ y \in D_{f^{-1}}.$$

Pozor: je podstatné, že vnitřní složku uvažujeme pouze na té části definičního oboru, kde je tato vnitřní složka prostou funkcí, tedy tam, kde k ní sestrojujeme funkci inverzní, která je vnější složkou. Na obr. 1.10 můžeme na příkladu funkce $\arcsin \sin x$ vidět co se stane, když vnitřní složku uvažujeme na „větší“ množině.



Obr. 1.10: $\arcsin \sin x$

Algebraické operace mezi funkcemi

Definice 1.36: Jsou-li f, g funkce a c konstanta, (kterou můžeme ostatně chápat jako konstantní funkci, tj. funkci, která každému reálnému číslu přiřadí tutéž hodnotu c), můžeme definovat nové funkce $f+g,\ f-g,\ fg,\ \frac{f}{g}, cf$ následujícími předpisy:

$$\begin{array}{ll}
f+g:\ (f+g)(x) = f(x)+g(x); & D_{f+g} = D_f \cap D_g \\
f-g:\ (f-g)(x) = f(x)-g(x); & D_{f-g} = D_f \cap D_g \\
fg:\ \ (fg)(x) = f(x)g(x); & D_{fg} = D_f \cap D_g \\
\frac{f}{g}:\ \ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; & D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g | g(x) \neq 0\} \\
cf:\ \ (cf)(x) = cf(x); & D_{cf} = D_f
\end{array}$$

Tyto nové funkce budeme nazývat ***součet, rozdíl, součin, podíl funkcí*** f, g a ***c-násobek funkce*** f. Vzhledem k výše uvedené poznámce o konstantě, c-násobek funkce f je speciálním případem součinu funkcí.

Všimněme si dále, že zatímco definice složené funkce, prosté funkce a inverzní funkce jsou speciální případy stejných pojmů pro zobrazení, není možné převést na libovolná zobrazení definice algebraických operací mezi funkcemi, neboť zde je podstatně využito algebraické struktury množiny $\mathbb{R}$.

Monotonní funkce

Definice 1.37: Řekneme, že funkce f je na množině $M \subset D_f$

- ***rostoucí,*** jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$,
- ***klesající,*** jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$,
- ***nerostoucí,*** jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$,
- ***neklesající,*** jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce se nazývají ***ryze monotónní***, funkce neklesající a nerostoucí se nazývají ***monotónní***.

Je-li f ryze monotonní na D_f, potom je jistě prostá, a proto existuje inverzní funkce f^{-1}. Předpokládejme pro určitost, že f je rostoucí. Označíme-li $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ pro $x_1, x_2 \in D_f$, je $y_1 < y_2$ právě když $x_1 < x_2$, avšak $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$, f^{-1} je tedy také rostoucí. Podobný výsledek dostaneme pro klesající funkci (viz obrázky k příkladu 1.35). Platí tedy

Věta 1.38: *Je-li f ryze monotonní na D_f, potom k ní existuje inverzní funkce f^{-1}, která je rovněž ryze monotonní a to rostoucí, je-li f rostoucí, a klesající, je-li f klesající.*

Příklad 1.39: $f: \ f(x) = 5 - \sqrt{x}$

je klesající na definičním oboru $\langle 0, +\infty)$, neboť

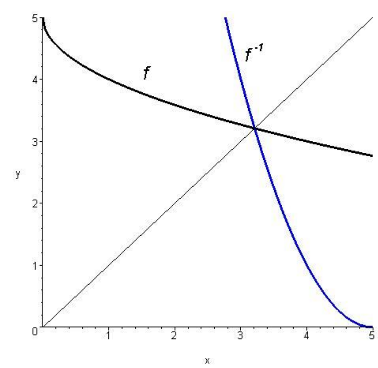
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 - \sqrt{x_1} > 5 - \sqrt{x_2}.$$

Funkce

$$f^{-1}: \ f^{-1}(y) = (y-5)^2; \ y \in (-\infty, 5\rangle$$

je rovněž klesající (prověřte!) viz obr. 1.11



Obr. 1.11: $f(x)=5-\sqrt{x}, f^{-1}(x)=(x-5)^2$

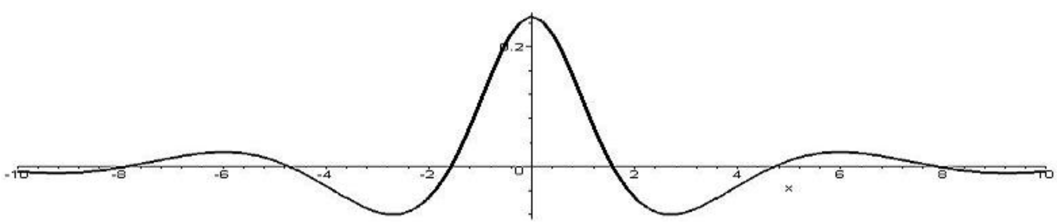
Funkce sudé a liché, funkce periodické

Definice 1.40: Funkci f nazýváme ***sudou*** (resp. ***lichou***), když pro všechna x z D_f platí $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Leží-li na grafu $y = f(x)$ sudé funkce bod $[x, f(x)]$, leží na něm i bod $[-x, f(x)]$. Graf sudé funkce je tedy souměrný podle osy y. Pro lichou funkci f podobně s každým bodem $[x, f(x)]$, leží na grafu $y = f(x)$ i bod $[-x, -f(x)]$, a tedy graf liché funkce je souměrný podle počátku souřadnic.

Příklad 1.41:

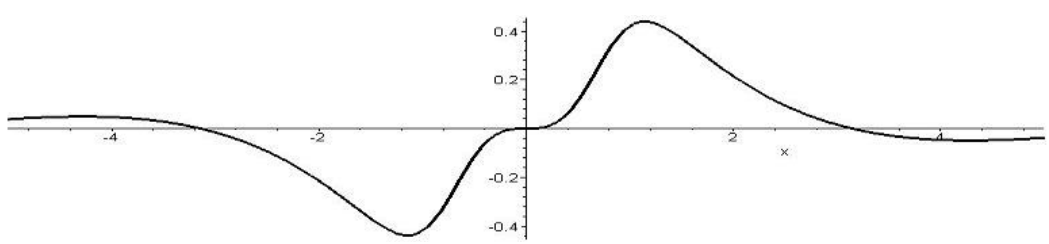
$$f: \ f(x) = \frac{\cos x}{x^2+4}; \ \ x \in (-\infty, \infty) \quad \text{je sudá, neboť} \quad f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^2+4} = \frac{\cos x}{x^2+4} = f(x)$$



Obr. 1.12: Sudá funkce

$$f: \ f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}\sin x; \quad x \in (-\infty, \infty) \quad \text{je lichá, neboť}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4+1}\sin(-x) = \frac{x^2}{x^4+1}(-\sin x) = -f(x)$$



Obr. 1.13: Lichá funkce

Definice 1.42: Funkce f se nazývá ***periodická***, existuje-li číslo $p \neq 0$ takové, že $f(x \pm p) = f(x)$ pro každé $x \in D_f$. Číslo p se nazývá ***perioda*** funkce f.

Je-li p perioda funkce f, pak kp, kde $k \neq 0$ je libovolné celé číslo, je také perioda funkce f. Existuje-li nejmenší kladné číslo p, které je periodou funkce f, nazývá se ***primitivní perioda***.

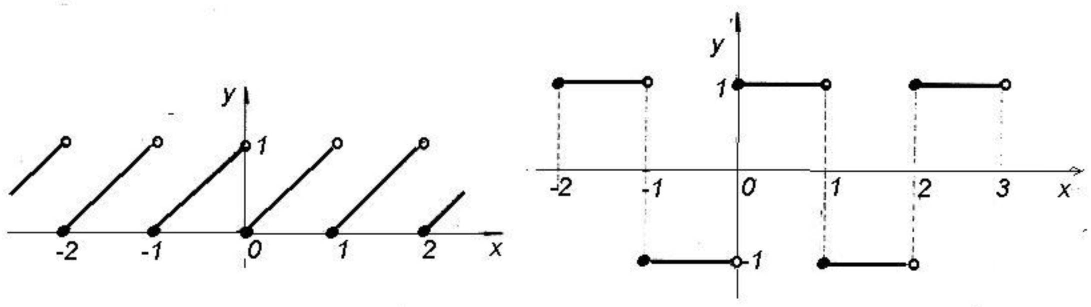
Příklad 1.43:

a) Funkce $f: \ y = x - [x]$ je periodická s periodou 1:

Je $[x+1] = [x]+1$, tedy $f(x+1) = (x+1)-[x+1] = x+1-[x]-1 = x-[x] = f(x)$. (Viz obr.1.14 vlevo.)

b) Funkce $g: \ y = (-1)^{[x]}$ je periodická s periodou 2:

Protože $[x+2] = [x]+2$, je $g(x+2) = (-1)^{[x+2]} = (-1)^{[x]}(-1)^2 = (-1)^{[x]} = g(x)$. (Viz obr.1.14 vpravo.)



Obr. 1.14: Periodické funkce

Pro konstrukci grafu periodické funkce postačí, sestrojíme-li jej na libovolném polouzavřeném intervalu délky p. Celý graf pak dostaneme z této části jejím posunutím ve směru osy x o délku kp pro všechna celá k.

Nejznámějšími příklady periodických funkcí jsou funkce goniometrické – $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$. Prvé dvě mají primitivní periodu 2π, druhé dvě π.
Příkladem funkce, která nemá primitivní periodu, je libovolná konstanta – její periodou je každé nenulové reálné číslo.

Funkce ohraničené

Definice 1.44:

- Funkce f se nazývá ***shora ohraničená*** na množině $M \subset D_f$, existuje-li číslo c takové, že $\forall x \in M : f(x) \leq c$.
- Funkce f se nazývá ***zdola ohraničená*** na množině $M \subset D_f$, existuje-li číslo d takové, že $\forall x \in M : d \leq f(x)$.
- Funkce f se nazývá ***ohraničená*** na množině $M \subset D_f$, je-li na ní ohraničená shora i zdola.

Označíme-li větší z čísel $|c|$, $|d|$ jako K, platí pro ohraničenou funkci $\forall x \in M : |f(x)| \leq K$.

Příklad 1.45: Funkce $f(x) = x^2$ je zdola ohraničená na svém přirozeném definičním oboru $\mathbb{R}$, protože platí

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ale není ohraničená shora – dokážeme sporem:

Předpokládejme, že existuje c tak, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; x^2 \leq c.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $c > 1$.
Stačí najít jedno reálné číslo x_0, pro které tato podmínka neplatí, tedy pro které je $x_0^2 > c$; položme $x_0 = c$. Potom $x_0^2 = c^2 > c$.

Naproti tomu funkce $f(x) = \sin x$ je ohraničená na svém přirozeném definičním oboru, protože platí

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Elementární funkce

V této části uvedeme souhrnný přehled a základní vlastnosti tzv. elementárních funkcí – základních reálných funkcí reálné proměnné, které jsou vám vesměs známy ze střední školy, se kterými budeme dále pracovat (a které jsme ostatně již vyšetřovali v předchozím textu):

Polynomem nazýváme funkci f definovanou na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla, $a_n \neq 0$. Číslo n se nazývá ***stupeň polynomu***. Pro polynom n-tého stupně používáme obvykle označení P_n.

Polynom stupně 0, tedy funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = c,$$

kde c je reálné číslo, se nazývá ***konstanta.***

Je-li funkční hodnota polynomu v čísle x_0 rovna nule, tedy platí-li

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0,$$

nazývá se číslo x_0 ***kořenem polynomu***.

Uvedeme některé důležité vlastnosti polynomů a jejich kořenů:

- ***Základní věta algebry:*** *Každý polynom stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden kořen.*
- ***Věta Bézoutova:*** *Číslo x_0 je kořenem polynomu P_n stupně $n \geq 1$, právě když platí*

$$P_n(x) = (x - x_0)\, Q_{n-1}(x),$$

kde Q_{n-1} je vhodný polynom stupně $n - 1$.

Výraz $(x - x_0)$ vystupující v předchozím vztahu se nazývá ***kořenový činitel*** příslušný ke kořenu x_0.

Předchozí dvě věty mají následující důsledek:

- ***Rozklad polynomu na kořenové činitele:*** *Jsou-li (reálná nebo komplexní, ne nutně různá) čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ kořeny polynomu $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, platí*

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n).$$

Odtud plyne, že polynom stupně n má právě n (ne nutně různých) kořenů.

Mezi koeficienty polynomu a jeho kořeny platí následující vztahy:

- ***Vietovy vzorce:*** *Je-li*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n),$$

platí:

$$\begin{array}{lcl} a_{n-1} & = & -a_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \\ a_{n-2} & = & a_n (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n), \\ \vdots & & \vdots \\ a_0 & = & (-1)^n a_n (x_1 x_2 \cdots x_n). \end{array}$$

Nalézt přesně kořeny libovolného polynomu neumíme (existují metody pro jejich přibližné určení, které se vyšetřují v numerických metodách), často nám stačí určit, zda některé známé číslo kořenem daného polynomu je nebo není – tedy určit funkční hodnotu polynomu. K tomu existuje jeden velmi jednoduchý algoritmus:

Hornerovo schéma: Buď P polynom a $x_0 \in \mathbb{R}$. Víme, že existují polynomy Q, R tak, že platí

$$P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + R(x),$$

kde stupeň $R <$ stupeň $(x - x_0)$, tedy je roven nule a R je konstanta, $R \in \mathbb{R}$.
Po dosazení x_0 do předchozí rovnosti dostaneme

$$P(x_0) = R, \text{ tedy } P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + P(x_0).$$

Nechť tedy

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \text{ a } Q(x)=\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i.$$

Potom platí

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i=(x-x_0)\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i+P(x_0)=b_{n-1}x^n+\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i-1}-b_i x_0)x^i+P(x_0)-b_0x_0.$$

Porovnáním koeficientů dostaneme rovnosti uvedené v levé části následující tabulky, zatímco v pravém sloupci jsou rovnosti z nich jednoduše odvozené:

$$\begin{array}{ll}
a_n=b_{n-1} & b_{n-1}=a_n \\
a_{n-1}=b_{n-2}-b_{n-1}x_0 & b_{n-2}=a_{n-1}+x_0b_{n-1} \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
a_i=b_{i-1}-b_ix_0 & b_{i-1}=a_i+x_0b_i \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
a_1=b_0-b_1x_0 & b_0=a_1+x_0b_1 \\
a_0=P(x_0)-b_0x_0 & P(x_0)=a_0+x_0b_0.
\end{array}$$

V pravém sloupci je tedy naznačen výpočet koeficientů částečného podílu Q včetně hodnoty $P(x_0)$ polynomu P v bodě x_0. Tento postup, zvaný ***Hornerovo schéma***, se zpravidla zapisuje ve tvaru následující tabulky:

$$\begin{array}{l|llllllll}
\underline{x_0} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_i & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & & x_0b_{n-1} & \cdots & x_0b_i & \cdots & x_0b_1 & x_0b_0 \\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_{i-1} & \cdots & b_0 & p(x_0)
\end{array}$$

Příklad 1.46: Máme vypočítat funkční hodnotu polynomu

$$P(x)=x^7-6x^6-x^5+70x^4-120x^3-112x^2+432x-288 \quad \text{pro } x=2.$$

Je-li $x=2$ kořen polynomu P, máme určit jeho násobnost.

Řešení:

$$\begin{array}{l|rrrrrrrr}
\underline{2} & 1 & -6 & -1 & 70 & -120 & -112 & 432 & -288 \\
 & & 2 & -8 & -18 & 104 & -32 & -288 & 288 \\
\hline
 & 1 & -4 & -9 & 52 & -16 & -144 & 144 & 0 \\
 & & 2 & -4 & -26 & 52 & 72 & -144 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -13 & 26 & 36 & -72 & 0 & \\
 & & 2 & 0 & -26 & 0 & 72 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & -13 & 0 & 36 & 0 & & \\
 & & 2 & 4 & -18 & -36 & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & -9 & -18 & 0 & & & \\
 & & 2 & 8 & -2 & & & & \\
\hline
 & 1 & 4 & -1 & -20 & & & &
\end{array}$$

Vidíme, že $x = 2$ je čtyřnásobným kořenem polynomu P, přičemž ve třetím řádku zdola jsou koeficienty příslušného podílu, tj. platí

$$P(x) = (x-2)^4 Q(x) = (x-2)^4(x^3 + 2x^2 - 9x - 18).$$

Chceme-li najít všechny kořeny polynomu P, stačí hledat kořeny polynomu Q. Jestliže jsou celočíselné, musí dělit absolutní člen – v úvahu tedy přichází $x = -2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$. Vypočítáme příslušné funkční hodnoty pomocí Hornerova schématu:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & -9 & -18 \\ & & -2 & 0 & 18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

Číslo $x = -2$ je tedy kořen a příslušný podíl $q_1(x) = x^2 - 9$. Odtud plyne, že zbývající kořeny jsou $x = \pm 3$ a platí

$$P(x) = (x-2)^4(x+2)(x-3)(x+3).$$

Víme, že každý polynom (s reálnými koeficienty) $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se dá vyjádřit ve tvaru součinu kořenových činitelů

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n),$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kořeny polynomu P_n (pro k-násobný kořen x_i se v součinu výraz $(x - x_i)$ vyskytuje k-krát). Přitom má-li polynom komplexní kořen $a + b\,j$, má také komplexní kořen $a - b\,j$ a součin příslušných dvou kořenových činitelů je roven

$$[x - (a + b\,j)][x - (a - b\,j)] = [(x-a) - b\,j][(x-a) + b\,j] = (x-a)^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

– je to polynom druhého stupně s reálnými koeficienty.

Polynom $P(x)$ lze tedy zapsat ve tvaru součinu

$$P(x) = a_n(x - x_i)^k \ldots (x^2 + px + q)^t \ldots,$$

kde x_i je k-násobný reálný kořen polynomu $P(x)$ a kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ s reálnými koeficienty má komplexně sdružené kořeny (tj. $p^2 - 4q < 0$), tedy polynom $P(x)$ má t-násobné komplexně sdružené kořeny.

Takové vyjádření polynomu nazýváme ***rozklad polynomu v reálném oboru***.

Příklad 1.47: Máme rozložit v reálném oboru polynom $P(x) = x^4 - x^3 - x + 1$.

Řešení:

$$x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)(x-1)(x^2+x+1),$$

a kvadratická rovnice $x^2 + x + 1 = 0$ má komplexní kořeny, tedy

$$P(x) = (x-1)^2(x^2+x+1).$$

Racionální lomená funkce je dána předpisem

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

kde P_m resp. Q_n jsou polynomy stupně m resp. n. Je definovaná pro každé x, pro které je $Q_n(x) \neq 0$.
Jestliže pro stupně polynomů platí $m < n$, říkáme, že f je ***ryze lomená***; je-li $m \geq n$, říkáme, že f je ***neryze lomená*** racionální funkce. V případě neryze lomené racionální funkce, tj. pro $m \geq n$, podíl $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ dává po vydělení

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = N(x) + \frac{\tilde{P}_i(x)}{Q_n(x)}, \quad \text{kde} \quad i < n.$$

Jmenovatel rozložíme v reálném oboru a dostaneme

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = N(x) + \frac{\tilde{P}_i(x)}{a_n(x-\alpha)^k \dots (x^2+px+q)^t \dots}.$$

Taková funkce může vzniknout součtem „jednoduchých“ zlomků, např.:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+x+3} = \frac{2x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+x+3)}.$$

Naopak také každá ryze lomená racionální funkce, jestliže umíme najít kořeny jejího jmenovatele, se dá rozložit na součet jednoduchých zlomků určitého tvaru – budeme jim říkat ***parciální zlomky***.

Věta o rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky, jestliže se formuluje přesně, je velmi nepřehledná. Naznačíme postup:

V rozkladu podílu $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ na parciální zlomky odpovídá každému kořenovému činiteli jmenovatele $(x-\alpha)^k$ součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)}$$

a každému faktoru $(x^2+px+q)^t$ odpovídá součet t parciálních zlomků tvaru

$$\frac{B_t x + C_t}{(x^2+px+q)^t} + \frac{B_{t-1}x + C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)} \ .$$

Rozklad má tedy tvar

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \cdots +$$

$$+\frac{B_t x + C_t}{(x^2+px+q)^t} + \frac{B_{t-1}x + C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \cdots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)}.$$

Neznámé koeficienty v rozkladu vypočítáme ***metodou neurčitých koeficientů***. Tato metoda se opírá o větu o rovnosti polynomů – dva polynomy jsou si rovny, rovnají-li se jejich koeficienty u stejných mocnin. Postup naznačíme na příkladech:

Příklad 1.48:

$$R(x) = \frac{2x^3+x+2}{x^4+x^3+x^2} = \frac{2x^3+x+2}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Poslední součet tří zlomků opět převedeme na společného jmenovatele, kterým je, pochopitelně, jmenovatel původně zadaného zlomku. Porovnáme čitatele:

$$2x^3+x+2 = A(x^2+x+1) + Bx(x^2+x+1) + x^2(Cx+D),$$

$$2x^3+x+2 = (B+C)x^3 + (A+B+D)x^2 + (A+B)x + A.$$

Odtud porovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} & & B & + & C & & & = & 2 \\ A & + & B & & & + & D & = & 0 \\ A & + & B & & & & & = & 1 \\ A & & & & & & & = & 2 \end{array}$$

Soustava má řešení $A = 2$, $B = -1$, $C = 3$, $D = -1$, tj.

$$\frac{2x^3+x+2}{x^4+x^3+x^2} = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{3x-1}{x^2+x+1}.$$

Příklad 1.49:

$$R(x) = \frac{x+2}{x^3-x} = \frac{x+2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Odtud

$$x+2 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

a můžeme opět roznásobit a porovnat koeficienty u stejných mocnin.

Zde je ovšem výhodnější jiný postup. Vyjdeme z faktu, že jestliže se dvě funkce sobě rovnají, mají stejné funkční hodnoty pro všechna x. Porovnáme funkční hodnoty ve vhodných bodech:

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad 2 = A(-1) &&\Rightarrow A = -2 \\ x = 1: &\quad 3 = C \cdot 2 &&\Rightarrow C = \tfrac{3}{2} \\ x = -1: &\quad 1 = B(-1)(-2) &&\Rightarrow B = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

a odtud

$$\frac{x+2}{x^3-x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1}.$$

Mocninnou funkcí nazýváme funkci f danou předpisem

$$f(x) = x^a.$$

Přitom mohou nastat tyto případy.

a) $a \in \mathbb{N}$. Mocninná funkce s přirozeným exponentem je definovaná $\forall x \in \mathbb{R}$. Je-li a sudé číslo, jedná se o sudou funkci, která je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a rostoucí na intervalu $(0, \infty)$. Je-li a liché číslo, jedná se o lichou a rostoucí funkci.

b) Pro $a = 0$ se jedná o konstantní funkci $f(x) = 1$ pro $x \neq 0$.

c) Je-li a celé záporné číslo, $a = -r$, $r \in \mathbb{N}$, je $f(x) = \frac{1}{x^r}$. Funkce je definovaná pro $x \neq 0$.

d) Pro $a = 1/r$, kde $r \in \mathbb{N}$, je

$$f(x) = x^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{x};$$

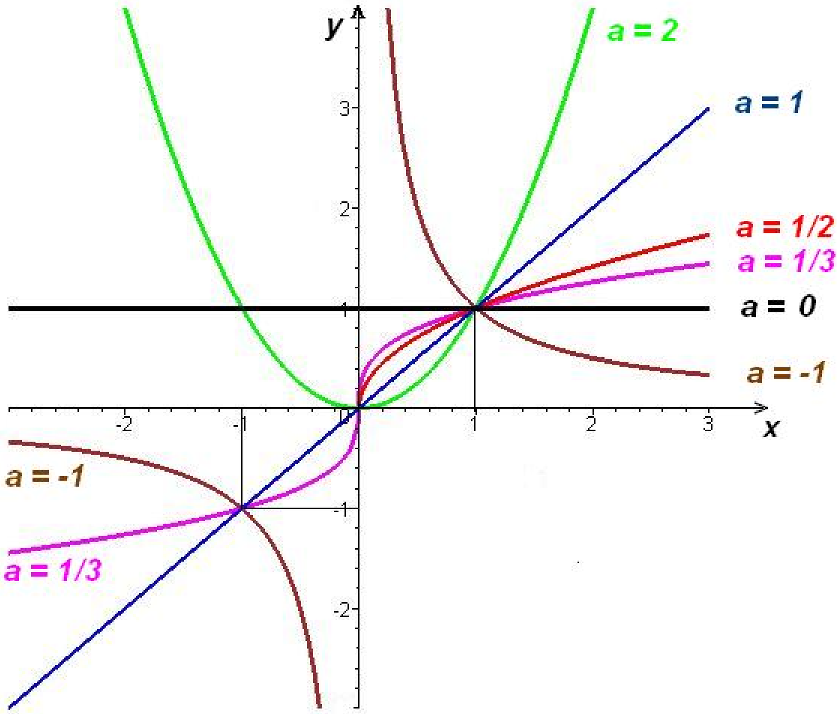
je definovaná na intervalu $\langle 0, \infty)$ pro r sudé a na intervalu $(-\infty, \infty)$ pro r liché. Je rostoucí.

e) $a \in \mathbb{Q}$, $a = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ a a není z a) – d). Potom je

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

Pro $p/q > 0$ je funkce f definovaná pro $x \in \langle 0, \infty)$, pro $p/q < 0$ je funkce f definovaná pro $x \in (0, \infty)$.

f) Pro a iracionální je mocninná funkce definovaná na intervalu $\langle 0, \infty)$ pro $a > 0$ a na intervalu $(0, \infty)$ pro $a < 0$.



Obr. 1.15: Grafy mocninných funkcí $y = x^a$

Exponenciální funkce je funkce definovaná předpisem

$$f(x) = a^x, \ a > 0.$$

Je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$. Pro $a = 1$ jde o konstantu $f(x) = 1$.

Logaritmická funkce při základu a, kde $0 < a < 1$ nebo $a > 1$ je definovaná na intervalu $(0, \infty)$ a je inverzní funkcí k exponenciální funkci $f(x) = a^x$. Označuje se předpisem

$$f(x) = \log_a x.$$

Je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$.

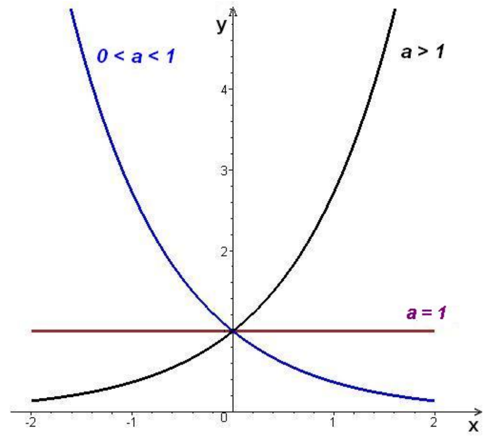
Logaritmická funkce při základu $e = 2{,}718281828\ldots$ se stručně nazývá jen logaritmická funkce a označuje se $\ln x$. Logaritmickou funkci při základu 10 označujeme místo $\log_{10} x$ symbolem $\log x$.

Uvedeme některé důležité převodní vztahy:

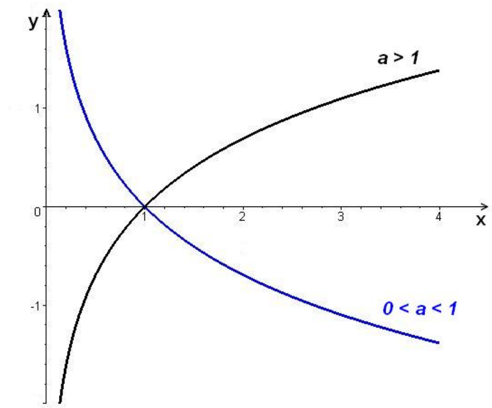
a) Nechť je $a > 0$, potom platí $a^x = e^{x \ln a}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Nechť je $a > 0$, $b > 0$, přičemž $a \neq 1$, $b \neq 1$, potom $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $\forall x$, $x > 0$

c) Nechť a je číslo, potom platí $x^a = e^{a \ln x}$ $\forall x$, $x > 0$



Obr. 1.16: Exponenciální funkce $f(x) = a^x$



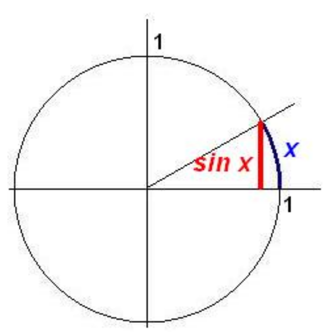
Obr. 1.17: Logaritmické funkce $f(x) = \log_a x$

Goniometrické (nebo také ***trigonometrické***) ***funkce*** reálného argumentu (úhlu vyjádřeného v obloukové míře) jsou funkce

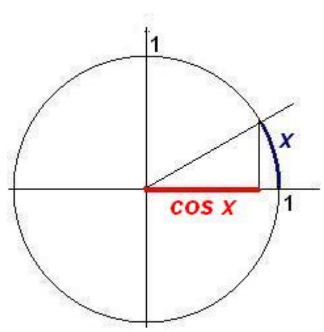
$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(x) = \operatorname{cotg} x.$$

Lze je zavést pomocí jednotkové kružnice takto:

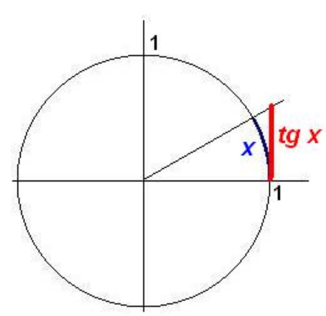
Je-li x délka oblouku na jednotkové kružnici mezi bodem $[1, 0]$ a průsečíkem této kružnice s polopřímkou, vycházející z počátku souřadnic, je $\sin x$ roven druhé souřadnici tohoto průsečíku a $\cos x$ jeho první souřadnici (viz obr.1.18 resp. 1.19, na obr. 1.20 je znázorněn tg x).



Obr. 1.18: $\sin x$



Obr. 1.19: $\cos x$

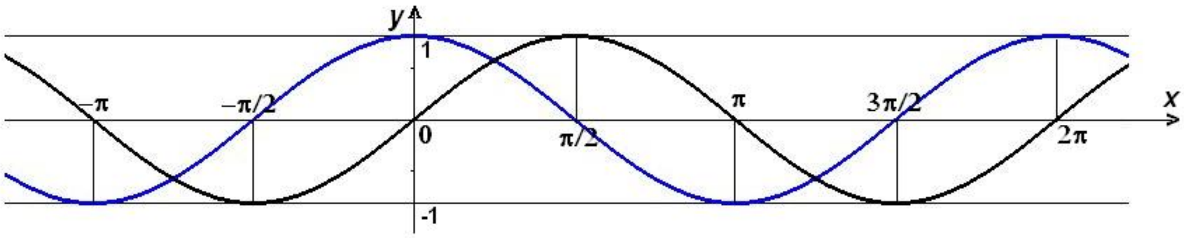


Obr. 1.20: $\operatorname{tg} x$

Zřejmě platí ***základní trigonometrická identita*** (plyne z Pythagorovy věty pro trojúhelník, pomocí něhož je sinus a kosinus definován)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou definovány na $\mathbb{R}$ a jsou periodické s periodou 2π. Funkce sinus je lichá a funkce kosinus sudá.

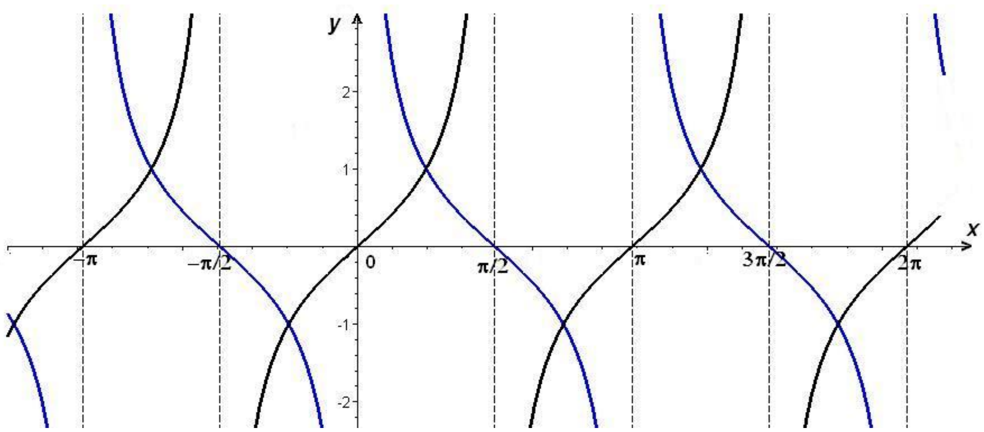


Obr. 1.21: Grafy goniometrických funkcí $y = \sin x$ $y = \cos x$

Dále definujeme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{a} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce $\operatorname{tg} x$ a cotg x jsou liché funkce, periodické s periodou π.
Funkce tg x je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, funkce cotg x je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Obr. 1.22: Grafy goniometrických funkcí $y =\operatorname{tg} x$ $y =\operatorname{cotg} x$

Cyklometrické funkce jsou inverzní ke goniometrickým funkcím:

Funkce $f(x) = \arcsin x$
je definovaná na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a je inverzní k funkci $\sin x$ na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Funkce $f(x) = \arccos x$
je definovaná na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a je inverzní k funkci $\cos x$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

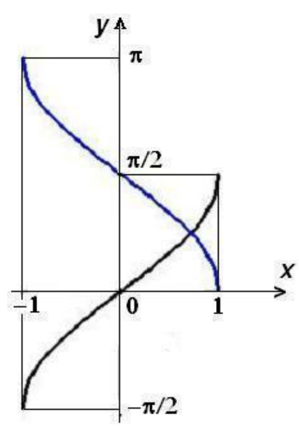
Funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$
je definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$ a je inverzní k funkci tg x na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Funkce $f(x) = \operatorname{arccotg} x$
je definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$ a je inverzní k funkci cotg x na intervalu $(0, \pi)$.

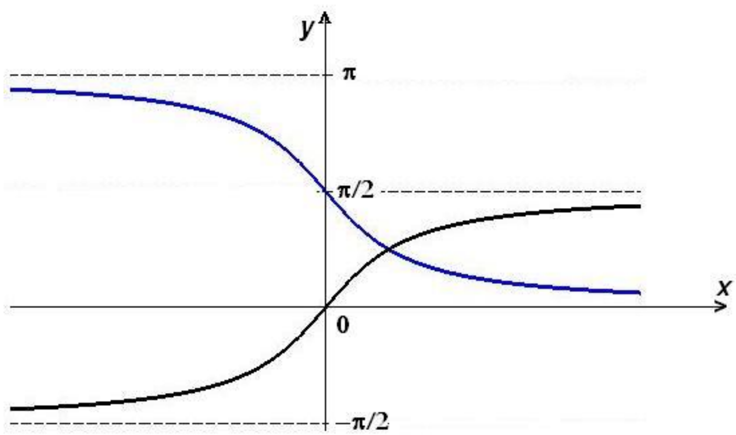
Pro cyklometrické funkce platí (pro libovolné x z definičního oboru těchto funkcí):

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí liché funkce, funkce arccos a arccotg jsou klesající funkce.



Obr. 1.23: $\arcsin x$, $\arccos x$



Obr. 1.24: arctg x, arccotg x

Hyperbolické funkce jsou funkce

$$f(x) = \sinh x, \quad f(x) = \cosh x, \quad f(x) = \operatorname{tgh} x, \quad f(x) = \operatorname{cotgh} x.$$

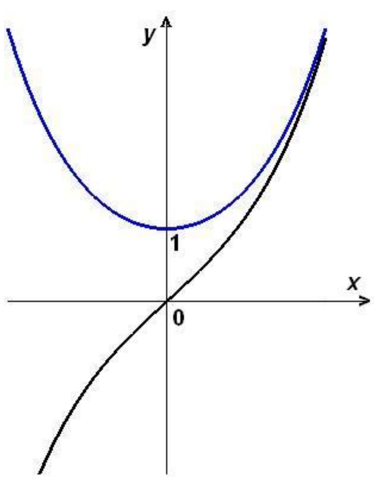
Jsou definovány pomocí následujících předpisů:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

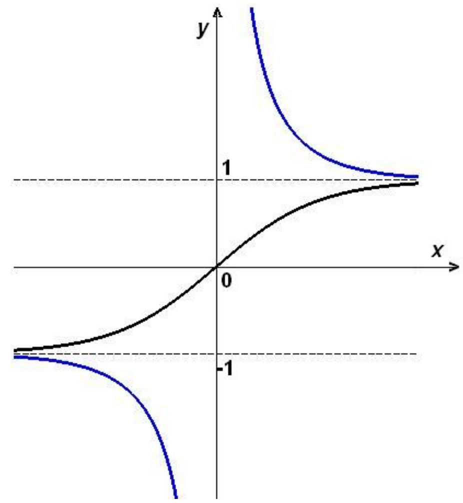
$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Grafy hyperbolických funkcí jsou v obr.1.25 a 1.26.

Každou funkci, která vznikne z konečného počtu výše uvedených funkcí, tedy konstant, mocninných, exponenciálních a logaritmických funkcí, trigonometrických a cyklometrických funkcí, pomocí konečného počtu aritmetických operací (tedy sečítání, odečítání, násobení a dělení) a tvoření složené funkce, nazýváme ***elementární funkcí.***



Obr. 1.25: $\sinh x$,$\cosh x$



Obr. 1.26: tgh x,cotgh x

Posloupnosti

Posloupností nazýváme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$, tedy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost reálných čísel. Obvykle klademe

$$a_n = f(n)$$

a tuto hodnotu nazýváme ***n-tým členem posloupnosti***. Posloupnost s n-tým členem a_n označujeme symbolem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo zkráceně (a_n).

Je-li zadán předpis pro výpočet n-tého členu posloupnosti pomocí předchozího (resp. pomocí k předchozích členů), tedy pomocí a_{n-1} (resp. a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}) spolu se zadáním hodnoty a_1 (resp. hodnot a_1, a_2, ..., a_k), říkáme, že posloupnost je ***zadaná rekurentně***.

Příklad 1.50: Posloupnost daná rekurentním vztahem

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad \text{kde} \quad a_1 = a_2 = 1, \quad \text{tedy} \quad (a_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

se nazývá Fibonacciho posloupnost. Tato posloupnost má strukturu, kterou pozorujeme v mnohých situacích, které v sobě mají obsažen růst – ať už jde o růst rostlin nebo o růst počítačové databáze. Dá se ukázat, že pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti platí

$$a_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right].$$

Je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost a $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel, potom se složené zobrazení $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ nazývá ***vybraná posloupnost*** z posloupnosti (a_n).

Příklad 1.51: Posloupnost 1, 4, 9, 16, 25, ... je vybraná z posloupnosti 1, 2, 3, 4, 5, ... Vnitřní složka příslušného složeného zobrazení je $(n_k) = (k^2)$.

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ***aritmetická***, existuje-li číslo d tak, že platí rekurentní vztah

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslo d se nazývá ***diference***.

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti platí $a_n = a_1 + (n-1)d$,
pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá ***geometrická***, jestliže existuje číslo q tak, že platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Číslo q se nazývá ***kvocient***.

Pro n-tý člen geometické posloupnosti platí $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,

pro součet prvních n členů geometické posloupnosti platí $s_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & q = 1 \end{cases}$

Shrnutí

V tomto odstavci jsme připomněli pojmy:

- funkce: předpis f, přiřazující každému prvku nějaké množiny (definičního oboru D_f) prvek jiné množiny (oboru hodnot H_f),
- graf funkce jedné proměnné: množinu bodů v rovině daných vztahem $\Gamma = \{(x, y) \,|\, x \in D_f,\ y = f(x)\}$,

některé typy funkcí (uvedené charakterizující vztahy vždy platí pro každé x z definičního oboru funkce f):

- monotonní funkce: rostoucí resp. klesající ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ resp. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$) a neklesající resp. nerostoucí ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ resp. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$),
- sudé resp. liché funkce: $f(-x) = f(x)$ resp. $f(-x) = -f(x)$,
- periodické funkce: existuje číslo p (perioda) tak, že platí $f(x \pm p) = f(x)$,
- ohraničené funkce (shora, zdola): obor hodnot funkce je ohraničený (shora, zdola).

Vytváření nových funkcí z daných funkcí f, g, φ (vztahy platí pro všechna x z definičních oborů vzniklých funkcí):

- zúžení funkce: f/M je funkce s definičním oborem $D_{f/M} = D_f \cap M$ a s vlastností $f/M(x) = f(x)$,
- složená funkce: $f \circ \varphi$ (čti f po φ) je dána vztahem $(f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$,
- inverzní funkce: f^{-1} je funkce s definičním oborem rovným oboru hodnot funkce f a s vlastností $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$,
- součet, rozdíl, součin a podíl funkcí: funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ s vlastnostmi $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dále jsme uvedli důležité funkce, se kterými budeme hlavně pracovat:

- elementární funkce: polynomy, racionální lomené funkce, obecné mocniny, exponenciální a logaritmické funkce, goniometrické, cyklometrické a hyperbolické funkce,
- posloupnosti: funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$.

Podrobněji jsme si povšimli polynomů a racionálních lomených funkcí; popsali jsme

- rozklad polynomu v reálném oboru: vyjádření polynomu ve tvaru

  $$P(x) = a_n(x-\alpha)^k \dots (x^2+px+q)^t \dots,$$

  kde α je k-násobný reálný kořen polynomu $P(x)$ a kvadratická rovnice $x^2+px+q=0$ má komplexně sdružené reálné kořeny (tj. $p^2-4q<0$), tedy polynom $P(x)$ má t-násobné komplexně sdružené kořeny,

- rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky: vyjádření racionální lomené funkce ve tvaru

  $$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \dots +$$

  $$+\frac{B_t x + C_t}{(x^2+px+q)^t} + \frac{B_{t-1}x + C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)},$$

  je-li $Q_n(x) = (x-\alpha)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^t \cdot \ldots$ rozklad jmenovatele v reálném oboru.

Pro výpočet funkční hodnoty polynomu, tedy i pro ověření, že dané číslo je kořenem, jsme si uvedli Hornerovo schéma.

Otázky a úlohy

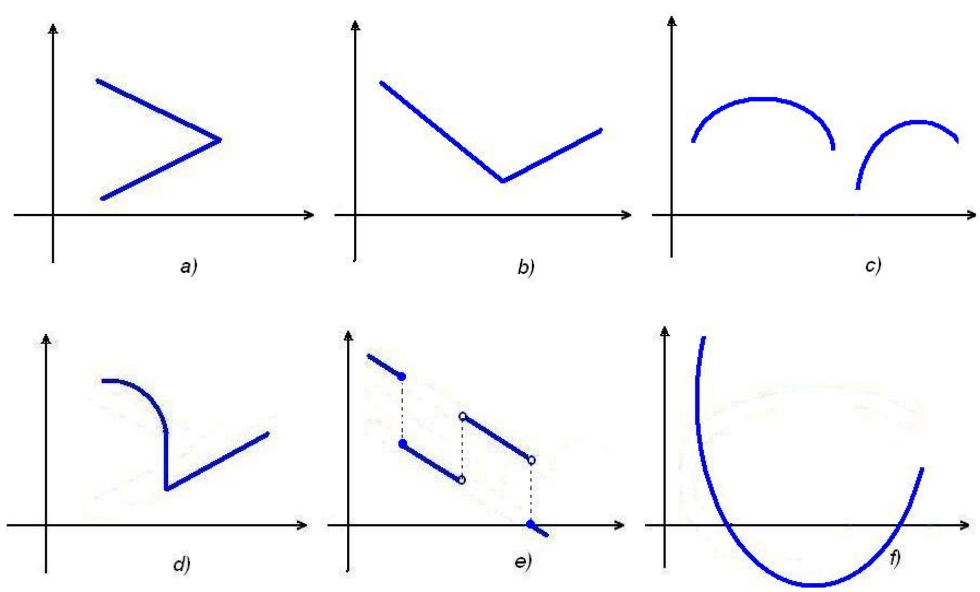
1. Formulujte, co rozumíme pod pojmem funkce a jak je obvykle funkce zadaná.
2. Co je přirozený definiční obor funkce?
3. Najděte alespoň jednu funkci s definičním oborem D a oborem hodnot H tak, aby platilo:

   a) $D = \mathbb{R}$ a $H = \{3, 5\}$,
   b) $D = \mathbb{N}$ a H je množina všech kladných lichých čísel,
   c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2, 3\}$ a H je libovolný.

4. Napište funkční předpisy a najděte definiční obory funkcí f, pro které platí:

   a) $f(x)$ je průměr kruhu o poloměru x,
   b) $f(x)$ je plošný obsah kruhu o poloměru x,
   c) $f(x)$ je objem krychle o straně x,
   d) $f(x)$ je povrch krychle o straně x,
   e) $f(x)$ je délka přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délku 3 a x.

5. Co je to graf funkce?
6. V obrázcích 1.27 jsou nakresleny křivky. Ve kterém případě se může jednat o graf jisté funkce a ve kterém ne?



Obr. 1.27: Grafy

7. Známe-li graf funkce f, jak sestrojíme graf funkce g, pro kterou platí ($c, a \in \mathbb{R}$):

   a) $g(x) = f(-x)$, b) $g(x) = -f(x)$,

   c) $g(x) = f(x+c)$, d) $g(x) = f(x) + c$,

   e) $g(x) = a\,f(x)$, f) $g(x) = f(ax)$?

8. Nechť $f(x) = 2x - 3$ a $I = \langle 1, 2\rangle$. Pro který z následujících intervalů platí, že $f(I)$ je jeho podmnožinou?
   $\langle -3, 0\rangle,\ \langle -2, 1\rangle,\ \langle -1, 2\rangle,\ \langle 0, 3\rangle,\ \langle 1, 4\rangle.$

9. Nechť $f(x) = x^2 + x$ a $I = \langle -1, \frac{1}{2}\rangle$. Pro který z následujících intervalů platí, že $f(I)$ je jeho podmnožinou?
   $\langle -1, 0\rangle,\ \langle -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\rangle,\ \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\rangle,\ \langle -\frac{1}{4}, 1\rangle,\ \langle 0, \frac{3}{2}\rangle.$

10. Jestliže pro jistou funkci g platí $g(I) \subset (1, 4)$, do kterého z následujících intervalů zobrazí interval I funkce $-g$?
    $(1, 4),\ (0, 4),\ (-4, 0),\ (-1, 4),\ (-3, 3).$

11. Jestliže pro jistou funkci h platí $h(I) \subset (1, 4)$, do kterého z následujících intervalů zobrazí interval I funkce $\frac{1}{h}$?
    $(1, 4),\ (0, 4),\ (-4, 0),\ (\frac{1}{2}, 2),\ (\frac{1}{100}, 1).$

12. Jestliže platí $f(I) \subset (0, 5)$ a $g(I) \subset (-5, 10)$, do kterého z následujících intervalů zobrazí interval I funkce $f + g$?
    $(0, 5),\ (-5, 10),\ (0, 10),\ (-5, 15),\ (0, 15).$

13. Kdy řekneme, že se dvě funkce sobě rovnají?

14. Zjistěte, které z následujících funkcí f, g resp. h (s přirozeným definičním oborem) se sobě rovnají:

    a) $f(x) = 1,\ g(x) = \frac{x}{x}$,
    b) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{x}{x^2}$,
    c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}},\ g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$,
    d) $f(x) = \ln x^2,\ g(x) = 2\ln x$,
    e) $f(x) = x,\ g(x) = \sqrt{x^2},\ h(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

15. Co je to zúžení funkce?

16. Najděte zúžení funkcí z příkladu 14 tak, aby se takto vzniklé funkce sobě rovnaly.

17. Jsou dány funkce f a g. Najděte jejich zúžení tak, aby platilo $f/_M = g/_M$:

    a) $f(x) = |x-1| + |x+1|, \quad g(x) = |2x|$,
    b) $f(x) = 2x^2 - 1, \qquad g(x) = 1 - 3x$.

18. Funkce f a g jsou definovány tabulkou (znak N znamená, že funkce není definovaná):

x	$f(x)$	$g(x)$
a	-2	3
b	0	-1
c	1	5
d	N	-3
e	2	N

Najděte funkce $f+g,\ f-g,\ f/g,\ g/f,\ f^2-fg+3$.

19. Pro funkci f platí $\qquad f(x+1)=f(x)+f(1)+1\ \forall x\in\mathbb{R}$.

 a) Čemu se rovná $f(0)$?
 b) Je-li navíc $f(1)=1$, najděte
 $f(2),\ f(3),\ f(-1)$.

20. Pro funkci g platí $\qquad g(x+y)=g(x)+g(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

 a) Čemu se rovná $g(0)$?
 b) Ukažte, že platí
 $g(-x)=-g(x),\ g(2x)=2g(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.
 c) Je-li navíc $g(1)=1$, najděte
 $g(2),\ g(3),\ g(\frac{1}{2})$.

21. Najděte alespoň tři příklady funkce f pro kterou platí obě následující podmínky:

 a) $f(x+y)=f(x)+f(y)$,
 b) $f(ax)=af(x)$.

 Pokuste se formulovat obecný předpis pro funkce s těmito vlastnostmi.

22. Je-li funkce f rostoucí, je nutně

 a) funkce $2f$ rostoucí
 b) funkce $-f$ klesající,
 c) funkce f^2 rostoucí,
 d) funkce $\frac{1}{f}$ klesající (pro všude nenulovou funkci f)?

23. Nechť funkce f,g jsou definovány na stejném intervalu.

 a) Jsou-li funkce f i g rostoucí, je i funkce $f+g$ rostoucí?
 b) Najděte rostoucí funkci f a klesající funkci g tak, aby funkce $f+g$ byla rostoucí.

24. Nechť f je lichá funkce, která je definovaná pro $x=0$. Jakou zde má funkční hodnotu?

25. Najděte k tak, aby funkce

a) $f(x) = x^2 + kx + 1$ byla sudá,
b) $f(x) = x^3 - kx^2 + 2x$ byla lichá.

26. Ukažte, že pro libovolnou funkci f definovanou na intervalu $(-k, k)$, $k > 0$ platí, že $f(x) + f(-x)$ je sudá a $f(x) - f(-x)$ je lichá funkce.

27. Nechť jsou funkce f a g periodické se stejnou periodou. Ukažte, že funkce $f + g$, fg, f/g jsou také periodické.

28. Nechť funkce f je periodická s periodou p. Je-li $a \neq 0$, jakou periodu má funkce $f(ax)$?

29. Ukažte, že platí:

a) Všechny konstantní funkce jsou ohraničené.
b) Je-li funkce f na intervalu I ohraničená, je i funkce $-f$ na I ohraničená.
c) Jsou-li funkce f a g ohraničené na intervalu I, jsou také funkce $f + g$ a fg na intervalu I ohraničené.

30. Ve druhém sloupci najděte funkce inverzní k funkcím v prvním sloupci:

$$f_1(x) = \frac{1}{x+2}, \qquad g_1(x) = \frac{x}{1-x},$$

$$f_2(x) = \frac{x}{x-1}, \qquad g_2(x) = \frac{x}{x-1},$$

$$f_3(x) = 3 + \frac{1}{x}, \qquad g_3(x) = \frac{1}{x} - 2,$$

$$f_4(x) = \frac{x}{2} - 2, \qquad g_4(x) = \frac{1}{x-3},$$

$$f_5(x) = \frac{x}{x+1}, \qquad g_5(x) = 2x + 4.$$

31. Může být funkce sama k sobě inverzní?

32. Ukažte, že inverzní funkce k prosté liché funkci je opět lichá. Co můžeme říci o inverzní funkci k prosté sudé funkci?

33. Co je to složená funkce?

34. Ověřte, že pro definiční obor složené funkce $f \circ g$ platí $D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f)$.

35. Ukažte, že každá z následujících funkcí splňuje vztah $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x$:

a) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, b) $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$,

c) $f_(x) = -\frac{1}{x+1}$, d) $f(x) = a - \frac{1}{x+b}$, kde $a + b = 1$.

36. Nechť pro funkce f, g, h definované na intervalu I platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x \in I$ a nechť jsou tyto funkce na I rostoucí. Ukažte, že platí $f(f(x)) \leq g(g(x)) \leq h(h(x))$.

37. Jsou dány funkce f a g pomocí vztahů

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{pro} \quad x < 1, \\ 2x - 1 & \text{pro} \quad x \geq 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{pro} \quad x < 0, \\ x + 2 & \text{pro} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

   a) Načrtněte jejich grafy.
   b) Najděte: $f(g(0)),\ f(g(1)),\ f(g(-2)),\ f(f(-1)),\ f(f(-2)),\ g(f(0)),\ g(f(-1)),$ $g(f(-2)),\ g(g(1)),\ g(g(-1))$.
   c) Řešte vzhledem k x: $f(x) = 0,\ g(x) = 0,\ f(x) = x,\ g(x) = x,\ f(x) = g(x),$ $f(g(x)) = 1,\ g(f(x)) = 1$.
   d) Dokažte, že $f(x) \geq 0$ pro všechna x.
   e) Zjistěte, kdy je $g(x) < 0$.
   f) Dokažte, že $f(g(x)) \geq 0$ pro všechna x.
   g) Existuje inverzní funkce k f?
   h) Existuje inverzní funkce k $g \circ f$?
   i) Najděte předpis pro funkci $f \circ g$ a nakreslete její graf.

Cvičení

1. Nechť funkce f je definovaná předpisem $f(x) = \sqrt{x}$. Určete

   a) $f(9)$, b) $f(u)$, c) $f(x+1)$, d) $f(x^2)$.

2. Nechť funkce h je definovaná předpisem $h(x) = \frac{x}{x+1}$. Určete

   a) $h(-x)$, b) $h(x+1)$, c) $h\left(\frac{1}{x}\right)$, d) $h[h(x)]$.

3. Nechť funkce p je definovaná předpisem $p(x) = \frac{1}{x} - 1$. Ověřte, zda platí

   a) $p(x) + p(-x) = -2$, b) $p(2x) = \frac{1}{2}[p(x) - 1]$, c) $p(1-x) = \frac{1}{p(x)}$,

   d) $\frac{-1}{p(x+1)} = p(x) + 2$, e) $\frac{1}{p(x)+1} = p\left(\frac{1}{x}\right) + 1$.

4. Jsou dány funkce

   a) $f(x) = \arcsin(\cos x)$, b) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pro} \quad x \in \langle -\pi, 0), \\ \sin x & \text{pro} \quad x \in \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$

   Najděte hodnoty
   a) $f(0),\ f(-\pi),\ f(3\pi),\ f(\frac{\pi}{2}),\ f(\frac{\pi}{4})$;
   b) $f(0),\ f(-\frac{\pi}{2}),\ f(\frac{\pi}{4}),\ f(3),\ f(4)$.

5. Najděte funkce f, g, pro které platí

a) $f(x) = ax + b$, $\quad f(3) = -3,\ f(-2) = 4$,

b) $g(x) = ax^2 + bx + c$, $\quad g(0) = 1,\ g(-1) = 2,\ g(3) = 18$.

Vypočtěte $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $g(\frac{1}{2})$, $g(1)$.

6. Najděte (přirozené) definiční obory následujících funkcí f, je-li $f(x)$ rovno:

a) $\dfrac{7x^2 + 6x + 5}{x^2 - 1}$, b) $\dfrac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$,

c) $\sqrt{x^2 - 4}$, d) $\sqrt{(3x - 2)^2}$,

e) $\dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$, f) $\dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 25}}$,

g) $\sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$, h) $\sqrt{(x - 2)(x + 3)}$,

i) $\dfrac{x}{|x|}$, j) $|x| + [x]$,

k) $\dfrac{x}{[x]}$, l) $\dfrac{x}{x - [x]}$,

m) $\dfrac{2x^2}{x + |x|}$, n) $\dfrac{2}{x + |x| - 2}$,

o) $|x|\sqrt{\dfrac{4 - x^2}{|4 - x^2|}}$, p) $|x|\sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{|4 - x^2|}}$,

q) $(x^2 + x - 6)^{\sqrt{2}}$, r) $\frac{1}{2^{\frac{x}{x-1}} - 3^{\frac{x}{x-1}}}$,

s) $\ln(\sqrt{x - 3} - 2)$, t) $\ln(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$,

u) $\ln \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 1}$, v) $\operatorname{tg} \sqrt{2x}$,

w) $\arcsin(3 - \sqrt{4 - x^2})$, x) $\ln(2 \cos x - \sqrt{3})$,

y) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{9 - x^2}$, z) $\sin\left(\ln \frac{1}{3x+1}\right)$.

7. Pomocí známých grafů funkcí a) $y = |x|$, b) $y = x^2$, c) $y = \sin x$, d) $y = \ln x$ a d) $y = \mathrm{e}^x$ sestrojte grafy funkcí

a) $y = -|x|,\ y = 1 + |x|,\ y = |x| - 2,\ y = |x + 1|,\ y = |x - 2|,\ y = |x + 1| - 2$, $y = 2|x|$;

b) $y = 4x^2,\ y = \frac{1}{4}x^2,\ y = -x^2,\ y = -2x^2,\ y = x^2 + 2,\ y = x^2 - 1$, $y = (x + 2)^2,\ y = (x - 1)^2,\ y = \frac{1}{2}(x - 1)^2,\ y = 2(x + 2)^2,\ y = x^2 + 4x + 2$, $y = 4x^2 + 8x + 12$;

c) $y = |\sin x|,\ y = -\sin x,\ y = 2\sin x,\ y = \sin(x+3),\ y = 2\sin\frac{x}{2};$

d) $y = \ln(2-x),\ y = \ln x^2,\ y = 3\ln 2x,\ y = \ln\frac{1}{x};$

e) $y = \mathrm{e}^{-x},\ y = -\mathrm{e}^{x},\ y = -e^{-x},\ y = 1+\mathrm{e}^{x},\ y = \mathrm{e}^{x-1},\ y = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$

8. Načrtněte grafy funkcí

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro} \quad x \in \langle 0,1), \\ 3-x & \text{pro} \quad x \in \langle 1,3); \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad |x| > 1, \\ 1+x & \text{pro} \quad -1 \le x \le 0, \\ 1-x & \text{pro} \quad 0 < x \le 1. \end{cases}$

9. Pro zadané funkce f a g najděte $|f|,\ f+g,\ f-g,\ fg,\ g/f$:

a) $f(x) = 3x,\ \ g(x) = 2-x,$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x},\ \ g(x) = \dfrac{1}{x},$

c) $f(x) = \sqrt{x+2},\ \ g(x) = \dfrac{1}{x+2},$

d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \le 0, \\ x & \text{pro} \quad x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \le 0, \\ -x^2 & \text{pro} \quad x > 0. \end{cases}$

10. Zjistěte, které z uvedených funkcí jsou sudé resp. liché:

a) $f(x) = 2,$ b) $f(x) = \sqrt{x},$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x},$

d) $f(x) = x - x^2,$ e) $f(x) = x^3 - x,$ f) $f(x) = \frac{1}{2x},$

g) $f(x) = \frac{x+2}{x-2},$ h) $f(x) = \frac{x^2}{1+2x^2},$ i) $f(x) = \frac{x}{|x|},$

j) $f(x) = \frac{x}{[x]},$ k) $f(x) = (-1)^{[x]},$ l) $f(x) = x^4 + \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}},$

m) $f(x) = \chi(x),$ n) $f(x) = \chi(x)[1-\chi(x)],$ kde χ je Dirichletova funkce,

o) $f(x) = 2^x,$ p) $f(x) = x^2 + \sin x^2,$ q) $f(x) = \frac{a^x+1}{a^x-1},$

r) $f(x) = \frac{1}{4+\operatorname{cotg}^2 x},$ s) $f(x) = \cos(\pi - x),$ t) $f(x) = \frac{\sin x}{x},$

u) $f(x) = x\cosh x,$ v) $f(x) = \frac{x+\operatorname{tgh} x}{2+3\cos x},$ w) $f(x) = \sin x + \cos x,$

x) $f(x) = x\log|x|,$ y) $f(x) = \log\frac{2-x}{2+x},$ z) $f(x) = \frac{\sinh x}{\sin x}.$

11. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou periodické, a najděte jejich periodu:

a) $f(x) = 3$, b) $f(x) = (-1)^{[x-1]}$,

c) $f(x) = \frac{3^{[x]}+(-3)^{[x]}}{3^{[x]}}$, d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x - [x] - \frac{1}{2})$,

e) $f(x) = 2 + \cos x + \cos^2 x$, f) $f(x) = x \sin x$,

g) $f(x) = \sin \frac{2x}{3}$, h) $f(x) = \cos x^2$,

i) $f(x) = 5 \cos 2\pi x$, j) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$,

k) $f(x) = \arcsin(\sin x)$, l) $f(x) = 3 \cos x - 5 \sin 4x$,

m) $f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$, n) $f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$,

o) $f(x) = 2^{3+2\sin x}$, p) $f(x) = [x] \arccos([x])$.

12. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou prosté a najděte k nim inverzní funkce:

a) $f(x) = 3x$, b) $f(x) = (x-2)(2+x)$,

c) $f(x) = 2 + 3\sqrt{x}$, d) $f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}$,

e) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$, f) $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$,

g) $f(x) = 4^{\sin x}$, h) $f(x) = 3^{\frac{x}{x-1}}$,

i) $f(x) = 3 + \arccos(2x-1)$, j) $f(x) = 1 + \sqrt{3 + \mathrm{e}^{2x}}$,

k) $f(x) = 2^{1+\ln\sqrt{x-2}}$, l) $f(x) = 2^{3+\operatorname{arctg} x}$,

m) $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2+1})$, n) $f(x) = \operatorname{tg}(1 - 2 \operatorname{arctg} x)$,

o) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x < 0 \\ 2x & \text{pro} \quad x \geq 0, \end{cases}$ p) $f(x) = \begin{cases} x\frac{\pi}{2} & \text{pro} \quad |x| \geq 1, \\ \arcsin x & \text{pro} \quad |x| < 1. \end{cases}$

q) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{pro} \quad x < -1, \\ x & \text{pro} \quad |x| \leq 1, \\ \sqrt{x} & \text{pro} \quad x > 1. \end{cases}$ r) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro} \quad x < -1, \\ x & \text{pro} \quad |x| \leq 1, \\ \sqrt{x} & \text{pro} \quad x > 1. \end{cases}$

13. Ukažte, že každá z následujících funkcí je sama k sobě inverzní:

a) $f(x) = x$, b) $f(x) = -x$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$,

e) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-2}$, f) $f(x) = -\dfrac{x}{x+1}$,

g) $f(x) = \dfrac{ax+b}{x-a}$, h) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ pro $x \geq 0$.

14. Najděte funkce f , pro které platí:

a)	$f(2x) = x,$	b)	$f(x+1) = x,$
c)	$f(1-x) = x,$	d)	$f(x^2) = x,$
e)	$f(\frac{1}{x}) = x,$	f)	$f(1+x) = 4x-1,$
g)	$f(2x) = 4x-1,$	h)	$f(x^2) = 4x-1,$
i)	$f(1-x) = 4x-1,$	j)	$f(\frac{1}{x}) = 4x-1.$

15. Následující polynomy rozložte v reálném oboru:

a)	$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x,$	b)	$x^5 - 5x^3 + 4x,$
c)	$x^3 + 5x^2 + 8x + 4,$	d)	$x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2,$
e)	$x^5 + x^4 - x^3 - x^2,$	f)	$x^7 - 6x^5 + 9x^3 - 4x,$
g)	$x^3 + x^2 + x + 1,$	h)	$x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 11x - 3,$
i)	$x^4 + 1,$	j)	$x^6 - 4x^5 + x^4 + 6x^3 + 20x^2 - 56x + 32,$
k)	$x^6 - 64,$	l)	$x^6 - 5x^5 + 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 24x + 16.$

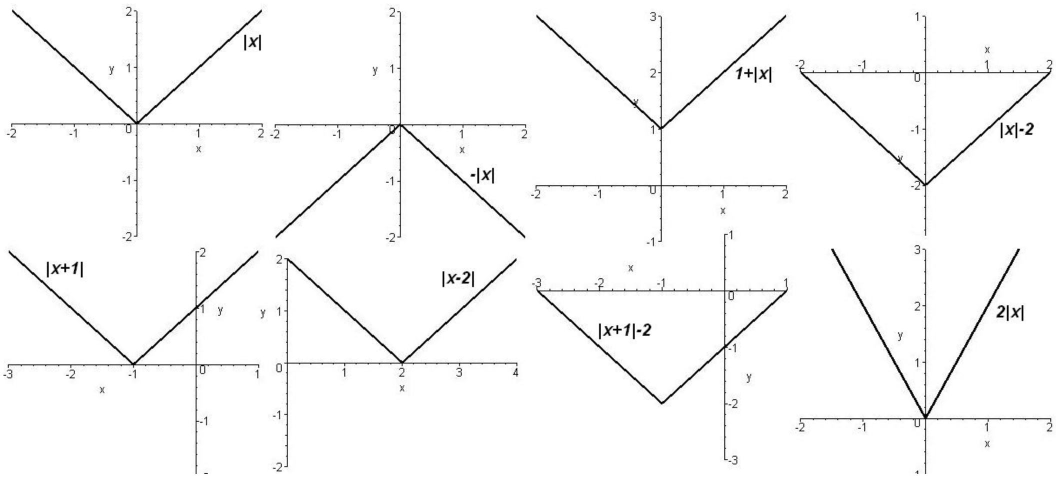
16. Následující racionální lomené funkce rozložte na parciální zlomky:

a)	$\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)},$	b)	$\dfrac{3x^2+30x-120}{(x-2)(x+2)(x-5)},$
c)	$\dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)^2},$	d)	$\dfrac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3},$
e)	$\dfrac{5x^2-14x+17}{(x-5)^2(x-1)^2},$	f)	$\dfrac{x^3+x-1}{x(x^2+1)},$
g)	$\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2},$	h)	$\dfrac{1}{(x^2-6x+8)(x^2+2x+2)},$
i)	$\dfrac{192}{x^6-64},$	j)	$\dfrac{4+3x^4}{x^2(x^2+1)^2},$
k)	$\dfrac{1}{x^4+1},$	l)	$\dfrac{x^3-6x^2+10x-2}{(x-3)^2(x^2-4x+5)}.$

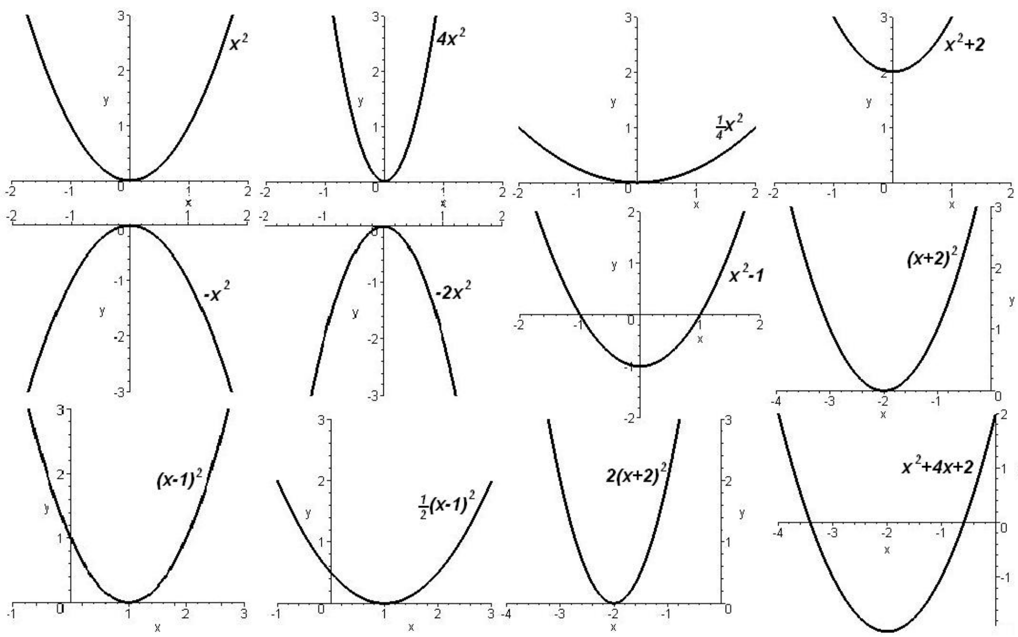
Výsledky

1. a) 3, b) $\sqrt{u}$, c) $\sqrt{x+1}$, d) $|x|$;
2. a) $\frac{x}{x-1}$, b) $\frac{x+1}{x+2}$, c) $\frac{1}{1+x}$, $x \neq 0$, d) $\frac{x}{2x+1}$, $x \neq -1$;
3. a),b) ano, c) ne (ano pro $x \neq 1$), d) ne (ano pro $x \neq -1$), e) ano;
4. a) $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}$, b) $0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 3$, není def.; **5.** a) $f(x) = \frac{1}{5}(6-7x)$, b) $g(x) = \frac{1}{3}(5x^2+2x)+1$;
6. a) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, b) $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$, c) $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$, d) $\mathbb{R}$, e) $(3, \infty)$, f) $(-\infty, -5) \cup (5, , \infty)$, g) $(-\infty, -1\rangle \cup (1, \infty)$, h) $(-\infty, -3\rangle \cup \langle 2, \infty)$, i) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, j) $\mathbb{R}$, k) $\mathbb{R} \setminus \langle 0, 1)$, l) $(-\infty, 0)$, m) $(0, \infty)$, n) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, o) $(-2, 2)$, p) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, q)

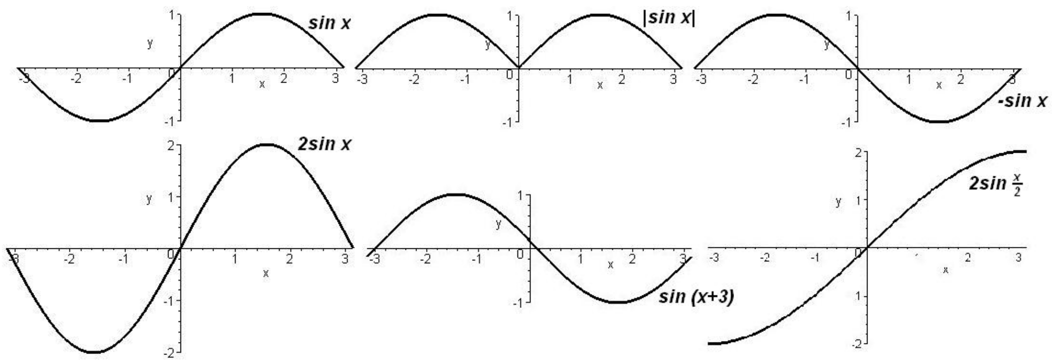
$(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$, r) $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, s) $(7,\infty)$, t) $(0,\infty)$, u) $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$, v) $\langle 0,\infty)\setminus\{x\,|\,x=\frac{\pi^2}{8}\,(1+2k)^2, k\in\mathbb{Z}\}$, w) $\{0\}$, x) $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$, y) $\langle 0,3\rangle$, z) $(-\frac{1}{3},\infty)$;



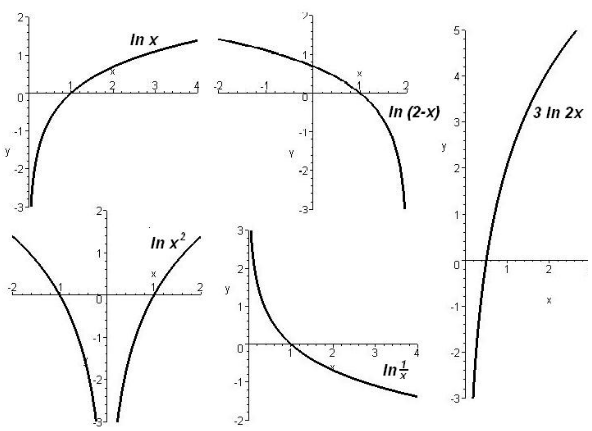
Obr. 1.28: 7. a)

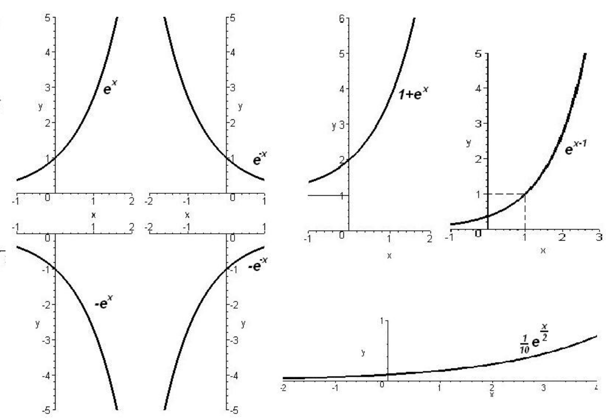


Obr. 1.29: 7. b)

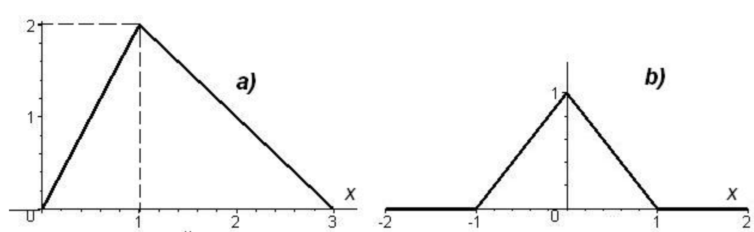


Obr. 1.30: 7. c)





Obr. 1.31: 7. d) **Obr. 1.32**: 7. e)



Obr. 1.33: 8. a), b)

9. b) $(f+g)(x) = 1,\ x \neq 0$, ,$(g/f)(x) = \frac{1}{x-1},\ x \neq 0$, d) $|f| = f$, $(f+g)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x - x^2 & x > 0 \end{cases}$, $(f-g)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x + x^2 & x > 0 \end{cases}$, $(fg)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -x^3 & x > 0 \end{cases}$, $(g/f)(x) = -x,\ x > 0$;

10. a),h), l), m),n),p),r),s),t),z) sudé, c),e),f),i),q),u),v),x),y) liché;

11. a) $\forall p \in \mathbb{R}$, b) 2, c) 2, d) 1, e) 2π, g) 3π, i) 1, k),l),m),n),o) 2π;

12. a) $\frac{x}{3}$, b) není prostá, c) $\frac{1}{9}(x-2)^2,\ x \geq 2$, d) $\frac{(x-3)^2}{(2x-1)^2},\ x \in (\frac{1}{2}, 3\rangle$, e) není prostá, f) $-\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$, g) není prostá, h) $\frac{\ln x}{\ln x - \ln 3}$, i) $\frac{1}{2}(1+\cos(x-3)),\ x \in \langle 0, \pi\rangle$, j) $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x-2)$, k) $2 + \mathrm{e}^{2(x-1)}$, l) $\operatorname{tg}\left(\frac{\ln x}{\ln 2} - 3\right)$, m) $2^{x-1} - 2^{1-x}$, n) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(1 - \operatorname{arctg} x)$, o) x pro $x < 0$, $\frac{x}{2}$ pro $x \geq 0$, p) $\sin x$ pro $|x| < \frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{\pi}x$ pro $|x| \geq 2$, q) není prostá, r) $\frac{x}{2}$ pro $x < -2$, x pro $|x| \leq 1$, x^2 pro $x > 1$;

14. a) $\frac{x}{2}$, b) $x-1$, c) $1-x$, d) $\sqrt{x}$ pro $x \geq 0$, $-\sqrt{|x|}$ pro $x < 0$, e) $\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, 0 pro $x - 0$, f) $4x-5$, g) $2x-1$, h) $4\sqrt{x}-1$ pro $x \geq 0$, $-4\sqrt{|x|}-1$ pro $x < 0$, i) $3-4x$, j) $\frac{4}{x}-1$ pro $x \neq 0$, -1 pro $x = 0$;
15. a) $x(x-1)(x-2)(x-3)$, b) $x(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$, c) $(x+2)^2(x+1)$, d) $(x-1)^3(x-2)$, e) $x^2(x-1)(x+1)^2$, f) $x(x-1)^2(x+1)^2(x-2)(x+2)$, g) $(x^2+1)(x+1)$, h) $(x-1)^3(x^2+2x+3)$, i) $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{x}+1)$, j) $(x-1)(x-2)^3(x^2+3x+4)$, k) $(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$, l) $(x-1)(x-2)^3(x^2+2x+2)$;
16. a) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}$, b) $\frac{4}{x-2}-\frac{6}{x+2}+\frac{5}{x-5}$, c) $\frac{2}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}-\frac{2}{x+1}$, d) $\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$, e) $\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{9}{2(x-5)^2}$, f) $1-\frac{1}{x}\frac{x}{x^2+1}$, g) $\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{1-2x}{4(x^2+1)}-\frac{x}{2(x^2+1)^2}$, h) $\frac{1}{52(x-4)}-\frac{1}{20(x-2)}+\frac{4x+11}{130(x^2+2x+2}$, i) $\frac{1}{(x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{x-4}{x^2-2x+4}-\frac{x+4}{x^2+2x+4}$, j) $\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{7}{(x^2+1)^2}$, k) $\frac{2-x\sqrt{2}}{4(x^2-x\sqrt{2}+1)}+\frac{2+x\sqrt{2}}{4(x^2+x\sqrt{2}+1)}$, l) $\frac{1}{2(x-3)^2}-\frac{2x-1}{2(x^2-4x+5)}$.

2 Lineární algebra

Lineární algebra vznikla z potřeby řešit soustavy lineárních rovnic, a to někdy velmi rozsáhlé – obsahující až tisíce rovnic. To vedlo k pojmu matice a determinantu a dále se ukázalo užitečné zavést abstraktní pojem ***vektorový (lineární) prostor***, který má další hojné použití jak v samotné lineární algebře, tak v dalších matematických partiích i například ve fyzice.
Připomeňme, že ***lineární rovnicí s neznámými*** $x_1, x_2, \dots x_n$ rozumíme rovnici tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ jsou čísla. Slovem ***lineární*** zdůrazňujeme, že neznámé $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou v rovnici obsaženy nejvýše v první mocnině, jsou násobeny číslem, a nejsou v žádném jiném vztahu.

Soustava lineárních rovnic, tedy několik rovnic se stejnými neznámými, tvoří přirozený matematický model pro většinu tecnických problémů; např. v elektrotechnice pomocí nich řešíme elektrické sítě, ve statice tvoří základní matematický nástroj pro vyšetřování rovnovážných stavů. Dále se tyto soustavy vyskytují jako součást výpočetního postupu jiných matematických úloh; např. při řešení soustav diferenciálních a diferenčních rovnic užitím operátorového počtu (Laplaceovy resp. Z-transformace) nebo pomocí numerických metod.

Motivace

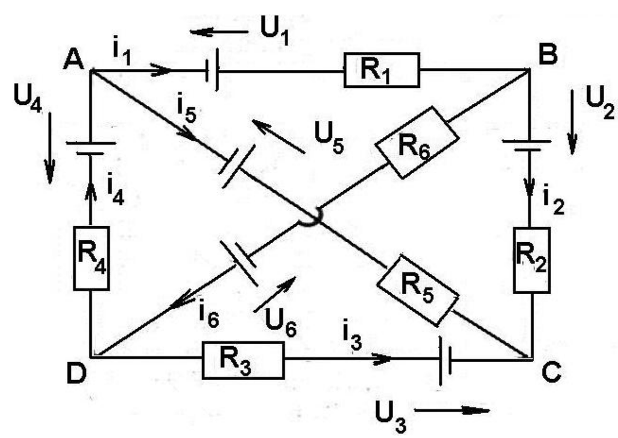
Uvedeme ilustrační příklad, při jehož řešení naznačíme, jakými otázkami se budeme zabývat.

Příklad 2.1:
Máme vypočítat proudy

$$i_k,\ k = 1, \dots, 6,$$

ve všech větvích elektrického obvodu na Obr. 2.34, kde hodnoty odporů R_k a zdrojů U_k jsou dány vztahy

$$R_k = k[Ohm] \;\text{ a }\; U_k = 4k[Volt].$$



Obr. 2.34: Obvod k příkladu 2.1

<u>Řešení:</u> Použijeme Ohmův zákon o úbytku napětí na odporu: $U = Ri$ a dva Kirchhoffovy zákony, smyčkový a uzlový, které říkají, že algebraický součet (s přihlédnutím ke znaménku) všech napětí v každé uzavřené smyčce je roven nule a algebraický součet všech proudů v každém uzlu je roven nule. Platí tedy

$$\begin{array}{rrrrrrcr}
i_1 & +2i_2 & & & -5i_5 & & = & -24 \\
i_1 & & & +4i_4 & & +6i_6 & = & 44 \\
i_1 & +2i_2 & -3i_3 & +4i_4 & & & = & 24 \\
 & 2i_2 & -3i_3 & & & -6i_6 & = & -20 \\
 & & -3i_3 & +4i_4 & +5i_5 & & = & 48 \\
i_1 & & & -i_4 & +i_5 & & = & 0 \\
-i_1 & +i_2 & & & & +i_6 & = & 0 \\
 & -i_2 & -i_3 & & -i_5 & & = & 0 \\
 & & i_3 & +i_4 & & -i_6 & = & 0
\end{array}$$

Máme celkem 9 rovnic pro 6 neznámých; jindy se může stát, že počet rovnic je menší než počet neznámých. Obvykle jsme zvyklí na stejný počet rovnic jako neznámých a to nejvýše čtyři. V inženýrské praxi, např. při řešení problémů metodou konečných prvků, se vyskytují soustavy s několika desetisíci rovnic.

Jistě jsme vzali v úvahu zbytečně mnoho rovnic – v Teoretické elektrotechnice se dozvíte, jak vybrat právě tolik rovnic, kolik k řešení problému potřebujeme – pro naši čistě algebraickou motivaci uvažujeme rovnice všechny, abychom naznačili matemetické prostředky, pomocí nichž se potřebný počet rovnic dostane.

Naši soustavu budeme řešit tzv. ***Gaussovou eliminační metodou***, o které podrobněji pohovoříme v odstavci 2.46. Postupnými úpravami vyeliminujeme proměnnou i_1 ze všech rovnic s výjimkou první, proměnnou i_2 ze všech rovnic s výjimkou druhé (eventuálně první) atd. Přitom vzniklá soustava musí být ekvivalentní s původní soustavou, tj. každé řešení soustavy před úpravou musí být řešením soustavy po úpravě a naopak.
Povolenými úpravami zřejmě jsou:

a) záměna pořadí rovnic v soustavě,

b) záměna pořadí členů s neznámými v rovnicích,

c) vynásobení kterékoliv rovnice libovolným nenulovým číslem,

d) připočtení ke kterékoliv rovnici libovolných násobků jiných rovnic,

e) vynechání rovnice, která je součtem libovolných násobků jiných rovnic.

Z posledního pravidla plyne, že lze vynechat tzv. nulovou rovnici, tj. rovnici tvaru $0.x_1 + 0.x_2 + \cdots + 0.x_n = 0$, a také ze všech stejných rovnic ponechat jen jednu.
Pravidla a) — e) jsou tzv. ***Gaussovy elementární úpravy*** soustavy rovnic.

Použijeme tato pravidla na naši soustavu:
Proměnnou i_1 zřejmě vyeliminujeme z 2. až 9. rovnice takto: od 2., 3. a 6. rovnice odečteme

1. rovnici, k 7. rovnici přičteme 1. rovnici, 4., 5., 8. a 9. rovnici ponecháme. Dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
i_1 & +2i_2 & & & -5i_5 & & = & -24 \\
 & -2i_2 & & +4i_4 & +5i_5 & +6i_6 & = & 68 \\
 & & -3i_3 & +4i_4 & +5i_5 & & = & 48 \\
 & 2i_2 & -3i_3 & & & -6i_6 & = & -20 \\
 & & -3i_3 & +4i_4 & +5i_5 & & = & 48 \\
 & -2i_2 & & -i_4 & +6i_5 & & = & 24 \\
 & 3i_2 & & & -5i_5 & +i_6 & = & -24 \\
 & -i_2 & -i_3 & & -i_5 & & = & 0 \\
 & & i_3 & +i_4 & & -i_6 & = & 0
\end{array}$$

Podobně budeme postupovat při eliminaci proměnné i_2 ze 3. až 9. rovnice – provedeme úpravy: 1.,2.a 3.rov. ponechat, 4.rov.+2.rov., 5.rov.ponechat, 6.rov.-2.rov., 7.rov.+$\frac{3}{2}$×2.rov., 8.rov.-$\frac{1}{2}$×2.rov., 9.rov. ponechat.
Vzniklou soustavu napíšeme úsporněji – budeme zapisovat pouze koeficienty u jednotlivých proměnných, které již vypisovat nebudeme; napíšeme je do záhlaví:

$$\begin{array}{rrrrrrcr}
i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & = & \\
1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 0 & & -24 \\
0 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 & & 68 \\
0 & 0 & -3 & 4 & 5 & 0 & & 48 \\
0 & 0 & -3 & 4 & 5 & 0 & & 48 \\
0 & 0 & -3 & 4 & 5 & 0 & & 48 \\
0 & 0 & 0 & -5 & 1 & -6 & & -44 \\
0 & 0 & 0 & 6 & \frac{5}{2} & 10 & & 78 \\
0 & 0 & -1 & -2 & -\frac{7}{2} & -3 & & -34 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & & 0
\end{array}$$

Vynecháme 4. a 5. rovnici (jsou stejné jako třetí rovnice). Analogickým postupem eliminujeme další proměnné – závěrem dostaneme (povšimněte si přehozených sloupců u proměnných i_4 a i_5):

$$\begin{array}{rrrrrrcr}
i_1 & i_2 & i_3 & i_5 & i_4 & i_6 & = & \\
1 & 2 & 0 & -5 & 0 & 0 & & -24 \\
0 & -2 & 0 & 5 & 4 & 6 & & 68 \\
0 & 0 & -3 & 5 & 4 & 0 & & 48 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -6 & & -44 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 37 & 50 & & 376 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 601 & & 2116
\end{array}$$

což odpovídá soustavě rovnic

$$\begin{array}{rrrrrrcr}
i_1 & +2i_2 & & -5i_5 & & & = & -24 \\
 & -2i_2 & & +5i_5 & +4i_4 & +6i_6 & = & 68 \\
 & & -3i_3 & +5i_5 & +4i_4 & & = & 48 \\
 & & & +i_5 & -5i_4 & -6i_6 & = & -44 \\
 & & & & 37i_4 & +50i_6 & = & 376 \\
 & & & & & 601i_6 & = & 2116
\end{array}$$

Tuto soustavu, o které říkáme, že má ***Gaussův tvar***, již dovedeme snadno řešit postupně od poslední, ze které vyjádříme i_6:

$i_6 = \frac{2116}{601} \approx 3{,}521$

Vypočítanou hodnotu dosadíme do předposlední rovnice a vyjádříme i_4:

$37i_4 = 376 - 50i_6 = 376 - 50 \cdot \frac{2116}{61} = \frac{120176}{601}$

$i_4 = \frac{3248}{601} \approx 5{,}404$

Analogicky postupně dostaneme

$i_5 = \frac{2492}{601} \approx 4{,}146$

$i_3 = -\frac{1132}{601} \approx -1{,}883$

$i_2 = -\frac{1360}{601} \approx -2{,}263$

$i_1 = \frac{756}{601} \approx 1{,}258$

Gaussova eliminační metoda, kterou jsme soustavu řešili, se skládala ze dvou částí: Z převodu soustavy na ekvivalentní soustavu v Gaussově tvaru (to je tzv. ***přímý chod***) a z řešení této soustavy (tzv. ***zpětný chod***).

V obecném případě by při řešení soustavy rovnic Gaussovou eliminační metodou mohly nastat tyto specální případy:

- Některý řádek má tvar

  $$\begin{array}{cccccccc}
  i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & = & \\
  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & a
  \end{array}$$

  kde a je číslo různé od nuly. To by ovšem znamenalo, že v soustavě máme rovnici

  $$0.i_1 \quad +0.i_2 \quad +0.i_3 \quad +0.i_4 \quad +0.i_5 \quad +0.i_6 \quad = \quad a$$

  a tato rovnice jistě nemá řešení. Tedy v tomto případě nemá řešení celá soustava.

- V Gaussově tvaru soustavy je méně rovnic než neznámých – například pět rovnic pro šest neznámých. Potom by se za poslední proměnnou dalo dosadit libovolné číslo (např. k) a provést zpětný chod – soustava by zřejmě měla nekonečně mnoho řešení závislých na výběru čísla k.

Obecně tedy může mít soustava buď jedno, nebo žádné, nebo nekonečně mnoho řešení. V našem příkladu má soustava jedno řešení, jak se dalo očekávat z fyzikální podstaty řešeného problému.

Při řešení naší úlohy jsme zjistili, že nemusíme stále pracovat s celou soustavou rovnic, ale stačí upravovat pouze systém koeficientů a pravých stran uspořádaných do řádků a sloupců – tzv. ***matici*** soustavy. Tento pojem zavedeme v dalším textu.

2.1 Aritmetické vektory

Nejdříve si všimneme „jednořádkového schématu", tedy uspořádané n-tice čísel; zavedeme mezi nimi aritmetické operace, analogické operacím s čísly, a budeme studovat další jejich vlastnosti.

Základní pojmy, aritmetické operace

Definice 2.2: Nechť n je nějaké přirozené číslo.
Uspořádanou n-tici reálných čísel $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ nazýváme n-rozměrným ***aritmetickým vektorem***.

Číslo $a_i, i = 1, \ldots, n$ se nazývá ***i-tá složka*** vektoru $\mathbf{a}$.

O dvou vektorech $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ říkáme, že se ***rovnají*** a píšeme $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, právě když se rovnají jejich odpovídající si složky, tedy když platí $a_i = b_i \ \forall i$.

Součtem $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ dvou n-rozměrných vektorů o složkách a_i, b_i nazýváme vektor $\mathbf{c}$ o složkách $c_i = a_i + b_i \ \forall i$.

Součinem $\alpha\mathbf{a}$ reálného čísla α s n-rozměrným vektorem $\mathbf{a}$ o složkách a_i nazýváme vektor $\mathbf{d}$ o složkách $d_i = \alpha a_i, i = 1, \ldots, n$.

Vektor, jehož všechny složky jsou rovny nule, nazýváme ***nulovým vektorem*** a značíme $\mathbf{o}$. Místo $(-1)\mathbf{a}$ píšeme $-\mathbf{a}$ a místo $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ píšeme $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ a tento vektor nazýváme ***rozdílem vektorů*** $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Množinu všech reálných n-rozměrných aritmetických vektorů, v níž jsou definovány uvedené operace sečítání a násobení číslem, nazýváme ***n-rozměrným aritmetickým vektorovým prostorem*** $\mathcal{V}_n$ ***nad oborem reálných čísel***.

Snadno prověříme následující tvrzení:

Věta 2.3: *Pro operace v aritmetickém vektorovém prostoru platí následující pravidla:*

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ *(komutativita a asociativita sečítání)*

2. *existuje takový vektor* $\mathbf{o}$ *(je to nulový vektor), že* $\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$

3. $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ *(distributivita násobení číslem)*
   $(\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$

4. $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a},\ \ 0\,\mathbf{a}=\mathbf{o},\ \ \ \alpha\mathbf{o}=\mathbf{o}$

5. *rovnost* $\alpha\mathbf{a}=\mathbf{o}$ *nastane, právě když* $\alpha=0$ *nebo když* $\mathbf{a}=\mathbf{o}$

6. $-(\alpha\mathbf{a}) = (-\alpha)\mathbf{a} = \alpha(-\mathbf{a})$

Důkaz se provede využitím vlastností operací s čísly; např:

1. Nechť $\mathbf{a}=(a_1,\,a_2,\,\dots\,a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1,\,b_2,\,\dots\,b_n)$. Potom
   $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1,\,a_2+b_2,\dots\,a_n+b_n)=(b_1+a_1,\,b_2+a_2,\dots\,b_n+a_n)=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, protože výraz a_k+b_k je součet *čísel*, pro který platí komutativní zákon.
   Analogicky budeme postupovat při důkazu platnosti asociativního zákona pro součet aritmetických vektorů využitím asociativního zákona pro součet čísel – jednotlivých souřadnic.

2. Nechť $\mathbf{o}=(o_1,\,o_2,\,\dots\,o_n)$. Potom platí

   $$\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a} \quad\Leftrightarrow\quad (a_1+o_1,\,a_2+o_2,\,\dots\,a_n+o_n)=(a_1,\,a_2,\,\dots\,a_n) \quad\Leftrightarrow$$

   $$a_1+o_1=a_1,\ a_2+o_2=a_2,\ \dots\ a_n+o_n=a_n \quad\Rightarrow\quad o_1=o_2=\cdots=o_n=0,$$

   tedy $\mathbf{o}$ je nulový vektor.

Zbylé části věty dokažte podobně jako cvičení.

Definice 2.4:

1. ***Skalárním součinem*** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ dvou n-rozměrných vektorů o složkách u_i, v_i, $i=1,2,...,n$, nazýváme číslo definované vztahem

   $$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n.$$

2. Platí-li pro $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{V}_n$: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$, řekneme, že $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou ***ortogonální***. (Jedná se o zobecnění pojmu „kolmost“.)

3. Systém vektorů $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_k\in\mathcal{V}_n$ se nazývá ***ortogonální systém vektorů***, jsou-li tyto vektory po dvou ortogonální. Platí-li navíc $\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_i=1\,\forall i$, říkáme, že systém je ***ortonormální.***

Příklad 2.5:

a) Nechť $\mathbf{a}=(1,0,-2)$, $\mathbf{b}=(3,2,0)$. Potom

   $$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(4,2,-2),\ 3\mathbf{a}=(3,0,-6)\quad\text{a}\quad\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3.$$

b) Systém vektorů $\{\mathbf{i},\,\mathbf{j},\,\mathbf{k}\}$, kde $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{k}=(0,0,1)$, tvoří zřejmě ortonormální systém vektorů.

Vektory ve fyzice, geometrická reprezentace

Obvykle se poprvé setkáme s pojmem vektoru v nějakém fyzikálním kontextu – při studiu mechaniky, elektrických a magnetických polí atp. Zde se studují vektory v dvoj- a troj-dimenzionálním prostoru a odpovídají síle, rychlosti, pozici částice atd. Mají jednak velikost, jednak směr; mohou být zvětšovány (zmenšovány) pomocí multiplikativního faktoru, sečítány pomocí rovnoběžníkového pravidla; mezi vektory je definován skalární a vektorový součin atd.
Určující charakteristiky fyzikálního vektoru – velikost a směr – motivují jeho reprezentaci pomocí orientované úsečky, nebo „šipky“, kde její délka určuje velikost vektoru; povšimněme si, že umístění vektoru zde není specifikováno.

Pro geometrickou interpretaci uvažujme trojrozměrný vektorový prostor – všechny uspořádané trojice reálných čísel – a intuitivně jej chápejme jako prostor bodů v prostoru, kde složky trojice udávají souřadnice bodu v některé souřadné soustavě. Fyzikální vektor $\mathbf{v} = (v_1,\, v_2,\, v_3)$ potom bude systém všech orientovaných úseček, které jsou rovnoběžné a stejně dlouhé jako orientovaná úsečka s počátečním bodem v počátku zvolené souřadné soustavy a s koncovým bodem v bodě o souřadnicích $[v_1,\, v_2,\, v_3]$.

Lineární závislost, báze, souřadnice vektoru

Definice 2.6:

- Řekneme, že vektor $\mathbf{a} \in \mathcal{V}_n$ je ***lineární kombinací*** vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ z $\mathcal{V}_n$, existují-li taková čísla $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, že platí

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k.$$

- Řekneme, že vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ z $\mathcal{V}_n$ jsou ***lineárně závislé***, jestliže alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních. Nejsou-li vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ z $\mathcal{V}_n$ lineárně závislé, potom říkáme, že jsou ***lineárně nezávislé***.

V předchozí definici jsme nepředpokládali nenulovost čísel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, tedy některá z nich, nebo dokonce všechna tato čísla mohou být rovna nule.
Tedy zřejmě libovolná k-tice vektorů obsahující nulový vektor je pro $k > 1$ lineárně závislá; pro úplnost dodefinujeme tento pojem i na případ $k = 1$ – jeden vektor $\mathbf{o}$ budeme považovat za lineárně závislý.

Příklad 2.7: Nechť $\mathbf{a} = (3, 1, 0), \mathbf{b} = (-1, 0, 2), \mathbf{c} = (7, 2, -2)$.
Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně závislé, protože $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
Naproti tomu vektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0,), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ jsou zřejmě lineárně nezávislé.
Snadno ukážeme, že platí následující věta:

Věta 2.8: *Vektory* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *z* $\mathcal{V}_n$ *jsou lineárně závislé, právě když existují čísla* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ *taková, že alespoň jedno z nich je různé od nuly a platí* $\beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \beta_k\mathbf{a}_k = \mathbf{o}$.

Důkaz: Nechť jsou vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ lineárně závislé. Pro $k = 1$ je $\mathbf{a}_1 = \mathbf{o}$ a to je závislý vektor. Nechť $k > 1$. Podle definice je jeden z nich lineární kombinací ostatních; nechť je to např. $\mathbf{a}_1$. Tedy

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k \qquad \Leftrightarrow \qquad -\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{o}.$$

Stačí tedy položit $\alpha_i = \beta_i$ pro $i \neq 1$, $\beta_1 = -1$.

Opačné tvrzení se dokáže analogicky; proveďte jako cvičení.

Definice 2.9: Libovolnou uspořádanou n-tici $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n)$ tvořenou n lineárně nezávislými vektory z $\mathcal{V}_n$ nazýváme ***bází vektorového prostoru*** $\mathcal{V}_n$.

Nejjednodušší takovou bází je systém vektorů $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n)$, kde

$$\mathbf{e}_1 = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ \mathbf{e}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ \ldots \mathbf{e}_n = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1),$$

tedy vektory $\mathbf{e}_i$ jsou dány uspořádanými n-ticemi $(0,\ \ldots, 0,\ 1,\ 0,\ \ldots, 0)$, kde 1 je na i-tém místě. Tato báze se nazývá ***kanonická***.

Vektory kanonické báze tvoří lineárně nezávislý systém; utvoříme-li jejich libovolnou lineární kombinaci $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$, dostaneme vektor $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$, který je roven nulovému vektoru pouze v případě $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ a to podle věty 2.8 znamená, že dané vektory jsou lineárně nezávislé.

Existují samozřejmě i jiné báze než kanonická:

Příklad 2.10: Ukážeme, že systém vektorů

$$B = (\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3), \quad \text{kde} \quad \mathbf{v}_1 = (1,\ 1,\ 1),\ \mathbf{v}_2 = (0,\ 1,\ 1),\ \mathbf{v}_3 = (0,\ 0,\ 1),$$

tvoří bázi aritmetického vektorového prostoru $\mathcal{V}_3$.

__**Řešení:**__ Protože $n = 3$ a vektory jsou tři, stačí prověřit jejich lineární nezávislost. Předpokládejme, že existují čísla a, b, c, která nejsou současně všechna rovna nule, tak že platí $a\,\mathbf{v}_1 + b\,\mathbf{v}_2 + c\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$, tedy

$$a\,(1,\ 1,\ 1) + b\,(0,\ 1,\ 1) + c\,(0,\ 0,\ 1) = (a,\ a+b,\ a+b+c) = (0,\ 0,\ 0).$$

Uspořádané trojice čísel nalevo i napravo poslední rovnosti se musí rovnat, tedy platí

$$\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ a + b & = & 0 \\ a + b + c & = & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad a = b = c = 0 \quad \Rightarrow$$

dané vektory jsou lineárně nezávislé, tvoří bázi aritmetického vektorového prostoru $\mathcal{V}_3$.

Důležitost existence báze v aritmetickém vektorovém prostoru ukazuje následující věta:

Věta 2.11: *Nechť* $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n)$ *je libovolná báze vektorového prostoru* $\mathcal{V}_n$. *Potom každý vektor* $\mathbf{a}$ *z prostoru* $\mathcal{V}_n$ *je lineární kombinací vektorů z této báze, tj. existují čísla* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *taková, že platí*

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n.$$

Důkaz bude triviální až se seznámíme s analýzou řešitelnosti soustav lineárních rovnic.

Definice 2.12: Čísla $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ z věty 2.11 se nazývají ***souřadnice vektoru*** $\mathbf{a}$ ***vzhledem k bázi*** $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n)$.

V případě kanonické báze je zřejmě i-tá souřadnice daného vektoru $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ právě číslo a_i.

Příklad 2.13: Najděme souřadnice vektoru $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ vzhledem k bázi B z příkladu 2.10.

Řešení: Hledáme čísla a, b, c pro která platí

$$\mathbf{a} = (1, 2, -1) = a\,(1, 1, 1) + b\,(0, 1, 1) + c\,(0, 0, 1).$$

Hledaná čísla budou řešením soustavy

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ a + b &= 2 \\ a + b + c &= -1 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad a = 1,\ b = 1,\ c = -3.$$

Píšeme $\mathbf{a}_B = (1, 1, -3)$.

Podprostory

Jestliže geometricky interpretujeme prostor trojic reálných čísel tak, jak jste zvyklí ze střední školy, jako prostor bodů, kde trojice udává souřadnice bodu v nějaké souřadné soustavě, existují zde některé trojice – body, které leží v rovině; jestliže uvažujeme všechny body, které vyplňují některou rovinu, dostaneme množinu, která je v jistém smyslu také vektorovým prostorem. To nás vede k následující definici:

Definice 2.14: Neprázdnou podmnožinu $\mathcal{W}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}_n$ nazveme ***podprostorem*** prostoru $\mathcal{V}_n$, jestliže pro každé dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{W}$ a každé číslo α je $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{W}$ a $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}$ – tj. když podmnožina $\mathcal{W}$ je uzavřená k příslušným operacím.
V tomto případě píšeme $\mathcal{W} \sqsubseteq \mathcal{V}_n$.

Uvažujme podmnožinu $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}_3$, pro kterou platí $\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ – množinu trojic reálných čísel, jejichž třetí souřadnice jsou nulové. Snadno se ukáže, že $\mathcal{W}$ je podprostor $\mathcal{V}_3$ (ukažte jako cvičení). Při geometrické interpretaci zmíněné v úvodu této části se jedná o „souřadnou rovinu xy“.

Vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ jsou zřejmě lineárně nezávislé a dále pro každý aritmetický vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$ platí

$$\mathbf{v} = (v_1,\, v_2,\, 0) = v_1(1,\, 0,\, 0) + v_2(0,\, 1,\, 0) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2,$$

každý vektor z $\mathcal{W}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Tedy maximální možný počet lineárně nezávislých vektorů podprostoru $\mathcal{W}$ je 2, přitom podle naší geometrické interpretace jej chápeme jako rovinu, a ta je dvojrozměrná. Dále je přirozené chápat systém $(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2)$ jako bázi podprostoru $\mathcal{W}$. To nás vede k následující definici:

Definice 2.15: Buď $\mathcal{W} \sqsubseteq \mathcal{V}_n$.

1. Maximální počet lineárně nezávislých vektorů podprostoru $\mathcal{W}$ se nazývá ***dimenze*** podprostoru $\mathcal{W}$; značíme $\dim \mathcal{W}$.
2. Libovolný systém k lineárně nezávislých vektorů, kde $k = \dim \mathcal{W}$, se nazývá ***báze*** podprostoru $\mathcal{W}$.

Poznámka: Protože jistě platí $\mathcal{V}_n \sqsubseteq \mathcal{V}_n$, je $\dim \mathcal{V}_n = n$.

Velmi důležitou aplikaci pojmu podprostoru a jeho dimenze uvidíme v kapitole o řešení soustav lineárních rovnic.

Uvažujme v trojrozměrném prostoru dvě roviny procházející počátkem – dva dvojrozměrné prostory. Jejich průnikem je přímka (procházející počátkem), tedy také podprostor, a to jednorozměrný. Stejná situace platí u obecných aritmetických prostorů:

Věta 2.16: *Průnik libovolného neprázdného systému podprostorů vektorového prostoru $\mathcal{V}_n$ je opět podprostorem prostoru $\mathcal{V}_n$.*

Důkaz plyne přímo z definice podprostoru.

Nyní již můžeme zavést velmi důležitý pojem tzv. lineárního obalu množiny:

Definice 2.17: Buď M podmnožina vektorového prostoru $\mathcal{V}_n$.

1. Průnik $\mathcal{W}$ všech podprostorů prostoru $\mathcal{V}_n$ obsahujících množinu M nazýváme ***lineárním obalem*** množiny M a značíme $\langle M \rangle$. Je-li $M = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\}$, pak místo $\langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\} \rangle$ budeme psát $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k \rangle$.
2. Podmnožina M se nazývá ***množinou generátorů*** prostoru $\mathcal{W}$. Budeme též říkat, že množina M ***generuje*** $\mathcal{W}$.

Tedy lineárním obalem dané množiny je nejmenší vektorový prostor obsahující prvky dané množiny – generátory; k dané množině musíme tedy dodat součty každých dvou prvků dané množiny a každý násobek prvků dané množiny, jestliže je již neobsahovala. Speciálně je třeba přidat násobek nulou, tedy nulový vektor.

Souhrnnou charakteristiku podprostorů generovaných podmnožinami vektorového prostoru $\mathcal{V}_n$ dává následující věta:

Věta 2.18: *Buď M podmnožina vektorového prostoru $\mathcal{V}_n$. Pak platí:*

1. *je-li $M = \emptyset$, je $\langle M \rangle = \{\mathbf{o}\}$,*
2. *je-li $M \neq \emptyset$, pak $\langle M \rangle$ je množina všech lineárních kombinací $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i$, kde $\mathbf{u_i} \in M$, $i = 1, 2, ..., k$.*

Hodnost systému vektorů

V dalším textu, při studiu matic a determinantů, budeme pomocí jistých „transformací“ převádět systém vektorů (řádky matice) na jiný, jednodušší, přičemž budeme požadovat zachování vlastností systému z hlediska lineární nezávislosti. Proto uvedeme ještě následující definici:

Definice 2.19: Nechť jsou dány dva systémy vektorů z $\mathcal{V}_n$:

$$M = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\}, M' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, ..., \mathbf{u}'_k\}.$$

Řekneme, že M' vznikne z M ***elementární transformací***, jestliže existuje index i tak, že pro $j \neq i$ je $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}'_j$ a dále platí jedna z následujících možností:

- $\exists \alpha \neq 0$ tak, že platí $\mathbf{u}'_i = \alpha \mathbf{u_i}$ – vynásobení jednoho vektoru nenulovým číslem;
- $\exists k \neq i$ tak, že platí $\mathbf{u}'_i = \mathbf{u_i} + \mathbf{u}_k$ – připočtení jiného vektoru k danému.

Věta 2.20: *Buďte $M = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\}$, $M' = \{\mathbf{u'}_1, \mathbf{u'}_2, ..., \mathbf{u'}_k\}$ dva systémy vektorů z $\mathcal{V}_n$ a nechť M' vznikne z M konečným počtem elementárních transformací. Potom vektory z M' jsou lineárně nezávislé, právě když vektory z M jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz provedeme pro případ tří vektorů $A = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, při obecném počtu by postup byl analogický, ovšem zápis nepřehledný. Postup lze zobecnit matematickou indukcí.

1. Nechť systém A je lineárně nezávislý, tedy $a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v} + c\,\mathbf{w} = \mathbf{o} \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0.$

   a) Uvažujme systém $A' = \{\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$, kde $\mathbf{u}' = \alpha\mathbf{u}$, $\alpha \neq 0$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$, a předpokládejme, že A' je lineárně závislý systém. Existují tedy taková čísla a', b' c', která nejsou vesměs nulová, že platí $a'\,\mathbf{u}' + b'\,\mathbf{v}' + c'\,\mathbf{w}' = \mathbf{o}$. Ale

   $$a'\,\mathbf{u}' + b'\,\mathbf{v}' + c'\,\mathbf{w}' = a'\,\alpha\mathbf{u} + b'\,\mathbf{v} + c'\,\mathbf{w} = \mathbf{o} \qquad a'\alpha = 0 \wedge b' = 0 \wedge c' = 0\,(\alpha \neq 0),$$

   protože systém A je lineárně nezávislý, tedy musí platit $a' = 0 \wedge b' = 0 \wedge c' = 0$ a to je spor s předpokladem A' je lineárně závislý.

   b) Uvažujme systém $A' = \{\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$, kde $\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$ a předpokládejme, že A' je lineárně závislý systém. Existují tedy taková čísla a', b' c', která nejsou vesměs nulová, že platí $a'\,\mathbf{u}' + b'\,\mathbf{v}' + c'\,\mathbf{w}' = \mathbf{o}$. Ale

   $$a'\,\mathbf{u}' + b'\,\mathbf{v}' + c'\,\mathbf{w}' = a'\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + b'\,\mathbf{v} + c'\,\mathbf{w} = a'\,\mathbf{u} + (a' + b')\,\mathbf{v} + c'\,\mathbf{w} = \mathbf{o}$$

   $$a' = 0 \wedge a' + b' = 0 \wedge c' = 0,$$

   protože systém A je lineárně nezávislý, tedy musí platit $a' = 0 \wedge b' = 0 \wedge c' = 0$ a to je spor s předpokladem A' je lineárně závislý.

2. Nechť systém A je lineárně závislý, tedy jeden z vektorů systému lze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících. Nechť např. $\mathbf{w} = a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}$.

   a) Uvažujme systém $A' = \{\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$, kde $\mathbf{u}' = \alpha\mathbf{u}$, $\alpha \neq 0$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$. Potom

   $$\mathbf{w}' = \mathbf{w} = a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v} = a\,\frac{1}{\alpha}\,\mathbf{u}' + b\,\mathbf{v}' \qquad \Rightarrow$$

   systém A' tvoří lineárně závislé vektory.

   b) Uvažujme systém $A' = \{\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$, kde $\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$. Potom

   $$\mathbf{w}' = \mathbf{w} = a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v} = a\,\mathbf{u}' - \mathbf{v}' + b\,\mathbf{v}' = a\,\mathbf{u}' + (b - a)\,\mathbf{v}' \qquad \Rightarrow$$

   systém A' tvoří lineárně závislé vektory.

Definice 2.21: Nechť je dán systém $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$ libovolných vektorů z $\mathcal{V}_n$. Jestliže v systému existuje h lineárně nezávislých vektorů a ne více, potom číslo h nazýváme ***hodností systému***.

Příklad 2.22: Hodnost systému vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{a} = (3, 1, 0), \mathbf{b} = (-1, 0, 2), \mathbf{c} = (7, 2, -2),$$

je rovna dvěma, protože vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou lineárně nezávislé, zatímco (jak již víme, viz příklad 2.7) vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně závislé.

Shrnutí

V tomto odstavci jsme zavedli pojmy:

- n-rozměrný aritmetický vektor: uspořádaná n-tice reálných čísel,
- součet vektorů a součin vektoru s číslem: provádí se po složkách,
- aritmetický vektorový prostor: množina všech n-rozměrných aritmetických vektorů s operacemi součtu a násobení číslem,
- skalární součin dvou vektorů: číslo, pro které platí $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$,
- lineární kombinace vektorů: $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_i \in \mathcal{V}_n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$,
- lineární závislost resp. nezávislost vektorů: systém vektorů je závislý, můžeme-li jeden z těchto vektorů vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních; je nezávislý, není-li závislý,
- báze vektorového prostoru $\mathcal{V}_n$: uspořádaná n-tice lineárně nezávislých vektorů,
- souřadnice vektoru vzhledem k bázi: koeficienty v té lineární kombinaci vektorů báze, která je rovna danému vektoru,
- podprostor: podmnožina uzavřená k operacím součtu vektorů a násobení číslem,
- dimenze: maximální počet lineárně nezávislých vektorů,
- lineární obal množiny: nejmenší vektorový prostor obsahující prvky dané množiny (generátory),
- hodnost systému vektorů: počet lineárně nezávislých vektorů v systému.

Otázky a úlohy

1. Co je aritmetický vektor dimenze n?
2. Co je aritmetický n-rozměrný vektorový prostor?
3. Jaká jsou pravidla pro aritmetické operace s aritmetickými vektory?
4. Co je skalární součin dvou aritmetických vektorů?
5. Co znamená, že vektory a_1, a_2, ..., a_k jsou lineárně závislé? Co znamená, že jsou lineárně nezávislé?
6. Nechť $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ je systém n-rozměrných aritmetických vektorů. Prověřte následující tvrzení:

a) Jestliže systém A obsahuje dva stejné vektory, je lineárně závislý.
b) Jestliže systém A obsahuje nulový vektor, je lineárně závislý.
c) Jestliže systém A obsahuje dva vektory, z nichž jeden je násobek druhého, je lineárně závislý.
d) Jestliže část systému A je lineárně závislá, je celý systém lineárně závislý.
e) Jestliže platí $k > n$, je systém A lineárně závislý.

7. Nechť $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ je lineárně závislý systém nenulových vektorů a nechť se vektor $\mathbf{u}_3$ nedá vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. Ukažte, že v tomto případě je vektor $\mathbf{u}_1$ násobkem vektoru $\mathbf{u}_2$.

8. Co je to báze aritmetického vektorového prostoru?

9. Co jsou to souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi a jak je určujeme?

10. Jak definujeme podprostor aritmetického vektorového prostoru a co je to dimenze a báze podprostoru?

11. Co je to lineární obal systému vektorů?

12. Co je hodnost systému vektorů a při jakých úpravách se hodnost systému nemění?

13. Ukažte, že systém vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ má stejnou hodnost jako systém vektorů $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{w}+\mathbf{u}$.

Cvičení

1. Zjistěte, zda platí $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, je-li

a) $\mathbf{u} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ *b)* $\mathbf{u} = (3,6,9)$, $\mathbf{v} = (3,6,10)$
c) $\mathbf{u} = (\sqrt{2},\pi,7,1)$, $\mathbf{v} = (\pi,\sqrt{2},7,1)$ *d)* $\mathbf{u} = (3,3,3,3)$, $\mathbf{v} = (2,2,2,2)$

2. Nechť $\mathbf{u}_1 = (1,\ 3,\ 5)$, $\mathbf{u}_2 = (3,\ 5,\ 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,\ 5,\ 3)$, $\mathbf{u}_4 = (3,\ 5,\ 1)$. Které z těchto vektorů se sobě rovnají?

3. Najděte x a y resp. z tak, aby platilo

a) $(x,3) = (2,x+y)$ *b)* $(2x,3,y) = (4,x+z,2z)$ *c)* $x(1,1)+y(2,-1) = (1,4)$

4. Nechť $\mathbf{u} = (2,\ -7,\ 1)$, $\mathbf{v} = (-3,\ 0,\ 4)$, $\mathbf{w} = (0,\ 5,\ -8)$. Najděte

a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ *b)* $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ *c)* $3\mathbf{u}-4\mathbf{v}$ *d)* $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}-5\mathbf{w}$

5. Najděte aritmetický vektor $\mathbf{x}$ tak, aby platilo $\mathbf{u}+\mathbf{x} = \mathbf{v}$, je-li

a) $\mathbf{u} = (3,2,-1)$, $\mathbf{v} = (3,4,5)$ *b)* $\mathbf{u} = (\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{7}{8})$, $\mathbf{v} = (-\frac{1}{6},\frac{4}{3},\frac{5}{9})$
c) $\mathbf{u} = (-2,3)$, $\mathbf{v} = (2,0,1)$ *d)* $\mathbf{u} = (5,8,-9,2)$, $\mathbf{v} = (4,5,1,-1)$

6. Zjistěte, zda jsou dané systémy vektorů lineárně nezávislé nebo závislé. Vyjádřete vektor $\mathbf{v} = (2, 5)$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ resp. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ v každém z případů a), b), c), je-li to možné:

   a) $\mathbf{u}_1 = (3, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 8)$ *b)* $\mathbf{u}_1 = (4, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (12, 3)$
   c) $\mathbf{u}_1 = (3, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 4)$

7. Zjistěte, který z daných systémů vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ resp. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ tvoří bázi příslušného aritmetického vektorového prostoru a najděte souřadnice daného vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k této bázi:

   a) $\mathbf{v} = (1,\ 4)$, $\mathbf{u}_1 = (1,\ 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,\ -1)$
   b) $\mathbf{v} = (1,\ -2,\ 5)$, $\mathbf{u}_1 = (1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{u}_3 = (2,\ -1,\ 1)$
   c) $\mathbf{v} = (2,\ 3,\ -5)$, $\mathbf{u}_1 = (1,\ 2,\ -3)$, $\mathbf{u}_2 = (2,\ -1,\ -4)$, $\mathbf{u}_3 = (1,\ 7,\ -5)$

8. Najděte všechny hodnoty λ, pro které lze daný vektor $\mathbf{v}$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$:

   a) $\mathbf{v} = (8,\ -8,\ \lambda)$, $\mathbf{u}_1 = (3,\ 2,\ 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,\ 0,\ 7)$, $\mathbf{u}_3 = (2,\ -5,\ 3)$
   b) $\mathbf{v} = (5,\ 3,\ \lambda)$, $\mathbf{u}_1 = (1,\ 0,\ 2)$, $\mathbf{u}_2 = (0,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{u}_3 = (4,\ 1,\ 9)$
   c) $\mathbf{v} = (1,\ 3,\ 5)$, $\mathbf{u}_1 = (1,\ 3,\ 4)$, $\mathbf{u}_2 = (2,\ 8,\ -2)$, $\mathbf{u}_3 = (3,\ 1,\ \lambda)$
   d) $\mathbf{v} = (\lambda,\ 6,\ 7)$, $\mathbf{u}_1 = (1,\ 4,\ 5)$, $\mathbf{u}_2 = (3,\ 8,\ 10)$, $\mathbf{u}_3 = (0,\ -4,\ -5)$

9. Vypočítejte skalární součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, je-li

   a) $\mathbf{u} = (2,\ -3,\ 6)$, $\mathbf{v} = (8,\ 2,\ -3)$,
   b) $\mathbf{u} = (1,\ -8,\ 0,\ 5)$, $\mathbf{v} = (3,\ 6,\ 4)$.

10. Nechť $\mathbf{u} = (3,\ 2,\ 1)$, $\mathbf{v} = (5,\ -3,\ 4)$, $\mathbf{w} = (1,\ 6,\ -7)$. Prověřte, že platí $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

11. Nechť $\mathbf{u} = (1,\ 2,\ 3,\ -4)$, $\mathbf{v} = (5,\ -6,\ 7,\ 8)$ a $k = 3$. Prověřte, že platí $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$.

12. Najděte všechny dvojice vektorů $\mathbf{u} = (a,\ b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$, které tvoří ortonormální systém.

Výsledky

1. a)b)c)d) ne. **2.** $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_4$;

3. a) $x = 2, y = 1$, b) $x = 2, y = 2, z = 1$, c) $x = 3, y = -1$;

4. a) $(-1, -7, 5)$, b) $(-3, -5, 12)$, c) $(18, -21, -13)$, d) $(-5, -39, 54)$;

5. a) $(0, 2, 6)$, b) $(\frac{-17}{30}, \frac{19}{21}, \frac{-23}{72})$, c) nelze, d) $(-1, -3, 10, -3)$;

6. a) nez., $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2$, b) záv., nelze, c) záv., $\mathbf{v} = 0\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$;

7. a) ano, $\mathbf{v} = 3\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, b) ano, $\mathbf{v} = -6\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$, c) ne, $\mathbf{u}_3 = 3\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$;

8. a) lib., b) $\lambda = 13$, c) $\lambda \neq 52$, d) žádné; **9** a) -8, b) nelze.

2.2 Matice

Nyní se budeme zabývat obdélníkovými schématy čísel, s kterými jsme pracovali v úvodu k lineární algebře – maticemi. První odstavec bude seznamem důležitých pojmů týkajících se matic; budou nám sloužit pro jednodušší vyjadřování při práci s nimi:

Základní pojmy

Definice 2.23: Soubor

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \cdot n$ čísel nazýváme ***maticí typu (m,n)***.
Matice budeme označovat velkými tučnými tiskacími písmeny, nebo také symbolem $(a_{ij})_m^n$.

Čísla a_{ij} se nazývají ***prvky matice***,
aritmetický vektor $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ nazýváme ***i-tým řádkem*** matice,
aritmetický vektor $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$ nazýváme ***j-tým sloupcem*** matice.

Prvky a_{ii}, $i = 1, ..., k$, $k = min(m, n)$, tvoří tzv. ***hlavní diagonálu matice*** $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$.

Je-li $m \leq n$ (matice $\mathbf{A}$ má nanejvýš tolik řádků kolik sloupců), všechny prvky v hlavní diagonále matice $\mathbf{A}$ jsou různé od nuly a všechny její prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové, říkáme, že matice $\mathbf{A}$ je v ***Gaussově tvaru*** (***gaussovská***).

Jestliže jsou všechny prvky matice typu *(m,n)* nulové, potom ji nazýváme ***nulovou maticí*** typu *(m,n)* a označujeme $\mathbf{O}_m^n$, nebo jen $\mathbf{O}$.

Platí-li pro matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ $m = n$, říkáme, že matice $\mathbf{A}$ je ***čtvercová řádu n***.

Čtvercovou matici, jejíž všechny prvky neležící na hlavní diagonále jsou nulové, nazýváme ***diagonální maticí***.

Jsou-li všechny prvky v hlavní diagonále diagonální matice rovny jedné, nazýváme ji ***jednotkovou maticí řádu n*** a značíme $\mathbf{E}_n$, nebo krátce $\mathbf{E}$.

Jestliže jsou ve čtvercové matici všechny prvky pod (resp. nad) hlavní diagonálou rovny nule, nazýváme ji ***horní*** (resp. ***dolní***) ***trojúhelníkovou maticí***.

Čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$, pro jejíž všechny prvky platí $a_{ij} = a_{ji}$ (resp. $a_{ij} = -a_{ji}$) , se nazývá ***symetrická*** (resp. ***antisymetrická***).

Nechť je dána matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$. Matici, kterou získáme z matice $\mathbf{A}$ vynecháním některých řádků event. sloupců, nazýváme ***submaticí*** matice $\mathbf{A}$.
Matici, kterou získáme z matice $\mathbf{A}$ vynecháním j-tého řádku a k-tého sloupce, nazýváme ***submaticí matice*** $\mathbf{A}$ ***příslušnou k prvku*** a_{jk} a budeme ji označovat symbolem $\mathbf{A}_{jk}$.

Příklad 2.24: Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

je

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Transponovaná matice

Definice 2.25: Nechť je dána matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ typu *(m,n)*. Matici $\mathbf{B} = (b_{ij})_n^m$ typu *(n,m)* , pro jejíž prvky platí

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., m,$$

nazveme maticí ***transponovanou*** k matici $\mathbf{A}$ a označujeme ji $\mathbf{A}^T$.

Příklad 2.26: Je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \text{ je } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Je-li $\mathbf{A}$ symetrická matice, platí zřejmě $\mathbf{A}^T = A$.

Každý aritmetický vektor $\mathbf{x}$ dimenze n lze zřejmě považovat za jednořádkovou matici typu $(1, n)$ nebo za jednosloupcovou matici typu $(n, 1)$. Pro naše účely je výhodnější chápat vektory jako matice sloupcové, tedy

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

Někdy budeme v dalším textu pro jednoduchost psát, tak jak jsme zavedli,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

bude-li z kontextu zřejmé, chápeme-li vektor jako matici jednořádkovou nebo jednosloupcovou.

Aritmetické operace

Definice 2.27: O dvou maticích $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n, \mathbf{B} = (b_{ij})_m^n$ říkáme, že se ***sobě rovnají***, a píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, jestliže jsou téhož typu a odpovídající si prvky se rovnají, tj. platí-li

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\ i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Součtem dvou matic $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n, \mathbf{B} = (b_{ij})_m^n$ stejného typu *(m,n)* rozumíme matici $\mathbf{C} = (c_{ij})_m^n$ typu *(m,n)* takovou, že $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Píšeme $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Součet matic různého typu se nedefinuje.

Součinem čísla α ***s maticí*** $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ rozumíme matici $\mathbf{C} = (c_{ij})_m^n$ takovou, že $c_{ij} = \alpha a_{ij}$. Píšeme $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A}$. Místo $(-1)\mathbf{A}$ píšeme $-\mathbf{A}$ a místo $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$ píšeme $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ a tuto matici nazýváme ***rozdílem matic*** $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.

Příklad 2.28: Nechť jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Potom

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad 2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Věta 2.29: *Pro sečítání matic a pro násobení matice číslem platí následující pravidla:*

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (komutativita součtu)
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (asociativita součtu)
3. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$ (nulová matice)
4. *k maticím* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *existuje právě jedna matice* $\mathbf{X}$ *taková, že* $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$;
   platí $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$
5. $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ (distributivita násobení číslem)

Důkaz se provede analogicky důkazu věty 2.3 o aritmetických operacích s vektory; proveďte za cvičení.

Násobení matic, inverzní matice

Definice 2.30: ***Součinem*** **AB** matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^p$ typu (m, p) s maticí $\mathbf{B} = (b_{ij})_p^n$ typu (p, n) nazýváme matici $\mathbf{C} = (c_{ij})_m^n$ typu (m, n) , pro jejíž prvky platí

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}b_{rj}.$$

Jinak řečeno: řádky matice **A** a sloupce matice **B** považujeme za vektory dimenze p a potom prvek c_{ij} dostaneme jako skalární součin i-tého řádku matice **A** a j-tého sloupce matice **B**.

Protože skalární součin vektorů je definován jen pro vektory stejné dimenze, je násobení matic definováno jen v případě, že první matice má stejný počet sloupců jako druhá matice řádků.

Příklad 2.31: Uvažujme matice **A, B** z 2.28. Potom

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 17 & 5 & 0 \\ 12 & 9 & -3 \\ 16 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -1 \\ 9 & 17 & 16 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.32: Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/4 & 14/4 & -11/4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Potom

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.33:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Věta 2.34: *Pro násobení matic* **A, B, C** *platí následující pravidla:*

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (asociativita součinu)
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$ (distributivita)
3. $\mathbf{OA} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{AO} = \mathbf{O}$

4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
5. $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$

pokud jsou příslušné součty a součiny definovány, tj. mají-li matice **A, B, C** *předepsané typy.*

Důkaz je dosti pracný a spočívá v použití definice pro předepsané součiny; ukážeme si to na části 1. a 4., zbylé proveďte analogicky jako cvičení:

1. Nechť

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_m^p,\ \mathbf{B} = (b_{ij})_p^q,\ \mathbf{C} = (c_{ij})_q^n,\ \mathbf{AB} = ((ab)_{ij})_m^q,\ \mathbf{BC} = ((bc)_{ij})_p^n,\ \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (d_{ij})_m^n,\quad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = (d'_{ij})_m^n \quad \text{kde}$$

$$(ab)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sj}, \qquad (bc)_{ij} = b_{i1}c_{1j} + \cdots + b_{iq}c_{qj} = \sum_{r=1}^{q} b_{ir}c_{rj}$$

Potom

$$d_{ij} = a_{i1}(bc)_{1j} + \cdots + a_{ip}(bc)_{pj} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}(bc)_{sj} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}\left(\sum_{r=1}^{q} b_{sr}c_{rj}\right) = \sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{q} a_{is}b_{sr}c_{rj},$$

$$d'_{ij} = (ab)_{i1}c_{1j} + \cdots + (ab)_{iq}c_{qj} = \sum_{r=1}^{q}(ab)_{ir}c_{rj} = \sum_{r=1}^{q}\left(\sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sr}\right)c_{rj} = \sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sr}c_{rj} = d_{ij}.$$

4. Nechť

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_m^p,\ \mathbf{B} = (b_{ij})_p^n,\ \mathbf{AB} = (c_{ij})_m^n,\ \mathbf{A}^T = (\alpha_{ij})_p^m,\ \mathbf{B}^T = (\beta_{ij})_n^p,\ (\mathbf{AB})^T = (\gamma_{ij})_n^m,\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\gamma'_{ij})_n^m,$$

kde $\alpha_{ij} = a_{ji},\ \beta_{ij} = b_{ji}$ a dále

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}b_{rj} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{ij} = c_{ji} = \sum_{r=1}^{p} a_{jr}b_{rj}.$$

Potom

$$\gamma' ij = \beta_{i1}\alpha_{1j} + \cdots + \beta_{ip}\alpha_{pj} = \sum_{r=1}^{p} \beta_{ir}\alpha_{rj} = \sum_{r=1}^{p} b_{ri}a_{jr} = \gamma_{ij}.$$

Pro násobení matic neplatí obecně analogická pravidla, jaká platí pro násobení čísel. Neplatí obecně komutativní zákon, nemusí tedy platit $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ (viz př. 2.31). Platí-li $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, říkáme, že matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ***komutují***. V př. 2.33 jsme dále viděli, že součinem dvou nenulových matic může být matice nulová.

Jednotková matice hraje při násobení matic roli jednotky: Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ je libovolná matice typu *(m,n)*, $\mathbf{E}_m, \mathbf{E}_n$ jsou jednotkové matice řádu m a n. Potom zřejmě platí

$$\mathbf{AE}_n = \mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Pro součin $\mathbf{A}\,\mathbf{A}$ užíváme zkrácený zápis $\mathbf{A}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, analogicky $\mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}^3, \ldots,\ \mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$.

S využitím tohoto zápisu můžeme dosadit matici do polynomu:
Nechť

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Hodnotu $f(\mathbf{A})$ definujeme jako matici

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{E} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \cdots + a_n\mathbf{A}^n.$$

Tyto výpočty můžeme pochopitelně realizovat jen v případě čtvercových matic (proč?).

Pro čtvercové matice platí následující věta:

Věta 2.35: *Buďte* $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ *čtvercové matice řádu* n *takové, že* $\mathbf{BA} = \mathbf{E_n} = \mathbf{AC}$*. Potom* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Důkaz se provede snadno s použitím předpokladů věty, definice jednotkové matice a asociativního zákona pro násobení matic:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{E}_n = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{E}_n\mathbf{C} = \mathbf{C}.$$

Definice 2.36: Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice $\mathbf{B}$ téhož řádu n taková, že $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{E}_n$, kde $\mathbf{E}_n$ je jednotková matice řádu n, potom tuto matici nazýváme ***inverzní maticí*** k $\mathbf{A}$ a značíme symbolem $\mathbf{A}^{-1}$.

Matice $\mathbf{A}$, k níž existuje inverzní matice, se nazývá ***regulární*** (***invertovatelná***), v opačném případě se $\mathbf{A}$ nazývá ***singulární***.

Ne ke každé matici existuje inverzní matice, snadno se dá ukázat, že například matice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ není regulární:

Hledejme čísla a, b, c, d tak, aby platilo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podle definice součinu matic musí platit pro prvek a_{22} matice napravo $c \cdot 0 + d \cdot 0 = 1$ a to je spor.

Věta 2.37: *Buďte* $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ *regulární matice řádu* n*. Potom*

1. *součin* $\mathbf{AB}$ *je regulární matice a platí* $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,
2. *matice* $\mathbf{A}^{-1}$ *je regulární a platí* $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Důkaz je triviální: $\mathbf{AB}\,\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$.

Hodnost matice, ekvivalence matic

Definice 2.38: ***Hodností matice*** $\mathbf{A}$ rozumíme hodnost soustavy vektorů vytvořených řádky této matice. Označujeme ji $h(\mathbf{A})$.

Matice $\mathbf{A}$ má tedy hodnost $h(\mathbf{A})$, jestliže v ní existuje právě $h(\mathbf{A})$ lineárně nezávislých řádků.

Platí velmi užitečná následující věta:

Věta 2.39: *Platí*

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T),$$

tedy transponovaná matice má stejnou hodnost jako matice původní – počet lineárně nezávislých řádků matice je stejný jako počet lineárně nezávislých sloupců.

Důkaz je dosti komplikovaný; využívá věty o řešitelnosti rovnic. Provádět ho nebudeme. (Viz Bican: Lineární algebra a geometrie.)

Jak víme z předchozí kapitoly, hodnost soustavy vektorů se nemění při použití libovolného počtu elementárních transformací – tento fakt použijeme při vyšetřování hodnosti matic. V následující definici aplikujeme definici elementární transformace na matice:

Definice 2.40: ***Elementární transformací*** matice $\mathbf{A}$ nazveme

1. vynásobení řádku (sloupce) nenulovým číslem,
2. připočtení násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému.

Jestliže tedy aplikujeme větu 2.20 na řádky (sloupce) matice, můžeme formulovat větu:

Věta 2.41: *Elementární transformace nemění hodnost matice.*

Nyní si blíže povšimneme elementárních transformací matic:

Věta 2.42: *Platí*

- *Záměna dvou řádků (sloupců) je složením elementárních transformací.*
- *Inverzní transformace k elementárním jsou rovněž složením elementárních transformací.*
- *(Realizace elementárních transformací vynásobením regulární maticí):*
  1. *Vynásobení k-tého řádku matice $\mathbf{A}$ typu (m, n) číslem α je možné realizovat vynásobením matice $\mathbf{A}$ zleva diagonální maticí, ve které je $a_{ii} = 1$ pro $i \neq k$, $a_{kk} = \alpha$.*

2. *Připočtení l-tého řádku ke k-tému řádku v matici* **A** *je možné realizovat vynásobením matice* **A** *zleva maticí, která vznikne z příslušné jednotkové matice, jestliže nulu na místě prvku* a_{kl} *nahradíme jedničkou, tedy maticí* (b_{ij}), *kde* $b_{ii} = 1$, $b_{kl} = 1$, $b_{ij} = 0$ *pro* $i \neq j, i \neq k, j \neq l$.
3. *Příslušné sloupcové elementární transformace se dají realizovat analogicky vynásobením vhodnou maticí zprava.*

Důkaz provádět nebudeme, rozmyslete si ho jako cvičení s využitím postupů v následujícím příkladu.

Příklad 2.43:

1. Záměnu dvou řádků (zde 2. a 3.) provedeme posloupností následujících elementárních transformací:
$\sim^{1)}$ 2.ř.+3.ř; $\sim^{2)} -1\times$2.ř.; $\sim^{3)}$ 3.ř.+2.ř; $\sim^{4)}$ $-1\times$2.ř.; $\sim^{5)}$ 2.ř.+3.ř; $\sim^{6)}$ $-1\times$3.ř.:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim^{1)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{31} & a_{22}+a_{32} & a_{23}+a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim^{2)}$$

$$\sim^{2)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21}-a_{31} & -a_{22}-a_{32} & -a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim^{3)}$$

$$\sim^{3)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21}-a_{31} & -a_{22}-a_{32} & -a_{23}-a_{33} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix} \sim^{4)}$$

$$\sim^{4)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{31} & a_{22}+a_{32} & a_{23}+a_{33} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix} \sim^{5)}$$

$$\sim^{5)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix} \sim^{6)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

2. Realizace připočtení řádku k jinému řádku (zde třetího k druhému) vynásobením regulární maticí zleva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{31} & a_{22}+a_{32} & a_{23}+a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Definice 2.44: Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ nazveme ***ekvivalentní*** a píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, jestliže se dá jedna na druhou převést pomocí elementárních transformací.

Věta 2.45: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, *právě když existují regulární matice* $\mathbf{R}, \mathbf{S}$ *tak, že* $\mathbf{B} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}$.

Důkaz: Směr ($\Rightarrow$) je zřejmý; tvrzení je pouze jinak formulované tvrzení věty předchozí. Opačný směr vyžaduje vyjádření libovolné regulární čtvercové matice ve tvaru součinu matic zprostředkujících elementární transformace a provádět ho nebudeme.

Věta 2.46: **(Gaussova eliminace)**

1. *Pomocí řádkových elementárních transformací lze každou matici převést na stupňovou matici, tj. takovou, že první nenulový člen každého řádku má větší sloupcový index než první nenulový člen předchozího řádku a počet nenulových řádků je roven hodnosti matice.*

2. *Pomocí řádkových elementárních transformací a permutací sloupců lze každou matici převést na takový stupňovitý tvar, že první nenulový člen každého řádku má o jedničku větší sloupcový index než první nenulový člen předchozího řádku a počet nenulových řádků je roven hodnosti matice.*

Důkaz spočívá v konstrukci příslušného algoritmu:
Označíme $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \mathbf{A}^{(0)} = (a_{ij}^{(0)})$ – daná matice,
$\mathbf{A}^{(k)}$ – matice, kterou získáme po k-tém kroku algoritmu,
$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}^{(k)})$ – i-tý řádek příslušné matice.
Při tomto označení platí

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}^{(k)}) = \begin{cases} \mathbf{r}_i(\mathbf{A}^{(k-1)}) & \text{pro} \quad i \le k \\ \mathbf{r}_i(\mathbf{A}^{(k-1)}) + m_{ik}\mathbf{r}_k(\mathbf{A}^{(k-1)}) & \text{pro} \quad i > k \end{cases}$$

kde $m_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$, za předpokladu $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.
Je-li $a_{kk}^{(k-1)} = 0$, provedeme permutaci sloupců – testujeme postupně $a_{kk+1}^{(k-1)}, a_{kk+2}^{(k-1)}, \ldots, a_{kk+l}^{(k-1)}$ a v případě nenulového čísla zaměníme sloupce.

V předchozím jsme prováděli pouze řádkové elementární transformace, event. záměny sloupců – v dalším textu uvidíme, že když je příslušná matice maticí koeficientů lineární soustavy rovnic, výsledná matice po provedení těchto úprav je maticí soustavy, která až na případné transformace proměnných, odpovídající záměnám sloupců, má stejné řešení jako výchozí soustava.

Jestliže budeme provádět i sloupcové ekvivalentní úpravy, dostaneme také ekvivalentní matice, ale pochopitelně již ne ekvivalentní soustavy rovnic. Tyto sloupcové úpravy provádíme kvůli vyšetřování hodnosti matic; platí totiž věta:

Věta 2.47: **(Jordanova eliminace)** *Každá matice* $\mathbf{A}$ *typu* (m, n) *je ekvivalentní s diagonální maticí tvaru*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \longleftarrow \quad h\text{-tý řádek}$$

a $h = h(\mathbf{A})$, tj. počet nenulových řádků je roven hodnosti matice $\mathbf{A}$.

Důkaz je analogický důkazu předchozí věty; opět spočívá v konstrukci příslušného algoritmu.

Důsledek: *Matice téhož typu jsou ekvivalentní, právě když mají stejnou hodnost.*

Dále se snadno přesvědčíme, že platí věty

Věta 2.48: *Hodnost každé gaussovské matice $\mathbf{A}$ typu (m,n), kde $m \leq n$, je rovna číslu m.*

Důkaz si rozmyslete jako cvičení, stejně tak jako důkaz následující věty:

Věta 2.49: *Čtvercová matice stupně n je regulární, právě když $h(\mathbf{A}) = n$.*

Příklad 2.50: Máme určit hodnost $h(\mathbf{A})$ matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Provedeme postupně následující úpravy:
1) 1.ř. ponechat, 2.ř. - 1.ř., 3.ř. - 1.ř., 4.ř. ponechat, 5.ř. - 2× 1.ř.;
2) vyměnit 2. a 3.ř., vynechat 4.ř.;
3) 1.a 2.ř. ponechat, 3.ř. - 4× 2.ř., 4.ř. - 7× 2.ř.;
4) vyměnit 3. a 5. sloupec;
5) 1., 2., 3.ř. ponechat, 4.ř. - (14/5)× 3.ř.

Dostaneme postupně:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&2\\1&2&-1&0&-1\\1&-1&2&-3&0\\0&1&-1&1&-2\\2&3&-1&1&4\end{bmatrix}\sim^{1)}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&2\\0&4&-4&4&-3\\0&1&-1&1&-2\\0&1&-1&1&-2\\0&7&-7&9&0\end{bmatrix}$$

$$\sim^{2)}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&2\\0&1&-1&1&-2\\0&4&-4&4&-3\\0&7&-7&9&0\end{bmatrix}\sim^{3)}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&2\\0&1&-1&1&-2\\0&0&0&0&5\\0&0&0&2&14\end{bmatrix}$$

$$\sim^{4)}\begin{bmatrix}1&-2&2&-4&3\\0&1&-2&1&-1\\0&0&5&0&0\\0&0&14&2&0\end{bmatrix}\sim^{5)}\begin{bmatrix}1&-2&2&-4&3\\0&1&-2&1&-1\\0&0&5&0&0\\0&0&0&2&0\end{bmatrix}$$

Poslední matice je však již gaussovská, a tedy $h(\mathbf{A})$=4.

Výpočet inverzní matice 1

Z předchozích úvah plyne, že

- každá regulární matice $\mathbf{A}$ řádu n je ekvivalentní s jednotkovou maticí stejného řádu, a tedy se dá postupnými řádkovými elementárními transformacemi na ni převést,
- tato úprava se dá realizovat násobením vhodnou maticí zleva.

Tedy existuje matice $\mathbf{R}$ tak, že platí $\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$ – ale taková matice je právě matice inverzní k $\mathbf{A}$, tedy $\mathbf{R}=\mathbf{A}^{-1}$. Jestliže stejné řádkové transformace použijeme na jednotkovou matici, provedeme součin $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{A}^{-1}$.

Budeme tedy postupovat následujícím způsobem:

- K zadané matici, kterou máme invertovat, připíšeme jednotkovou matici stejného řádu.
- Elementárními řádkovými transformacemi upravíme vzniklou matici tak, aby v levé části (na místě zadané matice) vznikla matice jednotková.
- V pravé části matice (na místě jednotkové matice) je hledaná matice inverzní:

  $\mathbf{A}|\mathbf{E}\sim\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad 2.51: Nalezněte inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Sestavíme matici soustavy rozšířenou o příslušnou jednotkovou matici a budeme postupně upravovat:
1) 3.ř.-(4/3)× 2.ř., 3×3.ř.;
2) 1.ř.-5×3.ř., 2.ř.-2×3.ř.;
3) (1/3)×2.ř.;
4) 1.ř.-2×2.ř.;
5) (1/4)×1.ř.:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim^{1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim^{2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 20 & -15 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right] \sim^{3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 20 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim^{4)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 14 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right] \sim^{5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 14/4 & -11/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

tedy platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 14/4 & -11/4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Shrnutí

V tomto odstavci jsme se věnovali pojmu a vlastnostem matic. Zavedli jsme:

- pojem matice typu (m, n): obdélníkové schéma $m \times n$ čísel (prvků matice) $a_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$, uspořádaných do m řádků a n sloupců,
- hlavní diagonálu matice: systém prvků se stejným řádkovým a sloupcovým indexem,
- speciální matice:
  a) nulovou matici: všechny její prvky jsou rovny nule,
  b) Gaussovu matici: všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny nule,

c) čtvercovou matici: $m = n$,
d) horní resp. dolní trojúhelníkovou matici: čtvercová matice s nulovými prvky pod resp. nad hlavní diagonálou,
e) diagonální matici: čtvercová matice s nulovými prvky mimo hlavní diagonálu,
f) jednotkovou matici: diagonální matici s hlavní diagonálou tvořenou samými jedničkami;

- matice utvořené k dané matici:

  a) submatice: vznikne vynecháním některých řádků nebo sloupců,
  b) submatice příslušná k prvku a_{jk}: vznikne vynecháním j-tého řádku a k-tého sloupce,
  c) transponovaná matice: vznikne překlopením podél hlavní diagonály;

- součet matic a násobení matice číslem: po prvcích stejně jako u aritmetických vektorů,

- součin matic **A**,**B**: matice, jejíž prvky c_{jk} vzniknou jako skalární součin j-tého řádku matice **A** s k-tým sloupcem matice **B**,

- inverzní matici k matici **A**: matice, jejíž součin s danou maticí je roven matici jednotkové,

- pojem regulární matice: matice, k níž existuje inverzní matice,

- pojem hodnosti matice: hodnost systému vektorů tvořených řádky (sloupci) matice, tedy maximální počet lineárně nezávislých řádků (sloupců),

- elementární transformace matic: elementární transformace systému vektorů tvořených řádky (sloupci) matice, tedy buď vynásobení řádku (sloupce) matice nenulovým číslem nebo připočtení násobku řádku (sloupce) k jinému,

- Gaussova eliminace matice: úprava matice na Gaussův tvar pomocí řádkových elementárních transformací a záměn sloupců. Nakonec jsme uvedli jednu metodu nalezení inverzní matice využívající Gaussovu eliminaci.

Otázky a úkoly

1. Co je to matice typu (m, n)?

2. Jak definujeme sčítání matic a násobení matice číslem? Uveďte pravidla pro tyto operace.

3. Jak je definován součin matic?

4. Označme pomocí symbolu (m, n) matici typu (m, n). Jakého typu jsou (pokud existují) následující součiny?
   $a)$ $(2,3)(3,4)$ $b)$ $(4,1)(1,2)$ $c)$ $(1,2)(3,1)$ $d)$ $(5,2)(2,3)$ $e)$ $(3,4)(3,4)$ $f)$, $(2,2)(2,4)$

5. Kdy řekneme, že matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ je diagonální?

6. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_n^n$ jsou diagonální matice. Ukažte, že matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ij})_n^n$ je také diagonální, přičemž platí $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad i \neq j \\ a_{ij}b_{ij} & \text{pro} \quad i = j \end{cases}$.

7. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m, n), $m > 1$, $n > 1$, $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ jsou vektory. Za jakých podmínek jsou definovány součiny $\mathbf{Au}$ resp. $\mathbf{vA}$?

8. Jak definujeme transponovanou matici?

9. Pro jakou matici $\mathbf{A}$ je definován součin $\mathbf{AA}^T$ resp. $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$?

10. Jak definujeme symetrickou a antisymetrickou matici?

11. Ukažte, že pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ je symetrická, $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ je antisymetrická matice. Užitím této skutečnosti rozložte matici $\mathbf{A}$ na součet symetrické a antisymetrické matice.

12. Co znamená, že dvě matice jsou ekvivalentní?

13. Co jsou elementární transformace matic?

14. Jak se realizují elementární transformace matic pomocí násobení regulární maticí?

15. Jak je definovaná hodnost matice a jak se počítá?

16. Jak se může změnit hodnost matice, jestliže ji rozšíříme o
    a) jeden sloupec, b) dva sloupce?

17. Uveďte příklad matice, která má hodnost
    a) 1 b) 2 c) 3

18. Co je to inverzní matice?

19. Existuje-li inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, co můžete říci o inverzní matici k matici $k\mathbf{A}$?

20. Existuje-li inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, co můžete říci o inverzní matici k matici $\mathbf{A}^T$?

21. Co můžete říci o matici inverzní k diagonální matici?

Cvičení

1. Nechť

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&1&2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}3&1&-2\\2&-1&1\\2&1&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{G}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&0&0\\0&1&3\end{bmatrix}$$

Vypočítejte prvky x_{12} a x_{31} matice $\mathbf{X}$, kde

a) $\mathbf{X}=\mathbf{G}^2$ *b*) $\mathbf{X}=\mathbf{BC}-\mathbf{CB}$ *c*) $\mathbf{X}=\mathbf{A}^3-\mathbf{A}^2+\mathbf{E}_3$

d) $\mathbf{X}=\mathbf{DF}+\mathbf{FD}$ *e*) $\mathbf{X}=(\mathbf{D}+\mathbf{F})(\mathbf{D}-\mathbf{F})$ *f*) $\mathbf{X}=\mathbf{D}^2-\mathbf{F}^2$

2. Vypočítejte $\mathbf{X}=\mathbf{A}^n$, je-li

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ *b*) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$ *c*) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}$

3. Nalezněte všechny matice, které komutují s maticí $\mathbf{A}$, kde

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}$ *b*) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$ *c*) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

4. Nalezněte všechny čtvercové matice $\mathbf{A}$ druhého řádu takové, že matice $\mathbf{A}^2$ je

a) nulová *b*) jednotková

5. Najděte matici $\mathbf{Z}$ pro kterou platí $\mathbf{AZ}=\mathbf{B}$, je-li

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}$ *b*) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&6\\6&9\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

6. Určete x, y, z pro která platí

a) $2\mathbf{A}=\mathbf{B}^2+\mathbf{C}$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}x&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&y\\-1&0\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&1\\z&1\end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{B}$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&2\\x&-\frac{3}{4}\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&y\\-1&0\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}z&-1\\1&2\end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A}-2\mathbf{B}=\mathbf{CA}$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&1\\-2&0\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2x&y-1\\-5&-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&1\\z&0\end{bmatrix}$

7. Vypočítejte hodnost následujících matic:

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix} \qquad b)\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$c)\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad d)\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

8. Vyšetřete hodnost následujících matic v závislosti na parametrech α, β:

$$a)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 18 \\ \alpha & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad b)\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & \alpha & 10 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha & 3 \\ 5 & 10 & 30 & -5 \end{bmatrix}$$

$$c)\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ \alpha & \beta & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad d)\quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ \alpha & 2 & 1 & 1 \\ \beta & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Vypočítejte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ a proveďte zkoušku:

$$a)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad b)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$c)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \qquad d)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad f)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Vypočítejte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ a proveďte zkoušku:

$$a)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$

Výsledky

1. a) $-1, 1$, b) $-2, -7$, c) $4, -2$, d) $8, 22$, e) $13, -7$, f) $9, 1$;

2. a) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$, c) E_2 pro n sudé, A pro n liché;

3. a) $\begin{bmatrix} b-3a & a \\ 2a & b \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} b-3a & 2a \\ 3a & b \end{bmatrix}$, c) každá čtvercová matice 2. řádu;

4. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ nebo $\begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$, $b \neq 0$, b) $\pm E_2$ nebo $\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}$ nebo $\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$;

5. a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, b) neex.;

6. a) $x = 1, y = -1, z = 1$, b) neex., c) $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2}, z = 2$;

7. a) 2, b) 2, c) 3, d) 3;

8. a) 2 pro $\alpha = 3$, 3 pro $\alpha \neq 3$, b) 2 pro $\alpha = 2$, 3 pro $\alpha \neq 2$, c) 2 pro $\beta = \alpha + 2$, 3 pro $\beta \neq \alpha + 2$, d) 3 pro $\alpha = -2(\beta + 1)$, 4 pro $\alpha \neq -2(\beta + 1)$.

9. a) $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, b) A^T, c) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -4 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, e) neex., f) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

10. a) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.3 Determinanty

Motivace

Uvažujme soustavu

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

dvou rovnic o dvou neznámých. Násobme první rovnici číslem a_{22}, druhou číslem $-a_{12}$ a takto získané rovnice sečteme. Dále vynásobíme první rovnici číslem $-a_{21}$, druhou číslem a_{11} a znovu sečteme. Dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rcl} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 & = & b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{array}$$

Je vidět, že naše soustava bude mít řešení jedině v tom případě, jestliže číslo

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

bude různé od nuly; toto číslo má tedy podstatnou úlohu při řešení naší jednoduché soustavy – determinuje její řešení.

Toto číslo nazveme ***determinantem*** matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ a označujeme ho $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, nebo $|\mathbf{A}|$, popřípadě $det\,\mathbf{A}$.

Označíme-li

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

platí pro řešení naší soustavy

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}\right).$$

Vzorec pro výpočet hodnoty determinantu

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

se nazývá ***křížové pravidlo*** pro determinant druhého řádu (prvky determinantu se násobí do kříže).

Všimneme si ještě soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

První rovnici násobíme číslem

$$|\mathbf{A}_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

druhou číslem

$$|\mathbf{A}_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32},$$

třetí číslem

$$|\mathbf{A}_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$$

a vzniklé rovnice sečteme. Dostaneme

$$(a_{11}|\mathbf{A}_{11}| - a_{21}|\mathbf{A}_{21}| + a_{31}|\mathbf{A}_{31}|)x_1 = b_1|\mathbf{A}_{11}| - b_2|\mathbf{A}_{21}| + b_3|\mathbf{A}_{31}|.$$

Koeficient u x_1 je číslo

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

které opět označíme písmenem D.
Provedeme další analogické úpravy pro osamostatnění proměnných x_2, x_3 a dostaneme

$$\begin{array}{rcrcrcr} Dx_1 & = & b_1|\mathbf{A}_{11}| & - & b_2|\mathbf{A}_{21}| & + & b_3|\mathbf{A}_{31}| \\ Dx_2 & = & -b_1|\mathbf{A}_{12}| & + & b_2|\mathbf{A}_{22}| & - & b_3|\mathbf{A}_{32}| \\ Dx_3 & = & b_1|\mathbf{A}_{13}| & - & b_2|\mathbf{A}_{23}| & + & b_3|\mathbf{A}_{33}| \end{array}$$

a odtud již snadno určíme řešení soustavy za předpokladu, že číslo D je různé od nuly.

Číslo D opět nazveme ***determinantem matice*** $\mathbf{A}$ a označíme ho $|\mathbf{A}|$. Platí tedy

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ \quad -a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{array}$$

Tento postup výpočtu hodnoty determinantu třetího řádu se nazývá ***Sarusovo pravidlo***; asi nejlépe si ho zapamatujeme takto:
Utvoříme následující schema :

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

a budeme násobit trojice prvků v diagonálách shora dolů; ve směru zleva doprava je opatříme znaménkem $+$ a ve směru zprava doleva znaménkem $-$ a vzniklé výrazy sečteme.
Vraťme se k naší soustavě: Jestliže dále označíme

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

platí pro řešení soustavy

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D} \right).$$

Pro řešení rozsáhlejších soustav analogickým způsobem je užitečné zavést pojem determinantu obecně.
Nejdříve připomeneme pojem ***permutace***, potřebný v hlavní definici:

Permutace

Definice 2.52: ***Permutací*** p množiny M rozumíme libovolné bijektivní zobrazení $p : M \to M$. Je-li $M = \{1, 2, ..., n\}$ (množina indexů), p – permutace této množiny, zapisujeme ji obvykle ve tvaru $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(n) \end{pmatrix}$, nebo jednoduše $p = (p(1)\ p(2)\ \cdots\ p(n))$.

Příklad 2.53: Buď $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Definujme zobrazení p předpisem

$$p(1) = 3, \ p(2) = 4, p(3) = 2, \ p(4) = 1.$$

Toto zobrazení je permutace a píšeme

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{neboli} \quad p = (3\ 4\ 2\ 1).$$

Definice 2.54:

1. ***Inverzí*** v permutaci $p = (p(1)\ p(2)\ \cdots\ p(n))$ nazýváme dvojici (i, j) takovou, že $i < j,\ p(i) > p(j)$.
2. Permutace p je ***sudá*** (resp. ***lichá***), má-li sudý (resp. lichý) počet inverzí.
3. Číslo $(-1)^k$, kde k je počet inverzí v permutaci p, se nazývá ***znaménko*** permutace p a značí se $\mathsf{sgn}(p)$.

Příklad 2.55:

a) Identická permutace $id = (1\ 2\ \cdots\ n)$ nemá žádnou inverzi – je sudá.

b) Permutace $p = (2\ 3\ \cdots\ n\ 1)$ má $n - 1$ inverzí.

c) Permutace z předchozího příkladu, $p = (3\ 4\ 2\ 1)$, má 5 inverzí – $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 1)$, $(2, 1)$ – je lichá.

Definice 2.56: ***Inverzní permutace*** k permutaci p je permutace definovaná předpisem $p^{-1} = \{(i, j) | (j, i) \in p\}$.

Příklad 2.57: Je-li $p = (2\ 4\ 1\ 3)$, neboli $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, je $p^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ neboli $p^{-1} = (3\ 1\ 4\ 2)$.

Věta 2.58:

1. *Permutace p a p^{-1} mají stejný počet inverzí.*
2. *Jestliže permutace p' vznikla z p záměnou hodnot na dvou pozicích (**transpozicí**), t.j. existují r, s tak, že $p(r) = p'(s),\ p(s) = p'(r),\ p(i) = p'(i)$ pro $i \neq r, s$, potom $\mathsf{sgn}(p') = -\mathsf{sgn}(p)$.*

Důkaz

1. Tvrzení je zřejmé: Je-li (i, j) inverze v p, tj. $i < j,\ p(j) < p(i)$, potom $(p(j), p(i))$ je inverze v p^{-1}.
2. Prověření tohoto tvrzení je komplikovanější a vyžaduje více znalostí o permutacích, provádět ho nebudeme.

Definice determinantu

Definice 2.59: Nechť je dána čtvercová matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Nechť $p(1), p(2), \cdots, p(n)$ je libovolná permutace čísel $1, 2, ..., n$ (permutací je $n!$). Utvořme součin $a_{1p(1)} \cdot a_{2p(2)} \cdot a_{3p(3)} \cdots a_{np(n)}$ a vynásobme jej číslem (-1) v případě, že permutace je lichá; jinak ponechejme součin beze změny. Provedeme-li to pro všechny permutace, dostaneme $n!$ součinů. Jejich součet se pak nazývá ***determinant n-tého řádu matice* A** a označuje se $|\mathbf{A}|$, popřípadě $det\,\mathbf{A}$. Píšeme

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Platí tedy

$$|\mathbf{A}| = \sum_p \mathsf{sgn}(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)},$$

kde se sčítá přes všechy permutace p množiny $\{1, 2, ..., n\}$.

Jinak řečeno: sestavujeme všechny možné součiny o n činitelích tak, že z každého sloupce a každého řádku vybereme vždy právě jeden činitel. V každém takovém součinu uspořádáme činitele podle prvních (řádkových) indexů (musí se, pochopitelně, vyskytnout všechny); pořadí sloupcových indexů tvoří permutaci, jejíž sudost nebo lichost určuje znaménko tohoto součinu ve výsledném součtu. Takových součinů je tolik, jako je permutací množiny sloupcových indexů – tedy pro determinant n-tého řádu je to $n!$. Součet všech takto vytvořených součinů opatřených příslušnými znaménky je pak hodnota determinantu.

Jako cvičení je dobré ověřit, že křížové resp. Sarusovo pravidlo, jak jsme je výše uvedli, přesně odpovídá výpočtu hodnoty determinantu druhého resp. třetího řádu podle definice.

Využitím hlubší znalosti vlastností permutací se dá dokázat následující důležitá věta:

Věta 2.60: *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice. Potom platí:* $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$.

Význam věty spočívá v tom, že nahradíme-li v libovolném tvrzení o determinantech slovo „řádek“ slovem „sloupec“, dostáváme opět platné tvrzení o determinantech. Proto budeme formulovat věty pro determinanty pouze pro řádky.

Základní vlastnosti determinantů, výpočet determinantů

Výpočet hodnoty determinantu přímo z definice se prakticky neprovádí – počet sčítanců v definiční sumě je $n!$. Efektivnější metody výpočtu vyplývají z následujících tvrzení:

Věta 2.61: *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice. Potom platí:*

1. *Jestliže matice* $\mathbf{A}$ *obsahuje nulový řádek, potom* $|\mathbf{A}| = 0$.
2. *Jestliže matice* $\mathbf{B}$ *vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *výměnou dvou řádků, potom platí* $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$.

3. *Jestliže matice* $\mathbf{A}$ *má dva řádky stejné, potom* $|\mathbf{A}| = 0$.
4. *Jestliže* $\mathbf{B}$ *vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *vynásobením jednoho řádku číslem* λ*, potom platí* $|\mathbf{B}| = \lambda|\mathbf{A}|$.
5. *Pro libovolné číslo* $j \in \{1, 2, ..., n\}$ *platí*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1}+b_{j1} & \cdots & a_{jn}+b_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. *Determinant matice, v níž je jeden řádek lineární kombinací ostatních, je roven nule.*
7. *Determinant se nezmění, jestliže k libovolnému řádku přičteme lineární kombinaci ostatních.*
8. *Determinant trojúhelníkové resp. diagonální matice je roven součinu prvků v její hlavní diagonále.*
9. *Determinant jednotkové matice je roven jedné.*

Důkaz spočívá v aplikaci definice determinantu; je vhodné jako cvičení prověřit některou část na determinantu třetího nebo raději čtvrtého řádu.

Příklad 2.62: Máme vyjádřit následující součet tří determinantů jedním determinantem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Řešení: Ve druhém determinantu zaměníme 2. a 3. řádek, ve třetím nejdříve 2. a 3. řádek a poté 1. a 2. řádek; vzniklý 2. řádek násobíme koeficientem 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 10 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Vzniklé determinanty se liší pouze ve druhém řádku, podle části 5. věty 2.61 tedy dostaneme

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & 9 & 15 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Poznámka: Hodnotu determinantu můžeme vyčíslit tak, že pomocí pravidel ve větě 2.61 (Gaussovou eliminací) matici upravíme na trojúhelníkový tvar a poté vynásobíme prvky v hlavní diagonále:

Příklad 2.63: Pomocí dovolených úprav máme vypočítat hodnotu determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

<u>**Řešení:**</u> Provedeme postupně následující operace:
1) 2.ř.-1.ř., 3.ř.-2.ř., 4.ř.-3.ř.;
2) 3.ř.-2.ř., 4.ř.-3.ř.;
3) 4.ř.-3.ř.:

$$D =^{1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} =^{2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =^{3)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

To je determinant horní trojúhelníkové matice, a tedy $D = 1$.

Pomocí podrobnějšího rozepsání definice determinantu dostaneme rekurzivní metodu pro výpočet determinantu; nejdříve definujeme pomocný pojem ***algebraického doplňku*** a dále pojem ***adjungované matice***, který budeme později potřebovat:

Definice 2.64:

1. Je-li $|\mathbf{A}_{ij}|$ determinant submatice (***subdeterminant***) matice $\mathbf{A}$, která je příslušná k prvku a_{ij}, tedy vznikla vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce v matici $\mathbf{A}$, potom číslo $\mathcal{A}_{ij}$ definované předpisem

   $$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$$

   se nazývá ***algebraickým doplňkem*** prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$.

2. Matice

   $$\mathbf{A}^* = (\mathcal{A}_{ij})^T$$

   se nazývá ***adjungovaná matice*** k matici $\mathbf{A}$.

Příklad 2.65: Vypočítáme $|\mathbf{A}|$ a $\mathbf{A}^*$, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Řešení:

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1}\,\tfrac{1}{9}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{9}(-1+4) = \tfrac{1}{3}$$

$$\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2}\,\tfrac{1}{9}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{9}(2+4) = -\tfrac{2}{3}$$

$$\mathcal{A}_{13} = (-1)^{1+3}\,\tfrac{1}{9}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{9}(4+2) = \tfrac{2}{3}$$

$$\mathcal{A}_{21} = (-1)^{2+1}\,\tfrac{1}{9}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{9}(-2-4) = \tfrac{2}{3}$$

$$\mathcal{A}_{22} = (-1)^{2+2}\,\tfrac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{9}(1-4) = -\tfrac{1}{3}$$

$$\mathcal{A}_{23} = (-1)^{2+3}\,\tfrac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{9}(2+4) = -\tfrac{2}{3}$$

$$\mathcal{A}_{31} = (-1)^{3+1}\,\tfrac{1}{9}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{9}(4+2) = \tfrac{2}{3}$$

$$\mathcal{A}_{32} = (-1)^{3+2}\,\tfrac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{9}(-2-4) = \tfrac{2}{3}$$

$$\mathcal{A}_{33} = (-1)^{3+3}\,\tfrac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{9}(-1+4) = \tfrac{1}{3}$$

$$(\mathcal{A}_{ij}) = \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A}^* = (\mathcal{A}_{ij})^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Pomocí pojmu algebraického doplňku můžeme formulovat větu, na základě které se skutečně vyhodnocují determinanty řádu většího než tři:

Věta 2.66: **(Laplaceova o rozvoji determinantu)** *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice n-tého řádu a nechť r je libovolné číslo z množiny* $\{1, 2, ..., n\}$. *Potom platí vztahy*

$$|\mathbf{A}| = a_{r1}\mathcal{A}_{r1} + a_{r2}\mathcal{A}_{r2} + \cdots + a_{rn}\mathcal{A}_{rn}$$

– ***rozvoj determinantu podle r-tého řádku*** *a*

$$|\mathbf{A}| = a_{1r}\mathcal{A}_{1r} + a_{2r}\mathcal{A}_{2r} + \cdots + a_{nr}\mathcal{A}_{nr}$$

– ***rozvoj determinantu podle r-tého sloupce.***

Důkaz spočívá v podrobnějším rozepsání definice determinantu; opět je dobré ověřit tvrzení věty na determinantu čtvrtého řádu. Odtud zobecněním bude patrný postup v obecném případě.

Příklad 2.67: Máme vypočítat hodnotu determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 2 \end{vmatrix}.$$

Řešení: Provedeme rozvoj podle prvního sloupce:

$$D = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 5 & 9 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Determinanty třetího řádu vypočítáme Sarusovým pravidlem a dostaneme

$$D = 1 \cdot 201 - 2 \cdot (-43) - 3 \cdot (-19) = 344.$$

Věta 2.68: **(Determinant součinu matic)** *Nechť* $\mathbf{A},\mathbf{B}$ *jsou čtvercové matice n-tého řádu. Potom platí:* $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

Důkaz opět spočívá v podrobném rozepsání definice determinantů obou násobených matic a je dost pracný.

Věta 2.69: *Čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *je regulární, právě když pro její determinant platí* $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Důkaz: Směr $\Rightarrow$ je důsledkem věty 2.68;

Nechť je $\mathbf{A}$ regulární čtvercová matice a $\mathbf{A}^{-1}$ matice k ní inverzní. Tedy $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ a odtud ihned plyne $|\mathbf{A}^{-1}| \cdot |\mathbf{A}| = |\mathbf{E}_n| = 1$, tj. $|\mathbf{A}| \neq 0$ a současně $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$.

Opačný směr dokazovat nebudeme.

Má-li tedy čtvercová matice nenulový determinant, je regulární, a tudíž její hodnost je rovna jejímu řádu. Hodnost matice můžeme určit s využitím jistých determinantů i v případě singulární matice resp. v případě matice obdélníkové; budeme vyšetřovat determinanty čtvercových submatic dané matice. Ty mají svůj speciální název:

Definice 2.70: ***Minorem*** k-tého řádu matice $\mathbf{A}$ typu (m, n) se rozumí determinant čtvercové matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním libovolných $m-k$ řádků a $n-k$ sloupců.

Pro hodnost matice platí věta:

Věta 2.71: *Hodnost matice je rovna maximálnímu řádu nenulových minorů.*

Důkaz provádět nebudeme.

Příklad 2.72: Jsou dány čtyři aritmetické vektory $\mathbf{v}_1 = (3, 1, -2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 2, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (7, -3, -5, -1)$, $\mathbf{v}_4 = (3, -1, 1, -1)$. Máme mezi nimi najít maximální systém lineárně nezávislých vektorů.

Řešení: Hodnost matice

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

je rovna 3, protože

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 50 \neq 0, \quad \text{a} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tedy vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ jsou lineárně nezávislé a vektor $\mathbf{v}_4$ je jejich lineární kombinací. Podobně i vektory $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ jsou lineárně nezávislé a vektor $\mathbf{v}_1$ je jejich lineární kombinací.

Výpočet inverzní matice 2

V této části si uvedeme jiný postup výpočtu inverzní matice, který využívá jejího determinantu; tedy je vhodný pro matice nepříliš vysokých řádů:

Věta 2.73: *Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$ regulární matice a $\mathbf{A}^{-1} = (a_{ij}^*)_n^n$ matice k ní inverzní. Potom platí $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$, tedy*

$$a_{ij}^* = \frac{\mathcal{A}_{ji}}{|\mathbf{A}|},$$

kde číslo $\mathcal{A}_{kl}$ je algebraický doplněk prvku a_{kl} matice $\mathbf{A}$ (viz definice 2.64).

Důkaz Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice, $\mathbf{A}^*$ matice k ní adjungovaná.
Potom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = (\sum_k a_{ik}\mathcal{A}_{jk})$;

Pro $i = j$ je

$$\sum_k a_{ik}\mathcal{A}_{ik} = |\mathbf{A}|$$

podle Laplaceovy věty, Pro $i \neq j$ je $\sum_k a_{ik}\mathcal{A}_{jk}$ roven determinantu, který získáme z $|\mathbf{A}|$ tak, že j-tý řádek nahradíme i-tým, tedy je roven nule.
Odtud

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\cdot\mathbf{E} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}\cdot\left(\frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\mathbf{A}^*\right) = \mathbf{E} \;\Rightarrow\; \frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}.$$

Příklad 2.74: Máme najít inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Platí zřejmě $|\mathbf{A}| = 1$ a dále

$$|\mathbf{A}_{11}| = |\mathbf{A}_{21}| = |\mathbf{A}_{22}| = |\mathbf{A}_{32}| = |\mathbf{A}_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$|\mathbf{A}_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad |\mathbf{A}_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$|\mathbf{A}_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad |\mathbf{A}_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a dále

$$\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1}|\mathbf{A}_{11}| = 1, \quad \mathcal{A}_{21} = (-1)^{2+1}|\mathbf{A}_{21}| = -1, \quad \mathcal{A}_{22} = (-1)^{2+2}|\mathbf{A}_{22}| = 1,$$

$$\mathcal{A}_{32} = (-1)^{3+2}|\mathbf{A}_{32}| = -1, \quad \mathcal{A}_{33} = (-1)^{3+3}|\mathbf{A}_{33}| = 1$$

a ostatní algebraické doplňky jsou rovny nule. Odtud

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jako cvičení se můžete přesvědčit, že $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_3$.

Příklad 2.75: Inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ z příkladu 2.65 je zřejmě přímo rovna matici adjungované a protože platí $|\mathbf{A}| = 1$, dostáváme

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T.$$

Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli

- determinant $|\mathbf{A}|$: číslo přiřazené čtvercové matici $\mathbf{A}$; pro matici řádu n je to součet všech možných součinů o n činitelích vzniklých tak, že z každého řádku a každého sloupce matice vybereme vždy jeden prvek, přičemž každý tento součin je opatřen jistým znaménkem – toto znaménko určíme podle toho, jakou permutaci tvoří sloupcové indexy činitelů v součinu, jestliže činitele uspořádáme podle řádkových indexů;
- vlastnosti determinantu:
  - a) determinant matice s nulovým řádkem (sloupcem) je roven nule,
  - b) determinant s dvěma řádky (sloupci) stejnými je roven nule;
- metody výpočtu determinantu:
  1. pomocí dovolených úprav –
     - a) vynásobení řádku (sloupce) číslem a (výsledek je $a|\mathbf{A}|$),
     - b) přičtení lineární kombinace jiných řádků (sloupců) k danému řádku (sloupci) (hodnota determinantu se nezmění),
  2. pomocí Laplaceova rozvoje.

Otázky a úkoly

1. Co je determinant čtvercové matice $\mathbf{A}$?
2. Na základě definice determinantu odvoďte křížové a Sarusovo pravidlo.
3. Jaké jsou vlastnosti determinantů?
4. Jak se změní determinant n-tého řádu, jestliže jeho řádky napíšeme v obráceném pořadí?
5. Jak se změní determinant, jestliže jeho matici překlopíme podle vedlejší diagonály?
6. Uveďte vztah pro výpočet determinantu pomocí rozvoje podle r-tého řádku.
7. Formulujte větu o rozvoji determinantu podle 1. řádku pro obecný determinant třetího řádu a toto tvrzení prověřte.
8. Naznačte postup při výpočtu determinantu Gaussovou eliminační metodou pro případ determinantu třetího řádu.
9. Na příkladu obecných čtvercových matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ druhého řádu prověřte vztah $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

10. Říkáme, že dvě matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou ***podobné***, existuje-li regulární matice $\mathbf{P}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}$. Ukažte, že podobné matice mají stejné determinanty.

11. Čemu je roven determinant trojúhelníkové matice? Odůvodněte!

12. Jaká je nutná podmínka invertovatelnosti matice? Odůvodněte!

13. Pro jistou matici $\mathbf{A}$ jsme našli inverzní matici

$$a) \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b) \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jsou tyto výsledky správné? Vysvětlete!

14. Jestliže existuje nějaké číslo p tak, že platí $\mathbf{A}^p = \mathbf{0}$, říkáme že $\mathbf{A}$ je ***nilpotentní*** (potenciálně nil = nula). Ukažte, že platí

   a) nilpotentní matice je nutně singulární,
   b) $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{p-1}$.

Cvičení

1. Zjistěte počet inverzí v permutacích

   a) $(3, 4, 2, 5, 1)$
   b) $(6, 4, 3, 5, 1, 2)$
   c) $(5, 6, 3, 4, 1, 2)$
   d) $(1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n)$
   e) $(2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1)$

2. Určete, které ze součinů se vyskytují v definici determinantů příslušného řádu a jaké mají znaménko:

   a) $a_{34}a_{21}a_{43}a_{12}$
   b) $a_{37}a_{45}a_{12}a_{63}a_{74}a_{51}a_{26}$
   c) $a_{23}a_{41}a_{32}a_{13}$
   d) $a_{61}a_{45}a_{23}a_{36}a_{52}a_{14}$
   e) $a_{21}a_{53}a_{44}a_{32}a_{15}$

3. Zvolte čísla i a k tak, aby se daný součin vyskytoval v determinantu příslušného řádu se záporným znaménkem:

   a) $a_{14}a_{i3}a_{k1}a_{42}$
   b) $a_{35}a_{i2}a_{14}a_{k3}a_{51}$
   c) $a_{64}a_{5i}a_{13}a_{2k}a_{46}a_{35}$

4. Použitím definice determinantu vypočítejte koeficienty u x^3 a x^4 ve výrazu

$$P(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

5. Pouze na základě vlastností determinantů ukažte, že platí

$$a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kd & b+ke & c+kf \\ d & e & f \\ m & n & p \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \end{vmatrix} \qquad d) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

6. Vyjádřete uvedené součty nebo rozdíly jediným determinantem:

$$a) \begin{vmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

7. Následující determinanty vypočítejte tak, že je vyjádříte jako součet několika vhodných determinantů:

$$a) \begin{vmatrix} 4165228 & 4165218 \\ 4164926 & 4164936 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 4165218 & 4165228 \\ 4164926 & 4164936 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 2167245 & 2167235 & 2167235 \\ 4132612 & 4132622 & 4132612 \\ -6299847 & -6299847 & -6299837 \end{vmatrix} \qquad d) \begin{vmatrix} 331 & 433 & 333 \\ 1091 & 553 & 453 \\ 353 & 755 & 675 \end{vmatrix}$$

8. Pomocí vhodných úprav vypočítejte determinanty

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

9. Pomocí rozvoje podle vhodného řádku nebo sloupce vypočítejte determinanty

$$a)\quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ a & b & c & d \\ 1 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad c)\quad \begin{vmatrix} 10 & 0 & 3 & a \\ 5 & 0 & b & 0 \\ -2 & c & 8 & 13 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

10. Úpravou na trojúhelníkový tvar vypočítejte determinanty

$$a)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad b)\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

11. Nechť

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Ukažte, že platí rovnost

$$D_n = a_n D_{n-1} + D_{n-2}.$$

12. Řešte rovnice

$$a)\quad \begin{vmatrix} x & x+1 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad b)\quad \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

13. Pro která čísla a, b je matice $\mathbf{A}$ regulární?

$$a)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{bmatrix}$$

14. Pomocí adjungované matice najděte inverzní matice k maticím z příkladu 9 ze Cvičení k předchozí kapitole.

Výsledky

1. a) 6, b) 12, c) 12;
2. a) ano +, b) ano +, c) ne, d) ano +, e) ano -;
3. a) $i = 2, k = 3$, b) $i = 2, k = 4$, c) $i = 1, k = 2$;
4. koeficient u x^4 je 2, u x^3 -1;
5. a) 1.ř+k×2.ř., c) 3.sl. − 1.sl., d) 1.ř. +5× 2.ř.;
6. a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 15 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;
7. a) Determinant je tvaru $\begin{vmatrix} x+10 & x \\ y & y+10 \end{vmatrix} =$
$= \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ y & y+10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 10x + 10y + 100 = 83301540,$
b) Analogicky $10x - 10y = 2920$, c) $100x + 100y + 100z + 1000 = 1000$;
8. a) 1, b) 48, c) 6;
9. a) $10a + 60b + 40c - 45d$, b) $-3a - b - 2c + d$, c) $abcd$;
10. a) -1, b) 9;
12. a) nemá řeš., b) $3, -1$;
13. a) $a \neq b$, b) $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

2.4 Soustavy lineárních rovnic

Všechny naše dosavadní úvahy jsme motivovali snahou řešit soustavy lineárních rovnic; v této kapitole se jim budeme věnovat podrobněji, hlavně z hlediska existence a jednoznačnosti řešení.

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic, rozšířená matice soustavy

Definice 2.76: Mějme libovolnou soustavu m lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Označme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Používáme následující názvy:

$\mathbf{A}$ – ***matice soustavy***,
$\mathbf{x}$ – ***vektor neznámých***,
$\mathbf{b}$ – ***vektor pravých stran***,
$\mathbf{A}|\mathbf{b}$ – ***rozšířená matice soustavy***,

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ – ***maticový zápis soustavy***.

Navíc je-li $\mathbf{A}$ regulární matice (tedy čtvercová), můžeme tuto maticovou rovnici násobit zleva maticí k ní inverzní $\mathbf{A}^{-1}$ a dostaneme řešení ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Tento postup je jednoduchý pouze zdánlivě; výpočet inverzní matice u rozsáhlejších soustav je totiž podstatně náročnější než jiné současné metody přímo řešící soustavu (např. Gaussova eliminační metoda).
V následujícím příkladu si ukážeme, že i v případě soustavy tří rovnic může být postup řešení pomocí inverzní matice zbytečně komplikovaný:

Příklad 2.77: Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Řešení: Matice soustavy má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

je to horní trojúhelníková matice, je gaussovská. Zpětným chodem ihned dostaneme

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1),$$

což ostatně vidíme na první pohled. Máme ovšem řešení najít pomocí inverzní matice. Inverzní matici k matici $\mathbf{A}$ jsme našli v příkladu 2.74, kde vyšlo

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení soustavy pomocí inverzní matice bylo skutečně zbytečně komplikované.

Definujeme ještě další potřebné pojmy:

Definice 2.78: Je-li v soustavě lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ matice $\mathbf{A}$ čtvercová (stejný počet rovnic jako neznámých), nazývá se i soustava ***čtvercová soustava***.

Je-li vektor pravých stran soustavy nulový, tj. $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, nazývá se soustava ***homogenní***.

Řešitelnost soustavy, Frobeniova věta

V odstavci 2.1 jsme viděli, že při přímém chodu v Gaussově eliminační metodě dospějeme k jedné ze dvou možností:

$$a)\quad \left[\begin{array}{cccccccc|c} \neq & x & x & \cdots & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & \neq & x & \cdots & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & 0 & \neq & \cdots & x & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \neq & x & \cdots & x & x \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow k \end{array}$$

$$b)\quad \left[\begin{array}{cccccccc|c} \neq & x & x & \cdots & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & \neq & x & \cdots & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & 0 & \neq & \cdots & x & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \neq & x & \cdots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \neq \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow k \\ \\ \end{array}$$

kde symbol $\neq$ znamená libovolné číslo různé od nuly, x libovolné číslo a ($\longleftarrow k$) označuje k-tý řádek. V prvním případě má soustava řešení (alespoň jedno), ve druhém případě nemá žádné řešení.
Přitom elementární úpravy soustavy rovnic odpovídají příslušným elementárním transformacím řádkových vektorů rozšířené matice soustavy. Všimneme-li si, že v prvním případě mají matice soustavy i rozšířená matice soustavy stejnou hodnost, ve druhém případě nikoliv, vidíme, že platí:

Věta 2.79: **(Frobeniova)**

1. *Soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má řešení, právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ (hodnost matice soustavy je stejná jako hodnost rozšířené matice soustavy).*

2. *Jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = k$, potom v případě $k < n$ má soustava nekonečně mnoho řešení, která mohou být zapsána pomocí $n - k$ parametrů, a v případě $k = n$ má soustava právě jedno řešení.*

Důkaz

1. Jestliže má soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tedy soustava

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

řešení $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, tedy když platí, že

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & + & \cdots & + & a_{1n}y_n & = & b_1 \\ a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \cdots & + & a_{2n}y_n & = & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{m1}y_1 & + & a_{m2}y_2 & + & \cdots & + & a_{mn}y_n & = & b_m \end{array},$$

je poslední sloupec rozšířené matice $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ soustavy lineární kombinací prvních n sloupců, protože poslední rovnosti znamenají,že

$$y_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) + y_2(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) + \cdots + y_n(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) = (b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Odtud plyne, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, protože matice $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ přidáním jediného sloupce, který je lineární kombinací sloupců matice $\mathbf{A}$.

2. Jestliže platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, nemá matice $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ více lineárně nezávislých sloupců než matice $\mathbf{A}$. Její poslední sloupec tedy musí být lineární kombinací předchozích sloupců, tj. existují čísla y_1, y_2, ..., y_n tak, že platí

$$y_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) + y_2(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) + \cdots + y_n(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) = (b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Tedy $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je řešení dané soustavy.

Je-li soustava čtvercová, je buď $h(\mathbf{A}) = n$, nebo $h(\mathbf{A}) < n$. V prvním případě je automaticky $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ a podle Frobeniovy věty má soustava právě jedno řešení a navíc je $|\mathbf{A}| \neq 0$, tj. matice $\mathbf{A}$ je regulární. Ve druhém případě je $|\mathbf{A}| = 0$, tj. matice $\mathbf{A}$ je singulární, a podle Frobeniovy věty soustava buď nemá žádné řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení.
Je-li soustava homogenní, je automaticky splněna podmínka $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = k$ a podle Frobeniovy věty má soustava jedno řešení (pro $k = n$), nebo nekonečně mnoho řešení (pro $k < n$). V prvním případě se pochopitelně jedná pouze o nulové řešení.

Příklad 2.80: Je dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Pomocí Frobeniovy věty máme zjistit, zda soustava má řešení a kolik; v kladném případě všechna řešení najít.

Řešení: Pomocí elementárních úprav vyšetříme hodnosti matic soustavy:
1) 2ř.-2×(1.ř.), 3.ř.-3×(1.ř.), 4.ř.+2×(1.ř.);
2) 2.ř.:(-3);
3) 3.ř.+10×(2.ř.), 4.ř.-7×(2.ř.);
4) 4.ř.+(6/9)×(3.ř.):

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim^{1)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -10 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim^{2)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -10 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim^{3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 6 & 13 \end{array}\right] \sim^{4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tedy $h(\mathbf{A}) = 3,\ h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 4$. Soustava nemá řešení. (Můžeme si povšimnout, že poslední řádek poslední matice vlastně znamená $0 \cdot x_3 = 1$.)

Příklad 2.81: Pomocí Frobeniovy věty rozhodněte, pro která α má následující soustava rovnic alespoň jedno řešení:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & - & z & = & 3 \\ 2\,x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & \alpha\,z & = & 1 \end{array}$$

Řešení: Rozšířená matice soustavy má tvar

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right],$$

matici upravíme na trojúhelníkový tvar (Gaussovou eliminací) a dostaneme

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 5\alpha + 4 & 2 \end{array}\right].$$

Aby soustava měla řešení, nesmí být hodnost rozšířené matice větší než hodnost matice soustavy – tedy musí platit

$$5\alpha + 4 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \neq -\frac{4}{5}.$$

Je-li $\alpha = -\frac{4}{5}$, soustava nemá řešení.

Homogenní soustavy

Uvažujme **homogenní** soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o},\ \mathbf{x} \in \mathcal{V}_n,\ \mathbf{o} \in \mathcal{V}_m$$

(soustavu o n neznámých – počet rovnic může být jiný).
Je zřejmé, že homogenní soustava je vždy řešitelná – nulový vektor $\mathbf{x} = \mathbf{o} \in \mathcal{V}_n$ je vždy jejím řešením; toto řešení se nazývá ***triviální***. Dále platí důležitá věta:

Věta 2.82: *Množina $\mathcal{W}$ všech řešení homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ je podprostorem prostoru $\mathcal{V}_n$ a* $\dim \mathcal{W} = n - h(\mathbf{A})$.

Důkaz:

1. $\mathcal{W} \sqsubseteq \mathcal{V}_n$:
   $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ řešení $\Rightarrow \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$
   $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{A}\alpha\mathbf{x} = \alpha\mathbf{Ax} = \alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

2. Gaussovou eliminační metodou upravíme matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ na stupňovitý tvar $\mathbf{C} = (c_{ij})$ (nulové řádky vynecháme):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \sim \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1h} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2h} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{hh} & \cdots & c_{hn} \end{bmatrix}$$

Soustava tedy přejde na tvar

$$\begin{array}{ccccccccccc} c_{11}y_1 & + & c_{12}y_2 & + & \cdots & + & c_{1h}y_h & + & \cdots & + & c_{1n}y_n & = & 0 \\ & & c_{22}y_2 & + & \cdots & + & c_{2h}y_h & + & \cdots & + & c_{2n}y_n & = & 0 \\ & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & c_{hh}y_h & + & \cdots & + & c_{hn}y_n & = & 0 \end{array}$$

kde $h = h(\mathbf{A})$ a $(y_1, \ldots, y_n)$ je permutace neznámých $(x_1, \ldots, x_n)$ vzniklá při výměně sloupců. $(y_{k+1}, \ldots, y_n)$ jsou volné neznámé, které můžeme volit libovolně. Po úpravě dostaneme

$$\begin{array}{ccccccccccccc} c_{11}y_1 & + & c_{12}y_2 & + & \cdots & + & c_{1h}y_h & = & - & c_{1h+1}y_{h+1} & - & \cdots & - & c_{1n}y_n \\ & & c_{22}y_2 & + & \cdots & + & c_{2h}y_h & = & - & c_{2h+1}y_{h+1} & - & \cdots & - & c_{2n}y_n \\ & & & & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & & & c_{hh}y_h & = & - & c_{hh+1}y_{h+1} & - & \cdots & - & c_{hn}y_n \end{array}$$

což je soustava s regulární maticí při libovolné volbě $(y_{h+1}, \ldots, y_n)$. Položme postupně $(y_{h+1}, \ldots, y_n)$ rovno jednotkovým vektorům z $\mathcal{V}_{n-h}$ a řešení, která obdržíme, označme postupně $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-h}$.
Je-li $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ libovolné řešení naší soustavy, lze je jediným způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\mathbf{y} = y_{h+1}\mathbf{b}_1 + \cdots + y_n\mathbf{b}_{n-h},$$

neboť vektory na levé i pravé straně mají posledních $n-h$ složek stejných, a musí se tedy rovnat. Tedy $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-h}$ je báze $\mathcal{W}$.

Jinak řečeno, smysl předcházející věty je tento:
Máme-li homogenní soustavu lineárních rovnic o n neznámých, jejíž matice má hodnost h (tedy jen h rovnic je nezávislých), potom n-tice, která je řešením soustavy, závisí na $n - h$ parametrech.

Vše snad bude jasnější na základě příkladu.

Nejdříve uvedeme následující definici:

Definice 2.83: Libovolná báze $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$, $r = n - h(\mathbf{A})$, prostoru řešení se nazývá ***fundamentální systém řešení*** homogenní soustavy. Každé řešení $\mathbf{x}$ se dá jediným způsobem vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{b}_r,$$

který se nazývá ***obecné řešení***.

Příklad 2.84: Řešte homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení: Matici soustavy upravíme Gaussovou eliminací (nulové řádky vynecháme):

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -27 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Máme tedy soustavu

$$\begin{aligned} 3x_1 &= -2x_2 - 2x_4 + 8x_5 \\ x_3 &= -3x_5 \end{aligned}$$

Položme postupně

1. $(x_2, x_4, x_5) = (1, 0, 0)$,
2. $(x_2, x_4, x_5) = (0, 1, 0)$,
3. $(x_2, x_4, x_5) = (0, 0, 1)$

a dostaneme

1. $x_1 = -\frac{2}{3}, x_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{b}_1 = (-\frac{2}{3}, 1, 0, 0, 0)$,
2. $x_1 = -\frac{2}{3}, x_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{b}_2 = (-\frac{2}{3}, 0, 0, 1, 0)$,
3. $x_1 = \frac{8}{3}, x_3 = -3 \Rightarrow \mathbf{b}_3 = (\frac{8}{3}, 0, -3, 0, 1)$.

Obecné řešení soustavy má tvar $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \alpha_3\mathbf{b}_3$; položme $\alpha_1 = 3c_1, \alpha_2 = 3c_2, \alpha_3 = 3c_3$ a dostaneme

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Povšimněme si, že pro vektorový prostor $\mathcal{W}$ řešení naší soustavy platí $\mathcal{W} = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle$, $\mathcal{W} \sqsubseteq \mathcal{V}_5$ (soustava má pět neznámých) a $\dim \mathcal{W} = 3 = 5 - h(\mathbf{A})$.

Nehomogenní soustavy

Uvažujme **nehomogenní** soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \in \mathcal{V}_n, \ \mathbf{b} \in \mathcal{V}_m.$$

Pro řešitelnost soustavy, jak víme, platí Frobeniova věta; obecný tvar řešení nehomogenní soustavy popisuje následující věta:

Věta 2.85: Každé řešení $\mathbf{x}$ soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ se dá vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{b}_r,$$

kde $\mathbf{x}^*$ je jedno pevně zvolené řešení dané rovnice (tzv. ***partikulární*** řešení) a $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ je fundamentální systém příslušné homogenní soustavy rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Důkaz se pokuste provést sami dosazením předpokládaného řešení přímo do soutavy.

Příklad 2.86: Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 &= 13 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 &= 20 \end{aligned}$$

Řešení: V příkladu 2.84 jsme řešili příslušnou homogenní soustavu; dostali jsme řešení ve tvaru

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dále se snadno (dosazením) přesvědčíme, že $\mathbf{x}^* = (1, -1, 1, 1, -1)$ je jedno řešení soustavy nehomogenní. Každé řešení nehomogenní rovnice tedy dostaneme volbou konstant ve výrazu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Cramerovo pravidlo

V této části využijeme pojmu determinantu při formulaci zobecněného vztahu pro řešení soustavy lineárních rovnic, analogického s postupem, který jsme odvodili v odstavci 2.3 o motivaci k pojmu determinantu:

Věta 2.87: **(Cramerovo pravidlo)** *Je-li dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, jejíž matice $\mathbf{A}$ je regulární, platí*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}, \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|}, \dots, \frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}|} \right),$$

kde $\mathbf{A}_k$ je matice vytvořená z matice $\mathbf{A}$ tak, že její k-tý sloupec je nahrazen sloupcem pravých stran $\mathbf{b}$.

Důkaz: Řešíme soustavu

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Násobíme zleva inverzní maticí k matici soustavy $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{b}.$$

Odtud

$$x_j = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(b_1\mathcal{A}_{1j} + \cdots + b_n\mathcal{A}_{nj}) = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|}.$$

Příklad 2.88: Užitím Cramerova pravidla máme najít x_1 a x_2 vyhovující soustavě rovnic

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\
x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\
x_3 + 2x_4 &= 0
\end{aligned}$$

<u>Řešení:</u>

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{D} = |\mathbf{A}| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 = 5,$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad x_1 = \frac{\mathbf{D}_1}{\mathbf{D}} = \frac{4}{5},$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \qquad x_2 = \frac{\mathbf{D}_2}{\mathbf{D}} = -\frac{3}{5}.$$

Z hlediska složitosti výpočtu je pro větší počet rovnic Cramerovo pravidlo nevhodné (jeho součástí je výpočet $n+1$ determinantů n-tého řádu; přitom determinant n-tého řádu je součtem $n!$ součinů po n činitelích) – používá se obvykle nejvýše pro tři rovnice o třech neznámých, resp. v situaci, kdy nepotřebujeme najít všechny neznámé, ale třeba jen jednu. Navíc je Cramerovo pravidlo použitelné pouze na čtvercové soustavy.

Většinou se používá Gaussova eliminační metoda nebo některá její modifikace. Při jejich použití není třeba předem vědět, zda soustava má či nemá řešení – to zjistíme během řešení, protože Frobeniova věta je vlastně výsledkem této metody. Navíc zde nemusí být stejný počet rovnic jako neznámých.

Poznámka o zaokrouhlovacích chybách a špatně podmíněných soustavách

V této části si povšimneme soustav rovnic z hlediska numerického:

Soustavy rovnic, které vycházejí z praxe, obvykle řešíme s využitím počítače (nebo alespoň na kalkulačce). Při těchto výpočtech jsou vstupující čísla pochopitelně zaokrouhlovány na nějaký konečný počet platných cifer a tím vznikají ***zaokrouhlovací chyby***. Přitom předpokládáme (nebo doufáme), že takové malé změny vedou k výsledkům s malou chybou. Například soustava

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - 1{,}014\,y &= 0 \end{aligned}$$

má řešení $x \doteq 1{,}007$, $y \doteq 0{,}993$, zatímco řešení soustavy, kterou dostaneme zaokrouhlením na dvě desetinná místa:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - 1{,}01\,y &= 0 \end{aligned}$$

je velmi „podobné“: $x \doteq 1{,}005$, $y \doteq 0{,}995$.

Naproti tomu soustava

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 1{,}014\,y &= 0 \end{aligned}$$

má řešení $x \doteq 144{,}9$ $y \doteq -142{,}9$, zatímco řešení „zaokrouhlené soustavy“

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ x & + & 1{,}01\,y & = & 0 \end{array}$$

je $x \doteq 202$ $y \doteq -200$.
Poslední soustava je příkladem tzv. ***špatně podmíněné sousavy***, kdy malá změna v koeficientech soustavy vede k velké změně řešení.

Shrnutí

V této kapitole jsme použili pojmy definované v předchozích třech kapilolách z lineární algebry k podrobnému studiu soustav lineárních rovnic.
Zavedli jsme pojmy související se soustavou lineárních rovnic:

- matice soustavy: matice sestavená z koeficientů levých stran rovnic v soustavě,
- vektor neznámých a vektor pravých stran,
- rozšířená matice soustavy: matice soustavy rozšířená o jeden sloupec tvořený vektorem pravých stran rovnic soustavy.

To nám umožnilo zapsat soustavu v maticovém tvaru $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Věnovali jsme se hlavně řešitelnosti soustav lineárních rovnic; výsledky shrnuje nejdůležitější věta kapitoly o lineární algebře – Frobeniova věta, ze které vyplývá:

1. Homogenní soustava k lineáních rovnic o n neznámých $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má vždy řešení. Toto řešení je
   - právě jedno a to nulové (triviální), je-li $k = n$ a $h(\mathbf{A}) = n$, neboli $|\mathbf{A}| \neq 0$,
   - je jich nekonečně mnoho a jsou závislé na $n - h$ parametrech, je-li $h(\mathbf{A}) = h$.
2. Nehomogenní soustava k lineáních rovnic o n neznámých $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
   - nemá řešení, jestliže hodnost matice soustavy je menší než hodnost rozšířené matice soustavy: $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$,
   - má právě jedno řešení, je-li $k = n$ a hodnost matice soustavy je rovna n: $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$,
   - má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech, je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = h < n$.

Kromě Gaussovy eliminační metody jsme pro řešení soustavy lineárních rovnic uvedli Cramerovo pravidlo, kde jsou k výpočtu použity determinanty, a tudíž je použitelné pouze pro čtvercové soustavy ($k = n$) a jen pro n dostatečně malé. Navíc je nutné, aby soustava měla regulární matici.

Otázky a úkoly

1. Co je to maticový zápis soustavy lineárních rovnic?

2. Co je to matice soustavy, rozšířená matice soustavy?

3. Co je to homogenní resp. nehomogenní systém lineárních rovnic?

4. Ohodnoťte následující úryvky ze studentských prací:

   a) „Je-li dán systém rovnic
   $$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_2 & = & 0 \end{array},$$
   odečteme dvojnásobek první rovnice od druhé a 1/2-násobek druhé rovnice od první. Touto Gaussovou eliminací dostaneme ekvivalentní systém $0 = 0$ a $0 = 0$, a tím dvouparametrický systém řešení $x_1 = a$ (libovolné), $x_2 = b$ (libovolné).“

   b) „Je-li dán systém rovnic
   $$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \end{array},$$
   protože se obě levé strany rovnají nule, rovnají se. Dostáváme tedy rovnici
   $$x_1 + x_2 - 4x_3 = 2x_1 - x_2 + x_3,$$
   která je ekvivalentní se zadaným systémem.“

   Kde jsou chyby?

5. Co je to řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých?

6. Uveďte Frobeniovu větu a naznačte její důkaz.

7. Může mít systém 20-ti lineárních algebraických rovnic o 14-ti neznámých jediné řešení? Může nemít řešení? Může mít řešení závisející na dvou, 14-ti, 16-ti parametrech? Vysvětlete!

8. Uveďte příklad systému m lineárních rovnic o n neznámých, kde
   a) $m = 2$, $n = 4$, b) $m = 1$, $n = 4$,
   který nemá řešení.

9. Může homogenní systém lineárních rovnic nemít řešení? Odůvodněte!

10. Čtvercová soustava homogenních rovnic má netriviální řešení. Co musí platit pro determinant její matice?

11. Co je to fundamentální systém řešení homogenní soustavy lineárních rovnic?

12. Je dán systém lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je řádu 6×6. Gaussovou eliminační metodou jsme našli řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2$, kde a_1, a_2 jsou libovolná čísla. Je $\mathbf{A}$ regulární? Vysvětlete!

13. Formulujte Cramerovo pravidlo a uveďte, pro jaké typy systémů lineárních rovnic se dá použít a pro jaké případy je vhodné je použít.

14. Soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých můžeme interpretovat graficky jako dvě přímky v rovině. Na posledním příkladu této kapitoly naznačte, co znamená graficky špatná podmíněnost soustavy.

Cvičení

1. Následující soustavy rovnic řešte v maticovém tvaru Gaussovou eliminační metodou. Každý krok popište (např. 2.ř. → (2.ř.)+5×(1.ř.)).

a)
$$\begin{aligned} 2x-3y &= 1 \\ 5x+y &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x+y &= 0 \\ 3x-2y &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$x+2y = 4$$

d)
$$\begin{aligned} x-y+z &= 1 \\ 2x-y-z &= 8 \end{aligned}$$

e)
$$2x_1-x_2-x_3-5x_4 = 6$$

f)
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2-x_3-3x_4 &= 0 \\ x_1-x_2+4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 4 \\ 5x+6y+7z &= 8 \\ 9x+10y+11z &= 12 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3 &= 3 \\ x_1-x_2-3x_3 &= 1 \\ x_1-3x_2-4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2 &= 6 \\ 3x_1+2x_2 &= 4 \\ x_1+10x_2 &= -12 \\ 6x_1+11x_2 &= -2 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3+x_4 &= -1 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4 &= 4 \\ x_1+2x_2-x_3-2x_4 &= 5 \\ x_1+x_3 &= 1 \end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned} x_1+x_3 &= 1 \\ x_1+2x_2-x_3-2x_4 &= 5 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4 &= 0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4 &= 4 \end{aligned}$$

l)
$$\begin{aligned} x_3+x_4 &= 2 \\ 4x_2-x_3+x_4 &= 0 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4 &= 4 \end{aligned}$$

m)
$$\begin{aligned} 2x+y+z &= 10 \\ 3x+y-z &= 6 \\ x-2y-4z &= -10 \end{aligned}$$

n)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2 &= 1 \\ x_1+2x_2+x_3 &= 1 \\ x_2+2x_3+x_4 &= 1 \\ x_3+2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

o)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2 &= 0 \\ x_1+2x_2+x_3 &= -1 \\ x_2+2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

p)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_4+2x_5 &= 0 \\ x_1+x_2-x_3 &= 0 \\ x_1+x_2+x_3-3x_4+2x_5 &= 0 \\ 2x_1+2x_2-x_3 \quad x_5 &= 0 \end{aligned}$$

2. Pomocí Frobeniovy věty rozhodněte, při jakých hodnotách parametrů α, β má daná soustava rovnic alespoň jedno řešení:

a)
$$\begin{aligned} \alpha x - 2y + \beta z &= 1\\ -2x + \beta y - 2z &= 3\\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3\\ 2x - y + z &= 0\\ -x + y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1\\ 2x + y + z + 2u &= 0\\ - y - 2z + u &= 0\\ 2y + 2z + \alpha u &= \beta \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} -2x + 2y - z + u &= 2\\ x - y + 3z - u &= -2\\ 3x - 3y + 2z + 2u &= \alpha \end{aligned}$$

3. Rozhodněte, zda daná soustava má řešení. V kladném případě všechna řešení nalezněte.

a)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4\\ x + y - z &= -1\\ 3x - 7y - 2z &= -1\\ -2x + 5y + z &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y + 2z &= -6\\ 2x - y - z &= 4\\ 3x + y - z &= 9\\ 5x + 2y &= 9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z - u &= 0\\ 3x - y + z + u &= 1\\ x + y - 13z + 7u &= 2 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x - y &= 0\\ 3x - z &= 0\\ 4x - u &= 0\\ 8x - 7y + 6z - 5u &= 16 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2x + y + z + u + v &= 2\\ x + 2y + z + u + v &= 0\\ x + y + 3z + u + v &= 3\\ x + y + z + 4u + v &= -2\\ x + y + z + u + 5v &= 5 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u + 5v &= 13\\ 2x + y + 2z + 3u + 4v &= 10\\ 2x + 2y + z + 2u + 3v &= 11\\ 2x + 2y + 2z + u + 2v &= 6\\ 2x + 2y + 2z + 2u + v &= 3 \end{aligned}$$

4. Zjistěte, jaké podmínky musí splňovat koeficienty daných homogenních soustav, aby měly nenulové řešení:

a)
$$\begin{aligned} ax + by + z &= 0\\ cx + dy - u &= 0\\ -ey + cz + au &= 0\\ ey + dz + bu &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} ax + by + cz + du &= 0\\ bx - ay + dz - cu &= 0\\ cx - dy - az + bu &= 0\\ dx + cy - bz - au &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x - by - cz - du - ev &= 0\\ -ax + y - cz - du - ev &= 0\\ -ax - by + z - du - ev &= 0\\ -ax - by - cz + u - ev &= 0\\ -ax - by - cz - du + v &= 0 \end{aligned}$$

5. Zjistěte, pro které parametry λ mají následující homogenní soustavy netriviální řešení (jsou to skutečně homogenní soustavy?). Najděte všechna netriviální řešení daných soustav odpovídající nalezeným hodnotám λ.

$$a)\quad \begin{aligned} 2x+y&=\lambda x\\ x+2y&=\lambda y\end{aligned}\qquad b)\quad \begin{aligned} 2x-y&=\lambda x\\ -x+2y&=\lambda y\end{aligned}\qquad c)\quad \begin{aligned} x-2y&=\lambda x\\ 4x-8y&=\lambda y\end{aligned}$$

$$d)\quad \begin{aligned} z&=\lambda x\\ z&=\lambda y\\ x+y+2z&=\lambda z\end{aligned}\qquad e)\quad \begin{aligned} x+y+z&=\lambda x\\ y+z&=\lambda y\\ 2z&=\lambda z\end{aligned}\qquad f)\quad \begin{aligned} 2x+y+z&=\lambda x\\ x+2y+z&=\lambda y\\ x+y+2z&=\lambda z\end{aligned}$$

6. Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte x_1 a x_2, která vyhovují následujícím soustavám rovnic:

$$a)\quad \begin{aligned} x_1+4x_2&=0\\ 3x_1-x_2&=6\end{aligned}\qquad b)\quad \begin{aligned} ax_1+bx_2&=c\\ dx_1+ex_2&=f\end{aligned}\qquad c)\quad \begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=4\\ 2x_1+3x_2+x_3&=-7\\ 4x_1+x_2+2x_3&=0\end{aligned}$$

$$d)\quad \begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=9\\ x_1+4x_2&=6\\ x_1-5x_3&=2\end{aligned}\qquad e)\quad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1\\ x_1+2x_2+3x_3&=0\\ x_1-x_2+4x_3&=0\end{aligned}\qquad f)\quad \begin{aligned} 2x_1+x_2&=1\\ x_1+2x_2+x_3&=0\\ x_2+2x_3+x_4&=0\\ x_3+2x_4&=0\end{aligned}$$

7. Čyřciferné číslo má ciferný součet 20. Součet jeho posledních dvou cifer je roven druhé cifře zvětšené o 5, součet krajních cifer se rovná druhé cifře zmenšené o 3. Jestliže cifry tohoto čísla napíšeme v opačném pořadí, číslo se zvětší o 2178. Najděte toto číslo.

8. Jestliže jednu stranu trojúhelníka zvětšíme o 11 cm a druhou o totéž zmenšíme, dostaneme rovnostranný trojúhelník. Jestliže první stranu vynásobíme čtyřmi, bude o 10 cm větší než trojnásobek třetí strany. Zjistěte, jak velké jsou strany trojúhelníka.

9. Jestliže se jeden rozměr kvádru zvětší o 1 cm, povrch kvádru se zvětší o 54 cm^2. Jestliže se druhý rozměr kvádru zvětší o 2 cm, povrch kvádru se zvětší o 96 cm^2. Jestliže se třetí rozměr kvádru zvětší o 3 cm, povrch kvádru se zvětší o 126 cm^2. Určete rozměry kvádru.

10. Na koupališti je 5500 lidí. Žen je dvakrát tolik jako mužů a dětí čtyřikrát tolik jako žen. Kolik je mužů, žen a dětí?

11. Kyselina sírová se skládá z vodíku, síry a kyslíku, přičemž poměr hmot vodíku a síry je 1:16 a poměr hmot kyslíku a síry je 2:1. Kolik každého prvku obsahuje 1323 g kyseliny?

12. Řemeslník má čtyři různé slitiny, které obsahují cín, olovo, vizmut a kadmium. První slitina obsahuje 20 kg cínu a 10 kg olova (cínová pájka), druhá slitina obsahuje 6 kg cínu a 12 kg olova (olověná pájka), třetí obsahuje 10,5 kg vizmutu, 6,4 kg olova a

3,1 kg cínu (vizmut – Roseův kov). Poslední slitina obsahuje 10 kg vizmutu, 5 kg olova, 2,5 kg kadmia a 2,5 kg cínu. Jaké množství každé slitiny je třeba použít k přípravě slitiny, která by obsahovala 81 kg vizmutu, 75 kg olova, 15 kg kadmia a 40 kg cínu?

Výsledky

1. a) $\frac{1}{17}(7,-1)$, b) $(0,0)$, c) $(4-2t,t)$, d) $(7+2t,6+3t,t)$, e) $(t,2t-s-5u-6,s,u)$, f) $(2+t-4s,t,s,\frac{1}{3}(2-5s)$, g) $(t-2,3-2t,t)$, h) $(7-5t,t,2-2t)$, i) $\frac{1}{7}(16,-10)$, j) $(1-t,2+t+s,t,s)$, k) nemá řeš., l) $(1-t,t,1+2t,1-2t)$, m) $\frac{1}{4}(14,-3,15)$, n) $\frac{1}{5}(2,1,1,2)$, o) $\frac{1}{2}(-1,2,-5)$, p) $(-t,0,-t,0,t)$;
2. a) nemá řeš. pro $\alpha=\beta\vee\beta=2$, b) nemá řeš. pro $\alpha=-\frac{4}{5}$, c) nemá řeš. pro $\alpha=0\wedge\beta\neq-\frac{4}{7}$, d) má řeš. $\forall\alpha$;
3. a) nemá řeš., b) $(1,2,-4)$, c) $(\frac{1}{4}-t,0,t,\frac{1}{4}+2t)$, d) $(-2,-4,-6,-8)$, e) $(1,-1,1,-1,1)$, f) $(0,2,-2,0,3)$;
4. a) netriv. řešení pro $ad-bc-0\vee ad-bc-e$, b) netriv. řešení pouze pro $(a,b,c,d)=(0,0,0,0)$, c) netriv. řešení pro některé dva parametry současně rovny -1;
5. a) $\lambda_1=3$, $\mathbf{v}_1=\alpha(1,1)$; $\lambda_2=1$, $\mathbf{v}_2=\alpha(-1,1)$, b) $\lambda_1=1$, $\mathbf{v}_1=\alpha(1,1)$; $\lambda_2=3$, $\mathbf{v}_2=\alpha(-1,1)$, c) $\lambda_1=-7$, $\mathbf{v}_1=\alpha(1,4)$; $\lambda_2=0$, $\mathbf{v}_2=\alpha(2,1)$, d) $\lambda_1=1+\sqrt{3}$, $\mathbf{v}_1=\alpha(1,1,1+\sqrt{3})$; $\lambda_2=1-\sqrt{3}$, $\mathbf{v}_2=\alpha(1,1,1-\sqrt{3})$; $\lambda_3=0$, $\mathbf{v}_3=\alpha(-1,1,0)$, e) $\lambda_1=2$, $\mathbf{v}_1=\alpha(2,1,1)$; $\lambda_2=1,\mathbf{v}_2=\alpha(1,0,0)$, f) $\lambda_1=4,\mathbf{v}_1=\alpha(1,1,1)$; $\lambda_2=1,\mathbf{v}_2=\alpha(-1,0,1)+\beta(-1,1,0)$;
6. a) $\mathbf{x}=\frac{1}{13}(24,-6)$, b) $\mathbf{x}=\frac{1}{ae-bd}(ce-bf,af-cd)$, c) $\mathbf{x}=\frac{1}{5}(15,-14,-23)$, d) $\mathbf{x}=\frac{1}{22}(144,-3,20)$, e) $\mathbf{x}=\frac{1}{7}(11,-1,-3)$, f) $\mathbf{x}=\frac{1}{5}(4,-3,2,-1)$;
7. 1793;
8. 43cm, 54cm, 65cm;
9. 9, 12, 15;
10. 500 mužů, 1000 žen, 4000 dětí;
11. 27g vodíku, 432 g síry, 864 g kyslíku;
12. $\frac{9}{50}$kg, $\frac{38}{15}$kg, 2kg, 6kg.

3 Diferenciální počet

3.1 Úvodní poznámky – motivace

Při řešení úloh z fyziky, chemie, technických a jiných vědních oborů, při matematické formulaci zákonů v přírodních vědách užíváme často pojmy jako např. derivace, integrál, diferenciální rovnice. Uveďme několik příkladů:

Příklad 3.1: Problém nalézt rozměry čtvercového otevřeného bazénu daného objemu V tak, aby na obložení jeho stěn bylo zapotřebí co nejméně materiálu, vede k úloze určit nejmenší hodnotu funkce

$$S = \frac{4V}{x} + x^2, \qquad x > 0,$$

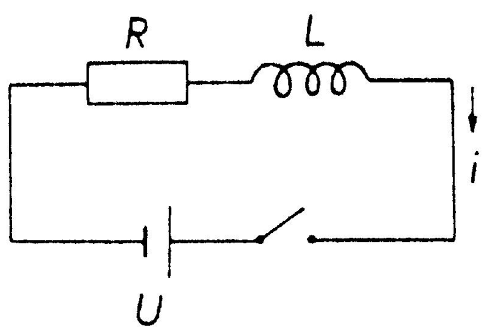
kde S je celkový plošný obsah stěn bazénu, x strana čtvercového dna; hloubka bazénu je $y = V/x^2$. Řešením úlohy vychází

$$x = \sqrt[3]{2V}, \quad y = \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}V}.$$

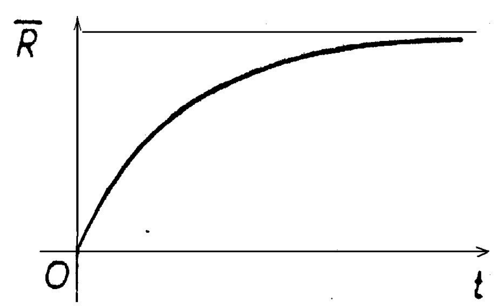
Hodnotu x jsme získali jako kořen rovnice

$$-\frac{4V}{x^2} + 2x = 0,$$

jejíž levá strana je derivací funkce S podle proměnné x.



Obr. 3.35: RL obvod



Obr. 3.36: $i(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-(R/L)t})$

Příklad 3.2: V obrázku 3.35 je schematicky znázorněn elektrický obvod s rezistorem odporu R a induktorem indukčnosti L připojený na zdroj konstantního napětí U. Po zapnutí spínače začne obvodem protékat proud i. Pro jeho průběh v závislosti na čase dostaneme užitím Kirchhoffova zákona vztah

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U.$$

Druhý člen na levé straně této rovnice, zvané diferenciální, tj. součin indukčnosti L a derivace $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ funkce $i = i(t)$, udává indukované napětí na induktoru. Řešením diferenciální rovnice je funkce

$$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right).$$

Průběh proudu je znázorněn na grafu této funkce v obrázku 3.36.

Příklad 3.3: Koname-li sadu měření např. nějaké fyzikální veličiny, je každé jednotlivé měření zatíženo chybou, jejíž příčiny neznáme a pokládáme ji za tzv. náhodnou veličinu. Pravděpodobnost P, že chyba určitého měření leží v intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, je dána vzorcem

$$P(-\varepsilon, \varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-x^2/(2\sigma^2)}\, dx,$$

kde výraz $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-x^2/(2\sigma^2)}\, dx$ se nazývá určitý integrál funkce $e^{-x^2/(2\sigma^2)}$, σ je střední kvadratická chyba měření.

Již z těchto několika málo příkladů je patrné, že pomocí výše použitých pojmů můžeme formulovat úlohy nebo vytvořit matematický model situací v různých oborech technické praxe a jejich řešením získat údaje, které nás zajímají. Vytváření takového aparátu, odvozování a vyšetřování jeho vlastností patří do vědního oboru zvaného ***matematická analýza*** .

3.2 Limita

Při vyšetřování průběhu funkce v celém jejím definičním oboru je především třeba charakterizovat její lokální vlastnosti, tj. chování funkce v okolí jednotlivých bodů. Zajímá nás např. chování dané funkce f, blíží-li se hodnoty argumentu x k některému bodu a. Může se stát, že se při tomto blížení funkční hodnoty blíží k některému číslu b, což budeme vyjadřovat formulací „funkce f má v bodě a limitu rovnu b“. Proces „blížení“ je ovšem nutno matematicky precizovat, což učiníme v této kapitole. Nejprve uvedeme některé problémy, které k této situaci vedou.

V matematické analýze hraje např. důležitou úlohu podíl

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a},$$

kde φ je daná funkce, a pevný bod. Tento podíl tzv. přírůstku funkce $\varphi(x) - \varphi(a)$ k přírůstku argumentu $x - a$ může značit např. průměrnou rychlost pohybu bodu po přímce, jehož zákon dráhy je dán vztahem $y = \varphi(x)$, kde y je dráha, kterou bod urazí za čas x. Zajímá nás, jak se mění hodnota tohoto podílu – jinak řečeno, jak se mění hodnota funkce f dané vztahem

$$f(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a},$$

jestliže se hodnoty argumentu x blíží k číslu a, což často značíme $x \to a$. V uvedeném fyzikálním významu daného podílu se ptáme, jak se mění průměrná rychlost pohybu, když se časový úsek zkracuje.

Je zřejmé, že musí být stále $x \neq a$ a že jmenovatel se blíží k nule; obvykle se blíží k nule i čitatel. Jakých hodnot však při tom nabývá podíl, tj. jaké jsou hodnoty funkce $f(x)$? Uvedeme několik příkladů.

Příklad 3.4:

a) Nechť $\varphi(x) = x^2$, $a = 1$. Potom

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Pro $x \neq 1$ je hodnota funkce f rovna

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1.$$

Když $x \to 1$ (přičemž stále $x \neq 1$), pak $f(x) \to 2$ (viz obr. 3.37).

Jinak formulováno: K libovolně malému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé x, pro něž je $0 < |x - 1| < \delta$, platí $|f(x) - 2| < \varepsilon$, neboli

pro $x \in (1 - \delta, 1 + \delta), x \neq 1$ platí $f(x) \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$.

b) Nechť $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$. Potom

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}.$$

Pro $x \neq 0$ je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

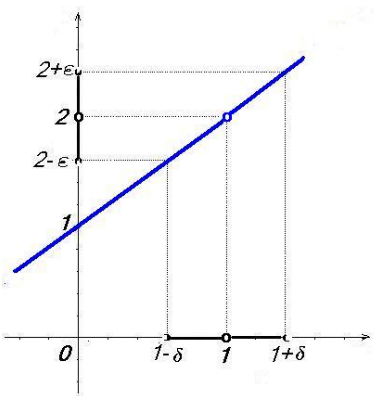
Jestliže $x \to 0$, pak hodnoty $f(x)$ neomezeně vzrůstají, protože jmenovatel zlomku se blíží v kladných hodnotách k nule a čitatel je stále roven 1 (viz obr. 3.38). Formulováno přesněji:

Zvolíme-li libovolně velké $K > 0$, můžeme nalézt $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \neq 0$, pro něž je $|x| < \delta$, platí $f(x) > K$.

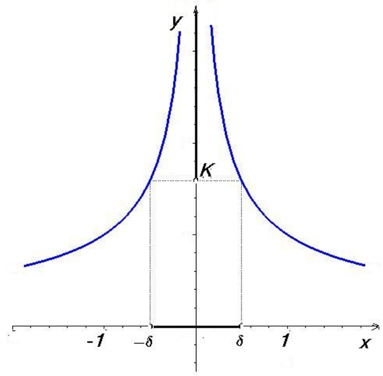
c) Nechť $\varphi(x) = |x|$, $a = 0$. Potom

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases},$$

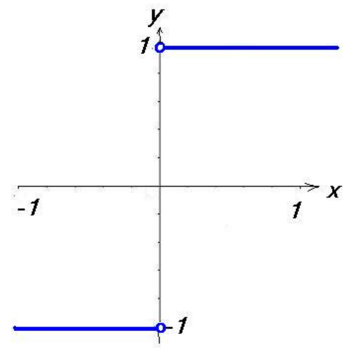
tedy funkční hodnoty dané funkce se „zleva“ blíží k -1 a „zprava“ k 1 (viz obr. 3.39) .



Obr. 3.37: $y = \frac{x^2-1}{x-1}$



Obr. 3.38: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$



Obr. 3.39: $y = \frac{|x|}{x}$

Definice limity

Definici základního prostředku matematické analýzy – limity – budeme formulovat tak, aby byla použitelná i pro zobrazení, která jsou obecnější než reálné funkce reálné proměnné:

Definice 3.5: Řekneme, že funkce f má v bodě a ***limitu*** b, když

- a je hromadným bodem množiny D_f,
- k libovolnému okolí $\mathcal{U}(b)$ limity b existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že funkce f zobrazí redukované okolí $\mathcal{U}^*(a)$ do $\mathcal{U}(b)$, tedy

$$\forall \mathcal{U}(b) \;\; \exists \mathcal{U}(a) : f(\mathcal{U}^*(a)) \subset \mathcal{U}(b).$$

Potom píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ nebo $f(x) \to b$ pro $x \to a$.

Je-li $b \neq \pm\infty$, mluvíme o ***vlastní limitě***, v opačném případě o ***limitě nevlastní.***

Nejčastěji budeme vyšetřovat funkce, které budou definovány na nějakém redukovaném okolí bodu a; v tom případě bude první podmínka v definici limity automaticky splněna.

Jsou-li body a, b vlastní a označíme-li ε, δ poloměry okolí $\mathcal{U}(b)$, $\mathcal{U}(a)$ v tomto pořadí, lze druhou podmínku v definici limity formulovat následovně:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Je-li b nevlastní, např. $b = \infty$, lze tvrzení $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ formulovat takto:

$$\forall K > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K,$$

a analogicky pro a nevlastní, např. $a = \infty$, lze tvrzení $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ formulovat takto:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K > 0 \; \forall x \in D_f : \; x > K \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Jako cvičení zformulujte podobně definici limity pro případy, kdy a nebo b je nevlastní bod $-\infty$.

Příklad 3.6: V příkladu 3.4 jsme ukázali přímo z definice limity, že

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\infty, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} \text{ neex.}$$

Poznámky k definici limity

1. Vlastními slovy můžeme fakt, že funkce f má v bodě a limitu b formulovat takto: Funkční hodnoty funkce f v okolí bodu a lze s libovolnou přesností aproximovat číslem b; neboli blíží-li se bod x k bodu a, liší se hodnota $f(x)$ od čísla b libovolně málo.

2. Všimněte si, že v definici limity je vyloučen bod $x=a$, tudíž limita funkce v bodě a nezávisí na tom, zda a jak je funkce v tomto bodě definovaná. Proto dvě funkce, které se od sebe liší pouze v bodě a, budou mít v tomto bodě tutéž limitu, nebo nebude mít limitu žádná z nich.

3. V definici je využito jen hodnot funkce v okolí bodu a. Proto dvě funkce, které mají tytéž hodnoty ve všech bodech nějakého redukovaného okolí bodu a, mají v tomto bodě tutéž limitu, nebo v něm nemá limitu žádná z nich.

4. Funkce, jejíž limitu počítáme, tedy nemusí být definovaná v bodě a. Zřejmě by ale nemělo smysl, aby v některém redukovaném okolí tohoto bodu neležely vůbec body z definičního oboru funkce f – je tedy přirozené požadovat, aby bod a byl hromadným bodem definičního oboru.

Příklad 3.7:

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$,
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$,
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$,
4. $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty \quad \text{pro}\, a>1$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \text{pro}\, a>1$

Řešení:

1. Jde o limitu konstantní funkce $f(x)=c$. Zvolíme-li $\mathcal{U}(c)$ libovolně, potom $f(x)\in\mathcal{U}(c)$ pro všechna x a tím spíše pro x z nějakého redukovaného okolí bodu a; to platí i v tom případě, že bod a je nevlastní.

2. V tomto případě je $f(x)=x$ a pro každé $\mathcal{U}(a)$ je $f(x)\in\mathcal{U}(a)$, je-li $x\in\mathcal{U}^*(a)$.

3. Zvolme okolí $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ bodu 0 ($\varepsilon > 0$). Potom $f(x) \in (-\varepsilon,\ \varepsilon)$ znamená, že $|\frac{1}{x}| < \varepsilon$. To je splněno jednak pro všechna $x \in (\frac{1}{\varepsilon},\ \infty)$, což je okolí bodu ∞ , jednak pro všechna $x \in (-\infty,\ -\frac{1}{\varepsilon})$, což je okolí bodu $-\infty$.
4. $a^x > K$ pro $x > \log_a K$.
5. $|a^x| = a^x < \varepsilon$ pro $x < \log_a \varepsilon$.

Limita parciální funkce (relativní limita)

Vyšetřujme spolu s limitou funkce f v bodě a také limitu parciální funkce $f/_M$, kde a je hromadný bod množiny M.
Limitu funkce $f/_M$ budeme značit symbolem $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x)$ a nazveme ji ***relativní limitou*** nebo též limitou vzhledem k množině M.

Věta 3.8: *Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, potom pro každou množinu M takovou, že a je hromadným bodem $M \cap D_f$, platí $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = b$.*

Důkaz:

Tvrzení ve větě je zřejmé, protože platí-li, že ke každému okolí $\mathcal{U}(b)$ existuje $\mathcal{U}^*(a)$ tak, že funkce f zobrazí všechny body tohoto okolí do $\mathcal{U}(b)$, tím spíše tam zobrazí všechny body množiny $\mathcal{U}^*(a) \cap M$.

Věta 3.9: *Funkce f má v bodě a nejvýš jednu limitu.*

Důkaz proveďte za cvičení (sporem).

Speciálním případem relativních limit jsou jednostranné limity:

Definice 3.10: Definujeme:

1. ***limitu zprava***: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in (a,\infty)}} f(x)$,
2. ***limitu zleva***: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in (-\infty,a)}} f(x)$.

Věta 3.11: *Funkce f má ve vnitřním bodě definičního oboru limitu, právě když má v tomto bodě obě jednostranné limity a ty se sobě rovnají. Potom platí*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Důkaz:

a) Jestliže existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, existují (podle věty 3.8 o relativní limitě) i obě jednostranné limity, protože

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f/_{(a,\infty)}(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f/_{(-\infty,a)}(x).$$

b) Jestliže existují jednostranné limity a rovnají se b, potom ke každému okolí $\mathcal{U}(b)$ existují okolí $\mathcal{U}_1(a)$, $\mathcal{U}_2(a)$ taková, že pro $x \in \mathcal{U}_1(a) \cap D_f \cap (-\infty, a)$ je $f(x) \in \mathcal{U}(b)$ a pro $x \in \mathcal{U}_2(a) \cap D_f \cap (a, \infty)$ je také $f(x) \in \mathcal{U}(b)$. Označíme-li $\mathcal{U}(a) = \mathcal{U}_1(a) \cap \mathcal{U}_2(a)$, potom pro $x \in \mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ je $f(x) \in \mathcal{U}(b)$.

Příklad 3.12:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, 2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Řešení: 1. Zvolme okolí (K, ∞), kde $K > 0$. Potom pro všechna $x \in (0, \frac{1}{K})$ je $\frac{1}{x} \in (K, \infty)$, přičemž interval $(0, \frac{1}{K})$ je průnikem okolí $(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ bodu 0 s intervalem $(0, \infty)$. Část 2. se ukáže analogicky.

Limita posloupnosti

Protože množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel má jediný hromadný bod ∞, má u posloupností smysl vyšetřovat jen limitu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Pro posloupnost můžeme definici limity napsat v následujícím tvaru:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}, n > K : \quad |a_n - b| < \varepsilon.$$

Formulováno vlastními slovy: Posloupnost (a_n) má limitu b, jestliže v libovolném okolí limity b od jistého indexu leží všechny členy posloupnosti.

Posloupnost, která má vlastní limitu, se nazývá ***konvergentní***, posloupnost, která má nevlastní limitu nebo nemá žádnou limitu se nazývá ***divergentní***.

Příklad 3.13: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Řešení: Posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$ je zúžením funkce $f : f(x) = \frac{1}{x}$ na $\mathbb{N}$, tj. $\left(\frac{1}{n}\right) = f/_{\mathbb{N}}$. Protože již víme, že $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ (příklad 3.7), dostáváme podle věty 3.8 o relativní limitě $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Hromadná hodnota posloupnosti, horní a dolní limita

Definice 3.14: Bod b se nazývá ***hromadnou hodnotou*** posloupnosti (a_n), jestliže pro každé okolí $\mathcal{U}(b)$ je $a_n \in \mathcal{U}(b)$ pro nekonečně mnoho indexů n.

Porovnejme definici hromadné hodnoty posloupnosti s definicí limity, tj. $a_n \in \mathcal{U}(b)$ pro všechna n z některého okolí ∞; takových indexů n je jistě nekonečně mnoho. Odtud vidíme, že pokud má posloupnost limitu, je tato limita její hromadnou hodnotou (a to jedinou). V obecném případě může mít posloupnost více hromadných hodnot; zavádíme následující označení:

Definice 3.15: Největší z hromadných hodnot posloupnosti (a_n) se nazývá ***horní limita*** a značí se $\limsup a_n$ nebo $\overline{\lim} a_n$. Nejmenší z hromadných hodnot posloupnosti (a_n) se nazývá ***dolní limita*** a značí se $\liminf a_n$ nebo $\underline{\lim} a_n$.

Z definice plyne

$$\liminf a_n \leq \limsup a_n,$$

přičemž rovnost nastává, právě když má posloupnost (a_n) limitu. Potom platí

$$\liminf a_n = \limsup a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Příklad 3.16: Posloupnost $1,\ 1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{4},\ \ldots$ má dvě hromadné hodnoty a to 0 a ∞. Proto její dolní limita je 0 a horní limita ∞.

Všimněme si, že ze zadané posloupnosti můžeme vybrat dvě posloupnosti, jejichž limity jsou právě hromadné hodnoty:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Poznamenejme, že tato skutečnost platí pro každou hromadnou hodnotu posloupnosti, tedy je-li číslo b hromadnou hodnotou posloupnosti (a_n), existuje vybraná posloupnost (a_k) z této posloupnosti pro kterou platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = b$.

Věty o limitách

V tomto odstavci uvedeme (převážně bez důkazu) věty o limitách reálných funkcí, které budeme v dalším využívat.

Věta 3.17: *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$. *Potom existuje okolí* $\mathcal{U}(a)$ *tak, že pro všechna* $x \in \mathcal{U}^*(a) \cap D_f \cap D_g$ *platí* $f(x) < g(x)$.

Věta 3.18: *Nechť existují limity* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ *a na jistém okolí* $\mathcal{U}^*(a)$ *platí* $f(x) \leq g(x)$. *Potom je* $b \leq c$.

Věta 3.19: **(O sevření)** *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ *a na jistém ryzím okolí bodu* a *platí*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Potom také $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Příklad 3.20: Nechť $\forall\, x \in \mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ platí

$$|f(x) - b| \leq k|x - a|,$$

kde $a, b, k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. Pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Řešení: Zvolme libovolně okolí $\mathcal{U}(b, \varepsilon)$.
Položíme-li $\delta = \varepsilon/k$, je $\mathcal{U}^*(a) = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - a| < \varepsilon/k\}$. Platí tedy

$$|f(x) - b| \leq k|x - a| < k\,\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon,$$

tedy $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Příklad 3.21: Ukážeme, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a, \qquad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a.$$

Řešení: Použijeme nerovnost $|\sin x| \leq |x|$ která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, a nerovnosti $|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1$. Protože

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x - a}{2} \cos \frac{x + a}{2}, \quad \text{je} \quad |\sin x - \sin a| \leq 2 \left| \frac{x - a}{2} \right| = |x - a|.$$

Odtud podle příkladu 3.20 je $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$.

Analogicky se dokáže tvrzení $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$.

Příklad 3.22: Ukážeme, že $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Řešení: Pro

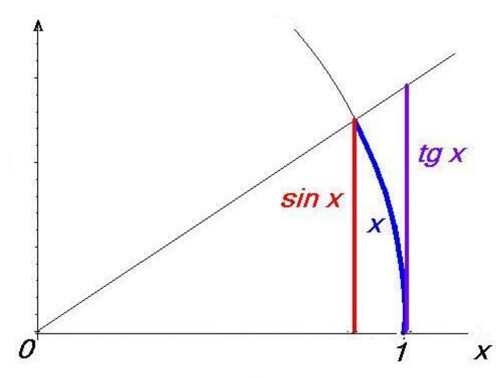
$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{resp.} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

platí nerovnosti

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x, \qquad \text{resp.}$$

$$\operatorname{tg} x \leq x \leq \sin x,$$

které se názorně ověří pomocí zobrazení funkcí $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ na jednotkové kružnici.



Obr. 3.40: K příkladu 3.22

Tedy pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $x \neq 0$ platí

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Víme, že $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1,$ kromě toho také $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ (viz příklad 3.21.)

Zbytek plyne z věty 3.19.

Věta 3.23: *Nechť funkce f, g mají vlastní limity v bodě a a platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, pak*

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = b \pm c,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = b \cdot c,$$

je-li navíc $c \neq 0$, platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$$

Důkaz: Naznačíme důkaz pro limitu součtu.

Máme ukázat, že $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c$. Zvolme tedy libovolně $\varepsilon > 0$; máme najít $\delta > 0$ tak, aby pro každé $x \in \mathcal{U}^*(a) \cap D_{f+g}$ platilo $|f(x) + g(x) - (b + c)| < \varepsilon$.

Položme $\epsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Protože platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, existují δ_1, δ_2 tak, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon_1 \quad \text{a} \quad \forall x : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - c| < \varepsilon_1.$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (b + c)| = |(f(x) - b) + (g(x) - c)| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$$

a to jsme měli dokázat.

Příklad 3.24:

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a), \text{ kde } P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ je polynom.}$$

Řešení: Vyšetřujme limitu k-tého členu polynomu s použitím věty 3.23 a příkladu 3.7. Dostáváme $\lim\limits_{x\to a} a_k x^k = \lim\limits_{x\to a} a_k \cdot (\lim\limits_{x\to a} x)^k = a_k a^k$

a odtud $\lim\limits_{x\to a} P(x) = \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \lim\limits_{x\to a} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a^k = P(a).$

Věta 3.25: *Každá funkce f, která je neklesající (resp. nerostoucí) a shora (resp. zdola) ohraničená na některém intervalu (K, ∞) má v bodě ∞ vlastní limitu b a platí*

$$b = \sup_{x\in(K,\infty)} f(x) \quad \left(\textit{resp. } b = \inf_{x\in(K,\infty)} f(x)\right)$$

Příklad 3.26: Posloupnost $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

Řešení:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right);$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

Odtud je zřejmé, že $a_n < a_{n+1}$, tedy posloupnost je rostoucí. Dále

$$a_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 = 3.$$

To znamená, že posloupnost je shora ohraničená a má vlastní limitu. Limita této posloupnosti hraje v matematické analýze významnou roli. Označujeme ji e a nazýváme ***Eulerovo číslo***:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ ...$$

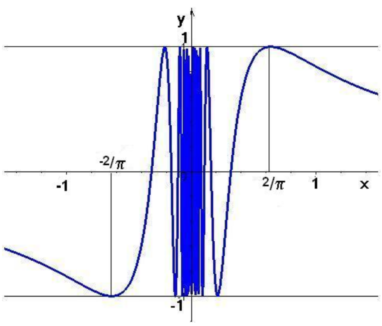
Věty o nevlastních limitách

Věta 3.27:

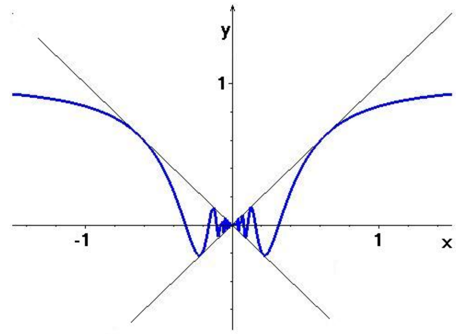
1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}(-f(x)) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$
3. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty,\quad g(x)$ ohraničená $\quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \infty$
5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty,\quad g(x) \geq c,\ c > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \infty$

Věty 4., 5. jsou formulovány pro nevlastní limitu ∞ avšak z věty 1. plyne jejich platnost i pro bod $-\infty$. Kromě toho podmínky položené na funkci g stačí vztáhnout na některé okolí bodu a. Zaměníme-li ve větě 5. podmínku $g(x) \geq c$ na $g(x) \leq -c$, bude limita součinu $-\infty$. navíc z věty 3. a 5. plyne

6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\quad g(x)$ ohraničená $\quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = 0$



Obr. 3.41: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$



Obr. 3.42: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Příklad 3.28: $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, protože funkce sin je ohraničená a $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Příklad 3.29: Nechť $P_m(x)$ je polynom stupně m a $Q_n(x)$ polynom stupně n a nechť $P_m(a) = Q_n(a) = 0$. Máme vypočítat

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Řešení:

a) Nechť

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Rozlišíme tři případy:

1. $m < n$: Vyšetřovanou racionální lomenou funkci rozšíříme výrazem x^{-n} (čitatele i jmenovatele dělíme nejvyšší mocninou x, která se ve zlomku vyskytuje); dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^{m-n} + a_{m-1}x^{m-n-1} + \cdots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_n + b_{n-1}x^{-1} + \cdots + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}};$$

limita jmenovatele je zřejmě rovna b_n (ostatní sčítance obsahují záporné mocniny x, a tedy mají nulovou limitu), protože podle předpokladu je $m < n$, jsou i všechny mocniny x v čitateli záporné, a tedy limita čitatele je rovna nule. Proto limita celého zlomku je rovna nule.

2. $m = n$: Opět dělíme čitatele i jmenovatele vyšetřovaného zlomku nejvyšší mocninou x, která je stejná v čitateli i jmenovateli a je rovna n. Dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_n + b_{n-1}x^{-1} + \cdots + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}},$$

mocniny x v čitateli i jmenovateli jsou záporné, a tedy je limita celého zlomku rovna $\dfrac{a_n}{b_n}$.

3. $m > n$: Nejdříve z polynomu v čitateli i z polynomu ve jmenovateli vytkneme koeficient u nejvyšších mocnin x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m}{b_n} \lim_{x\to\infty} \frac{x^m + \frac{a_{m-1}}{a_m}x^{m-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_m}x + \frac{a_0}{a_m}}{x^n + \frac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1} + \cdots + \frac{b_1}{b_n}x + \frac{b_0}{b_n}}.$$

Čitatele i jmenovatele vydělíme nejvyšší mocninou x vyskytující se ve jmenovateli zlomku, tedy n a dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m}{b_n} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{m-n} + \frac{a_{m-1}}{a_m}x^{m-n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_m}x^{1-n} + \frac{a_0}{a_m}x^{-n}}{1 + \frac{b_{n-1}}{b_n}x^{-1} + \cdots + \frac{b_1}{b_n}x^{1-n} + \frac{b_0}{b_n}x^{-n}};$$

limita zlomku je rovna ∞, výsledek bude $\pm\infty$ podle znaménka podílu $\frac{a_m}{b_n}$.

Závěrem dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad m < n \\ a_n/b_n & \text{pro} \quad m = n \\ \left.\begin{matrix} \infty \\ -\infty \end{matrix}\right\} & \text{pro} \quad \left\{\begin{matrix} m > n,\ a_m/b_n > 0 \\ m > n,\ a_m/b_n < 0 \end{matrix}\right. \end{cases}$$

b) Podle zadání je $x = a$ kořenem obou polynomů; platí tedy

$$P_m(x) = (x-a)^k\, \overline{P}(x), \quad Q_n(x) = (x-a)^l\, \overline{Q}(x),$$

kde $\overline{P}(a) \neq 0$ a $\overline{Q}(a) \neq 0$, přičemž k resp. l je násobnost čísla a jako kořenu polynomu $P_m(x)$ resp. $Q_n(x)$. Odtud

$$\lim_{x\to a} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{\overline{P}(a)}{\overline{Q}(a)} \lim_{x\to a} (x-a)^{k-l}.$$

Opět mohou nastat tři případy:

1. $k > l$: limita je zřejmě rovna nule;
2. $k = l$: limita je rovna $\overline{P}(a)/\overline{Q}(a)$;
3. $k < l$: zde výsledek závisí na tom, zda je číslo $l - k$ sudé nebo liché:
   (a) $k < l$, $l - k$ sudé – limita je rovna nekonečnu opatřenému znaménkem, jaké má podíl $\overline{P}(a)/\overline{Q}(a)$;
   (b) $k < l$, $l - k$ liché – limita neexistuje, jednostranné limity jsou nevlastní s různým znaménkem:
   Je-li $\overline{P}(a)/\overline{Q}(a) > 0$, je limita zprava rovna ∞, limita zleva rovna $-\infty$, pro $\overline{P}(a)/\overline{Q}(a) < 0$ jsou znaménka opačná.

Uvedeme několik konkrétních případů:

Příklad 3.30: Máme vypočítat následující limity racionálních lomených funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$

g) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3-2x}{6-13x^2}$

Řešení:

a) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4$$

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x-2}\cdot\frac{1}{x-1}=3\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\begin{cases}3\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\infty\\ 3\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty\end{cases}$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)^2}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-2)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x^4+x^3+x^2+x-2}=0$$

d) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-2)}{(x-1)^3}=$$
$$=2\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$$

e) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-4\frac{1}{x^2}}{1-3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}=1$$

f) $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}(1+\frac{3}{x})(1+\frac{4}{x})(1+\frac{5}{x})}{1+\frac{1}{x^3}-\frac{11}{x^4}}=0$$

g) $$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x}{6-13x^2}=-\frac{7}{13}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-\frac{2}{7}x}{x^2-\frac{6}{13}}=-\frac{7}{13}\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{2}{7}\frac{1}{x^2})}{1-\frac{6}{13}\frac{1}{x^2}}=-\infty$$

Limita složené funkce

Věta 3.31: *Nechť*

1. *a je hromadný bod množiny D_f, kde $f=h\circ g$,*
2. *existují limity*

$$c=\lim_{x\to a}g(x),\quad d=\lim_{t\to c}h(t),$$

3. *na jistém okolí bodu a je pro $x \neq a$ také $g(x) \neq c$.*

Potom existuje limita složené funkce f v bodě a, přičemž

$$\lim_{x\to a} f(x) = d.$$

Důkaz: Ke každému $\mathcal{U}(d)$ existuje $\mathcal{U}(c)$ a ke každému $\mathcal{U}(c)$ existuje $\mathcal{U}(a)$ tak, že $x \neq a$, $x \in \mathcal{U}(a) \Rightarrow g(x) \in \mathcal{U}(c)$ a podle 3. $g(x) \neq c \Rightarrow h(g(x)) = f(x) \in \mathcal{U}(d)$.

Poznámka: Je-li funkce h spojitá v bodě c (viz 3.34), je možno podmínku 3. vynechat.

V následujícím příkladě naznačíme techniku počítání limit:

Příklad 3.32: Máme vypočítat následující limity:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arctg} x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+9}}{2x+3}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2\sqrt{3x+4\sqrt{5x}}}}{\sqrt{2x+1}}$

Řešení:

a) Limita čitatele i jmenovatele je rovna nule; zlomek upravíme tak, abychom (analogicky jako u racionální lomené funkce) příslušný kořenový činitel vykrátili:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}\,\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2+x-2}{x}\,\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Při výpočtu limity jmenovatele jsme použili větu o limitě složené funkce:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2+x} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(2+x)} = \sqrt{2}.$$

b) Zde můžeme jmenovatele rozložit jako rozdíl třetích mocnin:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x})^3-2^3} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{x+2\sqrt{x}+4} = \frac{1}{12}.$$

c) Využijeme známé limity $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ s vnitřní složkou $x = kt$ pro vhodné k. Nejdříve čitatele i jmenovatele zlomku dělíme x a jednotlivé vzniklé zlomky rozšíříme vhodnou konstantou:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x + \sin 7x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 4x}{x} + \frac{\sin 7x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{4\,\frac{\sin 4x}{4x} + 7\,\frac{\sin 7x}{7x}}{3\,\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{4+7}{3} = \frac{11}{3}.$$

d) Položíme $x = \operatorname{tg} t$ (pro $t \to 0$ je $x \to 0$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t\,\cos t} = 1.$$

e) Využijeme známou goniometrickou identitu $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ a opět větu o limitě složené funkce:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

f) Postupnými úpravami dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\frac{1}{\cos x} - 1)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x\,\sin^2 x}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \frac{1}{2}.$$

g) Limita čitatele i jmenovatele je ∞; budeme postupovat analogicky jako u limit racionálních lomených funkcí, opět s použitím věty o limitě složené funkce:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+9}}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2(3+\frac{9}{x^2})}}{x(2+\frac{3}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{9}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

V čitateli zadaného podílu byla druhá odmocnina výrazu, v němž nejvyšší mocnina x byla 2; můžeme tedy říci, že nejvyšší mocnina x v čitateli je 1 a koeficient u této nejvyšší mocniny x je $\sqrt{3}$. Jmenovatel je polynom 1. stupně s koeficientem u x rovným 2. Vidíme, že náš výsledek je vlastně opět podíl koeficientů u nejvyšších mocnin (jsou-li tyto mocniny stejné).

h) Použijme předchozí úvahu: Nejvyšší mocnina x v čitateli i jmenovateli je $\frac{1}{2}$ a podíl koeficientů u těchto mocnin je $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a to by měl být výsledek. Přesvědčíme se výpočtem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{3x+4\sqrt{5x}}}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sqrt{1+\frac{2}{x}\sqrt{3x+4\sqrt{5x}}}}{\sqrt{x}\,\sqrt{2+\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+2\sqrt{3\,\frac{1}{x}+4\sqrt{5\,\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Příklad 3.33: Pomocí věty o limitě složené funkce odvodíme některé důležité limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{c}{x}\right)^x = e^c$ d) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Řešení:

a) Pro $x > 1$ platí

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

kde $n = [x]$ je celá část x, tj. přirozené číslo n, pro které je

$$n \le x < n+1.$$

Přejdeme-li k limitě pro $x \to \infty$, a tedy i pro $n \to \infty$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Odtud podle věty o sevření 3.19 plyne

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

b) Návod: Použijeme větu o limitě složené funkce tak, že za vnitřní složku volíme funkci $u = -x-1$ (tedy $x = -u-1$).

c) Návod: Použijeme větu o limitě složené funkce tak, že za vnitřní složku volíme funkci $u = \frac{x}{c}$.

d) Návod: Použijeme větu o limitě složené funkce tak, že za vnitřní složku volíme funkci $u = \frac{1}{x}$.

Shrnutí

V této kapitole jsme se věnovali základnímu prostředku, s nímž pracuje matematická analýza – pojmu limity. Definovali jsme

- limitu funkce f v bodě a: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, jestliže k libovolnému okolí $\mathcal{U}(b)$ limity b existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že funkce f zobrazí množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do předem zvoleného $\mathcal{U}(b)$, přitom jsme připustili i možnosti $a = \pm\infty$ resp. $b = \pm\infty$,

- limitu zleva resp. zprava: podmínku v definici limity klademe pouze na body $x < a$ resp. $x > a$; tedy např. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$, jestliže k libovolnému okolí $\mathcal{U}(b)$ limity b existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že funkce f zobrazí množinu $\mathcal{U}^*(a)\cap D_f \cap(-\infty, a)$ do předem zvoleného $\mathcal{U}(b)$,
- speciálně limitu posloupnosti (a_n): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, jestliže k libovolnému okolí $\mathcal{U}(b)$ limity b existuje číslo K tak, že pro všechny indexy n, pro které platí $n > K$, je $a_n \in \mathcal{U}(b)$.

Dále jsme odvodili pravidla pro počítání limit:

- jsou-li f, g funkce a obě limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existují a jsou konečné, platí
  1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$,
  2. $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$ pro každou konstantu $k \in \mathbb{R}$,
  3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$,
  4. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, je-li $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$,
  5. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim_{x\to a} g(x)}$, je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$;
- je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a $|g(x)| < K$, je $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$;
- pro nevlastní limity platí
  1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}(-f(x)) = -\infty$,
  2. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$,
  3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \wedge |g(x)| < K, \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \infty$,
  4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \wedge g(x) \geq c, c > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \infty$;
- je-li $\lim\limits_{u\to b} f(u) = B$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ a navíc existuje takové okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a, že $\forall x \in \mathcal{U}^*(a)$ je $g(x) \neq b$, potom pro limitu složené funkce $f \circ g$ platí $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Otázky a úkoly

1. Které z následujících tvrzení je ekvivalentní s $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$?

   a) pro libovolné okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b a libovolné okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a zobrazí funkce f množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$,

   b) existuje okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b a okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že funkce f zobrazí množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$,

c) pro libovolné okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a existuje okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b tak, že funkce f zobrazí množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$,

d) pro libovolné okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že funkce f zobrazí množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$,

e) existuje okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b tak, že pro libovolné okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a zobrazí funkce f množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$,

f) existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že pro libovolné okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b zobrazí funkce f množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$.

V případě záporné odpovědi uveďte vždy protipříklad.

2. Může existovat $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, jestliže f není definována pro $x = 2$?

3. Je-li $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$, co můžeme říci o $f(2)$?

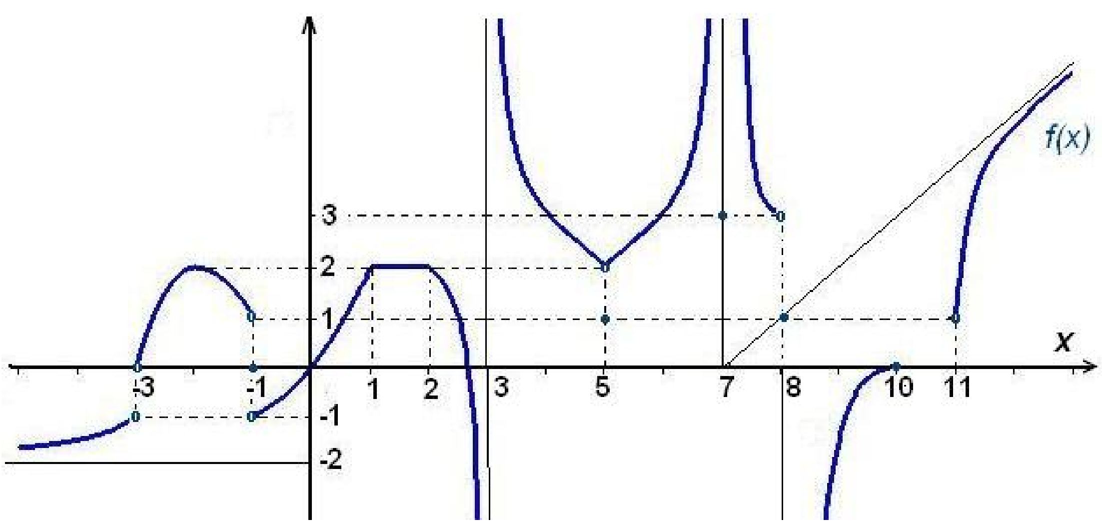
4. Může být $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

5. Může se stát, že f nenabývá nikdy hodnoty 6 a přesto $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$?

6. Může se stát, aby se funkce rovnala dvojnásobku jiné funkce a přesto s ní měla stejnou limitu v nějakém bodě?

7. Ukažte, že číslo b není limitou posloupnosti (a_n), jestliže
   a) $a_n = \frac{1}{n}$, $b = 10^{-7}$; b) $a_n = 13^n$, $b = 10^{-100}$; c) $a_n = \sqrt[n]{n}$, $b = 1 + 10^{-6}$.

8. Nechť funkce f je zadaná grafem v obr. 3.43. Zjistěte, čemu se rovnají limity a funkční hodnoty funkce f ve význačných bodech definičního oboru $-\infty$, -3, -1, 1, 2, 3,
   5, 7, 8, 10, 11, ∞. (Prověřte si geometrickou představu o limitě.)



Obr. 3.43: Geometrická představa o limitě

9. a) Načrtněte graf funkce f pro kterou platí $f(x) = |x| - x$.
   b) Pro která a existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

10. Funkce f je definovaná předpisem $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{pro} \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

    a) Načrtněte graf funkce f.
    b) Existuje $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?
    c) Existuje $\lim\limits_{x\to 3{,}5} f(x)$?
    d) Pro která a existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

11. Funkce f je definovaná předpisem $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{pro} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

    a) Naznačte, jak vypadá graf funkce f.
    b) Existuje $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?
    c) Existuje $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} f(x)$?
    d) Pro která a existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

12. Funkce f je definovaná předpisem $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{pro} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

    a) Naznačte, jak vypadá graf funkce f,
    b) Existuje $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?
    c) Existuje $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?
    d) Existuje $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?
    e) Pro která a existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

13. Nechť $f(x) = x^x$ pro $x > 0$.

    a) Pomocí kalkulačky doplňte tabulku

x	1,0	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01
x^x							

    b) Jaká je asi nejmenší hodnota funkce f na intervalu $(0, 1)$?
    c) Myslíte, že $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ existuje? Jestliže ano, čemu je asi rovna?

Cvičení

1. Vypočítejte následující limity:

   a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^4-1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+3x)^4-(1+4x)^3}{x^2}$

   d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{5x}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(4x-1)^{100}(3x+1)^{200}}{(6x+5)^{300}}$

2. Vypočítejte

   a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{x}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^4+2}}$

3. Vypočítejte

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}$

4. Vypočítejte limity zprava a zleva daných funkcí f v bodě a, jestliže

   a) $f(x) = x\, e^{-1/x}$, $a = 0$ b) $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$, $a = 0$

   c) $f(x) = \frac{2^{1/x}+3}{3^{1/x}+2}$, $a = 0$ d) $f(x) = \frac{x(x+2)}{|x+2|}$, $a = -2$

   e) $f(x) = \frac{x}{|\operatorname{tg} x|}$, $a = 0$ f) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}$, $a = -1$

5. Vypočítejte limity posloupností

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+5}\right)^{n+6}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{3n}{2}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}))$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$, $a > 0$

Výsledky

1. a) $\frac{15}{2}$, b) $\frac{1}{2}$, c) 6, d) ∞, e) $\frac{1}{8}$, f) 6^{-100};

2. a) $\frac{1}{4}$, b) 0, c) 0, d) 1;

3. a) $\frac{5}{6}$, b) 1, c) 1, d) ∞;

4. a) $0; -\infty$, b) $0; 1$, c) $0; \frac{3}{2}$, d) $-2; 2$, e) $1; -1$, f) $\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$;

5. a) e, b) e^3, c) 1, d) 0, e) $\frac{1}{2}$, f) 1 pro $a > 1$, $\frac{1}{2}$ pro $a = 1$, 0 pro $a < 1$.

3.3 Spojitost

Pomocí limity se zavádí pojem spojitosti funkce (zobrazení):

Definice 3.34: Funkce f se nazývá ***spojitá v bodě*** a, platí-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$; to znamená, že
a) $a \in D_f$, tj. $f(a)$ je definováno, b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje, c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Tuto definici můžeme zapsat ve tvaru

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Analogicky můžeme definovat spojitost zleva a zprava:

Definice 3.35: Funkce f se nazývá ***spojitá zprava*** (resp. ***zleva***) ***v bodě*** a, jestliže

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right).$$

Pro snazší zápis budeme používat označení: $f(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $f(a^-) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Klasifikace nespojitostí

Definice 3.36: Existují-li pro funkci f v (konečném) bodě a (konečná) čísla $f(a^-)$, $f(a^+)$ a má-li funkce v a přesto bod nespojitosti, říkáme, že tato funkce má v bodě a bod nespojitosti ***prvního druhu***.

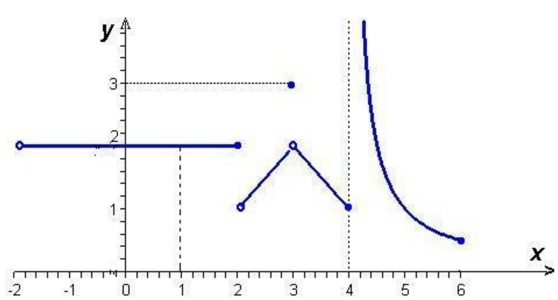
Číslo $\delta = \delta(a) = f(a^+) - f(a^-)$ se nazývá ***skok nespojitosti.***

Je-li $\delta(a) = 0$, říkáme, že funkce f má v tomto bodě ***odstranitelnou nespojitost***.

Je-li $\delta(a) \neq 0$, nazývá se bod $x = a$ ***bodem skokové nespojitosti.***

Definice 3.37: Je-li funkce f definována v okolí bodu a (popřípadě s výjimkou bodu a samotného) a má-li v bodě a bod nespojitosti, který není bodem nespojitosti prvního druhu, říkáme, že funkce má v a ***bod nespojitosti druhého druhu***.

Příklad 3.38: V obr.3.44 je graf jisté funkce f definované na intervalu $(-2, 6\rangle$. Vyšetřeme její spojitost v bodech -2, 1, 2, 3, 4, 6.



$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x \in (-2, 2\rangle \\ x-1 & x \in (2,3) \\ 3 & x = 3 \\ 5-x & x \in (3,4\rangle \\ \frac{1}{x-4} & x \in (4,6\rangle \end{cases}$$

Obr. 3.44: Funkce f z příkladu 3.38

Řešení:

a) $x = -2$: Bod -2 nepatří do definičního oboru funkce f; nemůžeme mluvit ani o spojitosti ani o nespojitosti funkce v tomto bodě.

b) $x = 1$: V bodě 1 je zřejmě funkce f spojitá.

c) $x = 2:\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$, funkce zde má skokovou nespojitost se skokem $\delta = 1 - 2 = -1$.

d) $x = 3:\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2 \neq f(3) = 3$, funkce zde má odstranitelnou nespojitost.

e) $x = 4:\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 1 = f(4),\ \lim\limits_{x\to 4^+} = \infty$, funkce zde má nespojitost druhého druhu, přičemž je zde spojitá zleva.

f) $x = 6:\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = \frac{1}{2} = f(6)$, $x = 6$ je pravý koncový bod definičního intervalu – funkce je zde spojitá (zleva).

Příklad 3.39:

a) Funkce $y = \sin\frac{1}{x}$ má v bodě $x = 0$ nespojitost druhého druhu, protože $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje (ani jednostranné limity), tedy nejsou rovny žádnému konečnému číslu.

b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má v bodě $x = 0$ odstranitelnou nespojitost.

Funkce spojité na intervalu

Definice 3.40: Řekneme, že funkce f je ***spojitá na intervalu*** (a, b), jestliže je spojitá v každém jeho bodě $c \in (a, b)$.

Definice 3.41: Řekneme, že funkce f je ***spojitá na uzavřeném intervalu*** $\langle a, b\rangle$, jestliže je spojitá na otevřeném intervalu (a, b) a navíc je v bodě a spojitá zprava a v bodě b zleva.

Jako cvičení napište analogické definice spojitosti funkce na intervalech $(a, b\rangle$ a $\langle a, b)$.
Pro spojité funkce platí následující věty, které vyplývají z analogických vět o limitách:

Věta 3.42: *Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak jejich součet (nebo rozdíl) $f \pm g$, součin $f \cdot g$ a podíl $\frac{f}{g}$ (v případě, že $g(a) \neq 0$) jsou také spojité v bodě a.*

Věta 3.43: *Je-li funkce g spojitá v bodě a a funkce f v bodě $b = g(a)$, pak složená funkce $F = f \circ g,\ F(x) = f[g(x)]$, je spojitá v bodě a.*

Příklad 3.44:

a) Polynom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n$) je spojitá funkce pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, jak jsme ukázali v příkladu 3.24.

b) Racionální lomená funkce

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

(kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n,\ b_j \in \mathbb{R}, j = 0, \ldots, m$) je spojitá pro všechny hodnoty $x \in \mathbb{R}$, pro něž $Q(x) \neq 0$.

c) Tzv. základní elementární funkce, k nimž patří $\sin x, \cos x, a^x$, kde $a > 0$, jsou spojité na $\mathbb{R}$.

d) Ostatní elementární funkce, které nemusí být všechny definovány a tedy ani spojité na $\mathbb{R}$, mají tu vlastnost, že jsou spojité v každém bodě svého přirozeného definičního oboru.

Vlastnosti funkcí spojitých na uzavřeném intervalu

Věta 3.45: *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je na něm ohraničená.*

Zkráceně zapisujeme skutečnost, že funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ takto: $f \in C_{\langle a,b\rangle}$.

Věta 3.46: (**Weierstrassova**) *Funkce $f \in C_{\langle a,b\rangle}$ nabývá v nějakých bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ svého maxima a minima, tj. existují body α a β patřící do $\langle a, b\rangle$ takové, že*

$$\min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(\alpha), \quad \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(\beta).$$

Tedy $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

Poznámka: Např. funkce $y = x$ je spojitá na otevřeném intervalu $(0, 1)$ a je na něm omezená; avšak na tomto intervalu nedosahuje svého supréma $\sup\limits_{x\in(0,1)} x = 1$, tj. neexistuje $x_0 \in (0, 1)$ takové, že by funkční hodnota v tomto bodě byla rovna 1; funkce je rovna 1 pro $x = 1$. Vidíme, že požadavek spojitosti funkce na *uzavřeném* intervalu $\langle a, b\rangle$ (zahrnujícím oba krajní body a a b) je zásadní.

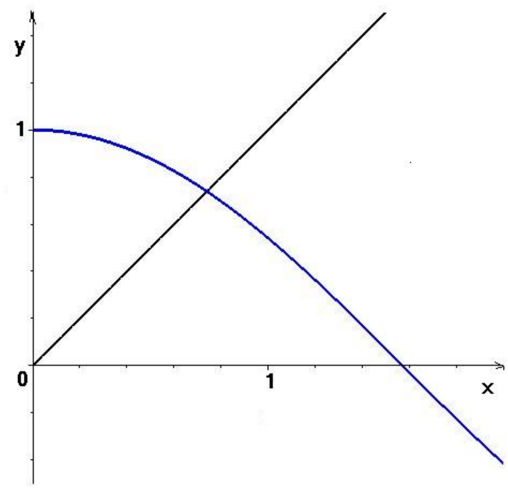
Zřejmě $\sup \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$. Neexistuje však bod x, v němž by funkce $\operatorname{arctg} x$ nabývala hodnoty $\frac{\pi}{2}$; tedy pro $x \geq 0$ nedosahuje svého maxima. Podmínky výše uvedené věty jsou i v tomto případě porušeny, protože definiční obor spojité funkce $\operatorname{arctg} x$ není omezený.

Věta 3.47: *Funkce $f \in C_{\langle a,b\rangle}$ nabývá na tomto intervalu všech hodnot mezi svým maximem a minimem na tomto intervalu; tedy spojitým obrazem intervalu je interval.*

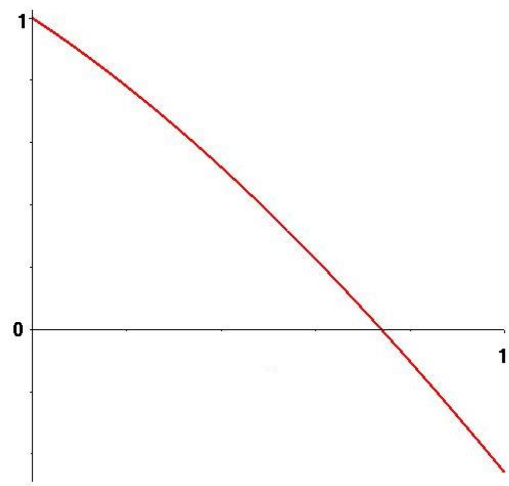
Důsledek: Je-li $f \in C_{\langle a,b\rangle}$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak v otevřeném intervalu (a,b) existuje alespoň jeden bod c, pro nějž $f(c) = 0$.

Důsledek: Každá polynomiální rovnice $P_n(x) = 0$ lichého stupně má nejméně jedno řešení.

Příklad 3.48: Rovnice $\cos x = x$ má kořen ležící na intervalu $(0,\pi)$, protože $f(0) > 0$, $f(\pi) < 0$ kde $f(x) = \cos x - x$ a $f(x)$ je spojitá funkce. (Viz obr. 3.45 a 3.46)



Obr. 3.45: $f(x) = \cos x,\ f(x) = x$



Obr. 3.46: $f(x) = \cos x - x$

Shrnutí

V této kapitole jsme vyšetřovali pojem spojitosti. Řekneme, že funkce f je

- spojitá v bodě a: je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$,
- spojitá zleva (zprava) v bodě a: jsou-li příslušné jednostranné limity rovny funkční hodnotě v bodě a,
- spojitá na intervalu: je-li spojitá v každém bodě intervalu; jedná-li se o uzavřený nebo polouzavřený interval, v koncovém bodě je spojitá zleva nebo zprava („zevnitř“ intervalu).

Není-li funkce f v bodě a spojitá, má zde

- nespojitost 1. druhu: existuje-li $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$ i $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a^-)$ a jsou vlastní; přitom v případě, že se tyto jednostranné limity sobě rovnají, hovoříme o odstranitelné nespojitosti; rozdíl $f(a^+) - f(a^-)$ se nazývá skok funkce f v bodě a,
- nespojitost 2. druhu: jestliže alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě a neexistuje nebo je nevlastní.

Vlastnosti spojitých funkcí:

- Funkce vzniklé pomocí aritmetických operací ze spojitých funkcí a
- složené funkce vzniklé kompozicí spojitých funkcí

jsou spojité ve všech bodech, ve kterých jsou definované. Odtud plyne, že elementární funkce jsou spojité všude, kde jsou definované.

Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, potom

- je zde ohraničená,
- nabývá zde svého maxima a minima,
- nabývá všech hodnot mezi svým maximem a minimem.

Otázky a úkoly

1. Kdy řekneme, že je funkce f spojitá v bodě a? Kdy je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$?
2. Uvedli jsme celou řadu funkcí definovaných na $\mathbb{R}$, které byly nespojité pouze v jednom bodě (např. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ v 0). Může se stát, aby funkce definovaná na $\mathbb{R}$ byla spojitá pouze v jednom bodě? Uveďte příklad takové funkce.
3. Vyšetřete spojitost funkce z obr. 3.43, klasifikujte nespojitosti.
4. Nechť funkce f je v bodě a spojitá a funkce g nespojitá. Zjistěte, zda jsou v bodě a spojité funkce

   a) $f + g$ b) fg c) $f \circ g$ d) $g \circ f$.
   Uveďte příklady.
5. Nechť funkce f i g jsou v bodě a nespojité. Zjistěte, zda mohou být v bodě a spojité funkce

   a) $f + g$ b) fg c) $f \circ g$ d) $g \circ f$.
   Uveďte příklady.
6. Jsou dány funkce f a g předpisy

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \le 1 \\ 2 - x & 1 < x < 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 2 - x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Zjistěte, kde jsou spojité složené funkce $f \circ g$ a $g \circ f$.

7. Nechť f je funkce spojitá na $D_f = \mathbb{R}$. Existuje nutně číslo x tak, že $f(x) = x$?
8. Nechť f je spojitá funkce s $D_f = \langle 0, 1\rangle$, pro kterou platí $f(0) = 1$ a $f(1) = 0$. Existuje nutně číslo x tak, že $f(x) = x$?

Cvičení

1. Zjistěte, kde jsou spojité následující funkce; body nespojitosti klasifikujte:

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-|x|} & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

   e) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2 - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ f) $f(x) = \dfrac{1 - 2e^{x^2}}{1 - e^{x^2}}$

2. Najděte číslo a tak, aby funkce f byla spojitá:

   a) $f(x) = \begin{cases} a\,x & x < 1 \\ 2 - x/a & x \geq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x < 0 \\ a - x & x \geq 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

3. Ukažte, že daná rovnice má na intervalu J řešení:

   a) $x^3 - x - 1 = 0,$ $J = \langle 1, 2\rangle$

   b) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = 0,$ $J = \langle -1{,}1;\, -1\rangle$

   c) $\ln x - 3 + x = 0,$ $J = \langle 1, e\rangle$

Výsledky

1. a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, v 0 skok $\frac{1}{2}$, b) $\mathbb{R}$, c) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, skok ± 2, d) $(0, 1) \cup (1, \infty)$, v 1 nespojitost 2. druhu, e) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, v 0 skok -1, f) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, v 0 nespojitost 2. druhu;
2. a),b),c) $a = 1$.

3.4 Derivace

Motivace

a) Směrnice tečny:
Nechť $\Gamma = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ je graf spojité funkce $y = f(x)$. Zvolme na Γ bod $A = [x_0,\, f(x_0)]$ a jiný bod $X = [x,\, f(x)]$. Sečna S procházející body A a X svírá s kladnou poloosou x úhel β. Pro tangens úhlu β platí

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad .$$

Nechť $x \to x_0$; pak pro spojitou funkci f se hodnota Δy také bude blížit nule a bod X se bude pohybovat podél Γ a bude se přibližovat k bodu A. Jestliže v tomto limitním procesu pro poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ platí

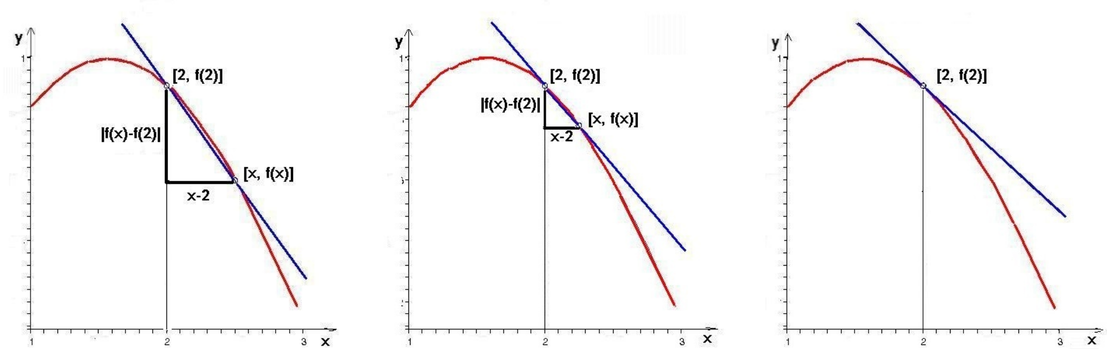
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow k \quad (x \longrightarrow x_0),$$

pak úhel β se bude také blížit k jistému úhlu α, tg$\alpha = k$. Spolu se změnou β bude sečna S rotovat kolem A a bude se v limitě přibližovat k přímce t procházející bodem A a svírající úhel α s kladnou poloosou x. To znamená, že t je tečnou ke grafu Γ v bodě A a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha = k.$$

Jestliže se tedy poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ blíží konečné limitě pro $x \to x_0$, křivka Γ má v bodě A tečnu, jejíž směrnice je rovna této limitě, a má tedy rovnici:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad \text{kde} \quad k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$



Obr. 3.47: Geometrický význam derivace

b) Okamžitá rychlost:
Nechť se bod pohybuje po přímce a nechť funkce $s = f(t)$ vyjadřuje závislost jeho vzdálenosti s od počátečního bodu O (bráno s odpovídajícím znaménkem) v čase t. V okamžiku t je bod ve vzdálenosti $s = f(t)$ od O. V jiném časovém okamžiku $t + \Delta t$ je ve vzdálenosti $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ od O. Jeho průměrná rychlost během časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je vyjádřena jako

$$v_{pr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} .$$

Okamžitá („skutečná“) rychlost v bodu v okamžiku t může přirozeně být definována jako limita, k níž se v_{pr} blíží, když $\Delta t \to 0$, tj.

$$v(t) = v_{ok}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Derivace v bodě

Definice 3.49: Nechť pro funkci f definovanou na nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ existuje vlastní limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Potom tuto limitu nazýváme ***derivací*** funkce f v bodě x_0.
Označíme-li $h = x - x_0$, můžeme psát také

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ .$$

Je-li funkce f definovaná na $\mathcal{U}(x_0) \cap \langle x_0, \infty)$ resp. na $\mathcal{U}(x_0) \cap (-\infty, x_0\rangle$ a existují-li jednostranné limity

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{resp.} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

potom $f'_+(x_0)$ nazýváme ***derivací zprava*** a $f'_-(x_0)$ ***derivací zleva*** funkce f v bodě x_0.

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, řekneme, že je zde ***diferencovatelná***.

Věta 3.50: *Je-li funkce f v bodě x_0 diferencovatelná, je v tomto bodě spojitá.*
Důkaz: Máme ukázat, že z existence limity $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ plyne $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, neboli $\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$. Platí

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0.$$

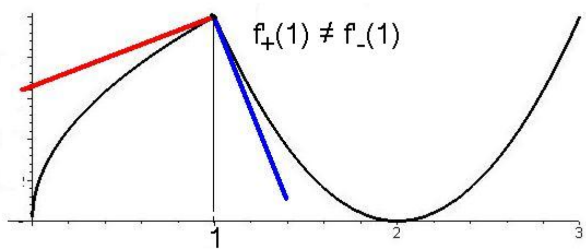
Z věty o jednostranných limitách 3.11 plyne

Věta 3.51: *Funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná, právě když existují jednostranné derivace $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ a jsou si rovny. Potom platí*

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

Definice 3.52:

1. Přímka o rovnici $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ je ***tečna*** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.
2. Je-li $f'(x_0) \neq 0$, je přímka o rovnici $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ ***normála*** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.
3. Polopřímky $y - f(x_0) = f'_+(x_0)(x - x_0), \quad$ pro $x > x_0$
   resp. $y - f(x_0) = f'_-(x_0)(x - x_0), \quad$ pro $x < x_0$
   se nazývají ***pravá*** resp. ***levá polotečna*** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.



Obr. 3.48: Polotečny ke grafu funkce

Jestliže v nějakém bodě grafu funkce neexistuje derivace, ale existuje některá jednostranná derivace, potom polopřímku procházející příslušným bodem na grafu funkce a mající směrnici rovnu této jednostranné derivaci je polotečnou (viz sousední obrázek).

Může se stát, že v nějakém bodě x_0 pro funkci f platí $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ nebo $-\infty$, nebo je nevlastní pouze jedna z jednostranných limit tohoto podílu. I v těchto případech dostáváme jistou informaci o chování grafu funkce f v okolí bodu $[x_0, f(x_0)]$:

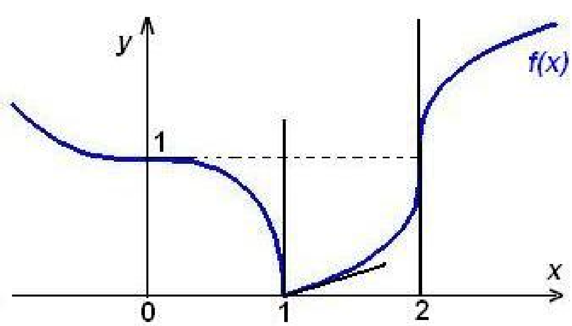
Definice 3.53:

a) Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty\ (-\infty)$,

je přímka o rovnici $x = x_0$ ***svislá tečna*** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

b) Je-li $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty\ (-\infty)$ resp. $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty\ (-\infty)$,

je přímka o rovnici $x = x_0$ ***pravá*** resp. ***levá svislá polotečna*** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.



Obr. 3.49: Svislá tečna a polotečna

Graf funkce f v sousedním obrázku má svislou tečnu $x = 2$ v bodě $[2, 1]$ a levou svislou polotečnu $x = 1$ v bodě $[1, 1]$.

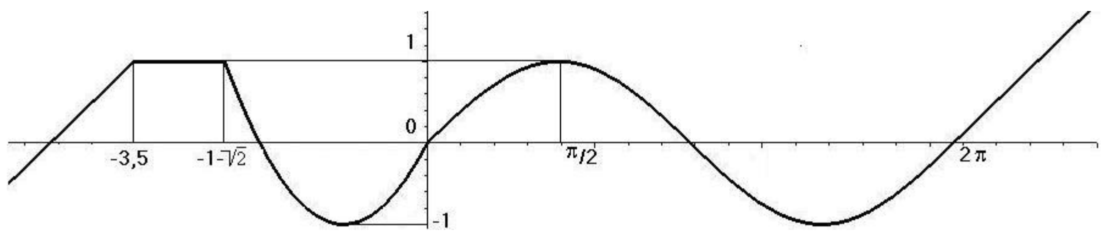
Derivace na intervalu

Definice 3.54: Předpokládejme, že funkce f je definovaná na otevřeném intervalu (a, b) a má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci $f'(x)$. Potom je na (a, b) definovaná funkce $f' : x \mapsto f'(x)$, kterou nazýváme ***derivací*** funkce f.

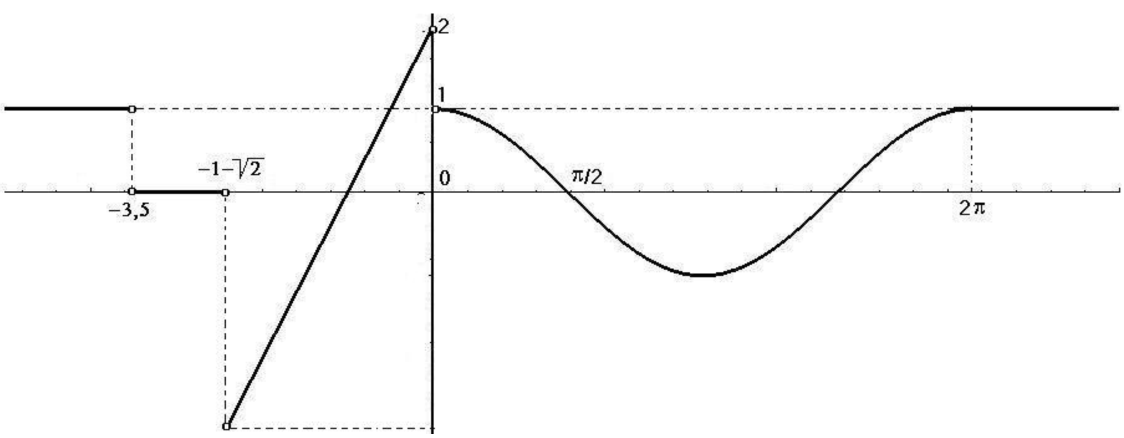
Poznámky k definici

1. Derivace funkce f se též někdy místo $f'(x)$ označuje symbolem $\frac{df(x)}{dx}$ nebo $\frac{dy}{dx}$ (tzv. Leibnizův zápis derivace).
2. Funkci f, která má derivaci na intervalu (a, b) nazýváme diferencovatelnou na (a, b) .
3. Definici je možno použít i pro uzavřený interval $\langle a, b\rangle$, potom však kromě existence derivace v každém bodě intervalu (a, b) požadujeme existenci derivace zprava v bodě a a existenci derivace zleva v bodě b.

Víme, že geometricky znamená derivace směrnici tečny ke grafu funkce; na obrázku 3.50 je nakreslen graf spojité funkce f zadané po částech a v obrázku 3.51 je graf její derivace f'.



Obr. 3.50: Graf funkce f



Obr. 3.51: Graf derivace f'

Máme-li v některé konkrétní situaci (např. ve fyzice) počítat derivaci nějaké zadané funkce, potřebujeme znát derivace základních elementárních funkcí (tedy jakýsi ***slovník***) a početní pravidla pro derivaci (tedy ***gramatiku***).

Toto vše odvodíme v příkladech a větách tohoto odstavce; získané poučky pak v závěru shrneme v tabulce.

Příklad 3.55: Derivace některých elementárních funkcí

a)	$(c)' = 0 \quad (c = konst.)$	*b)*	$(x^n)' = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$
c)	$(\sin x)' = \cos x$	*d)*	$(\cos x)' = -\sin x$
e)	$(e^x)' = e^x$		

Řešení:

a) $(c)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$

b) $(x^n)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x \cdot h^{n-1} + h^n - x^n \right] =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[nx^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n \right] =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \cdots + nxh^{n-1} + h^{n-1} \right] = nx^{n-1}$

c) $(\sin x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[\sin(x+h) - \sin x] = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}] = \lim\limits_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$
$= \cos x$

d) podobně jako předchozí případ

e) $(\mathrm{e}^x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x] = \mathrm{e}^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[\mathrm{e}^h - 1]$;
poslední limitu určíme pomocí věty o limitě složené funkce; volíme-li vnitřní složku (substituci) $u = \mathrm{e}^h - 1$, platí $h \to 0 \Rightarrow u \to 0$, a tedy
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[\mathrm{e}^h - 1] = \lim\limits_{u\to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1$

Základní pravidla pro derivování

Věta 3.56: *Nechť funkce f, g mají derivace $f'(x), g'(x)$ v bodě x. Potom mají v tomto bodě derivaci také funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$, kde $c = konst.$, a je-li $g(x) \neq 0$ také $\frac{f}{g}$, přičemž platí:*

a) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

b) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$,

c) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

d) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{1}{g^2(x)} \left(f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)\right)$.

Důkaz: První dva vztahy plynou bezprostředně z analogických tvrzení o limitách; dokážeme c):

$$(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h)\right] + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Příklad 3.57:

a) $(\sinh x)' = \cosh x$ *b)* $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ *c)* $(x^n)' = n\,x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Řešení:

a) $(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left[(e^x)' - \left(\frac{1}{e^x}\right)'\right] = \frac{1}{2}\left[e^x - \frac{-e^x}{e^{2x}}\right] = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$

b) $(\mathrm{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x \,+\, \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

c) Pro $n \in \mathbb{N}$ je formule odvozena v 3.55, stejně jako pro $n = 0$ (derivace konstanty). Vyšetřujme tedy n celé záporné a označme $-n = m \in \mathbb{N}$. Potom $(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-m\,x^{m-1}}{x^{2m}} = -m\,x^{-m-1} = n\,x^{n-1}$

Derivace inverzní funkce

Věta 3.58: *Nechť*

$f\,:\; y = f(x),\; x \in (a,b)$ $\qquad g\,:\; x = g(y),\; y \in (\alpha,\beta)$

jsou navzájem inverzní funkce, přičemž v bodě $y_0 \in (\alpha,\beta),\; y_0 = f(x_0)$ existuje derivace $g'(y_0) \neq 0$.

Potom v bodě $x_0 = g(y_0)$ existuje také $f'(x_0)$ a platí

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{g'[f(x_0)]}.$$

(V Leibnizově zápisu derivací má poslední formule tvar $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.)

Důkaz: Z a) vyplývá, že funkce f je spojitá na (a,b) a s použitím věty o limitě složené funkce 3.31 s vnitřní složkou $y = f(x)$, tj. $x = g(y)$, dostáváme

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{y\to y_0}\frac{y-y_0}{g(y)-g(y_0)} = \frac{1}{g'(y_0)}.$$

Tato věta se při výpočtu derivací běžně neužívá; pomocí ní odvodíme další vztahy pro derivace elementárních funkcí:

Příklad 3.59:

a) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *b)* $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ *c)* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Řešení:

a) $y = \arcsin x, \quad x = \sin y$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $y = \mathrm{arctg} x, \quad x = \mathrm{tg} y$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y+\sin^2 y} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

c) $y = \ln x, \quad x = e^y$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

Derivace složené funkce

Umět správně použít následující větu je při výpočtu derivací naprosto nezbytné - vyžaduje to pochopitelně aktivní znalost pojmu složené funkce, tj. každou složenou funkci umět rozložit na jednotlivé složky.

Věta 3.60: *Nechť funkce $g : u = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a funkce $f : y = f(u)$ má derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$. Potom složená funkce $f \circ g : y = f[g(x)]$ má derivaci v bodě x_0 a platí*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0).$$

(V Leibnizově zápisu derivace má formule tvar $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.)

Příklad 3.61:

a) $(a^x)' = a^x \ln a \;\; (a > 0)$ *b)* $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ *c)* $(x^a)' = a\, x^{a-1} \;\; (a \in \mathbb{R})$

Řešení:

a) $y = a^x = e^{x \ln a}$ je složená funkce s vnitřní složkou $u = x \ln a$ a vnější složkou $y = e^u$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \ln a = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

b) Pro $x > 0$ je nám vztah již znám.
Je-li $x < 0$, potom $y = \ln|x| = \ln(-x); \quad y = \ln u, \; u = -x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-1) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

c) $y = x^a = e^{a \ln x}, \; y = e^u, \; u = a \ln x, \; x > 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{a}{x} = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

V následujícím příkladu použijeme odvozené vztahy při výpočtu derivace komplikovanějších funkcí:

Příklad 3.62: Máme vypočítat f', je-li f zadaná předpisem

a) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}}$, b) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{1+\sin x}$ c) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

Řešení: a)

$$f(x) = \left[\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]^{\frac{1}{4}}; \qquad f'(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]^{-\frac{3}{4}} \left[\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]' =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right]^{\frac{3}{4}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(x-(1+x^2)^{\frac{1}{2}})'\,(x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}) - (x-(1+x^2)^{\frac{1}{2}})\,(x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}})'}{(x+\sqrt{1+x^2})^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right]^{\frac{3}{4}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(1-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,2x)\,(x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}) - (x-(1+x^2)^{\frac{1}{2}})\,(1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,2x)}{(x+\sqrt{1+x^2})^2} =$$

$=$ | po úpravě (1. a 3. závorku v čitateli převedeme na společného jmenovatele, který je roven $\sqrt{1+x^2}$, a roznásobíme) dostaneme | $=$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left[\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right]^{\frac{3}{4}} \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left[\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

b)

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left[\frac{\cos x}{1+\sin x}\right]^2}\left[\frac{\cos x}{1+\sin x}\right]' =$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}\,\frac{(\cos x)'(1+\sin x)-\cos x(\sin x)'}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2+2\sin x}\left[-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x\right] = -\frac{1}{2}.$$

c)

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x\,\ln\sin x}, \qquad f'(x) = e^{\cos x\,\ln\sin x}\,(\cos x\,\ln\sin x)' =$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\,\ln\sin x + \cos x\,\frac{1}{\sin x}\,\cos x\right) =$$

$$= (\sin x)^{\cos x - 1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\,\ln\sin x\right).$$

Příklad 3.63: Kondenzátor s kapacitou C se vybíjí přes rezistor s odporem R. Máme najít intenzitu proudu v čase t, jestliže pro náboj na deskách kondenzátoru platí

$$Q = 0{,}001\, e^{-t/5}$$

kde náboj Q je vyjádřen v coulombech a čas t v sekundách. Máme zjistit, za jak dlouho klesne intenzita proudu na polovinu své počáteční hodnoty.

Řešení: Intenzita elektrického proudu v ampérech je

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = (0{,}001\, e^{-t/5})' = -0{,}000\,2\, e^{-t/5}$$

Pro $t = 0$ je

$$i_0 = -0{,}000\,2\, A = -0{,}2\, mA$$

Čas v sekundách,za který klesne intenzita proudu na polovinu, najdeme z podmínky

$$\frac{i_0}{2} = -0{,}000\,2\, e^{-t/5} \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{2} = e^{-t/5}.$$

Tedy $t = 5 \ln 2 \doteq 3{,}47\, s$.

Příklad 3.64: Máme najít rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \ln x$, jestliže tečna je rovnoběžná s přímkou $x - y + 5 = 0$.

Řešení: Nechť $A = [x_0, y_0]$ je bod, ve kterém je hledaná tečna rovnoběžná se zadanou přímkou. Z podmínky rovnoběžnosti plyne pro směrnici k_1 tečny a směrnici k_2 dané přímky vztah $k_1 = k_2\, (= 1)$, neboli

$$(\ln x)'_{x=x_0} = 1, \qquad \text{tedy} \qquad \frac{1}{x_0} = 1.$$

Odtud je $x_0 = 1$ a $y_0 = \ln x_0 = 0$.
Rovnice tečny v bodě $A = [1, 0]$ je

$$y - 0 = 1(x - 1) \qquad \text{neboli} \qquad x - y - 1 = 0$$

a rovnice normály

$$y - 0 = -\frac{1}{1}(x - 1) \qquad \text{neboli} \qquad x + y - 1 = 0.$$

Diferenciál funkce

Definice 3.65: Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě x_0. Potom funkci $f'(x_0)\cdot h$ proměnné $h \in \mathbb{R}$ nazýváme ***diferenciálem*** funkce f v bodě x_0 a značíme

$$df(x_0) = f'(x_0)\cdot h.$$

Je-li funkce f diferencovatelná na intervalu (a,b), potom $f'(x)\cdot h$ závisí na dvou proměnných $x \in (a,b)$, $h \in (-\infty, \infty)$. Tento výraz nazýváme ***diferenciálem funkce*** a označujeme $d\,f(x)$, nebo $d\,f$.

Zvolíme-li speciálně $f:\ f(x) = x$, potom $d\,f(x) = dx = 1.h$.
Výsledku $dx = h$ budeme nadále používat všude. Bude tedy

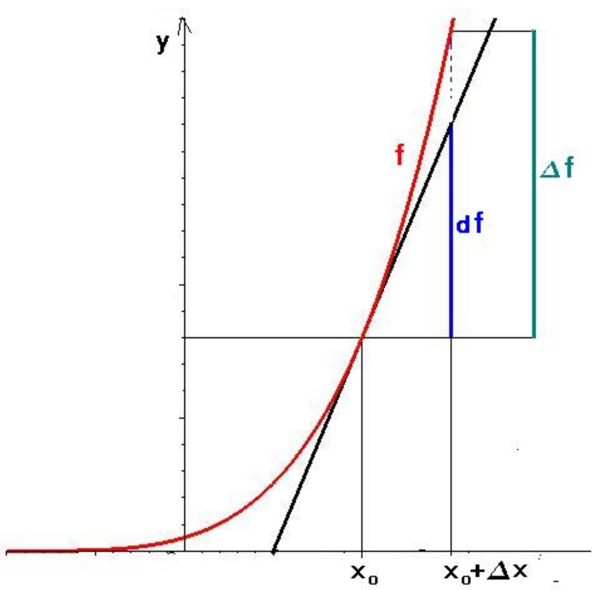
$$d\,f(x) = f'(x)\cdot dx, \quad df(x_0) = f'(x_0)\cdot dx.$$

Odtud lze dělením diferenciálem dx získat již dříve uvedené Leibnizovo vyjádření derivace funkce

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx},\ \ f'(x_0) = \frac{d\,f(x_0)}{dx}.$$

Přírůstek dx nazýváme přírůstkem argumentu.

Geometrický význam diferenciálu



Obr. 3.52: Geometrický význam diferenciálu

Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0,\ f(x_0)]$ má tvar:

$$y - f(x_0) = \mathrm{tg}\alpha\,(x - x_0) =$$

$$= f'(x_0)(x - x_0).$$

Označíme-li tedy

$$x - x_0 = \triangle x,$$

$$f(x) - f(x_0) = \triangle f(x),$$

je geometrický význam diferenciálu

$$df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

„přírůstek po tečně“, tak jak je znázorněno na obr. 3.52.

Aproximace přírůstku funkce diferenciálem

Přírůstek funkce f v bodě x definujeme vztahem $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$.
Je-li $f'(x) \neq 0$, potom

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x)}{d\,f(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{f'(x)\cdot h} = \frac{\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{f'(x)} = 1.$$

Proto pro dostatečně malá h je

$$\frac{\Delta f(x)}{d\,f(x)} \approx 1, \text{ tj. } \Delta f(x) \approx d\,f(x)$$

a můžeme pro malá h přibližně nahradit přírůstek funkce jejím diferenciálem.

Příklad 3.66: S jakou chybou (v procentech) vypočteme objem krychle, jestliže se při měření strany krychle dopustíme nejvýše 1% chyby?

Řešení: Nechť x značí délku strany krychle a V její objem. Nechť dx značí možnou chybu v měření x. Relativní chyba $\frac{dx}{x}$ je v absolutní hodnotě nejvýše 0,01, tedy

$$\frac{|dx|}{x} \leq 0{,}01.$$

Diferenciál dV je odhad chyby při výpočtu objemu, tj. $\frac{dV}{V}$ je odhad relativní chyby objemu. Protože

$$dV = d(x^3) = 3x^2 dx,$$

dostaneme

$$\frac{dV}{V} = \frac{3x^2 dx}{x^3} = 3\frac{dx}{x}.$$

Tedy relativní chyba objemu je trojnásobek relativní chyby v měření strany, tj. asi 3%.

Neurčité výrazy, L'Hospitalovo pravidlo

V tomto odstavci uvedeme pravidlo, které výrazně zjednoduší počítání limit funkcí v bodech, kde není možné přímo dosadit – tak zvaných neurčitých výrazů:

Vyšetřujeme-li limitu $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, nemůžeme použít větu o limitě podílu; je-li navíc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, nejedná se ani o žádnou nevlastní limitu. Přesto uvedený podíl limitu může mít a to dokonce vlastní. Podobná situace vzniká, jsou-li limity funkcí f, g nevlastní, nebo vyšetřujeme-li limitu rozdílu dvou funkcí, z nichž má každá nevlastní limitu ∞ a podobně. Tyto a jim analogické případy limit nazýváme ***neurčité výrazy*** a dělíme je do několika typů ($\lim$ označuje $\lim\limits_{x\to a}$):

1. Je-li $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, potom $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ nazýváme neurčitým výrazem typu $\frac{0}{0}$.
2. Je-li $\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$, potom $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ nazýváme neurčitým výrazem typu $\frac{\infty}{\infty}$.
3. Je-li $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \pm\infty$, potom $\lim f(x) \cdot g(x)$ nazýváme neurčitým výrazem typu $0 \cdot \infty$.
4. Je-li $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$, potom $\lim f(x) - g(x)$ nazýváme neurčitým výrazem typu $\infty - \infty$.
5. Je-li $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$, potom $\lim (f(x))^{g(x)}$ nazýváme neurčitým výrazem typu 1^∞.
6. Je-li $\lim f(x) = \infty, \lim g(x) = 0$, potom $\lim (f(x))^{g(x)}$ nazýváme neurčitým výrazem typu ∞^0.
7. Je-li $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, potom $\lim (f(x))^{g(x)}$ nazýváme neurčitým výrazem typu 0^0.

Uvedeme metodu na výpočet neurčitých výrazů prvních dvou typů; neurčité výrazy zbývajících typů se vždy snažíme na některý z prvních dvou převést.

Věta 3.67: **(První L'Hospitalovo pravidlo)**
Nechť funkce f,g jsou diferencovatelné na některém $\mathcal{U}^*(a)$ a platí

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0,$ *2)* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$ *Potom také* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$

Důkaz: Předpokládejme, že a je vlastní, tedy že platí $f(a) = g(a) = 0$. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

V případě, kdy $f(a)$ nebo $g(a)$ neexistuje (tedy některá z funkcí f, g má v a odstranitelnou singularitu), definiční předpis změníme tak, že položíme $f(a) = g(a) = 0$. V případě $a = \pm\infty$ použijeme substituci $t = \frac{1}{x}$ a větu o limitě složené funkce.

Věta 3.68: **(Druhé L'Hospitalovo pravidlo)**
Nechť funkce f,g jsou diferencovatelné na některém $\mathcal{U}^*(a)$ a platí

1) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$ *2)* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$ *Potom také* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$

Příklad 3.69: Vypočteme následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{\mathrm{tg} 4\pi x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{cotg}\, x - \frac{1}{x})$

Řešení:

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{\operatorname{tg} 4\pi x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{2x-1}}{\frac{4\pi}{\cos^2 4\pi x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos^2 4\pi x}{2\pi(2x-1)} = \frac{1}{2\pi}.$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

c) $$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left(\infty^0\right) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^b,$$

kde $b = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, jak jsme vypočítali v předchozím příkladu. Tedy

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

d) $$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) = (\pm\infty - (\pm\infty)) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = 0.$$

Na poslední neurčitý výraz jsme L'Hospitalovo pravidlo již nepoužili – výhodnější bylo dělit čitatele i jmenovatele x.

Závěrem kapitoly o derivaci uvedeme tři důležité věty o funkcích diferencovatelných na intervalu, které mají značný teoretický, ale i praktický význam:

Věty o přírůstku funkce

Věta 3.70: **(Fermatova)** *Jestliže*

a) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$,

b) v bodě $\xi \in (a, b)$ nabývá své největší (nebo nejmenší) hodnoty,

c) existuje $f'(\xi)$,

pak $f'(\xi) = 0$.

Důkaz: Předpokládejme, že f má v ξ maximum, tedy platí

$$f(x) \le f(\xi)\ \forall x \in \langle a, b\rangle, \quad \text{neboli} \quad f(x) - f(\xi) \le 0.$$

Potom pro podíl $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ platí:

$$x < \xi \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \ge 0, \qquad x > \xi \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \le 0.$$

Tedy

$$\lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'_-(\xi)\geq 0,\qquad \lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'_+(\xi)\leq 0.$$

Protože podle předpokladu existuje $f'(\xi)$, musí platit

$$f'_-(\xi)=f'_+(\xi)=f'_(\xi)=0.$$

Věta 3.71: **(Rolleova)** *Jestliže*

a) f je spojitá na $\langle a,b\rangle$,

b) f je diferencovatelná na (a,b),

c) platí $f(a)=f(b)$,

pak existuje bod $\xi\in(a,b)$ tak, že $f'(\xi)=0$.

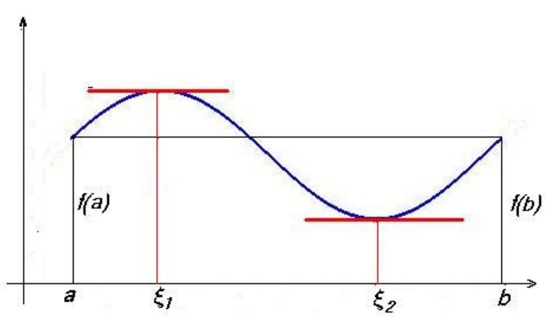
Věta 3.72: **(Lagrangeova o přírůstku funkce)** *Jestliže*

a) f je spojitá na $\langle a,b\rangle$,

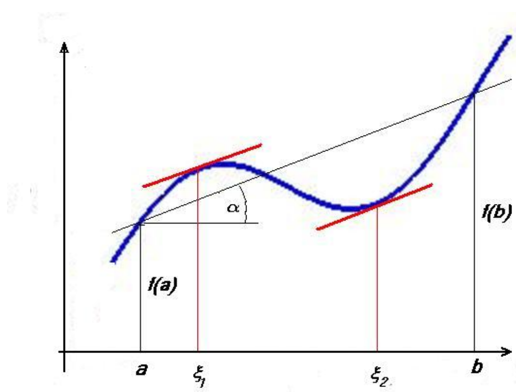
b) f je diferencovatelná na (a,b),

pak existuje $\xi\in(a,b)$ takové, že

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad .$$



Obr. 3.53: Rolleova věta



Obr. 3.54: Lagrangeova věta

Uvedené věty, které se souhrnně nazývají větami o přírůstku funkce, jsou velmi důležité z teoretického hlediska – pomocí nich se dokazují prakticky všechna důležitá tvrzení o diferencovatelných funkcích. Důkazy neuvádíme; platnost tvrzení v nich obsažených názorně ukazují obrázky 3.53 a 3.54.

Důsledek: *Funkce f je konstantní na (a,b), právě když $f'(x)=0$ na (a,b).*

Shrnutí

V této kapitole jsme definovali základní prostředek diferenciálního počtu – derivaci funkce:

- derivace funkce f v bodě x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,
- derivace zleva (zprava): je definovaná pomocí příslušných jednostranných limit,
- derivace funkce f na intervalu: funkce $f' : x \to f'(x)$.

Derivace popisuje „rychlost, s jakou se mění daná veličina“, nejen ve fyzice, ale i v chemii, biologii, ekonomii, managementu,...

Geometrický význam derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce:

- rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$: $y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$,
- rovnice normály ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)$.

Dále jsme zavedli pojem diferenciál funkce – lineární část přírůstku funkce:

- diferenciál funkce f v bodě x_0 vzhledem k přírůstku h : $df(x_0) = f'(x_0)\,h$.

Ukázali jsme, jak můžeme využít derivací při výpočtu limit tzv. neurčitých výrazů (limit, které nelze vypočítat jako funkční hodnoty) – uvedli jsme

- L'Hospitalovo pravidlo: je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, resp. je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ a současně je $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$, je také $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

Na závěr kapitoly jsme uvedli tzv. věty o přírůstku funkce:

- Fermatova věta: má-li funkce diferencovatelná na intervalu v nějakém bodě tohoto intervalu největší resp. nejmenší hodnotu, musí mít v tomto bodě nulovou derivaci,
- Rolleova věta: má-li funkce diferencovatelná na nějakém intervalu v krajních bodech tohoto intervalu nulové hodnoty, musí mít v některém vnitřním bodě tohoto intervalu nulovou derivaci,
- Lagrangeova věta: pro funkci diferencovatelnou na intervalu (a, b) a spojitou na $\langle a, b\rangle$ existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že platí $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Pomocí pravidel pro počítání s limitami jsme odvodili pravidla pro výpočet derivací a vztahy pro derivace základních elementárních funkcí; pravidla jsou shrnuty v následujících tabulkách:

Slovník pro derivace

Vzorce platí všude, kde je definovaná funkce i derivace.

Funkce	**Derivace**	**Funkce**	**Derivace**
c (konst.)	0	x	1
x^n	$n\,x^{n-1}$	x^α	$\alpha\,x^{\alpha-1}$
e^x	e^x	a^x	$a^x\,\ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\,\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{cotg}\,x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\,x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arccotg}\,x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\mathrm{tgh}\,x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathrm{cotgh}\,x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

Gramatika pro derivace

$(a\,f(x)+b\,g(x))'$	$=$	$a\,f'(x)+b\,g'(x)$
$(f(x)\,g(x))'$	$=$	$f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$=$	$\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$
$(f[\varphi(x)])'$	$=$	$f'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$

Užitečné vzorce

Je-li $f(x)>0,\ g(x)>0$ platí:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

$$\log_{g(x)} f(x) = \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}$$

Otázky a úkoly

1. Co je to derivace funkce a) v bodě, b) na intervalu?

2. Na příkladu funkce f dané předpisem $f(x) = x^2\chi(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ pomocí definice derivace ukažte, že funkce definovaná na $\mathbb{R}$ může mít derivaci pouze v jednom bodě.

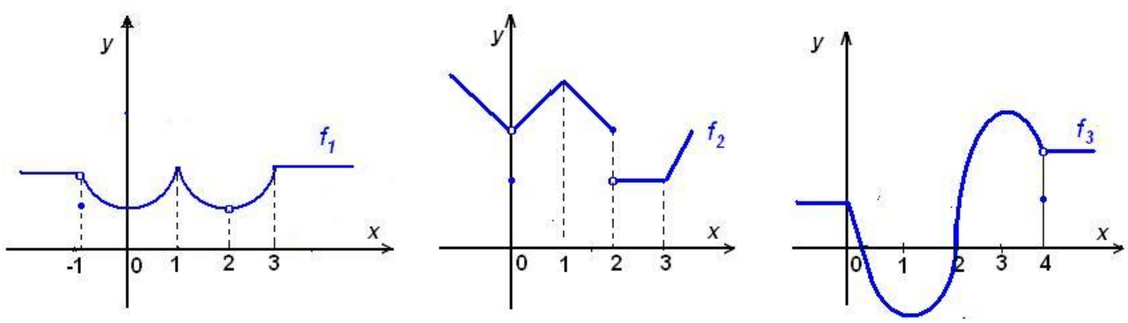
3. Body $A = [2, 4]$ a $B = [2 + \Delta x, 4 + \Delta y]$ paraboly $y = x^2$ prochází sečna. Najděte směrnici této sečny, jestliže $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta x = 0{,}01$. Najděte též směrnici tečny paraboly v bodě A.

4. Nechť f je funkce, jejíž hodnota v x je $4x^2$.

   a) Vypočítejte $[f(2,1) - f(2)]/0{,}1$.
   b) Jak můžeme interpretovat zlomek v a), jestliže f znamená celkový zisk jisté firmy (v milionech dolarů) v prvních x letech činnosti?
   c) Jak můžeme interpretovat zlomek v a), jestliže f znamená druhou souřadnici na grafu paraboly $y = 4x^2$?
   d) Jak můžeme interpretovat zlomek v a), jestliže f udává vzdálenost, kterou urazí pohybující se částice v prvních x sekundách?
   e) Jaký je význam hodnoty $f'(2)$ v případech c),d)? Jak byste tyto pojmy rozšířili na případ b)?

5. Na obr. 3.55 jsou grafy tří funkcí f_1, f_2, f_3. Pro která čísla a

   a) existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, ale f je nespojitá v a?
   b) f je v a spojitá, ale není v a diferencovatelná?

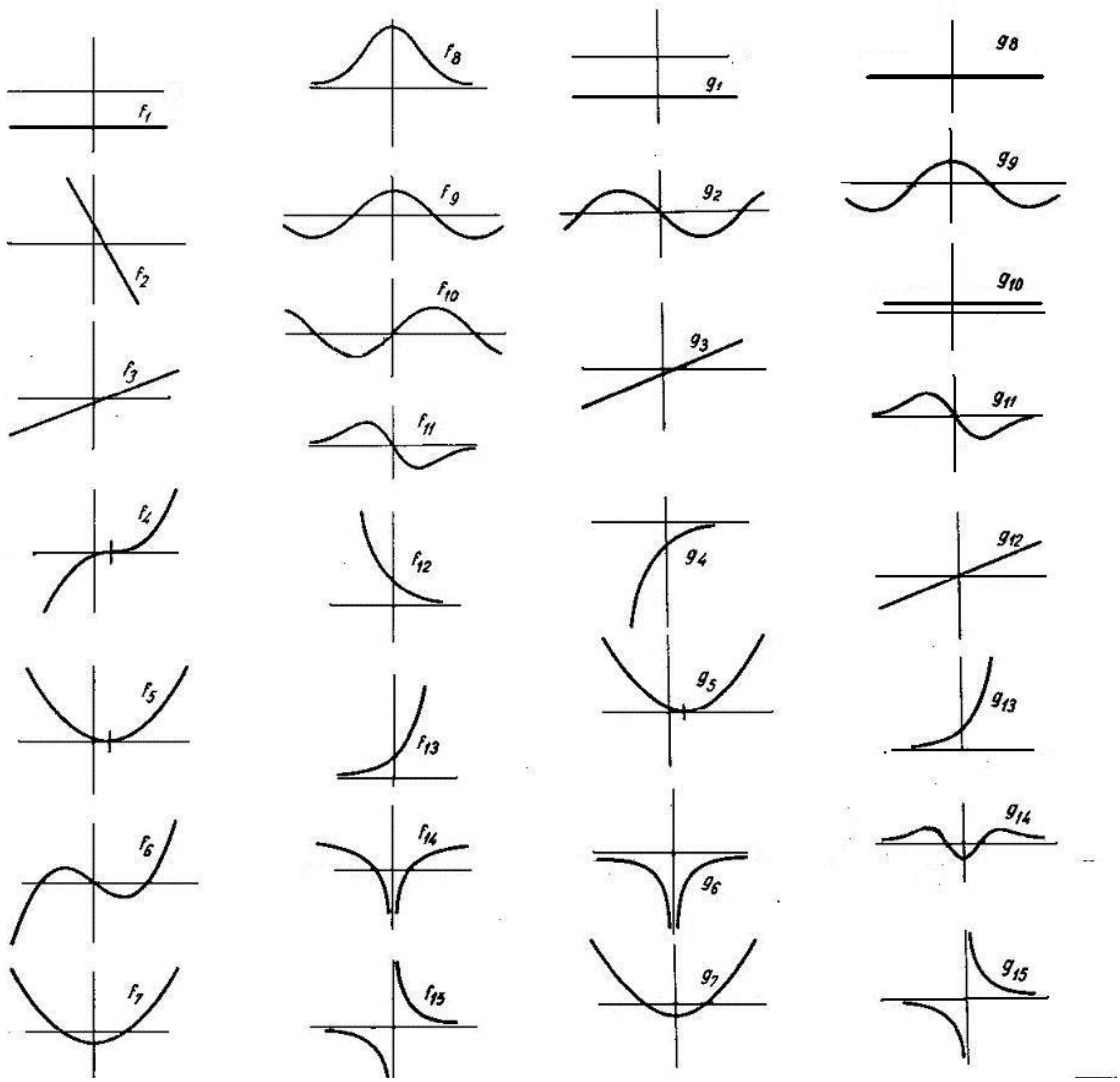


Obr. 3.55: Funkce z příkladu 5

6. O funkcích f a g víme, že $f(3) = 2$, $f'(3) = 4$, $g(3) = 5$, $g(5) = 3$, $g'(3) = 1$ a $g'(5) = 7$. Pro které x můžeme vypočítat $(f \circ g)'$ a čemu je rovna?

7. Nechť g je diferencovatelná funkce taková, že její derivace je rovna $\frac{1}{x^3+1}$. Nechť $h(x) = g(x^2)$. Najděte $h'(x)$.

8. V obr. 3.56 jsou v levé části grafy jistých funkcí f_1 – f_{15} a v pravé části grafy jistých funkcí g_1 – g_{15}. Ke každé funkci f_i najděte funkci g_j tak, aby platilo $f_i' = g_j$.



Obr. 3.56: Funkce a jejich derivace

9. Ukažte, že

   a) derivace liché funkce je sudá funkce,
   b) derivace sudé funkce je lichá funkce,
   c) derivace funkce periodické s periodou p je periodická funkce s periodou p.

10. Dokažte, že bod dotyku tečny k hyperbole o rovnici $y = \frac{c}{x}$ půlí úsečku určenou průsečíky této tečny se souřadnými osami.

11. Odůvodněte, proč nelze použít L'Hospitalovo pravidlo při výpočtu těchto limit:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

Cvičení

1. Vypočítejte derivace následujících funkcí (pro zjednodušení uvádíme pouze pravou stranu definičního předpisu):

a) $x^3 + 4x^3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^5} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$

b) $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^4\sqrt{x^3}}}$

c) $(x^3 - 2x + 1)(x^4 - 5x^2 + 10)$

d) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$

f) $\dfrac{(x+1)(x^3-2x)}{(x^2+1)(x^3-1)}$

g) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{100}$

h) $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

i) $\sqrt[4]{(3+4\sqrt[3]{2x})^3}$

j) $\dfrac{\sin x + \cos x}{2\sin 2x}$

k) $\dfrac{\cos x^2}{\cos^2 x}$

l) $3\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^3 x$

m) $\operatorname{tg} \dfrac{1+x}{x}$

n) $\operatorname{cotg} \sqrt[5]{1+x^5}$

o) $\sin(\sin(\sin x))$

p) $\sin^3(\cos^2(\operatorname{tg} x))$

q) $4^{3x} + 36x^4$

r) $e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

s) $e^{\frac{x}{\ln x}}$

t) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$

u) $\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

v) $\operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x-1}$

w) x^{e^x}

x) $(\operatorname{tg} x)^{1/\cos x}$

y) $(\cosh x)^{\ln x}$

z) $(\ln x)^x + x^{\ln x}$

2. Vypočítejte derivace následujících funkcí a výsledky co nejvíce zjednodušte:

a) $x\ln(x - \sqrt{x^2-1}) + \sqrt{x^2-1}$

b) $\dfrac{1}{3(1+x^3)} + \frac{1}{3}\ln\dfrac{x^3}{1+x^3}$

c) $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + \ln\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

d) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

e) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$

3. Vypočtěte derivace následujících funkcí; v bodech, kde derivace neexistuje, vypočtěte derivaci zleva a zprava:

a) $|x^3|$ b) $\sqrt{|x-1|}$ c) $\ln|3-x|$

d) $x|x|$ e) $|\cos x|$ f) $(-1)^{[x]}$

4. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě A, je-li

   a) $f(x) = \frac{3x-2}{2x-3}$, $A = [1, ?]$ b) $f(x) = 2\sqrt{2}\sin x$, $A = [\frac{\pi}{4}, ?]$

   c) $f(x) = \ln(x+1)$, $A = [0, ?]$ d) $f(x) = e^{-x}\cos 2x$, $A = [0, ?]$

5. Najděte rovnici tečny a normály k parabole $y = x^2 - 2x + 3$, jestliže tečna

   a) je rovnoběžná s přímkou $3x - y + 5 = 0$,
   b) je kolmá na přímku $x + y - 1 = 0$,
   c) svírá s přímkou $2x + y - 2 = 0$ úhel $\frac{\pi}{4}$.

6. Vedení vysokého napětí má rozpětí mezi stožáry 80 m. Tvar zavěšeného vodiče udává parabola $y = 0{,}001\,x^2$, přičemž její vrchol je stejně vzdálen od obou stožárů. Najděte úhel mezi vodičem a stožárem.

7. Balon kulového tvaru zmenšuje v důsledku porušení svého obalu svůj průměr o 2 cm za sekundu. Vypočítejte, jakou rychlostí se zmenšuje jeho objem, je-li počáteční poloměr balonu $r = 16$ m.

8. Jestliže těleso vyhodíme svisle vzhůru s počáteční rychlostí v_0 ms^{-1} je jeho výška nad povrchem počítaná v metrech daná vztahem $s = v_0 t - 4,9t^2$, kde t je čas v sekundách. Pro $v_0 = 100\,\mathrm{ms}^{-1}$ určete

   a) rychlost v čase $t = 2$ s,
   b) rychlost v čase $t = 15$ s,
   c) v jakém čase dosáhne těleso největší výšku,
   d) jaké největší výšky těleso dosáhne.

9. Vlak vyjíždí z nádraží, přičemž jeho pohyb popisuje rovnice $s = at^2 + bt + c$, kde s je dráha v km, t čas v hodinách. Po uplynutí jedné minuty vlak dosáhne rychlosti 60 km/h. Jakou dráhu urazí, než dosáhne této rychlosti?

10. Na moři křižují dvě lodě svou dráhu pod pravým úhlem. Když je první v průsečíku drah, druhá je od něj ještě vzdálená 20 km. První loď se pohybuje rychlostí $v_1 =$ 30 km/h, druhá rychlostí $v_2 = 50$ km/h. Vypočtěte

    a) rychlost, s jakou se vzdalují,
    b) nejmenší vzdálenost.

11. Pouliční lampa visí 6 m nad zemí. Člověk vysoký 1,8 m kráčí rychlostí 1,6 m/s. Zjistěte

    a) jakou rychlostí se pohybuje stín jeho hlavy,
    b) jakou rychlostí se mění délka jeho stínu.

12. Množství elektrického náboje protékající vodičem se mění podle vztahu $Q = Q(t)$, kde Q je zadané v Coulombech a t v sekundách. Vypočítejte intenzitu elektrického proudu v čase t_0 a zjistěte, kdy se bude rovnat intenzitě i_1, je-li
   a) $Q(t) = 3t^2 + 2t + 2$, $t_0 = 0; 1; 5s$, $i_1 = 20\,A$;
   b) $Q(t) = 2te^{-t}$, $t_0 = 0\,s$, $i_1 = 0\,A$;
   c) $Q(t) = 0{,}05t + 0{,}04\sin(100\pi t + 20)$, $t_0 = 7{,}5\,s$, $i_1 = 0{,}9\,A$.

13. Indukční cívkou protéká proud i, pro který platí $i = 15\sin^5 3t$, kde proud i je v ampérech a čas t v sekundách. Vypočítejte indukovanou elektromotorickou sílu $e_i = -L\frac{di}{dt}$ v čase $t = 2\pi/9\,\mathrm{s}$, je-li $L = 0{,}03\,\mathrm{H}$.

14. K zadaným funkcím f najděte přírůstek funkce Δf a diferenciál df v čísle x_0 pro daný přírůstek Δx:
   a) $f(x) = 3x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 10^{-1}$,
   b) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 10x - 12$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,2$,
   c) $f(x) = \operatorname{arc\,cotg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,3$,
   d) $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 2x}$, $x_0 = 3$, $\Delta x = -0,02$.

15. Vypočítejte přibližně pomocí diferenciálu následující hodnoty; výsledky porovnejte s hodnotami nalezenými pomocí kalkulačky:
   a) $\ln 25{,}02$, $\ln 24{,}6$, je-li $\ln 25 \doteq 3{,}2189$,
   b) $\log 1001$, je-li $\ln 10 \doteq 2{,}3026$,
   c) $\operatorname{tg} 46^\circ$,
   d) $\operatorname{arctg} 1{,}1$,
   e) $2^{1{,}002}$.

16. Vypočtěte, o kolik se změní objem krychle, jestliže se délka její hrany zvětší z 6 cm na 6,1 cm, a to a) přesně, b) pomocí diferenciálu. Získané výsledky porovnejte.

17. Koule má poloměr r. Najděte přírůstek a diferenciál a) objemu, b) povrchu koule jako funkci poloměru r pro poloměr $r = R$ a diferenci Δr.

18. V elektrickém obvodu s konstantním napětím U se změní odpor R o ΔR. Vypočítejte, o kolik se změní proud a) přesně, b) přibližně.

19. Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočítejte následující limity:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5x^3 - x^2 + 2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4 + x^2 + x}{2x^3 - 5x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^2 - x + 4}{2x^4 + x - 9}$
   d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{(\ln x)^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 - x)}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left((x + 1)e^{\frac{1}{x-1}} - x\right)$
   g) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\ln x}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ i) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1 - x)\ln(1 - x)$
   j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 2 + x^2}{x^2 \sin^2 x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x + 2x^3 - e^x}{\sin^2 x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$

20. Rezistorem s odporem $R = 5\,\Omega$ teče proud $i = 2t\sin\frac{3}{t}\,(A)$. Vypočítejte okamžitý výkon proudu na rezistoru R. Najděte hodnotu výkonu pro $t \to \infty$.

Výsledky

1. a) $3x^2+14x^2\sqrt{x}+\frac{8}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{15}{x^6}-\frac{10}{3\sqrt[3]{x^5}}$, b) $\frac{19}{12}\sqrt[12]{x^7}$, c) $7x^6-35x^4+4x^3+60x^2-10x-20$, d) $2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9)$, e) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x})^2}-\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2}$, f) $-\frac{x^8+2x^7-7x^6-6x^5-x^4+5x^2-4x-2}{(x^2+1)^2(x^3-1)^2}$, g) $50\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{99}\frac{x-1}{x\sqrt{x}}$, h) $-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x(1-x)}}$, i) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}}\frac{1}{\sqrt[4]{3+4\sqrt[3]{2x}}}$, j) $\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^2 2x}$, k) $\frac{2}{\cos^3 x}(\sin x\,\cos x^2 - x\sin x^2\,\cos x)$, l) $\frac{-3}{\sin^4 x}$, m) $-\frac{1}{x^2}\frac{1}{\cos^2(1+\frac{1}{x})}$, n) $\frac{-1}{\sin^2\sqrt[5]{1+x^5}}\frac{x^4}{\sqrt[5]{(1+x^5)^4}}$, o) $\cos(\sin(\sin x))\cos(\sin x)\cos x$, p) $-3\sin^2(\cos^2(\mathrm{tg}\,x))\cos(\cos^2(\mathrm{tg}\,x))\sin(2\mathrm{tg}\,x)\frac{1}{\cos^2 x}$, q) $3\cdot 4^{3x}\ln 4+144x^3$, r) $e^{\sqrt{x^2+x+1}}\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, s) $\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}e^{\frac{x}{\ln x}}$, t) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, u) $\frac{-1}{\cos x}$, v) $\frac{-1}{1+x^2}$, w) $e^x x^{e^x}(\ln x+\frac{1}{x})$, x) $(\mathrm{tg}\,x)^{\frac{1}{\cos x}}(\sin x\,\ln\,\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\sin x})\frac{1}{\cos^2 x}$, y) $(\cosh x)^{\ln x}(\mathrm{tgh}\,x\,\ln x+\frac{\ln\cosh x}{x})$, z) $(\ln x)^{x-1}(1+\ln x\,\ln\ln x)+2x^{\ln x-1}\ln x$;

2. a) $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$, b) $\frac{1}{x(1+x^3)^2}$, c) $\frac{4x^2}{x^4-16}$, d) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2+2}$, e) $\frac{1}{1+x^2+x^4}$;

3. a) $3x|x|$, b) $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ pro $x>1$, $\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ pro $x<1$, $f'(1)$ neex., $f'_+(1)=\infty$, $f'_-(1)=-\infty$, c) $\frac{1}{x-3}$ pro $x\neq 3$, d) $2|x|$, e) $(-1)^{k+1}\sin x$ pro $x\neq\frac{\pi}{2}+k$, $k\in\mathbb{Z}$, f) 0 pro $x\neq k$, $k\in\mathbb{Z}$;

4. a) $5x+y-4=0$, $x-5y-6=0$, b) $2x-y+2-\pi/2=0$, $x+2y-4-\pi/4=0$, c) $y=x$, $y=-x$, d) $x+y-1=0$, $x-y+1=0$;

5. a) $12x-4y-13=0$, $4x+12y-61=0$, b) $4x-4y+3=0$, $4x+4y-15=0$, c) $12x-4y-13=0$, $4x+12y-61=0$; $12x+36y-83=0$, $108x-36y-17=0$;

6. arctg $12{,}5 \doteq 85°25'34''$; **7.** 1,508 m/s^2; **8.** a) $80{,}4\mathrm{ms}^{-1}$, b) $-47\mathrm{ms}^{-1}$, c) $10{,}2$s, d) $510{,}20$m; **9.** 500m, **10.** a) 58,31 km/h, b)10,29 km;

11. a)2,285 m/s, b) $\frac{24}{35}$ m/s;

12 a) 2 A, 8 A, 32 A, 3 s, b) 2 A, 1s, c) 5,06 A, 0,00112..+k/50; **13.** 1,90 V,

14. a) 0,63, 0,6, b) -2,152, -2, c) -0,09, -0,1, d) (ln 0,973)/2, -0,013;

15. a) 3,2197,3,2029, b) 3,0004, c) 1,035906, d) 0,835398,e) 2,003;

16. a) 10,981, b) 10,8; **17.** a) $4\pi r^2\Delta r+4\pi R(\Delta r)^2+4\pi R(\Delta r)^3$, $4\pi R^2\Delta r$, b) $8\pi R\Delta r+4\pi(\Delta r)^2$, $8\pi R\Delta r$;

18. $(-U_0\Delta R)/(R(R-\Delta R))$, $(-U_0\Delta R)/R^2$;

19. a) $\frac{1}{5}$, b) $-\infty$, c) 0, d) ∞, e) $-\infty$, f) 2, g) ∞, h) $\frac{1}{e}$, i) 0, j) $\frac{1}{12}$, k) $-\frac{1}{2}$, l) 0;

20. 180[W].

3.5 Derivace vyšších řádů, Taylorův polynom

V předchozí kapitole jsme viděli, že rychlost pohybujícího se tělesa získáme derivací funkce, která popisuje závislost dráhy na čase. Naskýtá se otázka, zda podobně nemůžeme získat zrychlení, s jakým se těleso pohybuje. Vzhledem k tomu, že rychlost popisuje změnu dráhy, a zrychlení analogicky změnu rychlosti, je přirozené položit

$$a=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\right);$$

poslední výraz chápeme jako „druhou derivaci“.
Podobně jistě můžeme zavést i derivaci třetí, čtvrtou,… obecně libovolného řádu.

Různé fyzikální i jiné přírodní jevy bývají popsány dosti komplikovanými funkčními závislostmi; mají-li se takové jevy vyšetřovat, bývá výhodné nahradit zkoumanou funkci v okolí „pracovního bodu“ některou jednodušší – nejraději polynomem. V této kapitole ukážeme, jak se takový polynom, který dostatečně aproximuje zkoumanou funkci – Taylorův polynom – najde.

Derivace a diferenciály vyšších řádů

Definice 3.73: Je-li f' derivace funkce f na otevřeném intervalu $\mathcal{J}$, může se stát, že funkce f' má na $\mathcal{J}$ (nebo na některém otevřeném intervalu, který je částí $\mathcal{J}$) sama derivaci. Potom tuto derivaci nazýváme ***derivací druhého řádu***, nebo též ***druhou derivací*** funkce f a značíme ji f'', nebo $\dfrac{d^2 f}{d\,x^2}$.

Rekurzí definujeme ***derivaci n-tého řádu***, nebo též ***n-tou derivaci*** jako derivaci $(n-1)$-ní derivace:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Řád derivace se udává jako horní index v závorce. Pro derivace do třetího řádu budeme používat označení $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$. Je výhodné definovat také nultou derivaci vztahem $f^{(0)} = f$.

Pro n-tou derivaci se používá též označení $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ (tzv. Leibnizův zápis n-té derivace). Má-li funkce f na otevřeném intervalu $\mathcal{J}$ derivaci n-tého řádu $f^{(n)}$, řekneme, že f je na $\mathcal{J}$ ***n-krát diferencovatelná.***

Příklad 3.74: Máme najít $f^{(n)}$ pro funkci definovanou předpisem $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 5$.

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 2x - 1 \\ f''(x) &= 12x + 2 \\ f'''(x) &= 12 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \text{ pro } n \geq 4. \end{aligned}$$

Zadaná funkce byl polynom 3. stupně; derivace řádu většího než tři je rovna nule.

Tento výsledek můžeme jistě zobecnit na libovolný polynom – derivace řádu většího než je stupeň polynomu je rovna nule.

Příklad 3.75: Vypočítáme *a)* $(\sin x)^{(n)}$ *b)* $(e^{px+q})^{(n)}$ *c)* $(a^x)^{(n)}$

Řešení:

a) $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; $(\sin x)'' = \left(\sin(x + \frac{\pi}{2})\right)' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$;
$\Rightarrow$ $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

b) $(e^{px+q})' = p\, e^{px+q}$; $(e^{px+q})^{(n)} = p^n\, e^{px+q}$

c) $(a^x)' = a^x\, \ln a$; $(a^x)^{(n)} = a^x\, (\ln a)^n$

Definice 3.76: Je-li funkce f n-krát diferencovatelná v bodě x_0, potom funkci

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$$

proměnné $h \in \mathbb{R}$ nazýváme ***diferenciálem n-tého řádu*** funkce f v bodě x_0, nebo ***n-tým diferenciálem*** funkce f v bodě x_0.

Použijeme-li pro přírůstek h označení dx, píšeme

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot dx^n$$

a odtud dostáváme zmíněné Leibnizovo označení n-té derivace $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n} = f^{(n)}(x_0)$.

Příklad 3.77: Vypočítáme $d^2 f(3)$, je-li $f(x) = 5^{x-3}$.

Řešení: $f'(x) = 5^{x-3} \ln 5$; $f''(x) = 5^{x-3}(\ln 5)^2$; $f''(3) = (\ln 5)^2 \Rightarrow d^2 f(3) = (\ln 5)^2 dx^2$

Linearizace

Víme, že rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{neboli} \qquad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Výraz na pravé straně je polynom 1. stupně; označme jako p funkci definovanou vztahem $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Pro funkci p zřejmě platí $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$,
navíc se dá ukázat, že p je jediný polynom 1. stupně s těmito dvěma vlastnostmi.

Protože polynom stupně nejvýše 1. se nazývá lineární funkce (grafem je přímka), řekneme, že p je ***linearizace*** funkce f v x_0.

Poznamenejme, že linearizace se užívá velmi často v praxi, například při náhradě experimentálně zjištěných charakteristik elektrických součástek (tranzistorů) v okolí pracovního bodu.

Aproximace funkce Taylorovým polynomem

Nyní přikročíme k řešení jednoho z nejdůležitějších problémů matematické analýzy – aproximaci funkce pomocí polynomu.

Máme-li aproximovat funkci f diferencovatelnou v x_0 v dosti malém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ lineární funkcí (polynomem prvního stupně) $T_1(x)$, použijeme tu funkci, jejímž grafem je tečna ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, jinými slovy požadujeme, aby se v bodě x_0 shodovaly funkční hodnoty a hodnoty prvních derivací funkce f a polynomu T_1 – viz 3.57. Hodnota funkce f a polynomu T_1 se však může značně lišit v bodech $x \neq x_0$. Je-li funkce f n-krát diferencovatelná, můžeme přesnost aproximace v dosti malém okolí bodu x_0 zlepšit,

Příklad 3.78:
Máme najít linearizaci funkce

$f:\ f(x) = \operatorname{tg} x \quad \text{v } \frac{\pi}{4}.$

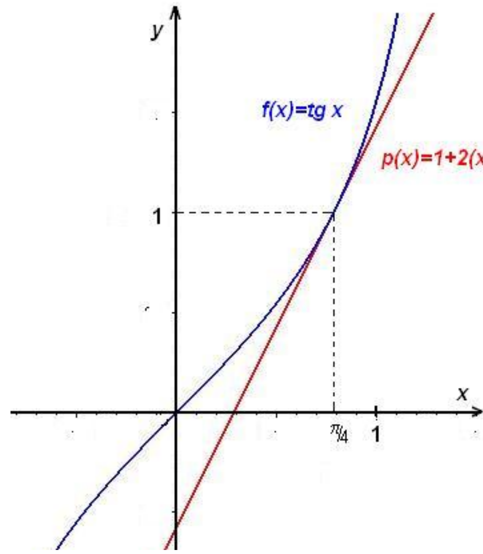
Řešení:

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \qquad f(\tfrac{\pi}{4}) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f'(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 2.$$

Odtud

$$p(x) = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}.$$



Obr. 3.57: Linearizace

použijeme-li polynom n-tého stupně T_n, po kterém budeme požadovat, aby se v bodě x_0 shodoval s funkcí f až do n-té derivace včetně, to znamená, aby platilo

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ k = 0, 1, ..., n.$$

Snadno se prověří, že tuto vlastnost má polynom z následující definice:

Definice 3.79: ***Taylorovým polynomem*** funkce f v bodě x_0 nazýváme polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Pro $x_0 = 0$ se polynom $T_n(x)$ nazývá též ***Maclaurinův polynom***.

Označíme-li $dx = x - x_0$, je $f^{(k)}(x_0)\,(x - x_0)^k = d^k f(x_0)$ a Taylorův polynom můžeme psát ve tvaru

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0).$$

Rozdíl mezi hodnotou $f(x)$ a $T_n(x)$ označíme

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$$

a nazveme ***zbytek*** po n-té mocnině, nebo $(n + 1)$-ní zbytek. Zbytek určuje nepřesnost aproximace funkce f příslušným Taylorovým polynomem T_n.

Věta 3.80: **(Taylorova)** *Nechť funkce f je $(n+1)$-krát diferencovatelná na jistém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0. Potom pro $x \in \mathcal{U}(x_0)$ platí*

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x) \quad \textit{kde} \quad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

přičemž ξ leží mezi body x, x_0, neboli $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$ $0 < \vartheta < 1$.

Příklad 3.81: Najděme Taylorův vzorec pro funkci

$$f: \; f(x) = \sqrt{1+x}, \; x \in \langle -1, +\infty), x_0 = 0, \; n = 3.$$

Nakresleme graf dané funkce v okolí bodu $x_0 = 0$ a grafy příslušných Taylorových polynomů stupně 1, 2 a 3.

Řešení: Máme za úkol vyjádřit danou funkci f ve tvaru

$$f(x) = T_3(x) + R_4(x),$$

kde T_3 je Maclaurinův polynom stupně nejvýše 3 dané funkce f, tj.

$$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3,$$

a R_4 je příslušný zbytek v Taylorově vzorci:

$$R_4(x) = \frac{1}{4!}\,f^{(4)}(\xi)\,x^4, \quad \xi = \vartheta x, \; 0 < \vartheta < 1.$$

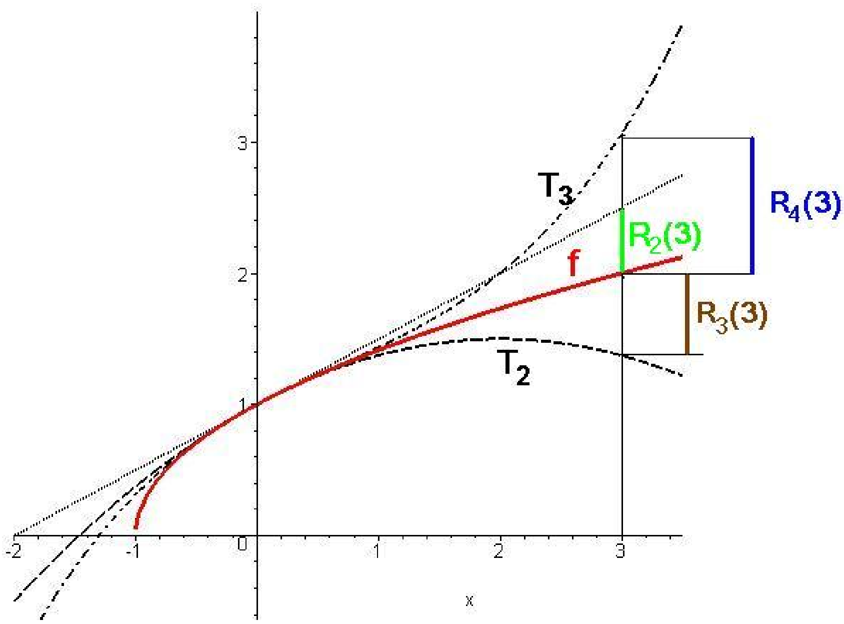
Vypočítáme potřebné derivace:

$$\begin{array}{llll}
f(x) & = (1+x)^{1/2}, & f(0) & = 1 \\
f'(x) & = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, & f'(0) & = \frac{1}{2} \\
f''(x) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(1+x)^{-3/2}, & f''(0) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) \\
f'''(x) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1+x)^{-5/2}, & f'''(0) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \\
f^{(4)}(x) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(1+x)^{-7/2}, & f^{(4)}(\xi) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(1+\xi)^{-7/2}.
\end{array}$$

Po dosazení do Taylorova vzorce dostaneme pro $x \in (-1, +\infty)$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{x^3}{3!} + R_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + R_4(x),$$

kde $\quad R_4(x) = \dfrac{-1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\dfrac{x^4}{4!}(1+\vartheta x)^{-7/2}, \quad 0 < \vartheta < 1.$



Obr. 3.58: Taylorovy polynomy funkce $\sqrt{1+x}$

Na obr. 3.58, kde je nakreslen graf dané funkce f a grafy jejích Taylorových polynomů T_1, T_2, T_3 v bodě $x_0 = 0$ stupně 1,2 a 3, jsou dále v bodě $x = 3$ vyznačeny absolutní hodnoty zbytků $R_2(3)$, $R_3(3)$ a $R_4(3)$ příslušného Taylorova vzorce.

Taylorův polynom T_n funkce f v bodě x_0 tedy aproximuje funkci f v bodech x jistého okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0, a to s chybou danou absolutní hodnotou zbytku R_{n+1} pro příslušný bod x. Lze tedy pro body $x \in \mathcal{U}_{x_0}$ napsat přibližný vztah

$$f(x) \approx T_n(x), \quad x \in \mathcal{U}(x_0),$$

jehož chyba je dána absolutní hodnotou $|R_{n+1}(x)|$.

Uvedená aproximace má lokální charakter. Při výpočtu přibližné hodnoty funkce f podle Taylorova vzorce můžeme všeobecně očekávat uspokojující výsledky jen pro body x blízké bodu x_0.

Tuto situaci můžeme ilustrovat na funkci $\sqrt{1+x}$ z předchozího příkladu, jestliže pro její aproximaci použijeme odvozený polynom T_3 , tj. položíme-li

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3. \qquad (*)$$

Odhadněme chybu této aproximace:

$$|R_4(x)| = \left| \frac{-1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\frac{1}{4!}\frac{x^4}{\sqrt{(1+\vartheta x)^7}} \right| < \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\frac{x^4}{4!}, \qquad (**)$$

přičemž poslední výraz jsme dostali tak, že jsme položili $\vartheta = 0$ (tím jsme výraz zaručeně zvětšili).

Dosadíme-li do vzorce (*) za x hodnotu poměrně malou, např. $x = 0{,}2$, dostaneme pro přibližnou hodnotu čísla $\sqrt{1{,}2}$:

$$\sqrt{1{,}2} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}2 - \frac{1}{8}\cdot (0{,}2)^2 + \frac{1}{16}\cdot (0{,}2)^3 = 1{,}095\,5.$$

Chyba této aproximace je podle vzorce (**) menší než $\frac{5}{128}\cdot (0{,}2)^4 \doteq 0{,}000\,06$.

Pro srovnání - na kalkulačce vypočteme $\sqrt{1{,}2} \doteq 1{,}095\,445\,115$.

Dosadíme-li však do (*) za x číslo podstatně větší, např. $x = 2{,}4$, dostaneme pro přibližnou hodnotu čísla $\sqrt{3{,}4}$:

$$\sqrt{3{,}4} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 2{,}4 - \frac{1}{8}\cdot (2{,}4)^2 + \frac{1}{16}\cdot (2{,}4)^3 = 2{,}344;$$

přitom na kalkulačce vypočítáme $\sqrt{3{,}4} \approx 1{,}843\,908\,891$. Použití vzorce (*) dává v tomto případě výsledek zcela nevyhovující. Ukazuje se dokonce, že i kdybychom pro $x = 2{,}4$ zvyšovali stupeň aproximujícího polynomu T_n, nedostali bychom pro $x = 2{,}4$ lepší výsledky, právě naopak. Na obr. 3.58 můžeme vidět, že v bodě $x = 3$ se aproximace zhoršuje, jestliže zvyšujeme stupeň Taylorova polynomu.

V předchozím příkladu jsme si stanovili předem stupeň Taylorova polynomu a poté určovali chybu, které se při aproximaci dopustíme. V následujícím příkladu postup obrátíme – nejdříve stanovíme přesnost aproximace a k ní budeme hledat stupeň aproximujícího polynomu, pro který bude požadované přesnosti dosaženo.

Příklad 3.82: Aproximujme funkci e^x Maclaurinovým polynomem a určeme, jaký musí být jeho stupeň, aby pro $x \in (0,1)$ byla chyba v absolutní hodnotě menší než 10^{-3}.

Řešení:
$f^{(k)}(x) = e^x$,

$f^{(k)}(0) = e^0 = 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$

Proto

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}, \quad \text{kde} \quad R_{n+1} = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, 0 < \vartheta < 1.$$

Nyní požadujeme

$$|R_{n+1}| = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} |x|^{n+1} < 10^{-3} \quad \text{pro} \quad x \in (0,1).$$

K tomu stačí, aby

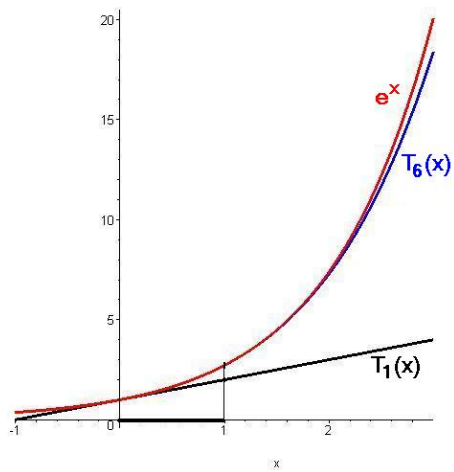
$$|R_{n+1}| = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!} < 10^{-3},$$

neboli

$$(n+1)! > e \cdot 10^3 > 2718.$$

Protože $6! = 720$, $7! = 5040$ vyhovuje $n = 6$.

Proto pro předepsanou přesnost je třeba vzít polynom alespoň šestého stupně.



Obr. 3.59: Taylorovy polynomy funkce e^x

Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli pojem

- derivace druhého řádu funkce f: existuje-li f' na nějakém intervalu $\mathcal{J}$, klademe $f''(x) = (f'(x))'$,
- derivace n-tého řádu funkce f: existuje-li $f^{(n-1)}$ na nějakém intervalu $\mathcal{J}$, klademe $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$,
- diferenciál n-tého řádu funkce f v bodě x_0: funkce proměnné h: $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$, je-li f funkce n-krát diferencovatelná v bodě x_0.

Dále jsme uvedli vztah pro aproximaci funkce (dostatečně mnohokrát diferencovatelné) v okolí nějakého bodu:

- Taylorův vzorec: $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$, kde $T_n(x)$ a $R_{n+1}(x)$ je
- Taylorův polynom: $T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$,
- zbytek po n-tém členu: $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, ξ mezi x_0 a x.

Taylorovy formule pro některé funkce

e^x	$\approx$	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$	$R(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{\vartheta x}$
$\sin x$	$\approx$	$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$	$R(x)=(-1)^k\frac{\cos\vartheta x}{(2k+1)!}x^{2k+1}$
$\cos x$	$\approx$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$R(x)=(-1)^{k+1}\frac{\cos\vartheta x}{(2k+2)!}x^{2k+2}$
$\ln(1+x)$	$\approx$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$	$R(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(1+\vartheta x)^{n+1}(n+1)}$

Otázky a úkoly

1. Jak definujeme derivaci druhého řádu? Obecně k-tého řádu?

2. Může existovat funkce f a bod x_0 tak, aby platilo: $f'_-(x_0)=1, f'_+(x_0)=-1$ a $f''(x_0)=0$? Jestliže ano, uveďte příklad; jestliže ne, uveďte proč.

3. Pro n-tou derivaci součinu n-krát diferencovatelných funkcí se uvádí tzv. Leibnizova formule
$$(fg)^{(n)}=f^{(n)}g+\binom{n}{1}f^{(n-1)}g'+\binom{n}{2}f^{(n-2)}g''+\cdots+\binom{n}{n-1}f'g^{(n-1)}+fg^{(n)}.$$
Ověřte tuto formuli pro $n=2$ a pokuste se naznačit indukční krok při důkazu formule matematickou indukcí.

4. Najděte druhou a třetí derivaci funkce $f\circ g$, $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$, jestliže funkce f a g mají na příslušných množinách třetí derivaci.

5. Funkce f má na množině M derivace f', $f''\, f'''$. Inverzní funkce f_{-1} k funkci f existuje a má na jisté množině N derivace f'_{-1}, f''_{-1}, f'''_{-1}. Vyjádřete tyto derivace pomocí f', $f''\, f'''$.

6. Najděte diferenciál druhého řádu součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí f a g, jestliže tyto funkce mají druhé derivace a $g(x)\neq 0$.

7. Pomocí Taylorovy věty ukažte, že polynom n-tého stupně $P_n(x)$ je dělitelný výrazem
   a) $(x-x_0)$ právě když $f(x_0)=0$,
   b) $(x-x_0)^k$ právě když $f(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0,\dots,f^{(k-1)}(x_0)=0.$

8. Ukažte, že pro polynom P_n n-tého stupně platí
$$P(x+h)=P(x)+\frac{h}{1!}P'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}P^{(n)}(x).$$

9. Ukažte, že pro funkci f danou předpisem $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pro} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{pro} \quad x=0\end{cases}$

   platí $f^{(n)}(0)=0$.

Cvičení

1. Vypočítejte $f''(0)$, $f''(1)$, je-li

   a) $f(x) = x^5 - 7x^2 + 12$, b) $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$,

   c) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, d) $f(x) = xe^{-x^2}$.

2. Ukažte, že pro funkci $y = f(x)$ platí

   a) $y^{(4)} + 4y = 0$, je-li $y = e^{-x}\cos x$,

   b) $y'' = 1 - (y')^2$, je-li $y = \ln|c_1e^x + c_2e^{-x}|$,

   c) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, je-li $y = x\sin x + \cos x \ln\cos x$.

3. Vypočítejte

   a) $f^{(4)}$, je-li $f(x) = x^6 + 5x^4 + 2x^3 - x^2$,

   b) $f^{(4)}$, je-li $f(x) = \frac{3}{x^{11}}$,

   c) f'', je-li $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$,

   d) $f^{(7)}$, je-li $f(x) = x^2(1-3x)^4(x+1)$,

   e) f''', je-li $f(x) = (1+x)^6$.

4. Vypočtěte derivaci n-tého řádu funkce f, je-li

   a) $f(x) = (a+bx)^m$, b) $f(x) = \dfrac{1}{a+bx}$,

   c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a+bx}}$, d) $f(x) = \sin px$,

   kde a, b, p jsou konstanty.

5. Vypočítejte rychlost a zrychlení tělesa, které se pohybuje po přímce, je-li jeho poloha dána vztahem $x = Ae^{-\alpha t}(1+\alpha t)$. Ukažte, že pro rychlost a zrychlení platí

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha^2 x = 0.$$

6. Najděte zrychlení lodě a sílu působící na loď, která pluje přímočaře ke břehu po vypnutí motorů pouze setrvačností. Její vzdálenost od břehu se mění podle vztahu

$$x = h - \frac{m}{r}\ln\left(1 + \frac{rv_0}{m}\,t\right),$$

   kde h je vzdálenost lodě od břehu a v_0 rychlost lodě při vypnutí motorů, m je hmotnost lodě a r součinitel odporu vody.

7. Vypočítejte diferenciály vyšších řádů dané funkce f v bodě x_0 pro přírůstek Δx , je-li

   a) $f(x) = x^3, \qquad d^3 f(1), \qquad \Delta x = -0,2;$

   b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad d^2 f(1), \qquad \Delta x = 0,1;$

   c) $f(x) = x^x, \qquad d^2 f(1), \qquad \Delta x = 0,1;$

   d) $f(x) = \log x, \qquad d^4 f(2), \qquad \Delta x = 0,25.$

8. Linearizujte následující funkce v okolí daných pracovních bodů:

   a) $f(x) = 4x^2 + \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 1;$

   b) $f(x) = x \sin 2x, \qquad x_0 = \frac{\pi}{4};$

   c) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad x_0 = 0;$

   d) $f(x) = \frac{2x^3}{\sin x}, \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}.$

9. Následující polynomy vyjádřete v mocninách $(x - a)$:

   a) $y = x^4 - 3x^2 - 10x + 11,$ je-li $a = 2,$

   b) $y = x^3 - 2x + 5,$ je-li $a = 100.$

10. Najděte Maclaurinovy polynomy stupně n daných funkcí f:

    a) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}, \qquad n = 3,$

    b) $f(x) = \mathrm{tg}\, x, \qquad n = 5,$

    c) $f(x) = \sin^3 x, \qquad n = 5,$

    d) $f(x) = xe^{-x}, \qquad n = 4,$

    e) $f(x) = \ln \cos x, \qquad n = 6.$

11. Ověřte, že funkce $y = x$ aproximuje funkci $y = \sin x$ s chybou menší než 0,001, je-li $|x| < 0{,}18$.

12. Zjistěte, kolik nenulových členů Maclaurinova polynomu musíme vzít pro funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, abychom ji aproximovali v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ s chybou menší než 0,005.

13. Pro jaké kladné x můžeme aproximovat funkci

    a) $f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad$ b) $f(x) = \ln(1 + x)$

    prvními dvěma nenulovými členy Maclaurinova polynomu s chybou menší než 0,001 ?

Výsledky

1. a) -14, 6; b) 0, 11/8; c) 0, $8\frac{\sin 2}{\cos^3 2}$; d) 0, $\frac{-2}{e}$;

3. a) $360x^2 + 120$, b) $72\,072\,x^{-15}$, c) $\frac{4}{(x-1)^3}$, d) 408 240, e) $120(1+x)^3$;

4. a) $\frac{m!}{(m-n)!}b^n(a+bx)^{m-n}$, b) $\frac{(-1)^n n! b^n}{(a+bx)^{n+1}}$, c) $(-1)^n\frac{(2n-1)!!b^n}{2^n(a+bx)^n\sqrt{a+bx}}$, d) $p^n\sin(px + n\pi/2)$;

5. $v = A\alpha^2 te^{-\alpha t},\ a = A\alpha^2 e^{-\alpha t}(\alpha t - 1)$;

6. $a = \frac{mrv_0^2}{(m+rv_0t)^2},\ f = ma = r\left(\frac{mv_0}{m+rv_0t}\right)^2$;

7. a) -0,048; b) -0,01; c) 0,02; d) $-\frac{1}{2048}\ln 2$;

8. a) $p(x) = \frac{1}{3}(25x - 10)$, b) $p(x) = x$, c) $p(x) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x$, d) $p(x) = \frac{\pi^2}{2}(x - \pi)$;

9. a) $-5 + 10(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$, b) $999805 + 29998(x-100) + 300(x-100)^2 + (x-100)^3$;

10. a) $1 + 2x + 2x^2$, b) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$, c) $x^3 - \frac{1}{2}x^5$, d) $x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4$, e) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6$;

12. 5; **12.** a) $x <$ 0,03162 b) $x <$ 0,14424.

3.6 Extrémy, průběh funkce

V praktických situacích se obvykle snažíme najít optimální řešení konkrétního problému – nejkratší, resp. nejrychlejší cestu, kterou se dostaneme na nějaké místo, tvar výrobku s ohledem na minimální spotřebu materiálu a podobně. I v řešení těchto problémů nám pomůže diferenciální počet; jak, to uvidíme v této kapitole.
Kromě tohoto nejdůležitějšího výsledku závěrem ukážeme, jak výpočtem (pomocí limit a derivací) získáme dostatek informací pro představu, jak vypadá graf zadané funkce – budeme zkoumat její průběh.

Lokální extrémy

V dalším textu bude $\mathcal{J}$ značit interval, ať již otevřený, uzavřený, či polouzavřený, a $\mathcal{J}_0$ jeho vnitřek, tj. otevřený interval, který obsahuje právě vnitřní body intervalu $\mathcal{J}$.

Věta 3.83: *Nechť funkce f je diferencovatelná na $\mathcal{J}$. Potom f je neklesající (resp. nerostoucí) na $\mathcal{J}$, právě když*

$$f'(x) \geq 0 \ \ (\textit{resp.}\ \ f'(x) \leq 0) \quad \textit{na} \ \ \mathcal{J}_0.$$

Důkaz:

a) Předpokládejme, že f je neklesající na $\mathcal{J}$. Potom pro každé dva navzájem různé body $x, x^* \in \mathcal{J}_0$ platí

$$\frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{x^* \to x}\frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} \geq 0.$$

b) Předpokládejme nyní $f'(x) \geq 0$ na $\mathcal{J}_0$. Potom pro $x_1, x_2 \in \mathcal{J}$, $\ x_1 < x_2$ platí podle Lagrangeovy věty

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0, \quad \text{neboli} \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Pro nerostoucí funkci by důkaz probíhal obdobně.

Věta 3.84: *Nechť funkce f je diferencovatelná na $\mathcal{J}$. Potom f je rostoucí (resp. klesající) na $\mathcal{J}$, právě když je $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) na $\mathcal{J}_0$, přičemž rovnost $f' = 0$ nenastane na žádném podintervalu intervalu $\mathcal{J}_0$.*

Důkaz: Je-li f rostoucí, potom podle předchozí věty je $f(x) \geq 0$ na $\mathcal{J}_0$, přičemž na žádném podintervalu není $f'(x) = 0$, protože f by byla na tomto podintervalu konstantní.

Je-li $f(x) \geq 0$, přičemž není $f'(x) = 0$ na žádném podintervalu intervalu $\mathcal{J}_0$, potom f je neklesající, a protože není konstantní na žádném podintervalu, musí být rostoucí.

Příklad 3.85: Funkce $f(x) = x^5$ má derivaci $f'(x) = 5 \cdot x^4 \geq 0$, přičemž $f'(x) = 0$ pouze v bodě 0. Funkce f tedy roste na $(-\infty, \infty)$.

Definice 3.86: Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ***lokální maximum*** (resp. ***lokální minimum)***, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D_f$ tak, že

$$x \in \mathcal{U}(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0) \;\; (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0))\,.$$

Platí-li v uvedených nerovnostech pro $x \neq x_0$ jen znak ostré nerovnosti, má funkce v bodě x_0 ***ostré lokální maximum (minimum)***. Lokální maxima a minima nazýváme společným pojmem ***lokální extrémy.***

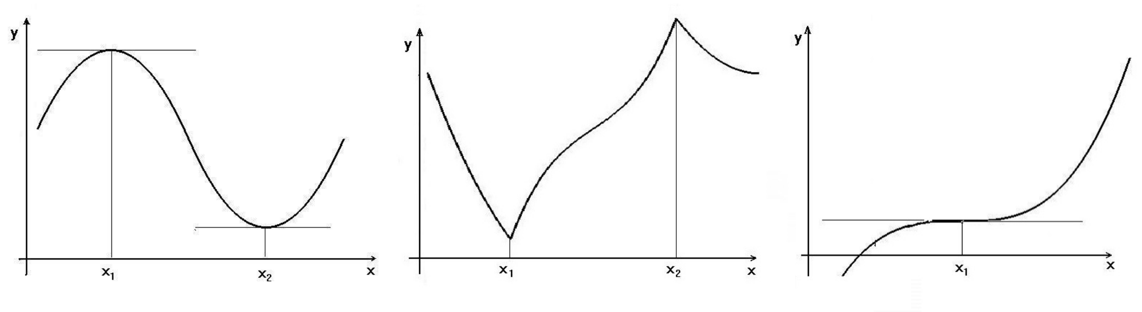
V praxi mají největší význam zpravidla ostré lokální extrémy, proto pod pojmem „lokální extrémy“ budeme v dalším výkladu rozumět ostré lokální extrémy; v případě neostrých extrémů na to přímo upozorníme.

Z definice lokálního extrému vyplývá: Má-li funkce f v bodě x_0 lokální maximum (minimum), potom zúžení funkce na jisté okolí $\mathcal{U}(x_0)$ má v x_0 největší (nejmenší) hodnotu. Je-li navíc funkce na $\mathcal{U}(x_0)$ diferencovatelná, musí podle Fermatovy věty platit $f'(x_0) = 0$. Může se ovšem stát, že funkce v bodě, ve kterém má lokální extrém, není diferencovatelná – například $|x|$ má jistě v bodě $x_0 = 0$ minimum (pouze zde nabývá hodnoty 0, ve všech bodech $x \neq 0$ je $|x| > 0 = |0|$), a přitom $|x|'$ v nule neexistuje. Proto platí následující věta:

Věta 3.87: **(Nutná podmínka pro lokální extrém)** *Jestliže funkce f má v bodě x_0 lokální extrém, potom $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.*

Definice 3.88: Bod x_0, ve kterém je $f'(x_0) = 0$, se nazývá ***stacionární bod*** funkce f.

Z věty 3.87 vyplývá, že diferencovatelná funkce může mít extrém pouze ve stacionárním bodě, ale extrém zde mít nemusí; navíc extrém může nastat i v bodě, kde funkce není diferencovatelná. V obrázku 3.60 vidíme nalevo funkci, která má extrémy ve stacionárních bodech, uprostřed funkci, která má extrémy v bodech, kde derivace neexistuje, a napravo funkci, která ve stacionárním bodě extrém nemá.



Obr. 3.60: Stacionární body a extrémy

Věta 3.89: **(Postačující podmínka pro lokální extrém ve stacionárním bodě)** *Nechť funkce f má druhou derivaci ve svém stacionárním bodě x_0. Je-li $f''(x_0) > 0$, nastává v bodě x_0 lokální minimum, je-li $f''(x_0) < 0$, nastává v bodě x_0 lokální maximum.*

Příklad 3.90: Vyšetřeme lokální extrémy funkce $f:\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Řešení:

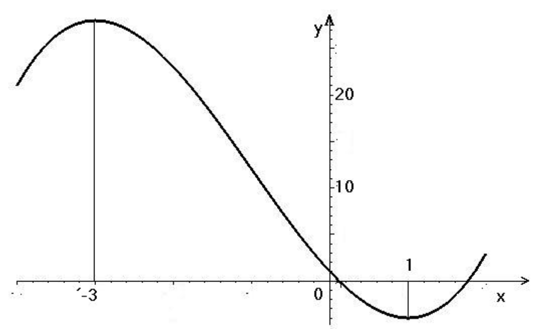
$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9, \quad f''(x) = 6x + 6.$$

Stacionární body dostaneme z podmínky $f'(x) = 0$, tedy

$$3(x^2 + 2x - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = -3.$$

Protože $f''(1) = 12 > 0$, $f''(-3) = -12 < 0$, nastává v bodě $x_1 = 1$ lokální minimum a v bodě $x_2 = -3$ lokální maximum s hodnotami

$$f_{\min} = f(1) = -4, \quad f_{\max} = f(-3) = 28.$$



Obr. 3.61: $f(x) = x^3+3x^2-9x+1$.

V případě, že ve stacionárním bodě x_0 je $f''(x_0) = 0$, věta 3.89 o lokálním extrému nerozhodne. Je-li však f dostatečně mnohokrát diferencovatelná v bodě x_0, můžeme použít následující větu:

Věta 3.91: *Nechť ve stacionárním bodě x_0 funkce f je*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pro } k = 1, 2, ..., n-1,$$
$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Je-li n sudé, nastává v x_0 lokální extrém, a to lokální maximum (resp. minimum) pro $f^{(n)}(x_0) < 0$ (resp. $f^{(n)}(x_0) > 0$). Je-li n liché, extrém v x_0 nenastane.

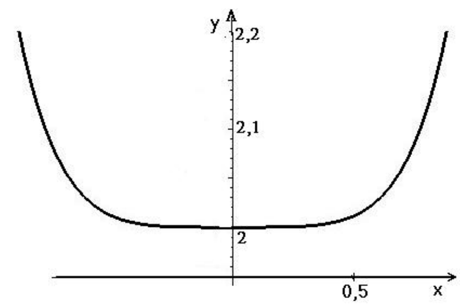
Příklad 3.92: Máme vyšetřit lokální extrémy funkce $f : f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{12}x^4 + 2$.

Řešení:

$$f'(x) = x^5 + \tfrac{1}{3}x^3,\ f''(x) = 5x^4 + x^2,$$

$$f'''(x) = 20x^3 + 2x,\ f^{(4)}(x) = 60x^2 + 2.$$

Stacionární body dostaneme z podmínky $x^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) = 0$, tedy f má jediný stacionární bod $x = 0$.
$f''(0) = f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 2 > 0$.
Protože nejnižší derivace, která je v bodě 0 různá od nuly je sudého řádu, nastává zde lokální extrém a to lokální minimum.



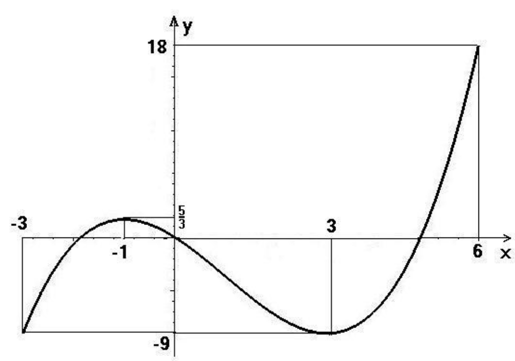
Obr. 3.62: $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{12}x^4 + 2$

Absolutní (globální) extrémy

Weierstrassova věta zajišťuje existenci maxima a minima spojité funkce f na uzavřeném intervalu $\mathcal{J}$. Tyto hodnoty nazýváme ***největší*** a ***nejmenší hodnotou*** funkce f na dané množině neboli ***absolutními extrémy*** . Svých absolutních extrémů může funkce nabýt jak v krajních bodech intervalu $\mathcal{J}$, tak v jeho vnitřních bodech. Proto pro nalezení absolutních extrémů je třeba porovnat hodnoty funkce v bodech jejích lokálních extrémů a v krajních bodech intervalu $\mathcal{J}$.

Příklad 3.93: Máme najít absolutní extrémy funkce $f : f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ na intervalu $\langle -3, 6\rangle$.

Řešení: Daná funkce je na intervalu $\langle -3, 6\rangle$ spojitá a má na něm derivace f' a f''. Přitom je $f'(x) = x^2 - 2x - 3,\ \ f''(x) = 2x - 2$. Stacionární body funkce jsou $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Oba leží uvnitř intervalu $\langle -3, 6\rangle$. Protože $f''(-1) = -4 < 0$, má funkce f v bodě $x_1 = -1$ ostré lokální maximum s hodnotou $f(-1) = \frac{5}{3}$. Dále je $f''(3) = 4 > 0$, a proto má funkce f v bodě $x_2 = 3$ ostré lokální minimum s hodnotou $f(3) = -9$.



Obr. 3.63: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ na $\langle -3, 6\rangle$.

Stanovíme hodnoty v krajních bodech intervalu: $f(-3) = -9$, $f(6) = 18$. Vidíme, že daná funkce f má na intervalu $\langle -3, 6\rangle$ absolutní maximum o hodnotě 18 v bodě 6 a absolutní minimum o hodnotě -9 v bodě -3 a v bodě 3.

Na vyšetřování absolutních extrémů funkcí na intervalu vedou často i praktické úlohy – hledání optimální situace nějakého problému: nejmenší spotřeba materiálu, nejlevnější cena atd. V těchto situacích spočívá podstatná část úlohy v nalezení funkce, jejíž extrém se má najít, a intervalu, na kterém se má extrém hledat – tedy ve formalizaci úlohy:

Formalizaci slovní úlohy na extrém tvoří funkce, jejíž maximum (resp. minimum) hledáme, tzv. ***účelová funkce***, a podmnožina definičního oboru této funkce, na které se má extrém realizovat.

Příklad 3.94: Letenka na vyhlídkový let stojí 100 Kč, jestliže se letu účastní od padesáti do sta pasažérů; za každou prodanou letenku nad sto se cena letenky (pro všechny pasažéry) snižuje o 50 hal. Letadlo má kapacitu 200 míst. Při jakém počtu pasažérů má letecká společnost největší zisk?

Řešení: Počet pasažérů označíme jako x, zřejmě je $x \in \langle 50, 200\rangle$. Najdeme nejdříve funkci, která vyjadřuje cenu letenky v případě, kdy pasažérů je více než sto:

Je-li x počet pasažérů, je $x - 100$ počet pasažérů nad 100 a cena letenky se snižuje o $(x - 100) \cdot 0{,}5$ Kč. Cena leteky je tedy v tomto případě rovna $100 - (x - 100)/2$ Kč.

Nyní můžeme sestavit funkci, která vyjadřuje celkový zisk společnosti v závislosti na počtu účastníků letu, tedy formalizovat úlohu:

$$f(x) = \begin{cases} 100x & \text{pro } x \in \langle 50, 100\rangle \\ \left(150 - \frac{x}{2}\right) x & \text{pro } x \in (100, 200\rangle \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad max.$$

Poznamenejme, že funkce f je pro $x = 100$ (tedy na celém definičnín oboru) spojitá. Určíme první derivaci:

$$f'(x) = \begin{cases} 100 & \text{pro } x \in (50, 100) \\ \text{neex.} & \text{pro } x = 100 \\ 150 - x & \text{pro } x \in (100, 200) \end{cases}$$

Funkce může mít absolutní maximum v bodech, ve kterých je první derivace nulová, nebo kde neexistuje; k ověření existence maxima použijeme znaménko 1. derivace:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \quad \text{pro } x = 150, \\ f'(x) &> 0 \quad \text{pro } x \in (50, 100) \text{ a } x \in (100, 150), \\ f'(x) &< 0 \quad \text{pro } x \in (150, 200). \end{aligned}$$

Účelová funkce tedy roste pro $x \in (50, 150)$ a klesá pro $x \in (150, 200)$, tj. má absolutní maximum pro $x = 150$ a toto maximum má hodnotu

$$\text{největší zisk } = f(150) = 150^2 - \frac{1}{2}150^2 = 11250.$$

Poznamenejme, že absolutního minima nabude v některém krajním bodě intervalu:

$$f(50) = 5000, \quad f(200) = 150 \cdot 200 - \frac{1}{2}200^2 = 10000;$$

nejmenší zisk dosáhne letecká společnost při padesáti pasažérech.

Příklad 3.95: Máme najít rozměry uzavřené plechové konzervy tvaru rotačního válce, která má daný objem V a na jejíž výrobu se spotřebuje co nejméně materiálu.

Řešení: Označíme r poloměr a h výšku konzervy. Její objem je $V = \pi r^2 h$. Rozměry budou z hlediska spotřeby materiálu nejekonomičtější, jestliže povrch konzervy $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ bude při daném objemu co nejmenší. Vidíme, že povrch S je funkcí dvou proměnných r a h. Ze vzorce pro objem plyne pro výšku $h = V/(\pi r^2)$. Po dosazení do vzorce pro povrch dostaneme

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Tím je vyjádřen povrch S jako funkce jedné proměnné r.

Formalizace úlohy:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \qquad \longrightarrow \quad min, \qquad r \in (0, \infty).$$

(Interval, na kterém extrém hledáme, je otevřený. Obecně se tedy může stát, že maximum nebo minimum neexistuje.)
Najdeme stacionární body účelové funkce:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}.$$

Řešením rovnice $4\pi r^3 - 2V = 0$ zjistíme, že jediným stacionárním bodem je bod

$$r_o = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Dále je

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2} = 4\pi + \frac{4V}{r^3}, \ \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2}|_{r=r_o} = 12\pi > 0$$

– funkce S tedy má na intervalu $(0, \infty)$ nejmenší hodnotu právě v bodě r_o. Příslušná výška pro tento poloměr je

$$h_o = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_o.$$

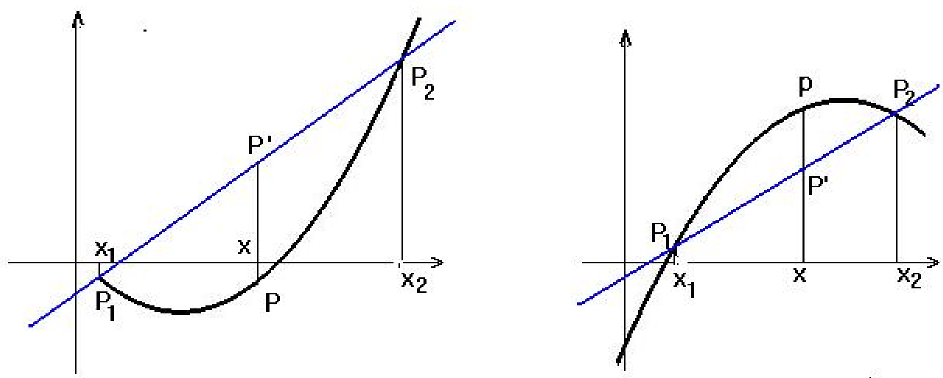
Vidíme, že osový řez konzervy je čtverec.

Připomeňme, že jsme účelovou funkci vyšetřovali na otevřeném intervalu $r \in (0, \infty)$; (jednostranné) limity v krajních bodech jsou nevlastní – svého maxima funkce nenabude, roste nad libovolnou mez.

Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body

Definice 3.96: Funkce f, definovaná na $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ se nazývá ***konvexní*** (resp. ***konkávní***) na $\mathcal{J}$, má-li tuto vlastnost:
Jsou-li x_1, x, $x_2 \in \mathcal{J}$ libovolné tři body takové, že $x_1 < x < x_2$, potom bod $P = [x, f(x)]$ leží buď pod (resp. nad) přímkou P_1P_2, kde $P_1 = [x_1, f(x_1)]$, $P_2 = [x_2, f(x_2)]$

Myšlenka definice je znázorněna v obr. 3.64, kde je nalevo konvexní a napravo konkávní funkce.



Obr. 3.64: Konvexní a konkávní funkce

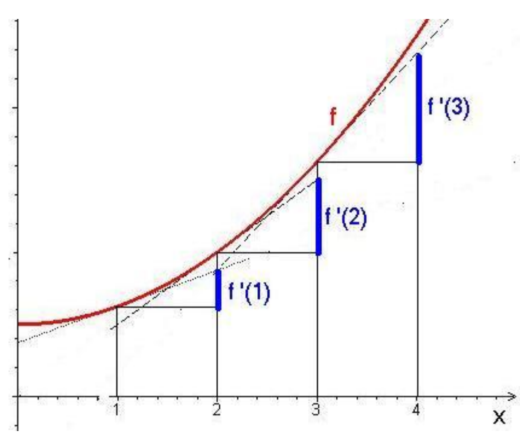
Jinak řečeno (pro diferencovatelnou funkci): Funkce f je v intervalu $\mathcal{J}$ konvexní (resp. konkávní), leží-li graf funkce pro $x \in \mathcal{J}$ nad (resp. pod) tečnou, vedenou k tomuto grafu libovolným bodem $[x, f(x)]$, $x \in \mathcal{J}$.

Pro vyšetřování konvexnosti je důležitá následující (dost názorná) věta, jejíž pravdivost demonstrujeme v sousedním obrázku:

Věta 3.97: *Nechť funkce f je spojitá na $\mathcal{J}$ a diferencovatelná na $\mathcal{J}_0$. Potom*

a) f je konvexní na $\mathcal{J}$, právě když f' roste na $\mathcal{J}_0$,

b) f je konkávní na $\mathcal{J}$, právě když f' klesá na $\mathcal{J}_0$.



Obr. 3.65: f konvexní – f' roste

Z vět 3.97 a 3.84 bezprostředně plyne

Věta 3.98: *Nechť funkce f je dvakrát diferencovatelná na $\mathcal{J}$. Potom f je na $\mathcal{J}$ konvexní (resp. konkávní), právě když $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) na $\mathcal{J}_0$, přičemž není $f''(x) = 0$ na žádném podintervalu intervalu $\mathcal{J}$.*

Definice 3.99: Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě x_0. Řekneme, že f má v bodě x_0 ***inflexi*** a bod x_0 nazveme ***inflexním bodem*** funkce f, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že f je konvexní na intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ a konkávní na intervalu $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, nebo je f konkávní na intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ a konvexní na intervalu $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Příklad 3.100: Funkce

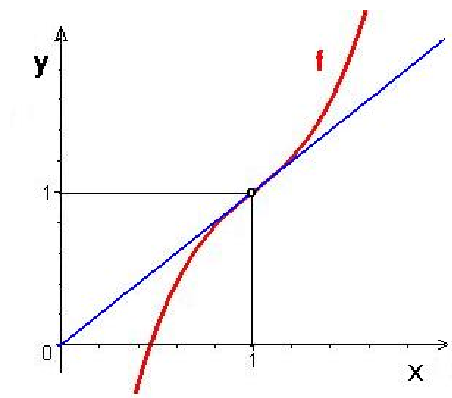
$$f : f(x) = 3(x-1)^3 + x$$

má inflexi v bodě $x_0 = 1$ – viz obr. 3.66:

$f'(x) = 9(x-1)^2 + 1, \quad f''(x) = 18(x-1).$

Pro $x > 1$ je $f''(x) > 0$ a f je konvexní,

pro $x < 1$ je $f''(x) < 0$ a f je konkávní.



Obr. 3.66: $f(x) = 3(x-1)^3 + x$

Z vět 3.87 a 3.97 plyne

Věta 3.101: **(Nutná podmínka pro inflexi)** *Je-li x_0 inflexním bodem funkce f, potom buď $f''(x_0) = 0$, nebo $f''(x_0)$ neexistuje.*

Analogicky jako u lokálních extrémů platí

Věta 3.102: **(Postačující podmínka pro inflexi)** *Nechť*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pro } k = 2, 3, ..., n-1, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Je-li n liché, potom x_0 je inflexní bod funkce f, je-li n sudé, v x_0 inflexe nenastane.

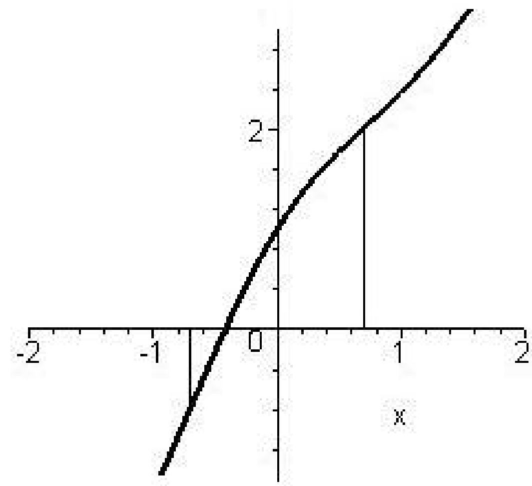
Příklad 3.103: Máme najít inflexní body funkce $f:\ f(x) = e^{-x^2} + 2x$.

Řešení: $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$;
$f''(x) = 0 \iff 2x^2 - 1 = 0$;

Této podmínce vyhovují body
$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dále je $f'''(x) = -4e^{-x^2}(2x^3 - 3x)$,
$f'''(x_1) = 4\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$,
$f'''(x_2) = -4\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$.

Proto $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ jsou inflexní body funkce f.



Obr. 3.67: $f(x) = e^{-x^2} + 2x$

Asymptoty grafu funkce

Definice 3.104:

a) Přímka $x = a$ se nazývá ***asymptotou bez směrnice (svislou asymptotou)*** grafu funkce f, jestliže

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty, \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

b) Přímka $y = ax + b$ se nazývá ***asymptotou se směrnicí*** grafu funkce f, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0, \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Místo asymptota grafu funkce f říkáme také stručněji asymptota funkce f.

Věta 3.105:

1. *Jestliže je přímka $y = ax + b$ asymptotou funkce f, potom*

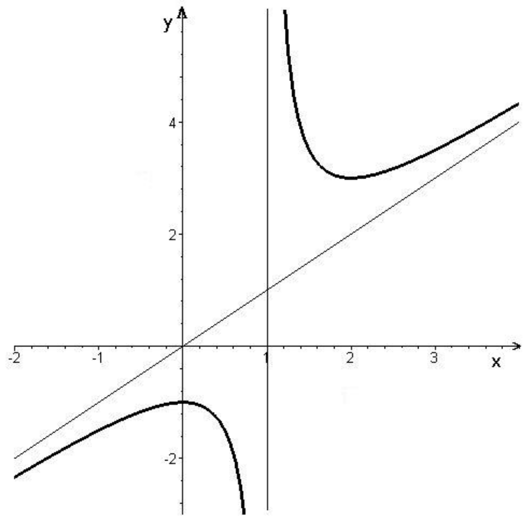
$$a = \lim \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim[f(x) - ax], \qquad \textit{kde } \lim \textit{ je buď } \lim_{x\to\infty} \textit{ nebo } \lim_{x\to-\infty}.$$

2. *Naopak, jestliže existují vlastní limity z 1., potom přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f.*

Příklad 3.106: Máme najít asymptoty funkce $f:\ f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$.

Řešení: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x+\frac{1}{x-1}\right)=\infty$,
$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x+\frac{1}{x-1}\right)=-\infty$.
Je tedy přímka $x=1$ svislou asymptotou funkce f.

Protože
$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x(x-1)}\right)=1$,
$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}=0$,
je přímka $y=x$ jedinou asymptotou se směrnicí funkce f.



Obr. 3.68: $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$

Vyšetření průběhu funkce

Vyšetřit průběh funkce znamená získat dostatek informací o nejvýznamnějších jejích vlastnostech zmíněných v této kapitole: Kromě určení oboru definice, bodů nespojitosti, nulových bodů a určení významných limit se jedná hlavně o určení intervalů monotonie, lokálních a absolutních extrémů, intervalů konvexnosti a konkávnosti, inflexních bodů, asymptot a konečně o načrtnutí grafu funkce.

Postupujeme obvykle podle tohoto schematu:

I. (a) Definiční obor D_f funkce f.
(b) Body nespojitosti; intervaly spojitosti.
(c) Chování funkce v okolí bodů nespojitosti a svislé asymptoty.
(d) Průsečíky se souřadnými osami.
(e) Symetrie grafu funkce (sudá, lichá).
(f) Periodičnost funkce.

II. Intervaly monotónnosti; body extrému a extrémy.

III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti; inflexní body.

IV. Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí.

Příklad 3.107: Vyšetříme průběh funkcí

$a)\quad f(x)=\frac{x^3}{4-x^2}\qquad b)\quad f(x)=\sqrt[3]{x^2}-x\qquad c)\ f(x)=x\,e^{1/x}$

Řešení:

a) **I.** (a) $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$: Definiční obor $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$.

(b) Body nespojitosti; intervaly spojitosti – ve svém definičním oboru je funkce spojitá.

(c) Funkce je lichá: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x)$.
Graf funkce f je tedy souměrný podle počátku a budeme ji vyšetřovat pouze na množině $\langle 0, 2) \cup (2, \infty)$.

(d) Chování funkce v okolí bodů nespojitosti a vertikální asymptoty:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{x+2} \cdot \frac{1}{2-x} = 2 \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2-x} = \left[2 \cdot \frac{1}{0^+}\right] = \infty,$$

analogicky

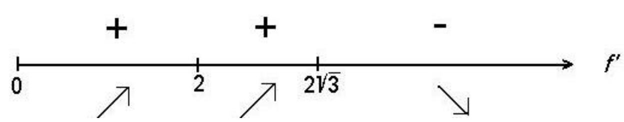
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3}{x+2} \cdot \frac{1}{2-x} = 2 \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2-x} = \left[2 \cdot \frac{1}{0^-}\right] = -\infty.$$

Funkce f tedy má v bodě $x = 2$ (a také v bodě $x = -2$) svislou asymptotu.

II. Intervaly monotónnosti; body extrému a extrémy. Pro $x \geq 0$ platí:

$$f'(x) = \frac{3x^2(4-x^2) - (-2x)x^3}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}$$

$f'(x) = 0$ pro $x = 0$ a $x = 2\sqrt{3}$, derivace neexistuje v bodě $x = 2$(pochopitelně, není tam definovaná). Vyšetříme znaménko derivace; nakreslíme na číselné ose body, ve kterých může derivace f' funkce f měnit znaménko a nad číselnou osu příslušná znaménka. Pod osou vyznačíme, kde funkce f roste a kde klesá:



Obr. 3.69: Znaménko derivace funkce $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$

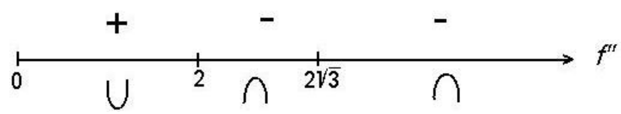
Vidíme, že funkce f má maximum v bodě $x = 2\sqrt{3}$.
Jeho hodnota je $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$.

III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti; inflexní body.

$$f''(x) = \frac{(24x - 4x^3)(4-x^2)^2 - 2(4-x^2)(-2x)(12x^2 - x^4)}{(4-x^2)^4} = \frac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}.$$

$f''(x) = 0$ pro $x = 0$; z lichosti funkce f plyne, že je to inflexní bod.

Vyšetříme znaménko druhé derivace; nakreslíme na číselné ose body, ve kterých může druhá derivace f'' měnit znaménko a nad číselnou osu příslušná znaménka. Pod osou vyznačíme, kde je funkce f konvexní a kde konkávní:



Obr. 3.70: Znaménko druhé derivace funkce $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$

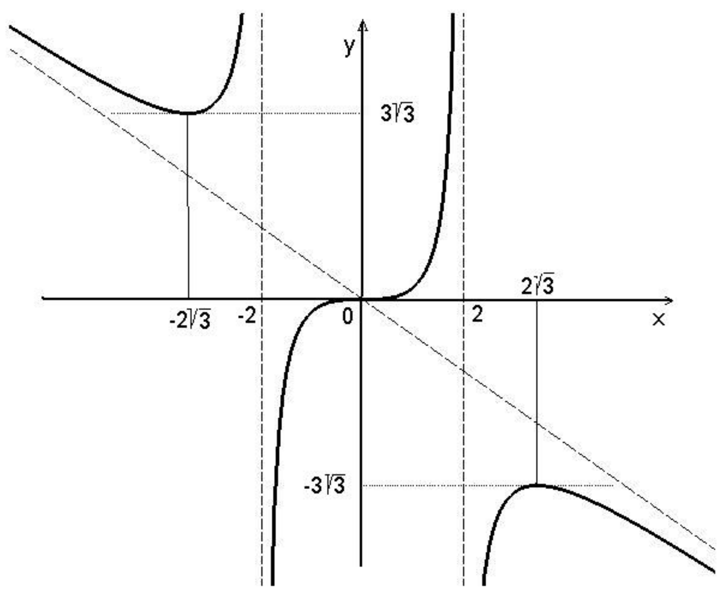
IV. Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{4}{x^2}-1} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - a\cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{4-x^2} = |\text{L'H pravidlo}| = 0.$$

Šikmá asymptota pro $x \to \infty$ je tedy přímka $\underline{y = -x}$.
Závěrem, s využitím všech získaných vlastností funkce f, načrtneme její graf (pro $x < 0$ využijeme symetrie podle počátku):



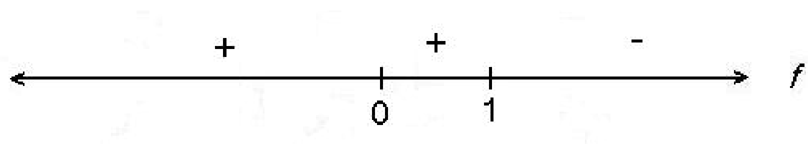
Obr. 3.71: Graf funkce $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$

b) **I.** (a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$: Definiční obor $D_f = \mathbb{R}$, funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

(b) Průsečíky se souřadnými osami:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[3]{x}) = 0 : \quad f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}.$$

Znaménko funkce:



Obr. 3.72: Znaménko funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$

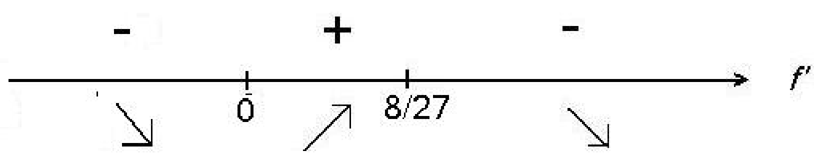
(c) Funkce není ani sudá, ani lichá, ani periodická.

II. Intervaly monotónnosti; body extrému a extrémy:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}}; \; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{27} \doteq 0{,}293;$$

f' neexistuje pro $x = 0$.

Znaménko derivace funkce:



Obr. 3.73: Znaménko derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$

V bodě $x = 0$ má funkce lokální minimum se svislou tečnou ($\lim\limits_{x\to 0_-} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x) = \infty$), přičemž $f(0) = 0$, a v bodě $x = \frac{8}{27}$ lokální maximum s derivací nulovou, přičemž $f(\frac{8}{27}) = \frac{4}{27}$.

III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body:

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} < 0 \; \forall x, \; x \neq 0.$$

Funkce f je tedy konkávní pro $x < 0$ i pro $x > 0$.

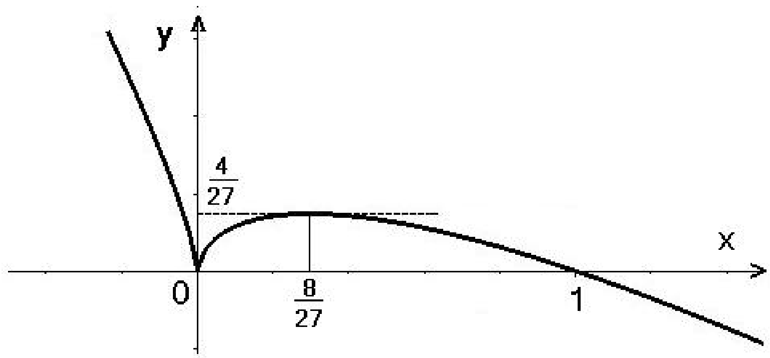
IV. Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2} = \infty,$$

funkce nemá asymptoty.

Nakreslíme graf:



Obr. 3.74: Graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$

c) **I.** (a) $f(x) = x\,e^{1/x}$: Definiční obor $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; na svém definičním oboru je funkce f spojitá.

(b) Chování funkce v okolí bodů nespojitosti a svislé asymptoty:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = |\mathrm{L'H\,pravidlo}| = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Funkce má svislou asymptotu v bodě $x = 0$; asymptota je jednostranná – pouze zprava.

(c) Průsečíky se souřadnými osami funkce nemá; pro $x = 0$ má nulovou jednostrannou limitu zleva.

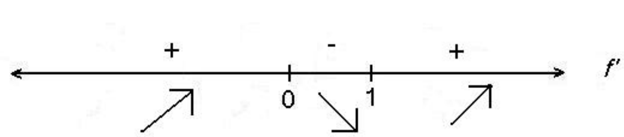
(d) Znaménko funkce: Funkce nabývá kladných hodnot pro kladná x a záporných pro záporná x.

(e) Funkce není ani sudá, ani lichá, ani periodická.

II. Intervaly monotónnosti, body extrému a extrémy:

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}; \quad f'(x) = 0 \text{ pro } x = 1, \quad f' \text{ neex. pro } x = 0\,(\notin D_f).$$

Znaménko první derivace:



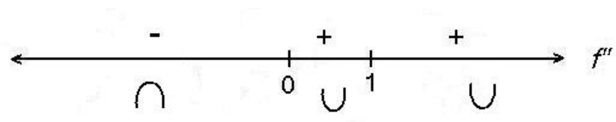
Obr. 3.75: Znaménko derivace funkce $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Funkce má lokální minimum v bodě $x = 1$ s hodnotou $f(1) = e$.

III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti; inflexní body:

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \qquad f(x) \neq 0\ \forall x \in D_f.$$

Znaménko druhé derivace:



Obr. 3.76: Znaménko druhé derivace funkce $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Funkce je pro $x > 0$ konvexní a pro $x < 0$ konkávní.

IV. Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí:

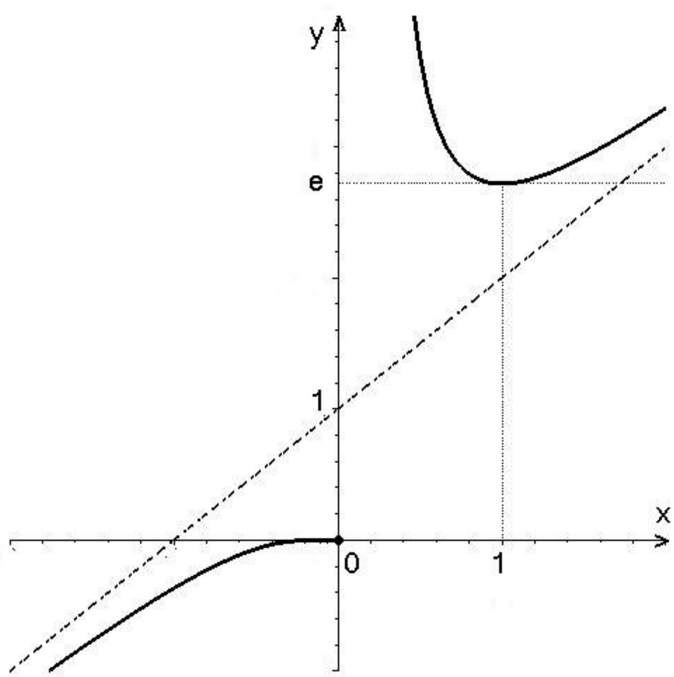
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} =$$

$$= |\mathrm{L'H\,pravidlo}| = 1.$$

Funkce má šikmou asymptotu o rovnici $\underline{\underline{y = x + 1}}$.

Nakreslíme graf:



Obr. 3.77: Graf funkce $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Shrnutí

V poslední kapitole o diferenciálním počtu funkce jedné proměnné jsme dříve odvozená fakta o derivacích použili k vyšetření chování funkcí:

- znaménko derivace f' udává, zda funkce f roste nebo klesá: je-li $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) na intervalu $\mathcal{J}$, funkce f na $\mathcal{J}$ roste (resp. klesá),

definovali jsme:

- lokální maximum (resp. minimum) funkce: největší (resp. nejmenší) hodnota, které funkce nabývá na jistém intervalu,
- lokální extrém: lokální maximum nebo minimum,
- absolutní nebo globální maximum (resp. minimum) funkce na množině M: největší (resp. nejmenší) hodnota, které funkce nabývá na množině M;

ukázali jsme, jak nalezneme body, ve kterých může nastat lokální extrém, a jak rozhodnout, zda extrém skutečně nastane:

- nutná podmínka pro lokální extrém: má-li f v bodě x_0 lokální extrém, je buď $f'(x_0) = 0$ (tedy x_0 je stacionární bod funkce f), nebo $f'(x_0)$ neexistuje,
- postačující podmínka pro lokální maximum (resp. minimum): $f''(x_0) < 0$ (resp. $f''(x_0) > 0$) ve stacionárním bodě funkce f,
- jiná postačující podmínka pro lokální maximum (resp. minimum): pro $x < x_0$ funkce f roste a zároveň pro $x > x_0$ klesá (resp. pro $x < x_0$ funkce f klesá a zároveň pro $x > x_0$ funkce f roste),

při hledání globálních extrémů funkce na intervalu je třeba nalézt všechny body lokálních extrémů funkce a funkční hodnoty v nich porovnat s hodnotami v krajních bodech intervalu; největší z těchto hodnot je globální maximum, nejmenší je globální minimum;

při vyšetřování průběhu funkce jsme dále zkoumali:

- kde je funkce f konvexní (resp. konkávní): graf funkce f v každém bodě intervalu leží nad (resp. pod) tečnou, sestrojenou v tomto bodě, přičemž
- znaménko druhé derivace funkce udává, kde je funkce konvexní (resp konkávní): je-li $f'' > 0$ (resp. $f'' < 0$) na intervalu $\mathcal{J}$, funkce f je na $\mathcal{J}$ konvexní (resp konkávní),
- kde funkce f má inflexní bod (inflexi): přechází z jedné strany tečny na druhou,
- nutná podmínka pro inflexi: má-li funkce f v bodě x_0 inflexní bod, je $f''(x_0) = 0$;

dále jsme zavedli pojem asymptoty grafu funkce:

- asymptota bez směrnice (svislá): přímka $x = a$ je svislá asymptota funkce f, je-li $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, nebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ nevlastní,

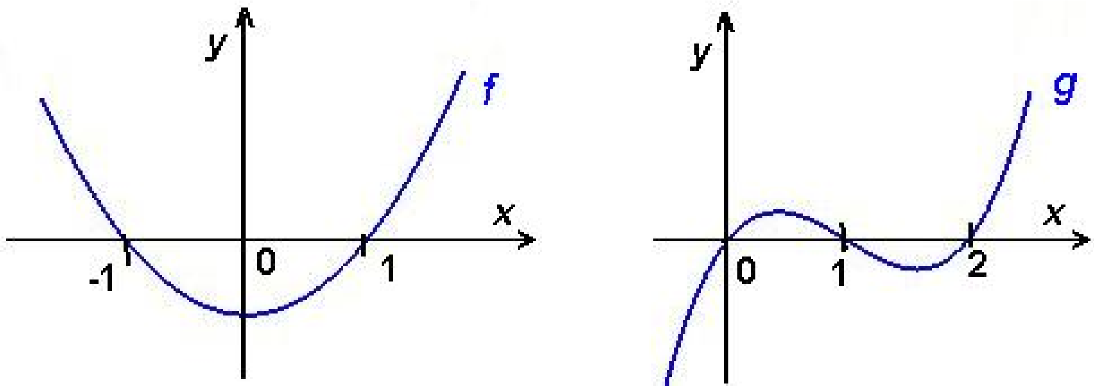
- asymptota se směrnicí: přímka $y = ax + b$ je asymptota funkce f, je-li $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, nebo $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$;
- pro a, b platí: $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - a\,x)$.

Otázky a úkoly

1. Kdy řekneme, že funkce f má v bodě x_0 lokální maximum (minimum)?
2. Co je to stacionární bod funkce?
3. Jaká je nutná podmínka pro lokální extrém?
4. Jak zjistíme, zda ve stacionárním bodě funkce nastane extrém?
5. Jak zjistíme, zda v bodě, ve kterém funkce nemá derivaci, nastane extrém?
6. Co jsou to absolutní (globální) extrémy funkce na intervalu?
7. Načrtněte grafy funkcí, pro které platí:
   a) absolutní maximum funkce f na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ je rovno 3 a absolutní minimum neexistuje,
   b) absolutní maximum funkce f na intervalu $(-2, 2)$ neexistuje a absolutní minimum je rovno 2,
   c) absolutní maximum funkce f na intervalu $(-2, 2)$ je rovno 4 a absolutní minimum je rovno 2,
   d) absolutní maximum funkce f na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ neexistuje a absolutní minimum neexistuje;
8. Musí platit,že mezi libovolnými dvěma lokálními maximy funkce (body, ve kterých nastane lokální maximum funkce) leží vždy bod, ve kterém má tato funkce lokální minimum? Jestliže ne, uveďte protipříklad a podmínky, za kterých tvrzení platí.
9. Uvažujme funkce f_c tvaru $f_c(x) = x^3 + cx + 1$, kde c je konstanta. Kolik lokálních extrémů a jakých (v závislosti na c) může funkce tohoto typu mít?
10. Zjistěte, zda derivace každé monotonní funkce musí být monotonní. Jako příklad zvolte funkci $f(x) = x + \sin x$.
11. Načrtněte grafy funkcí s následujícími vlastnostmi:
    a) $f(0) = 1,\ f(2) = 5,\ f'(x) < 0$ pro $x < 0 \vee x > 2,\ f'(x) > 0$ pro $0 < x < 2$,
    b) $f(-1) = 1,\ f(2) = 5,\ f'(x) < 0$ pro $x < -1 \vee x > 2,\ f'(x) > 0$ pro $-1 < x < 2,\ f'(-1) = 0,\ f'(0)$ neexistuje,
    c) $f(3) = 0,\ f'(x) < 0$ pro $x < 0 \vee x > 3,\ f'(x) > 0$ pro $0 < x < 3,\ f'(3) = 0,\ f(0)$ a $f'(0)$ neexistuje,

d) $f(1) = 0, \ \lim_{x\to\infty} f(x) = 2, \ f'(x) < 0$ pro $x < 1, \ f'(x) > 0$ pro $x > 1, \ f'(1) = 0.$

12. Odhadněte, ve kterých bodech mají funkce f, g na následujícím obrázku lokální extrémy a inflexní body, ve kterých intervalech rostou, klesají, jsou konvexní, konkávní.



13. Načrtněte grafy funkcí s následujícími vlastnostmi:

a) $f(0) = 2, \ f'(x) > 0$ pro všechna $x, \ f'(0) = 1,$
$f''(x) > 0$ pro $x > 0, \ f''(x) < 0$ pro $x < 0, \ f''(0) = 0,$

b) $f(0) = 1, \ f'(x) \geq 0$ pro všechna $x, \ f'(0) = 0,$
$f''(x) > 0$ pro $x > 0, \ f''(x) < 0$ pro $x < 0, \ f''(0) = 0.$

14. Může mít polynom a) svislou asymptotu, b) asymptotu se směrnicí? Jestliže ano, uveďte příklad, jestliže ne, odůvodněte.

15. Uveďte příklad funkce, která má následující asymptoty:

a) $x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3,$

b) $x = -1, \quad x = 1, \quad y = 0,$

c) $x = -1, \quad x = 1, \quad y = -2, \quad y = 2.$

16. Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí:

a) f je spojitá na $\mathbb{R}$, je sudá, $f(0) = 1$, přímka $y = 2 - x$ je její asymptota pro $x \to \infty$, $f'_+(0) = \frac{1}{2}$, $f''(x) < 0$ pro $x > 0$,

b) f je lichá, přímka $y = x - 1$ je její asymptota pro $x \to \infty$, přímka $x = 1$ je její svislá asymptota, $f'_+(0) = -\infty$, $f''(x) > 0$ pro $x \in (0, 1)$, $f''(x) < 0$ pro $x > 1$.

Cvičení

1. Najděte všechny intervaly největší délky, na kterých jsou následující funkce ryze monotonní:

   a) $f(x) = x^3 - x$, *b)* $f(x) = x^5 - 15x^3 + 3$,

   c) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, *d)* $f(x) = |x+1| + |x-1|$,

   e) $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{1-x}$, *f)* $f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$,

   g) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, *h)* $f(x) = x^2 - 1 + |x^2 - 1|$,

   i) $f(x) = x^{2/3} - (x^2-1)^{1/3}$, *j)* $fx = \frac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$,

   k) $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x + 2x$, *l)* $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$,

   m) $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$, *n)* $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

2. Stavovou rovnici reálného plynu je možno popsat van der Waalsovou rovnicí

   $$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{v^2}$$

   kde p je tlak, V objem plynu, R plynová konstanta, T teplota v K a a, b jsou konstanty charakterizující příslušný plyn. Dokažte, že pro teplotu $T > T_k$, kde T_k je kritická teplota $T_k = 8a/27bR$, je tlak klesající funkcí objemu V.

3. Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

   a) $f(x) = x^2(x-6)$, *b)* $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$,

   c) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + 3$, *d)* $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$,

   e) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, *f)* $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^3}$,

   g) $f(x) = x + \frac{2x}{1+x^2}$, *h)* $f(x) = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$,

   i) $f(x) = x^3 + 2|x|$, *j)* $f(x) = 1 + \sqrt{|x|}$,

   k) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$, *l)* $f(x) = (x^2-1)^{2/3}$,

   m) $f(x) = \sin x + \cos x$, *n)* $f(x) = 4x - \operatorname{tg} x$,

   o) $f(x) = x^2 e^{-x}$, *p)* $f(x) = e^{-x}\sin x$,

   q) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, *r)* $f(x) = x - \ln(1+x)$.

4. Najděte absolutní extrémy daných funkcí na daných intervalech:

   $a)$ $f(x) = x^2 - 6x + 10,$ $\langle -1, 5 \rangle,$

   $b)$ $f(x) = x^3 - 3x + 20,$ $\langle -3, 3 \rangle,$

   $c)$ $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^2 + 1,$ $\langle -2, 1 \rangle,$

   $d)$ $f(x) = |x^2 - 6x + 5|,$ $\langle -5, 5 \rangle,$

   $e)$ $f(x) = x + \frac{1}{x-1},$ $\langle -4, 0 \rangle,$

   $f)$ $f(x) = x + \frac{2x}{x^2-1},$ $\langle 1{,}01,\ 2 \rangle.$

5. Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl největší.

6. Najděte takové kladné číslo, aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl nejmenší.

7. Jsou dány čísla a, $s\,(0 < a < s)$. Mezi všemi trojúhelníky, které mají obvod $2s$ a stranu a, najděte trojúhelník s největším obsahem.

8. Jaké rozměry musí mít pravoúhlý rovnoběžník daného obvodu s, aby jeho úhlopříčka byla nejmenší?

9. Dokažte, že ze všech obdélníků daného obsahu má čtverec nejmenší obvod.

10. Dokažte, že ze všech obdélníků daného obvodu má čtverec největší obsah.

11. Na parabole $y = 4x - x^2$ najděte bod, který je nejblíže k bodu $A = [-1, 4]$.

12. Drát délky a máme rozdělit na dvě části, ze kterých první ohneme do tvaru čtverce a druhou do tvaru kruhu. Kde je třeba udělat řez, aby součet obsahů kruhu a čtverce byl největší?

13. Karton tvaru obdélníka má rozměry 60 cm ×28 cm. V rozích nastřihneme čtverce a zbytek ohneme do otevřené krabice. Jak velká má být strana nastřihnutých čtverců, aby objem krabice byl největší?

14. Muž v loďce je vzdálený 9,5 km od pobřeží v bodě C. Chce se dostat do místa A na pobřeží, které je od něj vzdálené 16 km. Umí veslovat rychlostí 3,2 km/h a jít rychlostí 6,4 km/h. Zjistěte, kde se musí vylodit, aby dosáhl bodu A v nejkratším čase a jak dlouho mu to potrvá.

15. Parník pohybující se rovnoměrně rychlostí v (v km/h) spotřebuje za hodinu $0{,}3 + 0{,}000\,02v^3$ nafty (v m^3). Jakou rychlostí se má pohybovat, aby na dané dráze spotřeboval co nejméně nafty?

16. Najděte asymptoty následujících funkcí:

$a)\quad f(x) = 3x + \frac{3}{x-2},\qquad b)\quad f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1},$

$c)\quad f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-4},\qquad d)\quad f(x) = x + \frac{2x}{x^2-1},$

$e)\quad f(x) = \sqrt[3]{x^3+4x^2},\qquad f)\quad f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1},$

$g)\quad f(x) = 2x - \frac{2\cos x}{x},\qquad h)\quad f(x) = \frac{x\sin x}{1+x^2},$

$i)\quad f(x) = x\,e^{1/x^2},\qquad j)\quad f(x) = x\,\ln(e + \frac{1}{x}),$

$k)\quad f(x) = x \operatorname{arctg} x,\qquad l)\quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$

17. Vyšetřete průběh následujících funkcí:

$a)\quad f(x) = \frac{e^x}{x+1},\qquad b)\quad f(x) = \frac{x}{3-x},$

$c)\quad f(x) = \ln \frac{x}{x-3},\qquad d)\quad f(x) = \frac{1}{x^2-6x+8},$

$e)\quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-2}{x},\qquad f)\quad f(x) = \frac{x^2-1}{x},$

$g)\quad f(x) = \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1},\qquad h)\quad f(x) = x^3 - x,$

$i)\quad f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2},\qquad j)\quad f(x) = \frac{x}{2\ln x}.$

Výsledky

1. a) $(-\infty,-1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3},\infty)$ roste, $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ klesá, b) $(-\infty,-3)$, $(3,\infty)$ roste, $(-3,3)$ klesá, c) $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$ klesá, $(-1,1)$ roste, d) $(-\infty,-1)$ klesá, $(1,\infty)$ roste, e) $(-\infty,0)$, $(0,2/3)$, $(2,\infty)$ klesá, $(2/3,1)$, $(1,2)$ roste, f) $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},\infty)$ roste, $(-\sqrt{3},-1)$, $(-1,1)$, $(1,\sqrt{3})$ klesá, g) $(-\infty,-5)$, $(-1,\infty)$ roste, $(-5,-1)$ kleá, h) $(-\infty,-1)$ klesá, $(1,\infty)$ roste, i) $(-\infty,-1/\sqrt{2})$, $(0,1/\sqrt{2})$ roste, $(-1/\sqrt{@},0)$, $(1/\sqrt{2},\infty)$ klesá, j) $(-1/3,\infty)$ roste, $(-\infty,-1/3)$ klesá, k) $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2k\pi)$, $(\pi \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi)k$ je celé číslo, roste, $(\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2k\pi, \pi+\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi)$, k je celé číslo, klesá, l) $(2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi)$, $(\pi+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi)$, k celé číslo, klesá, $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \pi+2k\pi)$, $(\frac{4\pi}{3}+2k\pi, 2\pi+2k\pi)$, k celé číslo, roste, m) $(-\infty,-1)$, $(0,\infty)$ roste, n) $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ roste;
3. a) max. 0 v $x=0$, min. -32 v $x=4$, b) neex., c) max. 3 v $x=0$, d) max. 0 v $x=1$, min. $\doteq -0{,}05$ v $x=(5+\sqrt{13})/6$, min. $\doteq -0{,}76$ v $x=(5-\sqrt{13})/6$, e) neex., f) min. $\sqrt[5]{24^2}-8/\sqrt[5]{24^3}$ v $x=\sqrt[5]{24}$, g) neex., h) max. 10 v $x=1$, min. 8 v $x=1/2$, i) max. 0 v $x=0$, min. $-4\sqrt{2}/3\sqrt{3}$ v $x=\sqrt{2/3}$, j) min. 1 v $x=0$, k) max. 3 v $x=3$, l) max. 1 v $x=0$, min. 0 v $x=-1$ a v $x=1$, m) max. $\sqrt{2}$ v $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, k celé, min. $-\sqrt{2}$ v $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, k celé, n) min. $4(\frac{\pi}{3}+k\pi)-\sqrt{3}$ v $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, k celé, max. $4(\frac{2\pi}{3}+k\pi)+\sqrt{3}$ v $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$, k celé, o) min. 0 v $x=0$, max. $4e^{-2}$ v $x=2$, p) max. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4+2k\pi}$ v $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, min. $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-5\pi/4+2k\pi}$ v $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, q) min.e v $x=e$, r) min. 0 v $x=0$;
4. a) max.17 v $x=-1$, min. 1 v $x=3$, b) min. 2 v $x=-3$, max. 38 v $x=3$, c) min. -151 v $x=-2$, max. 2 v $x=1$, d) max. 60 v $x=-5$, min. 0 v $x=1$, e) max. -1 v $x=0$, min. $-19/5$ v $x=-4$, f) max. $\doteq 101{,}5$ v $x=1{,}01$, min. $10/3$ v $x=2$;
5. 14, 14;
6. 1;
7. rovnoramenný trojúhelník se stranami a, $s-a/2$, $s-a/2$;
8. $a=s/4$, $b=s/4$;
11. $[1,3]$;
12. $x=4a/(\pi+4)$;
13. 6;

14. 6,464 km od A, 4,39 h;
15. 19,57 km/h;
16. a) $x = 2$, $y = 3x$, b) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, c) $x = -2$, $x = 2$, $y = x$, d) $x = -1$, $x = 1$, $y = x$, e) $y = x + \frac{4}{3}$, f) $x = 1/\sqrt{2}$, $x = -1/\sqrt{2}$, $y = \frac{1}{2}$, g) $x = 0$, $y = 2x$, h) $y = 0$, i) $x = 0$, $y = x$, j) $x = -\frac{1}{e}$, $y = x + \frac{1}{e}$, k) $y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$, l) $y = 0$;

17. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, roste na $(0, \infty)$, klesá na $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, extrémy v $x = 0$ min. 1 , konvexní na $(-1, \infty)$, konkávní na $(-\infty, -1)$, inflexe není, asymptoty $y = 0\,(x \to -\infty)$, $x = -1$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$,

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, roste v celém definičním oboru, nemá lokální extrémy, konvexní na $(-\infty, 3)$, konkávní na $(3, \infty)$, nemá inflexní body, asymptoty $y = -1$, $x = 3$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \infty$,

c) $D_f = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$, klesá v celém definičním oboru, nemá lokální extrémy, konvexní na $(3, \infty)$, konkávní na $(-\infty, 0)$, nemá inflexní body, asymptoty $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty$,

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$, roste na $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$, klesá na $(3, 4) \cup (4, \infty)$, extrémy v $x = 3$ max. -1, konvexní na $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$, konkávní na $(2, 4)$, nemá inflexní body, asymptoty $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \infty$,

e) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, roste v celém definičním oboru, nemá lokální extrémy, konvexní na $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$, konkávní na $(1, \infty)$, inflexe pro $x = 1$, asymptoty $y = \frac{\pi}{4}$, $x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$,

f) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, roste v celém definičním oboru, nemá lokální extrémy, konvexní na $(-\infty, 0)$, konkávní na $(0, \infty)$, nemá inflexní body, asymptoty $y = x$, $x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$,

g) $D_f = \mathbb{R}$, roste na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, klesá na $(-1, 1)$, extrémy v $x = -1$ max. $\ln 3$, $x = 1$ min. $-\ln 3$, konvexní na $(-\infty, -\sqrt{1 + \sqrt{3}}) \cup (0, \sqrt{1 + \sqrt{3}})$, konkávní na $(-\sqrt{1 + \sqrt{3}}, 0) \cup (\sqrt{1 + \sqrt{3}}, \infty)$, inflexe $x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}}$, asymptoty $y = 0$,
h) $D_f = \mathbb{R}$, roste na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, klesá na $x \in (-1, 1)$, extrémy v $x = -1$ max. 2, $x = 1$ min. -2, konvexní na $(0, \infty)$, konkávní na $(-\infty, 0)$, inflexe v $x = 0$, nemá asymptoty,
i) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, roste na $(-3, 1)$, klesá na $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$, extrémy v $x = -3$ min. $-\frac{1}{8}$, konvexní na $(-5, 1) \cup (1, \infty)$, konkávní na $(-\infty, -5)$, inflexe $x = -5$, asymptoty $y = 0$, $x = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$,

j) $D_f = (0, 1) \cup (1, \infty)$, roste na (e, ∞), klesá na $(0, 1) \cup (1, e)$, extrémy v $x = e$ min. $\frac{e}{2}$, konvexní na $(1, e^2)$, konkávní na $(0, 1) \cup (e^2, \infty)$, inflexe v $x = e^2$, asymptoty $x = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$.

4 Integrální počet

4.1 Neurčitý integrál

Zavedení pojmu derivace jsme motivovali např. důležitým požadavkem definovat okamžitou rychlost pohybu bodu po přímce. Existuje přirozeně i požadavek „opačný“, tj. nalézt zákon dráhy pohybu bodu po přímce, je-li dána jeho okamžitá rychlost jako funkce času.

Příklad 4.1: Je dána okamžitá rychlost v pohybu bodu po přímce (ose) x rovnicí $v(t) = 2t + 1,\ t \in \langle 0, \infty)$. Najděme zákon dráhy pohybu, je-li známo, že v čase $t = 0$ měl bod polohu $x = x_0$.

Označíme-li $x(t)$ polohu bodu v okamžiku t, pak $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. Hledáme tedy funkci x=x(t), pro niž platí

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1, \quad x(0) = x_0.$$

Je vidět, že první podmínce vyhovuje nekonečně mnoho funkcí

$$x = t^2 + t + C,$$

kde C je libovolná konstanta. Funkci, která splňuje i druhou podmínku (říkáme jí též počáteční podmínka), najdeme z předchozího vztahu dosazením dané podmínky pro $t = 0$, $x = x_0$. Dostaneme $x_0 = C$. Pro hledaný zákon dráhy tedy platí

$$x = t^2 + t + x_0.$$

Jednoduchou zkouškou se přesvědčíme, že tato funkce splňuje obě podmínky, a zároveň vidíme, že hledaná funkce daných vlastností je jediná.

Každé takové funkci, jejíž derivací je daná funkce, budeme říkat primitivní funkce k funkci dané. Na příkladě jsme viděli, že k dané funkci může existovat nekonečně mnoho primitivních funkcí. Množinu všech primitivních funkcí často nazýváme neurčitým integrálem. Nyní přejdeme k přesné formulaci základních pojmů.

Primitivní funkce

Definice 4.2: Nechť $\mathcal{I}$ je interval v $\mathbb{R}$ a $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ funkce. Funkci F nazveme ***primitivní*** k funkci f v intervalu $\mathcal{I}$, platí-li pro každé $x \in \mathcal{I}$ vztah

$$F'(x) = f(x).$$

(V případě uzavřeného intervalu rozumíme derivací v krajních bodech jednostranné derivace.)
Poznamenejme, že z definice primitivní funkce přímo vyplývá následující věta:

Věta 4.3: *Je-li funkce F primitivní funkcí k nějaké funkci f v intervalu $\mathcal{I}$, pak je funkce F v $\mathcal{I}$ spojitá.*

Důkaz Tvrzení věty plyne z existence derivace F' $(= f)$.

Primitivní funkce k zadané funkci jistě není určena jednoznačně – derivací se snadno přesvědčíme, že pro libovolnou funkci F primitivní k funkci f v intervalu $\mathcal{I}$ platí, že i $G = F + c$ je primitivní funkce k funkci f v intervalu $\mathcal{I}$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Jinak řečeno, liší-li se dvě primitivní funkce F, G o konstantu, tj. $G - F = c$, jsou primitivními funkcemi ke stejné funkci f. Navíc, na základě důsledku Lagrangeovy věty o přírůstku funkce, nulovou derivaci má pouze konstantní funkce, a tudíž stejnou derivaci mohou mít pouze funkce, lišící se o konstantu. Platí tedy věta:

Věta 4.4: *Je-li funkce F primitivní k funkci f v intervalu $\mathcal{I}$, pak $\{F + c \,|\, c \in \mathbb{R}\}$ je množinou všech primitivních funkcí k funkci f.*

Příklad 4.5: Primitivními funkcemi k funkci $\sin 2x$ v $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$ jsou například funkce $1 - \frac{1}{2}\cos 2x$ nebo $\frac{1}{2}(3 - \cos 2x)$, protože

$$\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2x\right)' = \sin 2x, \qquad \left(\frac{1}{2}(3 - \cos 2x)\right)' = \sin 2x.$$

Ale také funkce $\sin^2 x$ je primitivní ke stejné funkci, protože

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Z předchozí věty plyne, že $\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = c$; najděme tuto konstantu:

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = \sin^2 x + \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{2}.$$

Hledaná konstanta je tedy $c = \frac{1}{2}$.

Na jednoduchém příkladě můžeme ukázat, že ne ke každé funkci existuje primitivní funkce:

Příklad 4.6: Jednotková Heavisideova funkce η definovaná předpisem

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad t < 0, \\ 1 & \text{pro} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

nemá na intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivní funkci. Předpokládejme opak, tedy nechť F je primitivní funkcí k η, tj. $F'(t) = \eta(t)$ pro $t \in (-\infty, \infty)$. Funkce F musí být na intervalu $(-\infty, \infty)$ spojitá (má derivaci!), a musí platit

$$F'(t) = \eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad t < 0, \\ 1 & \text{pro} \quad t > 0. \end{cases}$$

Takovou funkcí by mohla být funkce

$$F(t) = \begin{cases} c & \text{pro} \quad t < 0, \\ t + c & \text{pro} \quad t > 0. \end{cases}$$

Tato funkce F však nemá v bodě 0 derivaci. Je totiž $F'_{-}(0) = 0,\ F'_{+}(0) = 1$, a proto není F primitivní funkcí.

Postačující podmínku pro existenci primitivní funkce uvádí následující věta:

Věta 4.7: *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\mathcal{J}$. Potom k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.*

Neurčitý integrál

Definice 4.8: Symbolem $\int f(x)\,dx$ označujeme systém všech primitivních funkcí k funkci f a nazýváme jej ***neurčitý integrál*** funkce f. Potom píšeme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \qquad \text{případně jen} \qquad \int f(x)\,dx = F(x),$$

kde F je některá primitivní funkce funkce f.

Funkce f se nazývá ***integrand*** nebo též ***integrovaná funkce***, argument x ***integrační proměnná***.

Proces nalezení primitivní funkce k dané funkci nazýváme ***integrováním*** nebo též ***integrací.***

Tedy např. zápis

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c,\ c \in \mathbb{R},\ x \in (-\infty, \infty), \quad \text{nebo jen} \quad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$$

znamená, že funkce $\frac{1}{3}x^3$ je primitivní funkcí k funkci x^2 na intervalu $(-\infty, \infty)$ a že množina všech primitivních funkcí k funkci x^2 je množina

$$\left\{ F \;\middle|\; F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c,\ \ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Je třeba si uvědomit, že rovnost mezi neurčitými integrály je rovnost až na aditivní konstantu.)

4.2 Integrační metody

Problém hledání primitivní funkce se od derivování liší ve dvou důležitých faktech. Za prvé, zatímco derivace elementární funkce je vždy opět elemetární funkcí, primitivní funkce k některým elementárním funkcím, např. k e^{x^2}, nejsou elementární. Za druhé, nepatrná změna ve tvaru funkce má za následek nepatrnou změnu v její derivaci, zatímco malá změna ve tvaru funkce může mít za následek podstatnou změnu v její primitivní funkci, např.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c, \quad \text{ale} \quad \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c,$$

jak se snadno přesvědčíme derivací výsledku.

Jak tedy najdeme k dané funkci f funkci F tak, aby platilo $F'(x) = f(x)$ na nějakém intervalu $\mathcal{I}$? Některé vztahy odvodíme snadno, např. jistě platí

$$\begin{array}{lcllcl}
\int \mathrm{e}^x\,dx & = & \mathrm{e}^x, & \text{protože} \ (\mathrm{e}^x)' & = & \mathrm{e}^x, \\
\int \cos x\,dx & = & \sin x, & \text{protože} \ (\sin x)' & = & \cos x, \\
\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x|, & \text{protože} \ (\ln|x|)' & = & \frac{1}{x}, \\
\int x^a\,dx & = & \frac{1}{a+1}x^{a+1}, \ a \neq -1, & \text{protože} \ \left(\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right)' & = & x^a.
\end{array}$$

(Další snadno odvoditelné vzorce jsou v závěrečném shrnutí.)

Stejně tak snadno prověříme platnost vztahů

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$

protože pro derivaci platí

$$(F(x)+G(x))' = F'(x) + G'(x) \quad \text{a} \quad (k\,F(x))' = k\,F'(x)$$

a současně

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x).$$

To nám ale umožní integrovat jen některé jednoduché funkce:

Příklad 4.9: Máme vypočítat následující integrály

$$a)\ \int (x^2-2x)^2 dx, \qquad b)\ \int \frac{x(\sqrt[3]{x} - x^3\sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}}\,dx, \qquad c)\ \int \frac{1}{\cos^2 x\,\sin^2 x}\,dx.$$

Řešení:

a) $$\int (x^2-2x)^2 dx = \int (x^4-4x^3+4x^2)\,dx = \frac{1}{5}x^5 - 4\,\frac{1}{4}x^4 + 4\,\frac{1}{3}x^3 + c =$$

$$= \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c,$$

b) $$\int \frac{x(\sqrt[3]{x} - x^3\sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \left(x^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} - x^{1+3+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\right)dx = \int \left(x^{\frac{13}{12}} - x^{\frac{17}{4}}\right)dx =$$

$$= \frac{12}{25}x^{\frac{25}{12}} - \frac{4}{21}x^{\frac{21}{4}} + c,$$

c) $$\int \frac{1}{\cos^2 x\,\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x\,\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c.$$

V předchozím příkladu jsme integraci provedli úpravou integrandu na součet výrazů, ke kterým jsme primitivní funkci „uhodli“ na základě znalosti vztahů pro derivace (tabulku derivací jsme použili „zprava doleva“). S tímto postupem již nevystačíme i u jednoduchých případů, kdy integrand je ve tvaru součinu nebo podílu, nebo je to složená funkce. Při výpočtu primitivních funkcí nemáme žádnou „gramatiku“, jako jsme měli pro výpočet derivací (známá pravidla pro derivaci součinu, podílu a složené funkce). Můžeme ale odvodit jistá pravidla, která nám v některých případech při integraci pomohou.

Integrace per partes

Ze vztahu pro derivaci součinu

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v', \quad \text{tedy} \quad u\,v' = (u\,v)' - u'\,v$$

vyplývá ***vzorec pro integraci per partes***:

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Vypadá to, že jsme si nijak nepomohli – integrál ze součinu funkcí jsme převedli na jiný integrál ze součinu funkcí. V některých případech se může výpočet zjednodušit:

Příklad 4.10: Vypočtěme integrály

a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,dx,$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$

Řešení:

a) $$\int x\,\mathrm{e}^x\,dx = \left|\begin{array}{c} u = x, u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^x, v = \mathrm{e}^x \end{array}\right| = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c,$$

b) $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x} & v = \ln x \end{array}\right| = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Zdánlivě jsme si nepomohli. Uvedená rovnost je však rovnicí pro neznámou funkci

$$J = \int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad \text{a má tvar} \qquad J = \ln^2 x - J,$$

$$\text{tedy} \quad J = \frac{1}{2}\ln^2 x, \quad x \in (0,\infty), \qquad \text{je jednou primitivní funkcí.}$$

O správnosti výpočtů se můžeme přesvědčit derivací.

Příklad 4.11: Pomocí metody per partes vypočítáme také integrál $\int \ln x\,dx$.

$$\int \ln x\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right| = x\,\ln x - \int \frac{1}{x}\,x\,dx = x\,\ln x - x + c.$$

Metoda substituce

Je-li F primitivní funkce k funkci f na nějakém intervalu $\mathcal{I}$, můžeme integrál $\int f(t)\,dt$ napsat ve tvaru

$$\int f(t)\,dt = \int F'(t)\,dt = \int dF(t),$$

kde v posledním integrálu vystupuje diferenciál primitivní funkce F.

Předpokládejme, že $t = g(x)$. Z věty o derivaci složené funkce $(F(g(x)))' = F'(g(x))\,g'(x)$ dostaneme pro diferenciál $dF(t)$

$$dF(t) = dF(g(x)) = F'(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(x))\,g'(x)\,dx \qquad \text{a odtud plyne}$$

$$\int f(t)\,dt = \int f(g(x))\,g'(x)\,dx, \qquad \text{kde} \quad t = g(x).$$

To je vztah pro nejdůležitější obecnou metodu pro integraci – metodu substituce.

Věta 4.12:

1. *Jestliže funkce $f\circ g$, g' jsou definovány na nějakém intervalu $\mathcal{I}$ a $\int f(t)\,dt = F(t)+c$, potom na tomto intervalu platí*

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + c,$$

2. *jestliže navíc existuje* g^{-1} *a* $\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = G(t) + c$, *potom*

$$\int f(x)\, dx = G(g^{-1}(x)) + c.$$

Princip popsaný ve větě se nazývá ***metoda substituce***.

Popišme oba postupy podrobněji:

1. Substituce $g(x) = t$:
   Má-li hledaný integrál tvar integrálu ze součinu složené funkce a derivace její vnitřní složky, a neznáme-li jeho hodnotu, pak substitucí $g(x) = t$ přejde na tvar $\int f(t)\, dt$, který může být pro výpočet jednodušší. Schematický zápis použití:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \left| \begin{array}{l} g(x) = t \\ g'(x)\, dx = dt \end{array} \right| = \int f(t)\, dt = F(t) + c = F(g(x)) + c.$$

2. Substituce $x = g(t)$:
   Budeme-li navíc předpokládat existenci g^{-1}, pro výpočet integrálu platí

$$\int f(x)\, dx = \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)\, dt \end{array} \right| = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt = G(t) + c = G(g^{-1}(x)) + c.$$

Příklad 4.13: Vypočítáme integrály

a) $\displaystyle\int \frac{x}{4x^2+1}\, dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+1}\, dx$.

<u>**Řešení:**</u> a) Položíme-li $t = 4x^2 + 1$, je $dt = 8x\, dx$, tedy

$$\int \frac{x}{4x^2+1}\, dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{4x^2+1}\, 8x\, dx = \left| \begin{array}{ll} t & = 4x^2+1 \\ dt & = 8x\, dx \end{array} \right| = \frac{1}{8} \int \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{8} \ln|t| + c =$$

$$= \frac{1}{8} \ln(4x^2+1) + c,$$

b) v tomto případě substituce $t = 4x^2 + 1$ nepovede k cíli, protože dt si v integrálu nemůžeme opatřit. Budeme postupovat takto:

$$\int \frac{1}{4x^2+1}\, dx = \int \frac{1}{(2x)^2+1}\, dx = \left| \begin{array}{ll} t & = 2x \\ dt & = 2dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + c =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + c.$$

V předchozím příkladu jsme viděli, jak velmi podobné výrazy (jednoduché racionální lomené funkce) integrujeme rozdílným způsobem. To je právě nevýhoda při hledání primitivních funkcí, že jsou zde jen návody, jak v některých trochu obecných případech postupovat.

V následujícím příkladu zobecníme oba postupy použité v předchozím příkladu – odvodíme dva důležité vzorce:

Příklad 4.14: Ukážeme, že platí:

$$\text{a)}\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c, \qquad \text{b)}\quad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

Řešení:

$$\text{a)}\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left|\begin{array}{ll} t & = f(x) \\ dt & = f'(x)\,dx \end{array}\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c,$$

$$\text{b)}\quad \int f(ax+b)\,dx = \left|\begin{array}{ll} z & = ax+b \\ dz & = a\,dx \end{array}\right| = \frac{1}{a}\int f(z)\,dz = \frac{1}{a}F(z) + c =$$

$$= \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

Tyto vzorce nám umožňují u mnoha jednoduchých integrálů bez použití substituční metody napsat přímo výsledek:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x|, \qquad \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln(e^x+1), \qquad \int \frac{1}{x\,\ln x}\,dx = \ln|\ln x|,$$

a hlavně

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x, \qquad \int \mathrm{e}^{2-x}\,dx = -\,\mathrm{e}^{2-x}, \qquad \int (4x+3)^3\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{1}{4}(4x+3)^4.$$

Nyní uvedeme příklad na použití substituční metody $x = g(t)$:

Příklad 4.15: Vypočítáme integrál

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{ll} x & = 2\sin t \\ dx & = 2\cos t\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{zde předpokládáme, že substituční funkce } g(t) = 2\sin t \text{ je prostá,} \\ \text{tj. že její derivace } g'(t) = 2\,\cos t \text{ je buď stále kladná, nebo stále záporná,} \\ \text{tedy např. } t \in (-\pi/2, \pi/2)\text{. V tom případě } t = g^{-1}(x) = \arcsin\frac{x}{2} \end{array}\right| =$$

$$= \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt = 4\int |\cos t|\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= 4\int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = 2t + \sin 2t + c = 2t + 2\sin t\cos t + c =$$

$$= 2t + 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + c = 2\ \arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{1-x^2/4} + c =$$

$$= 2\ \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c.$$

V následujícím příkladu odvodíme ještě jeden vzorec, který budeme dále potřebovat. Postup je značně obtížný – ilustruje, jak komplikovaná situace může při integraci nastat. Využije se zde jak metoda substituce, tak metoda per partes.

Příklad 4.16:

Máme vypočítat integrál $$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx.$$

Řešení: Nechť $n = 1$. Potom

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{a^2}\,a\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + c = \frac{1}{a}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + c.$$

Pro $n > 1$ nejdříve integrand upravíme takto:

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx\right].$$

Na druhý integrál použijeme metodu per partes:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int \frac{x}{2}\,\frac{2x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = \frac{x}{2} & u' = \frac{1}{2} \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & v \ \text{vypočítáme zvlášť} \end{array}\right|,$$

$$v = \int \frac{2x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \left|\begin{array}{ll} t & = x^2+a^2 \\ dt & = 2x\,dx \end{array}\right| = \int t^{-n}\,dt = \frac{1}{1-n}\,t^{-n+1} =$$

$$= \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}};$$

odtud

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{x}{2}\,\frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx.$$

Dohromady tedy

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx - \right.$$

$$-\left(\frac{x}{2}\,\frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(1-n)}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx\right].$$

Důležité na tomto výsledku je to, že stupeň polynomu ve jmenovateli integrované funkce je již nižší než u výchozího integrálu. Po několikanásobném použití bude tedy třeba vypočítat integrál, který již umíme:

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c.$$

Integrace racionálních lomených funkcí

Víme, že každá racionální lomená funkce je tvaru

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

kde $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ jsou polynomy stupňů m a n. Předpokládejme, že $m<n$, tj. že R je ryze lomená; v případě neryze lomené racionální funkce, tj. pro $m\geq n$, podíl $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ dává po vydělení

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=N(x)+\frac{\tilde{P}_i(x)}{Q_n(x)},\quad \text{kde}\quad i<n$$

Ryze lomenou racionální funkci můžeme rozložit na parciální zlomky, a integrace racionální lomené funkce se tedy převede na integraci parciálních zlomků; ty jsou následujících čtyř typů:

I. $Z_1(x)=\dfrac{A}{x-a},$ **II.** $Z_2(x)=\dfrac{A}{(x-a)^n},$

III. $Z_3(x)=\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q},$ **IV.** $Z_4(x)=\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},\quad p^2-4q<0.$

První dva typy zlomků integrovat již umíme; povšimneme si podrobně posledních dvou typů:

III.

Zlomek upravíme tak, abychom mohli použít vzorce z příkladu 4.14 – v obecném případě rozložíme na součet dvou zlomků, z nichž první bude mít v čitateli derivaci jmenovatele (bude násoben nějakou konstantou) a druhý bude mít v čitateli konstantu. Primitivní funkce potom bude tvaru „logaritmus plus arkus tangens“.

$$Z_3(x)=\frac{Mx+N}{x^2+px+q}=M\,\frac{x}{x^2+px+q}+N\,\frac{1}{x^2+px+q}=$$

$$= \left|(x^2+px+q)' = 2x+p\right| = \frac{M}{2}\,\frac{2x+p-p}{x^2+px+q} + N\,\frac{1}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\,\frac{2x+p}{x^2+px+q} - \frac{Mp}{2}\,\frac{1}{x^2+px+q} + N\,\frac{1}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\,\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\,\frac{1}{x^2+px+q}.$$

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx = \ln|x^2+px+q| \quad \text{podle prvního vzorce v 4.14},$$

jmenovatel druhého zlomku doplníme na úplný čtverec:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left|\text{označme } q - \frac{p^2}{4} = a^2\right| = a^2\left[\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{a}\right)^2 + 1\right].$$

Po této úpravě můžeme na integrál z druhého zlomku použít druhý vzorec odvozený v příkladu 4.14 a dostaneme

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}+\frac{p}{2a}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{a^2}\,a\,\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}+\frac{p}{2a}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\ \operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

Dohromady dostáváme

$$\int Z_3(x)\,dx = \frac{M}{2}\ \ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\ \operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + k =$$

$$= A\ln(x^2+px+q) + B\ \operatorname{arctg}\frac{2x+p}{C} + k.$$

Celý postup bude nejlépe patrný na konkrétním případu. Poznamenejme, že ve speciálních případech může první nebo druhý sčítanec vymizet.

IV.

V posledním případě budeme postupovat analogicky jako v předchozím – zlomek opět rozložíme na dva tak, aby v prvním byla v čitateli derivace závorky ve jmenovateli, a ve druhém jen konstanta. Závorku ve jmenovateli doplníme na úplný čtverec. Dostaneme

$$\int Z_4(x)\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{2}\right]^n}\,dx.$$

Potom na první zlomek použijeme substituci – je to integrál tvaru

$$\frac{M}{2}\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}\,dx, \quad \text{kde} \quad f(x) = x^2+px+q,$$

a ve druhém po jednoduché substituci $t = x + \frac{p}{2}$ použijeme rekurentní formuli odvozenou v příkladu 4.16 (nebo zopakujeme postup, který byl při odvozování této formule použit).

Příklad 4.17: Máme vypočítat integrál

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{(x^2+4)^2}\, dx.$$

Řešení: Integrand nejdříve rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}, \text{ tedy}$$

$$x^3 - x^2 + 3x - 3 = (Ax+B)(x^2+4) + Cx + D.$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin:

$$\begin{aligned} x^3 &: & 1 &= A \\ x^2 &: & -1 &= B \\ x^1 &: & 3 &= 4A + C \\ x^0 &: & -3 &= 4B + D \end{aligned} \qquad \text{odkud plyne} \qquad \begin{aligned} A &= 1, & B &= -1, \\ C &= -1, & D &= 1. \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{(x^2+4)^2}\, dx = \int \left[\frac{x-1}{x^2+4} + \frac{-x+1}{(x^2+4)^2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx - \int \frac{1}{x^2+4}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}\, dx + \int \frac{1}{(x^2+4)^2}\, dx.$$

Vypočítáme jednotlivé integrály:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + c_1,$$

$$\int \frac{1}{x^2+4}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 1}\, dx = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \cdot 2 + c_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c_2,$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}\, dx = \left| \begin{array}{ll} t & = x^2+4 \\ dt & = 2x\, dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^{-2}\, dt = \frac{1}{2}\left(-t^{-1}\right) + c_3 =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4} + c_3;$$

na poslední integrál můžeme použít rekurentní formuli z příkladu 4.16:

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\, dx = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\, dx\right],$$

kde položíme $a = 2,\ n = 2.$

Tedy

$$\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x}{x^2+4} + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right] + c_4.$$

Dohromady

$$\int \frac{x^3-x^2+3x-3}{(x^2+4)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{8}\left[\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right] + c,$$

kde $\quad c = c_1 - c_2 - c_3 + c_4;$

po úpravě

$$\int \frac{x^3-x^2+3x-3}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{7}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x+4}{x^2+4} + c.$$

Integrace některých iracionálních funkcí

Jak již bylo výše řečeno, obecná pravidla, která by nám umožnila zintegrovat libovolnou elementární funkci, bohužel nemáme. Můžeme pouze uvést některá doporučení, která v konkrétních případech vedou k cíli.

V tomto odstavci se budeme věnovat výpočtu integrálů z iracionálních funkcí.

(Symbolem $R(\cdot)$ budeme označovat racionální lomenou funkci.)

A) V integrálu tvaru

$$\int R(x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \ldots, x^{\frac{1}{k_n}})\,dx, \quad k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N},$$

je vhodné zavést substituci

$$x = t^k,$$

kde k je nejmenší společný násobek celých čísel $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Příklad 4.18:

Vypočítáme integrál $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx.$

<u>Řešení:</u> Integrand je tvaru $R(x, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{2}})$. Nejmenší společný násobek čísel $1, 2, 3$ je 6. Použijeme substituci $t = x^{\frac{1}{6}}$. Potom

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{rl} t & = x^{\frac{1}{6}} \\ x & = t^6 \\ dx & = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt[3]{t^6}}{t^6+\sqrt{t^6}}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^2}{t^6+t^3}\,t^5\,dt =$$

$$= 6\int \frac{t^4}{t^3+1}\,dt = 6\int \left(t - \frac{t}{t^3+1}\right) dt = |\text{rozložíme na parciální zlomky}| =$$

$$= \int \left(6t + \frac{2}{t+1} - \frac{2t+2}{t^2-t+1}\right) dt = \left| \begin{array}{l} \text{čitatel posledního zlomku} \\ \text{upravíme na derivaci jmenovatele} \end{array} \right| =$$

$$= 3t^2 + 2\ln|t+1| - \int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt - \int \frac{3}{t^2-t+1}\,dt = \left| \begin{array}{l} \text{jmenovatel na} \\ \text{úplný čtverec} \end{array} \right| =$$

$$= \left| t^2 - t + 1 = (t-\frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(t-\frac{1}{2})^2 + 1\right] = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right] \right| =$$

$$= 3t^2 + 2\ln|t+1| - \ln(t^2-t+1) - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= 3\sqrt[3]{x} + \ln\frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}} + c.$$

B) V integrálu tvaru

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right) dx, \quad k_1, k_2, \dots, k_2 \in \mathbb{N},$$

je vhodné zavést substituci

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}},$$

kde k je nejmenší společný násobek čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Příklad 4.19:

Vypočítáme integrál $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\,dx.$

Řešení: Integrand je definován pro $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$, $x \neq -1$, tedy pro $x \in (-1,1)$. Na tomto intervalu je funkce $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$ klesající:

$$g'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2} < 0 \ \forall x, \quad \text{navíc je} \quad g(x) = \frac{1+x}{1-x} < 0 \ \forall x \in (-1,1).$$

Proto existuje g^{-1} v intervalu $(0,\infty)$. Položíme tedy

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ t^2 = \frac{1+x}{1-x}. \quad \text{Odtud} \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\, dt.$$

Pro přehlednost nejdříve vypočítáme potřebné výrazy:

$$1-x = 1 - \frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{2}{t^2+1}, \quad 1+x = 1 + \frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{2t^2}{t^2+1}.$$

Odtud

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\, dx = \int t\, \frac{(t^2+1)}{2}\, \frac{(t^2+1)^2}{4t^4}\, \frac{4t}{(t^2+1)^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{2t^2}\, dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} + c = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c.$$

C) Pro výpočet integrálu tvaru

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx$$

použijeme Eulerovy substituce
$$\begin{cases} t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}, & \text{je-li} \quad a > 0, \\ t \cdot x = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}, & \text{je-li} \quad c \geq 0. \end{cases}$$

Má-li kvadratický trojčlen ax^2+bx+c reálné kořeny α, β, tedy platí-li $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, můžeme provést následující úpravu:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\,(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{a\, \frac{(x-\alpha)^2}{x-\alpha}\, (x-\beta)} = (x-\alpha)\sqrt{a\, \frac{x-\beta}{x-\alpha}}$$

a jedná se tedy o případ **B)**.

Příklad 4.20:

Vypočítáme integrál $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x+3}}\, dx.$$

Řešení:

Zde je $a = 1 > 0$ a položíme $t = \sqrt{x^2+2x+3} - x$, $\sqrt{x^2+2x+3} = x + t$,

tedy $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2tx + t^2$,

odtud $x = \dfrac{3-t^2}{2(t-1)}$ a dále $dx = \dfrac{-t^2+2t-3}{2(t-1)^2}\,dt$,

$$\sqrt{x^2+2x+3} = x + t = \frac{3-t^2}{2(t-1)} + t = \frac{t^2-2t+3}{2(t-1)}.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx = 2\int \frac{1}{t^2-3}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right) dt =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + c = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{x+\sqrt{3}-\sqrt{x^2+2x+3}}{x-\sqrt{3}-\sqrt{x^2+2x+3}}\right| + c.$$

Poznámka:

V integrálu tvaru $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

doplníme výraz pod odmocninou na úplný čtverec a jednoduchou substitucí převedeme přímo na některý integrační vzorec.

Příklad 4.21:

Vypočteme integrál $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-5x^2}}\,dx.$

Řešení: Upravíme kvadratický trojčlen pod odmocninou:

$$3 - 2x - 5x^2 = -5\left(x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}\right) = -5\left[\left(x+\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{16}{25}\right] = \frac{16}{5}\left[1 - \left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\right)^2\right].$$

Tedy $$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-5x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right)^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{4}\,\frac{4}{5}\arcsin\left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\right) + c = \frac{\sqrt{5}}{5}\arcsin\left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\right) + c.$$

D) Pro integrály tvaru

$$\left.\begin{array}{l} \int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)\,dx \\ \int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)\,dx \\ \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)\,dx \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{je možné užít}\\ \text{trigonometrické}\\ \text{substituce}\end{array} \left\{\begin{array}{l} x = a\sin t,\ x = a\cos t, \\ x = a\ \mathrm{tg}\ t,\ x = a\ \mathrm{cotg}\ t, \\ x = \frac{a}{\cos t}\ \ x = \frac{a}{\sin t}. \end{array}\right.$$

Příklad 4.22:

Vypočítáme integrál $$\int \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}\,dx.$$

Řešení: Položíme $x = 3\,\mathrm{tg}\,t$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Potom

$$dx = \frac{3}{\cos^2 t}\,dt, \qquad 9+x^2 = 9+9\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 9\,\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{9}{\cos^2 t}.$$

Tedy $$\int \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}\,dx = \int \frac{\cos^2 t}{9}\,\frac{\sqrt{\cos^2 t}}{3}\,\frac{3}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \left|\text{pro} \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{je} \quad \cos t > 0\right| = \frac{1}{9}\int \cos t\,dt = \frac{1}{9}\sin t + c = *$$

– výsledek je třeba vyjádřit v proměnné x.

Je $$\mathrm{tg}^2\,t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}, \quad \text{odtud} \quad \sin^2 t = \frac{\mathrm{tg}^2\,t}{1+\mathrm{tg}^2\,t},$$

tedy $$\sin t = \frac{\mathrm{tg}\,t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}} \quad \left(\text{pro} \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{mají sin a tg stejná znaménka}\right).$$

Závěrem $$* = \frac{1}{9}\sin t + c = \frac{1}{9}\,\frac{\mathrm{tg}\,t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}} + c = \frac{1}{9}\,\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + c.$$

Substituci $x = 2\sin t$ jsme použili v příkladu 4.15.

Integrace trigonometrických funkcí

Při použití trigonometrické substituce na integrál z iracionální funkce jsme pochopitelně dostali racionální lomenou funkci v sinech a kosinech – v tomto odstavci naznačíme, jak se takové integrály počítají.

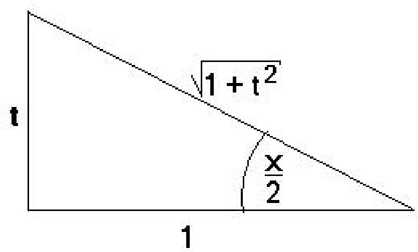
Integrál tvaru

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

převede ***univerzální goniometrická substituce*** $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ na integrál z racionální lomené funkce proměnné t.

K odvození vztahů pro $\sin x$ a $\cos x$ použijeme následující obrázek:

Přitom $$dt = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,dx \quad \text{a odtud plyne} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$



$$\sin\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin x=\sin 2\,\frac{x}{2}=2\,\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos 2\,\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Příklad 4.23:

Vypočítáme integrál $\displaystyle\int\frac{1}{4\sin x-7\cos x-7}\,dx.$

Řešení: S využitím odvozených vztahů dostaneme:

$$\int\frac{1}{4\sin x-7\cos x-7}\,dx=\int\frac{1}{\frac{8t}{1+t^2}-\frac{7-7t^2}{1+t^2}-7}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt=$$

$$=\int\frac{2\,dt}{8t-7+7t^2-7-7t^2}=\int\frac{1}{4t-7}\,dt=\frac{1}{4}\,\ln|4t-7|+c=$$

$$=\frac{1}{4}\,\ln\left|4\,\operatorname{tg}\frac{x}{2}-7\right|+c.$$

V mnoha případech ovšem tato substituce vede na velmi komplikované racionální lomené funkce. Ve speciálních situacích je možné použít jednodušší substituce:

A) Je-li $R(\sin x,\cos x)$ lichá v sinu (resp. v kosinu), tedy platí-li

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)\qquad (\text{resp.}\quad R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x))\,,$$

použijeme substituci $t=\cos x$ (resp. $t=\sin x$).

Podstata této substituce spočívá v tom, že ta goniometrická funkce, vzhledem ke které je příslušná racionální lomená funkce lichá, se dá vytknout k diferenciálu, přičemž zůstává v integrandu v sudé mocnině, a tedy se dá převést na tu funkci, která bude v substituci.

Příklad 4.24:

Máme vypočítat integrál $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx.$

Řešení: Integrovaná funkce je lichá v sinu, zavedeme substituci $\cos x = t$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,\sin x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,\sin x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} t & = \cos x \\ dt & = -\sin x\,dx \end{array} \right| = -\int \frac{1-t^2}{1+t}\,dt = -\int (1-t)\,dt = -t + \frac{1}{2}\,t^2 + c =$$

$$= c - \cos t + \frac{1}{2}\,\cos^2 t.$$

Jistě jsme mohli použít také univerzální goniometrickou substituci, ovšem výpočet by byl podstatně komplikovanější:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{\dfrac{t^3}{(1+t^2)^3}}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2t^3}{(1+t^2)^3(3+t^2)}\,dt,$$

v rozkladu na parciální zlomky bychom museli předpokládat čtyři zlomky příslušné komplexním kořenům, tedy 8 neurčitých koeficientů, a pro integraci bychom museli použít nejméně dvakrát rekurentní vzorec.

B) Je-li $R(\sin x, \cos x)$ sudá v sinu a kosinu současně, tedy platí-li

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$.

Potom $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ a $dx = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$.

Protože je příslušná racionální funkce sudá v sinu a kosinu současně, odmocniny se při výpočtu odstraní.

Příklad 4.25:

Máme vypočítat integrál $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\,\cos^2 x}\,dx.$

Řešení: Protože $\sin 2x = 2\,\sin x\,\cos x$, má integrand požadovanou vlastnost. Dostaneme:

$$\int \frac{2\,\sin x\,\cos x}{\sin^2 x + 2\,\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2\,\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{t^2}{1+t^2} + 2\,\dfrac{1}{1+t^2}}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2t}{(1+t^2)(2+t^2)}\,dt =$$

$$= \int \left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t}{2+t^2} \right) dt = \ln(1+t^2) - \ln(2+t^2) + c = \ln \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x} + c =$$

$$= \ln \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\cos^2 x + \sin^2 x} + c = c - \ln(1 + \cos^2 x).$$

Je-li integrand tvaru součinu sudých mocnin sinů a kosinů (tedy nejedná se o zlomek), můžeme ho zjednodušit pomocí součtových vzorců

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Příklad 4.26:

$$\int \sin^4 x \, \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right)^2 \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x\right)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1 - \cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right)\, dx + \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x)\, 2\, \cos 2x \, dx =$$

$$= \left| \text{ve druhém integrálu :} \quad \begin{array}{rl} t & = \sin 2x \\ dt & = 2\, \cos 2x \, dx \end{array} \right| = \frac{1}{16}\, x - \frac{1}{16}\, \sin 2x - \frac{1}{64}\, \sin 4x +$$

$$+ \frac{1}{16} \int (1 - t^2)\, dt = \frac{1}{16} x - \frac{1}{16}\, \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16}\left(t - \frac{1}{3}\, t^3\right) + c =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{16}\, \sin 2x - \frac{1}{64}\, \sin 4x + \frac{1}{16}\, \sin 2x - \frac{1}{48}\, \sin^3 2x + c =$$

$$= \frac{1}{16}\, x - \frac{1}{64}\, \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + c.$$

Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli pojem

- primitivní funkce k funkci f na intervalu $\mathcal{I}$: funkce F, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$,
- neurčitý integrál z funkce f: $\int f(x)\, dx = F(x) + c$ – systém všech primitivních funkcí k funkci f.

Dále jsme se věnovali výpočtu neurčitého integrálu. Následující vztahy snadno odvodíme na základě vztahů pro derivování. Pro zjednodušení nebudeme psát integrační konstantu.

Vzorce pro výpočet neurčitých integrálů

$\int 0\,dx$	$= c$	$\int 1\,dx$	$= x$
$\int x^k\,dx$	$= \dfrac{x^{k+1}}{k+1},\ k \neq -1$	$\int \frac{1}{x}\,dx$	$= \ln\lvert x\rvert,\ x \neq 0$
$\int \sin x\,dx$	$= -\cos x$	$\int \cos x\,dx$	$= \sin x$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$= -\operatorname{cotg} x$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$= \operatorname{tg} x$
$\int e^x\,dx$	$= e^x$	$\int a^x\,dx$	$= \dfrac{a^x}{\ln a},\ a > 0,\ a \neq 1$
$\int \sinh x\,dx$	$= \cosh x$	$\int \cosh x\,dx$	$= \sinh x$
$\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}$	$= \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a},\ a > 0$	$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}$	$= \dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert,\quad \lvert x\rvert \neq a,\ a > 0$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+b}}$	$= \ln\lvert x+\sqrt{x^2+b}\rvert,\ b \neq 0$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$= \arcsin \dfrac{x}{a},\ \lvert x\rvert < a,\ a > 0$
$\int \sqrt{x^2+b}\,dx$	$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+b} + \frac{b}{2} \ln\lvert x+\sqrt{x^2+b}\rvert,\ b \neq 0$		

Důležité integrály

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert$	$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$

Uvedli jsme pravidla pro výpočet neurčitých integrálů:

- linearita: $\int (a\,f(x) + b\,g(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$,
- metoda per partes: $\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$,
- substituční metoda: $\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]\,g'(t)\,dt$, kde $x = g(t)$.

Některé typy integrálů řešitelné metodou per partes

Je-li $P(x)$ polynom (i konstanta), potom u integrálu

$\int P(x)\ \ln x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arcsin} x\,dx$	klademe $u = \begin{cases} \ln x \\ \mathrm{arctg}\,x \\ \arcsin x \end{cases}$	(u' je rac. resp. irac. funkce)
$\int P(x)\ \cos x\,dx$, $\int P(x)\ \sin x\,dx$, $\int P(x)\ \mathrm{a}^x\,dx$	klademe $u = P(x)$	a metodu opakujeme tolikrát jako je stupeň polynomu

Některé doporučené substituce

($R(\cdot)$ je racionální lomená funkce)

Typ integrálu		Substituce	
$\int R(x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \dots, x^{\frac{1}{k_n}})\,dx,$	$k_i \in \mathbb{N}$	$t = x^{\frac{1}{k}},$	k nejm. spol. násobek k_i
$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right)\,dx,$	$k_i \in \mathbb{N}$	$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}},$	k nejm. spol. násobek k_i
$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx,$	$a \neq 0$	$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$	pro $a > 0$
		$xt = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}$	pro $c \geq 0$
$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)\,dx$		$x = a\,\sin t$	nebo $x = a\,\cos t$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)\,dx$		$x = a\,\mathrm{tg}\,t$	
$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)\,dx$		$x = \frac{a}{\sin t}$	nebo $x = \frac{a}{\cos t}$
$\int R(\cos x,\,\sin x)\,dx$		$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$	
		$\sin x = t,$	R lichá v kosinu
		$\cos x = t,$	R lichá v sinu
		$\mathrm{tg}\,x = t,$	R sudá v sinu a kosinu
$\int R(\mathrm{tg}\,x)\,dx$		$t = \mathrm{tg}\,x$	
$\int R(\mathrm{e}^x)\,dx$		$t = e^x$	

Uvedené substituce převedou integrál daného typu na integrál z racionální funkce $R(t)$.

Racionální lomené funkce pro integraci rozkládáme na parciální zlomky.

Otázky a úlohy

1. Co je to primitivní funkce a co neurčitý integrál?

2. Čemu se rovná $\int f'(x)\,dx$ a čemu $\left[\int f(x)\,dx\right]'$?
3. Formulujte vztah pro integraci per partes.
4. Označme $I_n = \int \ln^n x\,dx$. Užitím metody per partes ukažte, že pro $n > 1$ platí

   $$I_n = x\,\ln^n x - n\,I_{n-1}.$$

5. S použitím předchozího vzorce a výsledku příkladu 4.11 stanovte $\int \ln^3 x\,dx$.
6. Popište metodu substituce v neurčitém integrálu.
7. Vypočtěte $\int g^3(x)\,g'(x)\,dx$.
8. Jmenovatel jisté racionální lomené funkce je tvaru $(x^2+1)^2(x^2+2x+2)^3$. Kolik neurčitých koeficientů budeme hledat při rozkladu této funkce na parciální zlomky? Jaký tvar bude mít tento rozklad?
9. Integrujeme parciální zlomek tvaru $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$. Jakého typu bude primitivní funkce? (Tedy bude to polynom, racionální lomená funkce, exponenciální funkce, logaritmus, arkus sinus, arkus tangens, …?)
10. Eulerovy substituce pro integrály obsahující odmocninu z kvadratického trojčlenu, tedy $\sqrt{ax^2+bx+c}$, jsou dvě – pro případ $a > 0$ a $c \geq 0$. Platí-li $a > 0$ a současně $c \geq 0$, která Eulerova substituce bude vhodnější?
11. Integrál $\int \sin^3 x\,\cos^3 x\,dx$ můžeme vypočítat všemi trigonometrickými substitucemi. Transformujte tento integrál pomocí všech těchto substitucí a dále zadaný integrál upravte pomocí součtového vzorce $\sin 2x = 2\,\sin x\,\cos x$. Porovnejte všechny vzniklé integrály a nejjednodušší vypočítejte.

Cvičení

1. Pomocí vhodné úpravy integrandu s užitím tabulky primitivních funkcí (event. i „důležitých integrálů“) vypočítejte integrály $\int f(x)\,dx$, je-li $f(x)$ rovno:

a)	$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5x}$,	b)	$\frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}$,
c)	$\frac{x^3-1}{x-1}$,	d)	$5\cos x - \sqrt{3}x^5 + \frac{3}{1+x^2}$,
e)	$10^{-x} + \frac{x^2+2}{1+x^2}$,	f)	$\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$,
g)	$\frac{(2^x-3^x)^2}{6^x}$,	h)	$\mathrm{tg}^2\,x$,

i) $\dfrac{x}{x^2-3}$, j) $\dfrac{1}{x\,\ln x}$,

k) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$, l) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}$,

m) $(3x-11)^9$, n) $\dfrac{3}{2-5x}$,

o) $\dfrac{1}{(a+bx)^n}$, $b \neq 0$, $n > 1$, p) $\dfrac{x}{(a+bx)^n}$, $b \neq 0$, $n > 2$.

2. Pomocí metody per partes vypočítejte integrály $\int f(x)\,dx$, je-li $f(x)$ rovno:

a) $x\,\mathrm{e}^{2x}$, b) $x\,\sin x$,

c) $x\,\ln x$, d) $x\,\ln^2 x$,

e) $(x^2+x)\,\ln(x+1)$, f) $(x^2+6x+3)\,\cos 2x$,

g) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, h) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$,

i) $\mathrm{e}^x\,\sin x$, j) $e^{2x}\,\cos x$,

k) $\sin x\,\ln(\operatorname{tg} x)$, l) $x\,\operatorname{tg}^2 x$.

3. Pomocí vhodné substituce vypočítejte integrály $\int f(x)\,dx$, je-li $f(x)$ rovno:

a) $\dfrac{4^x}{1+4^{2x}}$, b) $2\,\mathrm{e}^{x^3}\,x^2$,

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, d) $\mathrm{e}^{\cos^2 x}\sin 2x$,

e) $\dfrac{\ln^4 x}{x}$, f) $\dfrac{3}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$,

g) $\dfrac{\ln \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$, h) $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$,

i) $\dfrac{\cos 2x}{2+3\sin 2x}$, j) $\dfrac{2x^2}{\cos^2(x^3+1)}$,

k) $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$, l) $\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$.

4. Vypočítejte integrály z následujících racionálních lomených funkcí:

a) $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$, b) $\dfrac{3x^2+30x-120}{(x-2)(x+2)(x-5)}$,

c) $\dfrac{9x^4+3x^3-23x^2+x}{9x^3-6x^2-5x+2}$, d) $\dfrac{9x-14}{9x^2-24x+16}$,

e) $\dfrac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}$, f) $\dfrac{x^4-10x^3+36x^2-46x+25}{x^3-9x^2+27x-27}$,

g) $\dfrac{x^4}{x^2+3}$, h) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x+2}$,

i) $\dfrac{1}{x^3+x^2+x}$, j) $\dfrac{x^2-2x+1}{(x^2-2x+2)(x^2-2x+5)}$,

k) $\dfrac{1}{x^4+1}$, l) $\dfrac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}$,

m) $\dfrac{x}{(x^2+3x+3)^2}$, n) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$,

o) $\dfrac{1}{(1+x^2)^3}$, p) $\dfrac{1}{(1+x^3)^2}$.

5. Vypočítejte integrály z následujících iracionálních funkcí:

a) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, b) $\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}$,

c) $\dfrac{1}{x\sqrt{x-4}}$, d) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{(x+1)^2}}$,

e) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, f) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^3(x-3)}}$,

g) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, h) $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-5x+8}}$,

i) $\dfrac{1}{\sqrt{3-2x-5x^2}}$, j) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4x+1}}$,

k) $\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$, l) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}$,

m) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}$, n) $\dfrac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Vypočítejte integrály z následujících trigonometrických funkcí:

a) $\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$, b) $\dfrac{1}{\cos x-2\sin x+3}$,

c) $\dfrac{\cos x}{\cos x-1}$, d) $\dfrac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$,

e) $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$, f) $\dfrac{1}{4-3\sin^2 x}$,

g) $\dfrac{1}{2+2\cos^2 x}$, h) $\dfrac{1}{\sin^2 x+3\cos^2 x+2}$,

i) $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^3}$, j) $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x+6\sin x+5}$,

k) $\cos^5 x$, l) $\sin^6 3x$,

m) $\dfrac{1}{\cos x}$, n) $\dfrac{1}{\sin^6 x}$.

7. Pomocí některé vhodné integrační metody určete integrály z následujících funkcí:

   a) $\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}$, b) $x^2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$,

   c) $x^3\ln^3 x$, d) $\dfrac{\ln^3 x}{x^3}$,

   e) $\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, f) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}$,

   g) $x\,\mathrm{arctg}\,x\,\ln(1+x^2)$, h) $\dfrac{\ln\cos x}{\sin^2 x}$,

   i) $\dfrac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$, j) $\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}$,

   k) $\dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(1+x^2)^2}$, l) $\dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(x^2-1)^2}$.

8. Najděte funkci, jejíž graf prochází bodem A a má v libovolném bodě $[x,y]$ směrnici k, je-li
   a) $A=[0,1],\ k=12x+1$, b) $A=[3,2],\ k=2x^2-5$.

9. Částice se pohybuje podél osy x se zrychlením $a=(2t-3)\,\mathrm{m/s^2}$. V čase $t=0$ je v počátku a pohybuje se rychlostí $4\,\mathrm{m/s}$ ve směru rostoucího x. Najděte funkční předpis pro rychlost v a polohu s a zjistěte, kdy částice změní směr svého pohybu a kdy se bude pohybovat vlevo.

10. Přepracujte předchozí příklad pro případ $a=(t^2-\frac{13}{3})\,\mathrm{m/s^2}$.

11. Řidič zabrzdí automobil jedoucí rychlostí $72\,\mathrm{km/h}$, brzdy způsobí konstantní zpomalení $8\,\mathrm{m/s^2}$. Za jak dlouho automobil zastaví a jak dlouhá bude brzdná dráha?

Výsledky

Integrační konstantu budeme vynechávat.

1. a) $\frac{x^3}{9}-\frac{1}{5}\ln|x|$, b) $\ln|x|-\frac{1}{4x^4}$, c) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$, d) $5\sin x-\frac{\sqrt{3}x^6}{6}+3\,\mathrm{arctg}\,x$, e) $-\frac{1}{10^x\ln 10}+x+\mathrm{arctg}\,x$, f) $\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$, g) $((\frac{2}{3})^x-(\frac{3}{2})^x)/(\ln 2-\ln 3)-2x$, h) $\mathrm{tg}\,x-x$, i) $\frac{1}{2}\ln|x^2-3|$, j) $\ln|\ln x|$, k) $\ln|\,\mathrm{tg}\,x|$, l) $\ln|\arcsin x|$, m) $\frac{1}{30}(3x-11)^{10}$, n) $-\frac{3}{5}\ln|2-5x|$, o) $-\frac{1}{b(n-1)}(a+bx)^{1-n}$, p) $-\frac{1}{b^2(n-2)}(a+bx)^{2-n}+\frac{a}{b^2(n-1)}(a+bx)^{1-n}$;

2. a) $\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x}(2x-1)$, b) $\sin x-x\cos x$, c) $\frac{1}{4}x^2(2\ln x-1)$, d) $\frac{1}{2}x^2\,(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2})$, e) $\frac{1}{6}(2x^3+3x^2)\ln(x+1)-\frac{1}{36}[4x^3+3x^2-6x+6\ln(x+1)]$, f) $\frac{1}{4}(2x^2+12x+5)\sin 2x+\frac{1}{2}(x+3)\cos 2x$, g) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$, h) $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\mathrm{arctg}\sqrt{x}$, i) $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)$, j) $\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2x}(\sin x+2\cos x)$, k) $\ln\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-\cos x\,\ln tgx$, l) $x\,\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}$;

3. a) $\frac{1}{\ln 4}\,\mathrm{arctg}\,4^x$, b) $\frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{x^3}$, c) $-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, d) $-e^{\cos^2 x}$, e) $\frac{1}{5}\ln^5 x$, f) $3\arcsin(\ln x)$, g) $\frac{1}{2}(\ln|\,\mathrm{arctg}\,x|)^2$, h) $\sin(\ln x)$, i) $\frac{1}{6}\ln|2+3\sin 2x|$, j) $\frac{2}{3}\,\mathrm{tg}(x^3+1)$, k) $\cos\frac{1}{x}$, l) $2\sqrt{\mathrm{tg}\,x-1}$;

4. a) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right|$, b) $\ln\left|\frac{(x-2)^4(x-5)^5}{(x+2)^6}\right|$, c) $\frac{1}{2}x^2+x-\frac{2}{3}\ln|3x+2|+\frac{1}{3}\ln|3x-1|-\ln|x-1|$,d) $\frac{2}{3}\frac{1}{3x-4}+\ln|3x-4|$, e) $\frac{4x-5}{2(x-1)^2}+2\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$, f) $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{11}{(x-3)^2}-\frac{8}{x-3}$, g) $\frac{x^3}{3}-3x+3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}}$, h) $x+\ln|x^2+x+2|-\frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$, i) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, j) $\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}(x-1)$, k) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$, l) $\frac{-x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+6)$, m) $-\frac{x+2}{x^2+3x+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+3}{\sqrt{3}}$, n) $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,x$, o) $\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}\,\mathrm{arctg}\,x$,

p) $\frac{x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

5. a) $-x + 4\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+1)$, b) $\frac{-6}{\sqrt[6]{x}} + \frac{12}{\sqrt[12]{x}} + 24 \ln \left| \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1} \right|$, c) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-4}}{2}$, d) $-3\sqrt[3]{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} - 6\ln|1 - \sqrt[6]{x+1}|$, e) $\arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, f) $2\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$, g) $\ln|\sqrt{1+x+x^2} + x + \frac{1}{2}|$, h) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln|x\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{6} + \sqrt{3x^2-5x+8}|$, i) $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin(\frac{5x+1}{4})$, j) $\sqrt{x^2-4x+1} + 2\ln|2x-4+2\sqrt{x^2-4x+1}|$, k) $\sqrt{x^2+2x} + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|$, l) $2\sqrt{x^2+x}$, m) $\frac{1}{15}(3x^4-4x^2+8)\sqrt{1+x^2}$, n) $-\frac{1}{48}(8x^5+10x^3+15x)\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{16} \arcsin x$;

6. a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \frac{x}{2})|$, b) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1)$, c) $x + \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$, d) $-x + 2\ln\left|\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$, e) $\ln|\sin x + \cos x|$, f) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, g) $\frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, h) $\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}$, i) $\frac{1}{2}(1+\cos x)^2$, j) $\frac{1}{4} \ln\left|\frac{1+\sin x}{5+\sin x}\right|$, k) $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$, l) $\frac{5x}{16} - \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{64}\sin 12x - \frac{1}{144}\sin^3 6x$, m) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$, n) $-\operatorname{cotg} x - \frac{2}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x$;

7. a) $-\ln(\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{\mathrm{e}^{-2x}-1}) - \arcsin \mathrm{e}^x$, b) $2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}[(x^2+20x+120)\sqrt{x} - (5x^2+60x+120)]$, c) $\frac{x^4}{128}(32\ln^3 x - 24\ln^2 x + 12\ln x - 3)$, d) $\frac{-1}{8x^2}(4\ln^3 x + 6\ln^2 x + 6\ln x + 3)$, e) $-\ln\sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln|x + \sqrt{1+x^2}|$, f) $\frac{x\ln|x|}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{1}{2}\arcsin 2x$, g) $x - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}[(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x]\ln(1+x^2)$, h) $-(\operatorname{cotg} x)\ln|\cos x| - x$, i) $x - \mathrm{e}^{-x}\arcsin \mathrm{e}^x - \ln(1+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$, j) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{x}\operatorname{arctg} x$, k) $\frac{(x^2-1)\operatorname{arctg} x + x}{4(1+x^2}$, l) $\frac{1}{8}\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2-1}\right)\operatorname{arctg} x$;

8. a) $f(x) = 6x^2 + x + 1$, b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x - 1$;

9. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 4t$, nikdy;

10. $s = \frac{1}{12}t^4 - \frac{13}{6}t^2 + 4t$, nalevo pro $t < -4$ a $t \in (1,3)$;

11. 2,5 s, 25 m.

4.3 Určitý integrál

Motivaci pro pojem určitého integrálu dostaneme, uvažujeme-li problém výpočtu obsahu plochy pod grafem (nezáporné) funkce, definované na nějakém intervalu; tedy plošného obsahu obrazce, který vznikne z obdélníku nahrazením jeho horní strany grafem nějaké funkce. Obsah této plochy se budeme snažit vypočítat jejím přibližným nahrazením obdélníky, jejichž základny budou dohromady tvořit základnu původního obrazce, tedy interval, na němž je shora ohraničující funkce definována. Tento mlhavě nastíněný postup upřesníme tak, že postupně zavedeme potřebné pojmy.

Dělení intervalu

Mějme dána čísla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
Množinu intervalů

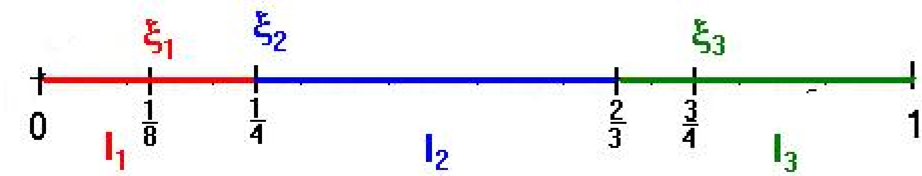
$$D = \{\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, ..., \langle x_{n-1}, x_n\rangle\}$$

nazýváme ***dělením*** intervalu $\langle a, b\rangle$, body $x_0, ..., x_n$ ***dělícími body***. Číslo

$$\nu(D) = \max(x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \dots, x_n - x_{n-1})$$

nazveme ***normou*** dělení D.
Je-li D dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro každé $i = 1, 2, ..., n$ jsou vybrány body ξ_i tak, že $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, pak dělení D nazveme ***dělením s vybranými body***.
V dalším budeme uvažovat jen dělení s vybranými body a budeme hovořit pouze o dělení.

Příklad:
$D = \big(\{\langle 0, \frac{1}{4}\rangle, \langle \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\rangle, \langle \frac{2}{3}, 1\rangle\}, \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}\big)$ je dělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$, přičemž $\nu(D) = \frac{5}{12}$.



Obr. 4.78: Dělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$

Integrální součet

Nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je funkce, D dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak číslo

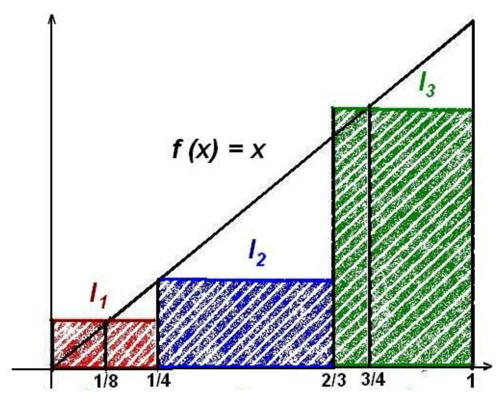
$$\mathcal{S}(D, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazveme ***integrálním součtem*** příslušným funkci f s dělením D.

Příklad: Nechť $f(x) = x$,
D dělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$
z předchozího příkladu.

Potom

$\mathcal{S}(D, f) = f(\frac{1}{8}) \cdot (\frac{1}{4}) +$
$+ f(\frac{1}{4}) \cdot (\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}) \cdot (1 - \frac{2}{3}) =$
$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{37}{96}$.



Obr. 4.79: Integrální součet funkce $f(x) = x$

Jestliže bude dělení intervalu dostatečně „jemné“, tedy bude-li se $\nu(D)$ blížit k nule, mohou se zřejmě integrální součty stále více blížit k obsahu „křivočarého lichoběžníku“ – obrazce, který je shora omezen grafem nezáporné funkce, zdola osou x a po stranách přímkami $x = a$, $x = b$. Jestliže tedy existuje číslo $\mathcal{J}$, vyjadřující obsah takové plochy, musí se dát s libovolnou přesností aproximovat integrálními součty. Tato myšlenka, přesně formulovaná, bude obsahem následující definice.

Určitý (Riemannův) integrál

Definice 4.27: Nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkce. Řekneme, že f je ***integrovatelná*** (integrabilní, integrace schopná) na intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje-li číslo $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ tak, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, jehož norma $\nu(D) < \delta$, platí

$$|\mathcal{S}(D, f) - \mathcal{J}| < \varepsilon.$$

Číslo $\mathcal{J}$ nazýváme ***určitým*** (***Riemannovým***) ***integrálem*** funkce f od a do b a píšeme

$$\mathcal{J} = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Dále definujeme $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$, speciálně tedy $\int\limits_a^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

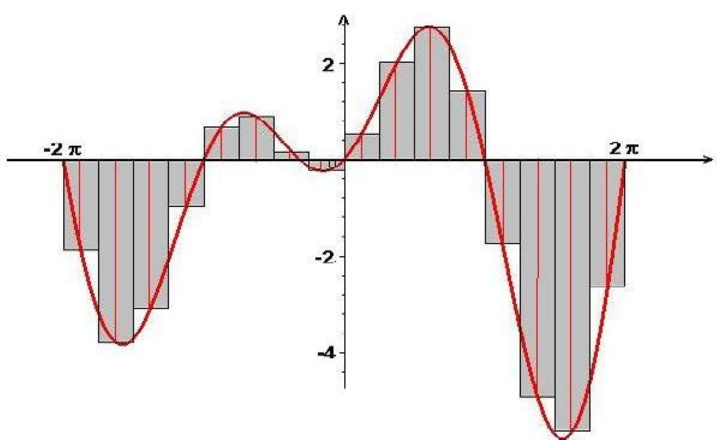
Poznámky k definici:

a) Ve výrazu $\int_a^b f(x)\,dx$ se a nazývá ***dolní mez*** integrálu, b ***horní mez***, f ***integrand***, x ***integrační proměnná.***

b) Pro integrační proměnnou můžeme volit libovolné označení:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi \quad \text{atd.}$$

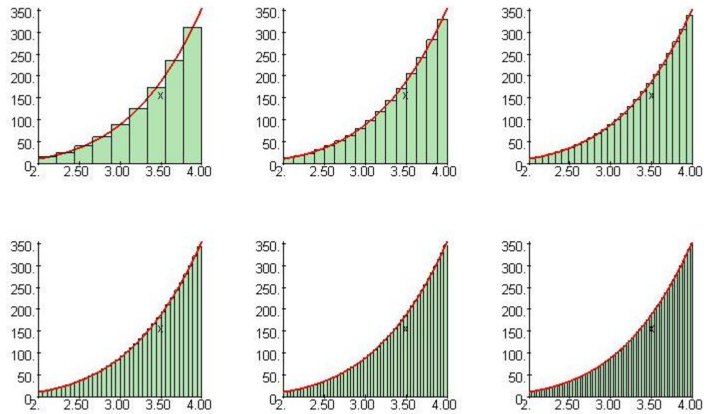
c) Určitý integrál je **číslo**. Pro funkci nezápornou na intervalu $\langle a, b\rangle$ vyjadřuje obsah plochy pod grafem funkce f a nad osou x. Pro funkci, která na intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá i záporných hodnot, vyjadřuje rozdíl obsahů ploch nad a pod osou x (viz následující obrázek; čísla ξ_i jsou vybrána vždy uprostřed příslušného intervalu).



Obr. 4.80: Integrální součet funkce $(x + 1)\sin x$

Definice integrálu jistě připomíná definici limity. Skutečně jde o jistý druh limity integrálních součtů pro normu dělení jdoucí k nule, která je obecnější než limita posloupnosti. Pro tuto limitu platí obdobná pravidla jako pro limity, se kterými jsme se již setkali: při limitních přechodech se zachovávají součty, součiny, limita je nejvýš jedna. Můžeme psát

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\nu(D)\to 0} \mathcal{S}(D, f).$$



Obr. 4.81: Integrální součty funkce $f(x) = x^4 \ln x$ pro $n = [9, 16, 25, 36, 49, 64]$

Věta 4.28: **(O existenci určitého integrálu)** *Má-li ohraničená funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ pouze konečně mnoho bodů nespojitosti, pak existuje určitý integrál* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Poznámka: Má-li funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ pouze konečně mnoho bodů nespojitosti, které jsou 1. druhu, říkáme, že je ***po částech spojitá*** na tomto intervalu. Podle předchozí věty je funkce po částech spojitá na $\langle a, b\rangle$ na tomto intervalu integrovatelná.

Příklad 4.29: Ukažme, že Dirichletova funkce χ definovaná předpisem

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \text{ racionální} \\ 0 & \text{pro} \quad x \text{ iracionální} \end{cases}$$

není integrovatelná na žádném intervalu.
Buď D_1 libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že ξ_i jsou racionální čísla. Pak

$$\mathcal{S}(D_1, \chi) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_1 - x_{i-1}) = b - a.$$

Buď D_2 libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že ξ_i jsou iracionální čísla. Pak

$$\mathcal{S}(D_2, \chi) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_1 - x_{i-1}) = 0.$$

Předpokládejme, že existuje $\mathcal{J}$. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a)$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení s normou $\nu(D) < \delta$ je $|\mathcal{S}(D, \chi) - \mathcal{J}| < \varepsilon$, takže platí

$$b - a = |\mathcal{S}(D_1, \chi) - \mathcal{S}(D_2, \chi)| = |\mathcal{S}(D_1, \chi) - \mathcal{J} - (\mathcal{S}(D_2, \chi) - \mathcal{J})| \leq$$

$$\leq |\mathcal{S}(D_1, \chi) - \mathcal{J}| + |\mathcal{S}(D_2, \chi) - \mathcal{J}| < \varepsilon + \varepsilon = b - a$$

a to je spor.

Vlastnosti určitého integrálu

Věta 4.30: *Platí:*

$$\int_a^b 0\,dx = 0, \qquad \int_a^b dx = b-a,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \textit{pro} \quad c \in \langle a,b\rangle,$$

$$f(x) \le g(x) \ \textit{na}\ \langle a,b\rangle \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad \forall k \in \mathbb{R},$$

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Označíme-li jako S (resp. L) sudou (resp. lichou) funkci, je

$$\int_{-a}^a S(x)\,dx = 2\int_0^a S(x)\,dx; \quad \int_{-a}^a L(x)\,dx = 0.$$

Důkaz tvrzení v předchozí větě se provede bezprostředně užitím definice integrálu pomocí integrálních součtů; je analogický postupu v následujícím příkladu.

Příklad 4.31: Ukážeme platnost poněkud obecnějšího případu druhého vztahu ve větě:

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Buď D libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom pro libovolný výběr čísel ξ_i pro příslušný integrální součet platí:

$$\mathcal{S}(D,c) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c(b-a),$$

tedy pro libovolné dělení D je

$$|\mathcal{S}(D,c) - c(b-a)| = 0 < \varepsilon.$$

Odhad určitého integrálu, věta o střední hodnotě

Věta 4.32: **(O střední hodnotě integrálního počtu)**

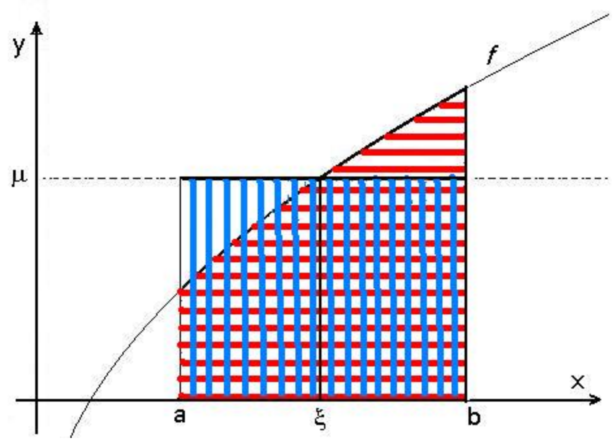
Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $m \leq f(x) \leq M \ \ \forall x \in \langle a, b\rangle$. Potom platí

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \quad \textit{neboli} \quad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

$$\textit{a existuje číslo } \mu \in \langle m, M\rangle \textit{ tak, že platí} \quad \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

$$\textit{Je-li } f \textit{ spojitá na } \langle a, b\rangle, \textit{ pak } \exists\,\xi \in \langle a, b\rangle \textit{ tak, že} \quad f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Číslo μ se nazývá ***(integrální) střední hodnota*** funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Geometrický význam střední hodnoty je patrný z následujícího obrázku – obsah křivočarého lichoběžníka $\{(x, y)|x \in \langle a, b\rangle,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ (červeně) je roven obsahu obdélníka o rozměrech $b-a$ a μ (modře):



Obr. 4.82: Integrální střední hodnota

Příklad 4.33: Odhadněme

$$\int_0^1 f(x)\,dx, \quad \text{kde} \quad f(x) = \begin{cases} x^x & \text{pro} \quad x > 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Řešení: Funkce f má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nejvýš jeden bod nespojitosti (limitou prověříme, že je spojitá i v $x = 0$), je zde integrovatelná.

Najděme maximum a minimum na $\langle 0, 1\rangle$:

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) \quad (x > 0);$$

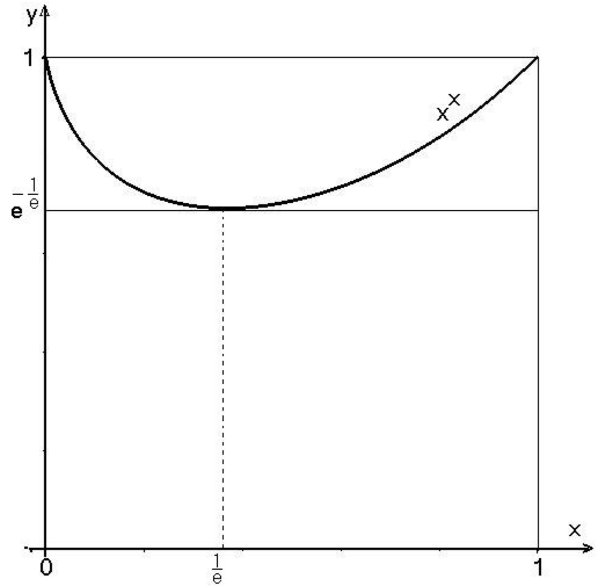
$$f'(x) = 0 \text{ pro } x = \frac{1}{e}.$$

$$f(0) = 1,\ f(1/e) = e^{-1/e},\ f(1) = 1.$$

Platí tedy

$$e^{-1/e}(\doteq 0,692) \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1.$$

(Maple vypočítá $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0{,}7834305107$.)



Obr. 4.83: $f(x) = x^x$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$

Fundamentální věta

Mějme graf nezáporné funkce f (viz obr. 4.84) a vyšetřujme funkci F, která každému x přiřazuje obsah světlešedě vybarvené plochy, tedy

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx.$$

Aproximujme přírůstek této funkce při změně x na $x + h$, tedy výraz $F(x + h) - F(x)$ pomocí obsahu obdélníka (vybarveného tmavěji), který je zřejmě roven součinu $f(x) \cdot h$; je tedy

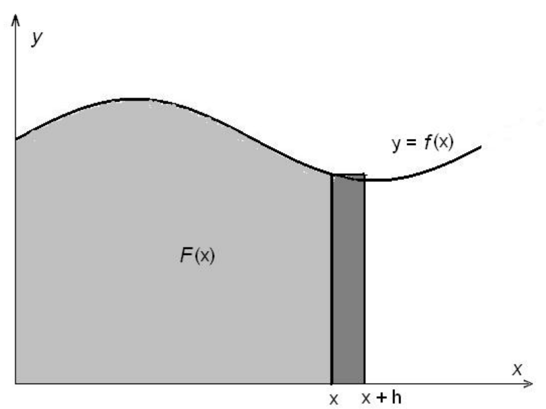
$$F(x + h) - F(x) \doteq f(x) \cdot h,$$

neboli

$$f(x) \doteq \frac{F(x + h) - F(x)}{h}.$$

Odtud limitním přechodem pro $h \to 0$ dostaneme

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = F'(x).$$



Obr. 4.84: Fundamentální věta

Tento pozoruhodný výsledek, který spojuje výpočet derivace (tedy směrnice) s výpočtem plošného obsahu, se nazývá fundamentální věta kalkulu (tj. diferenciálního a integrálního počtu).V tomto odstavci naznačený vztah odvodíme přesně.

Definice 4.34: Buď $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ integrovatelná funkce. ***Funkcí horní meze*** nazýváme funkci $\Phi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Obdobně ***funkcí dolní meze*** nazýváme funkci $\Psi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\Psi(x) = \int_x^b f(t)\,dt.$$

Věta 4.35: *Je-li funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ v okolí bodu x spojitá, má funkce horní meze $\Phi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ v bodě x derivaci a platí $\Phi'(x) = f(x)$, tj. Φ je primitivní funkce k f.*

Důkaz:

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

V intervalu $\langle x, x+h\rangle$ je funkce f spojitá, tedy podle věty o střední hodnotě existuje $\xi \in \langle x, x+h\rangle$ tak, že

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi) = f(x + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

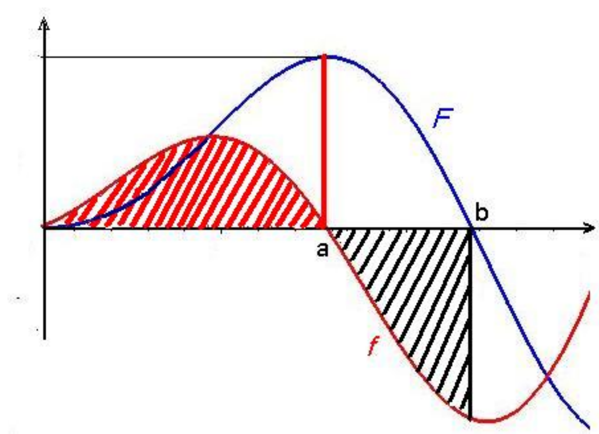
Odtud plyne, že

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x + \vartheta h) = f(x).$$

Ve vedlejším obrázku je modře graf funkce F a červeně graf funkce f, přičemž platí

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt;$$

tedy například $F(a)$ – délka červené úsečky – je rovna obsahu červeně vyšrafované oblasti; dále je vidět, že $F(b) = 0$, tedy obsah červeně vyšrafované oblasti, je stejný jako obsah černě vyšrafované oblasti, která je pod osou x – obsahy se odečtou.



Obr. 4.85: Primitivní funkce jako funkce horní meze

Příklad 4.36: Najděme lokální extrémy funkce

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad x > 0.$$

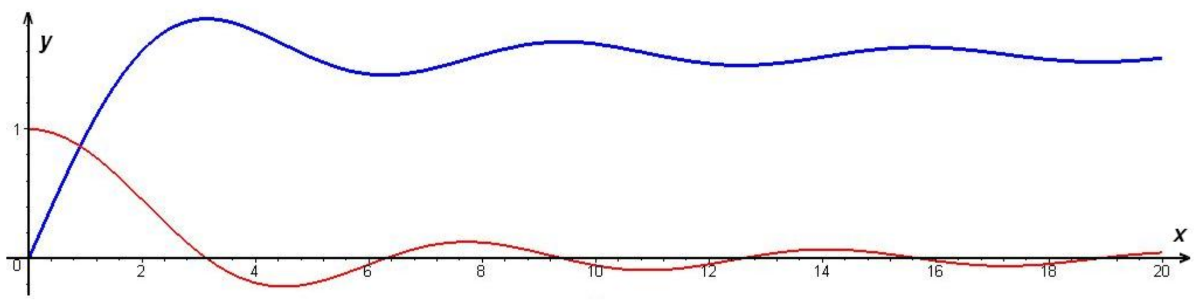
Řešení:

$$\Phi'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \Phi'(x) = 0 \quad \text{pro} \quad \sin x = 0, \text{ tj. } x = k\pi, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\Phi'(x) > 0 \quad \text{pro} \quad x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\Phi'(x) < 0 \quad \text{pro} \quad x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi), \quad k \in \mathbb{N},$$

Tedy funkce Φ má maxima v bodech $x = (2k+1)\pi$, minima v bodech $x = 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{N}$.



Obr. 4.86: Grafy funkcí $\frac{\sin x}{x}$ a $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$

Nyní odvodíme vzorec pro výpočet určitého integrálu ze spojité funkce:

Víme, že je-li f spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak funkce horní meze Φ je její primitivní funkcí. Jestliže je F libovolná primitivní funkce k funkci f na $\langle a, b\rangle$, jistě platí

$$\Phi(x) = F(x) + c.$$

Konstantu c snadno vypočteme, položíme-li $x = a$. Pak platí

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0 = F(a) + c \quad \Rightarrow \quad c = -F(a).$$

Tedy

$$\Phi(x) = F(x) - F(a)$$

a speciálně pro $x = b$ dostáváme důležitý výsledek $\Phi(b) = F(b) - F(a)$, tj.

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

který jsme ovšem odvodili pouze pro spojitou funkci f. Tento vztah patří k základním tvrzením matematické analýzy a nazývá se Newton-Leibnizova věta.

Newton-Leibnizova věta

Věta 4.37: **(Newton-Leibnizova)** *Nechť f je funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$.*

Jestliže v $\langle a, b\rangle$ platí $F'(x) = f(x)$, tj. $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Rozdíl $F(b) - F(a)$ označujeme symbolem $[F(x)]_a^b$.

Píšeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$.

Příklad 4.38:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Příklad 4.39:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin ax\,\sin bx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a-b}\sin(a-b)x - \frac{1}{a+b}\sin(a+b)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0;\ a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq b.$$

Metoda per partes pro určité integrály

Ze vztahu pro integraci per partes pro neurčité integrály okamžitě vyplývá

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Příklad 4.40: Máme vypočítat integrál

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\sin 2x\,dx.$$

<u>Řešení:</u>

$$I = \left| \begin{array}{ll} u = \sin 2x & u' = 2\cos 2x \\ v' = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} & v = 2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \end{array} \right| = \left[2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\sin 2x\right]_0^{2\pi} - 4\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\cos 2x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \cos 2x & u' = -2\sin 2x \\ v' = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} & v = 2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \end{array} \right| = -4\left\{\left[2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\cos 2x\right]_0^{2\pi} + 4\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin 2x\,dx\right\} =$$

$$= -4\left\{2\left(\mathrm{e}^{\pi}\cos 4\pi - 1\right) + 4\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin 2x\,dx\right\}.$$

Dostali jsme vztah $I = 8(1-\mathrm{e}^{\pi}) - 16\,I$, tedy $I = \dfrac{8}{17}(1-\mathrm{e}^{\pi})$.

Viděli jsme, že použití metody per partes v určitém integrálu je analogické použití této metody při hledání primitivních funkcí, pouze do $u\,v$ hned dosazujeme meze. To může výpočet podstatně zjednodušit, jak jsme viděli v předchozím příkladu, kdy hodnota $u\,v$ v obou mezích byla nula.

Metoda substituce pro určité integrály

Věta 4.41:

1. *Jestliže funkce $f \circ g$, g' jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$, potom*

$$\int_a^b f[g(x)]\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt,$$

2. *jestliže f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $x = g(t)$ je monotonní funkce se spojitou derivací a oborem hodnot $\langle a, b\rangle$, potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f[g(t)]\,g'(t)\,dt.$$

Postup při užití substituční metody v určitém integrálu je opět analogický, jako při výpočtu primitivních funkcí. Pouze je třeba vypočítat nové meze (pro nové proměnné); to ovšem na druhé straně přináší výhodu v tom, že nemusíme na závěr zpětně dosazovat substituční funkci.

Příklad 4.42:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x = e^t & x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ dx = e^t\,dt & x = e \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t}{e^t}e^t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Příklad 4.43: Ukažme, že pro integrovatelnou funkci platí

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$$

<u>Řešení:</u> Využijeme vztahu $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

Do prvního integrálu zaveďme substituci $x = g(t) = \frac{\pi}{2} - t$. Pro $x = 0$ je $t = \frac{\pi}{2}$, pro $x = \frac{\pi}{2}$ je $t = 0$. Funkce g je v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ klesající, spojitá i se svou derivací $g'(x) = -1$. Je možno použít větu o substituci, a platí tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right](-1)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt$$

a zadaná rovnost je splněna.

4.4 Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinné oblasti

Přímo z definice určitého integrálu plyne, že plošný obsah P rovinné oblasti omezené čarami $y = 0,\ x = a,\ x = b$, kde $a < b$, a grafem kladné funkce $y = f(x)$ vypočítáme pomocí určitého integrálu

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Příklad 4.44: Vypočtěme obsah kruhu $x^2 + y^2 \le r^2$.

<u>Řešení:</u> Platí

$$P = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x = r\,\sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = r\,\cos t\,dt & x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,dt =$$

$$= 2r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = 2r^2\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2.$$

Objem tělesa

Buď dáno těleso (uzavřená oblast $M \subset \mathbb{R}^3$), jehož průmětem do osy x je interval $\langle a, b\rangle$. Nechť jeho řez rovinou o rovnici $x = x_0$ má obsah $u(x_0)$. Předpokládejme, že u je spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Buď D dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak $\mathcal{S}(D, u)$ značí přibližnou hodnotu objemu našeho tělesa. Zhruba řečeno, tato hodnota bude tím blíže ke skutečné hodnotě objemu, čím bude dělení jemnější. Proto je přirozené definovat objem tělesa jako

$$\lim_{\nu D \to 0} \mathcal{S}(D, u) = \int_a^b u(x)\,dx.$$

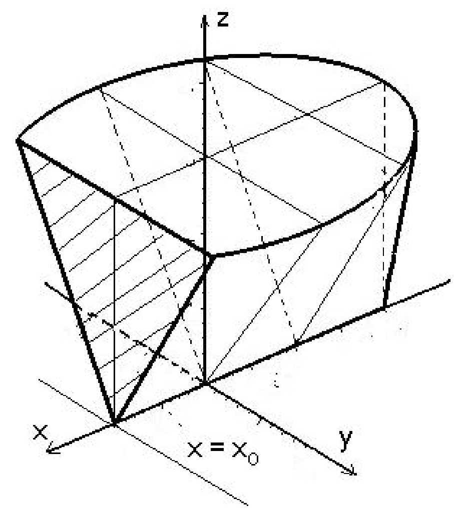
Příklad 4.45: V rovině $z = c$ leží kružnice o rovnici $x^2+y^2 = r^2$. Je-li $-r < x_0 < r$, protne rovina o rovnici $x = x_0$ kružnici ve dvou bodech (pro $x = \pm r$ v jednom bodě), osu x v jednom bodě. Tyto tři (dva) body spojíme úsečkami (úsečkou). Máme vypočítat objem takto vzniklého tělesa.

Řešení:

$$u(x) = c\sqrt{r^2 - x^2},\ x \in \langle -r,\, r\rangle,$$

$$V = \int_{-r}^{r} c\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2c \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$= 2c\,\frac{\pi r^2}{4} = \frac{1}{2}\pi r^2 c.$$



Obr. 4.87: Objem tělesa

Objem rotačního tělesa

Buď f spojitá funkce v intervalu $\langle a,\, b\rangle$, uvnitř tohoto intervalu kladná. Předpokládejme, že část roviny omezená čarami o rovnicích $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ rotuje kolem osy x. Vznikne rotační těleso, jehož průmět do osy x je interval $\langle a,\, b\rangle$. Obsah řezu rovinou o rovnici $x = x_0$ je obsah kruhu o poloměru $f(x_0)$, tedy objem rotačního tělesa vypočítáme podle vzorce

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

Příklad 4.46: Vypočítáme objem koule. Zde je $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r,\, r\rangle$.

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r = 2\pi r^3 (1 - \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Délka rovinné křivky

Buď f funkce definovaná v intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a mající zde spojitou derivaci f'. Délku křivky L, která je grafem funkce f v tomto intervalu, vypočítáme pomocí vztahu

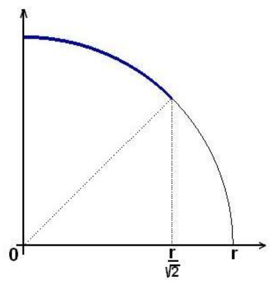
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Příklad 4.47: Určíme délku kružnice. Platí

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in \langle 0,\, r\rangle, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$L = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4 \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx;$$

Dostali jsme integrál z neohraničené funkce (v horní mezi není integrand definován). Budeme postupovat tak, že místo čtvrtkružnice vyjdeme z osminy kružnice – viz obrázek:



Obr. 4.88: K př. 4.47

$$L = 8\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = r\,\sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = r\,\cos t\,dt & x = \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| =$$

$$= 8r\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r\,\cos t}{r\,\cos t}\,dt = 8r\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = 8r\,[\,t\,]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi r.$$

Je-li jednoduchá rovinná křivka určená parametrickými rovnicemi

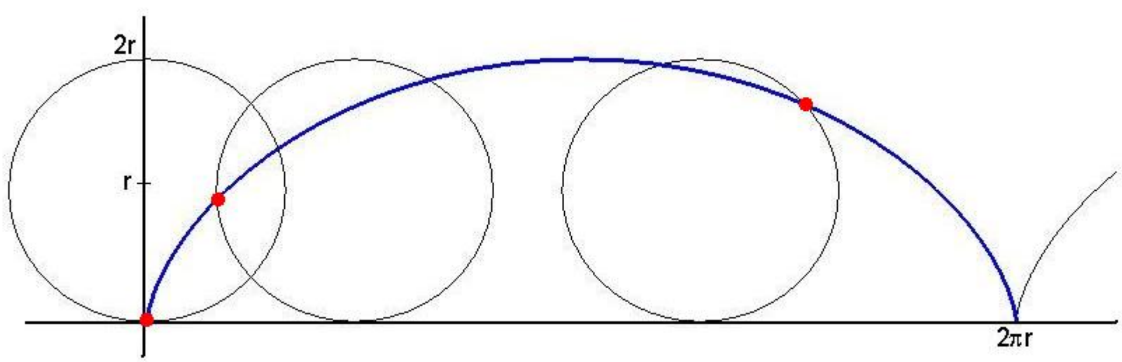
$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \ t \in \langle \alpha,\, \beta \rangle$$

tak, že funkce φ, ψ mají v intervalu $\langle \alpha,\, \beta \rangle$ spojité derivace, pak její délka je dána vzorcem

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Příklad 4.48: Vypočtěme délku jednoho oblouku cykloidy.

Řešení: Cykloida je křivka, kterou opisuje pevně zvolený bod na kružnici, jestliže se tato kružnice kotálí po přímce (viz následující obrázek). Jeden oblouk cykloidy je její část mezi těmi dvěma polohami zvoleného bodu, kdy leží současně na příslušné přímce:



Obr. 4.89: Cykloida

Cykloida má parametrické rovnice

$$x = \varphi(t) = r\,(t - \sin t),\ y = \psi(t) = r\,(1 - \cos t),\ \ t \in \langle 0,\, 2\pi \rangle.$$

$\varphi'(t) = r\,(1-\cos t)$, $\psi'(t) = r\,\sin t$, takže je

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2\sin^2 t}\,dt = r\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt =$$

$$= 2r\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt = 2r\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2r\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8r.$$

Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli pojem určitého integrálu z ohraničené funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$; definovali jsme postupně

- dělení intervalu $\langle a,b\rangle$: systém intervalů $D = \{\langle x_{i-1}, x_i\rangle \mid i = 1,\dots,n\}$, jejichž sjednocením je interval $\langle a,b\rangle$ a průnik libovolných dvou z těchto intervalů je nanejvýš koncový bod, přičemž $x_0 = a$, $x_n = b$,
- normu dělení: $\max(x_i - x_{i-1})$, tj. délka nejdelšího z intervalů, které tvoří dělení daného intervalu,
- dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ s vybranými body: v každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je vybrán bod ξ_i,
- integrální součet funkce f příslušný dělení D: $\mathcal{S}(D,f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$,
- určitý integrál z funkce f od a do b: číslo, které lze s libovolnou (předem zvolenou) přesností aproximovat pomocí integrálních součtů, neboli limita integrálních součtů při normě dělení jdoucí k nule.

Pro funkci f nezápornou na intervalu $\langle a,b\rangle$ znamená $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ obsah plochy ohraničené shora grafem funkce f, zdola osou x a po stranách přímkami $x = a$ a $x = b$. Pro funkci nabývající kladných i záporných hodnot je tento integrál roven rozdílu obsahů ploch nad a pod osou x.

Formulovali jsme postačující podmínku pro existenci určitého integrálu:

- je-li f po částech spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ (tj. má-li zde nanejvýš konečně mnoho bodů nespojitosti 1. druhu), potom je zde integrovatelná, tedy $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ existuje.

Uvedli jsme některé vlastnosti určitého integrálu:

- linearita: $\int\limits_a^b (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\,dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta\int\limits_a^b g(x)\,dx$,
- aditivita přes interval: pro $a < c < b$ je $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Pro výpočet určitého integrálu jsme odvodili

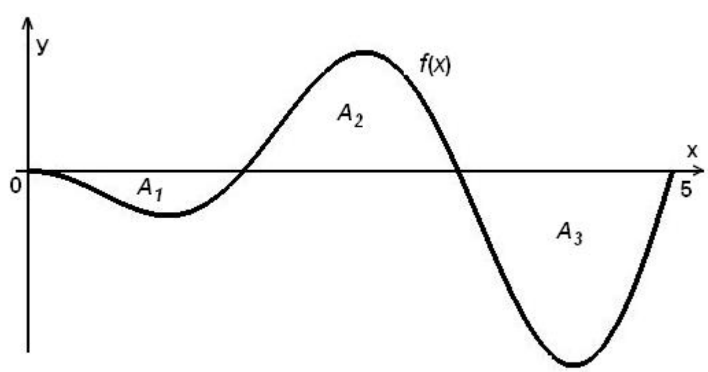
- Newton-Leibnizův vzorec: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, je-li F některá primitivní funkce k funkci f,
- metodu per partes v určitém integrálu: postup je stejný jako u neurčitého integrálu (dosazujeme meze do $u\,v$),
- substituční metodu v určitém integrálu: analogicky jako při výpočtu primitivní funkce, pouze je třeba vypočíst meze pro nové proměnné.

V závěru kapitoly jsme se věnovali geometrickým aplikacím určitého integrálu; uvedli jsme vzorce pro:

- objem rotačního tělesa, které vznikne rotací části roviny omezené čarami o rovnicích $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ kolem osy x: $V = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx$,
- délku křivky L, která je grafem funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$: $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$,
- délku křivky zadané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$: $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$.

Otázky a úlohy

1. Jak definujeme určitý integrál z funkce f od a do b?
2. Jaký je jeho geometrický význam?
3. Jak tento integrál počítáme?
4. A_1, A_2, A_3 v následujícím obrázku označuje obsah příslušné části roviny omezené grafem funkce f a osou x. Vyjádřete $\int\limits_0^5 f(x)\,dx$ pomocí čísel A_1, A_2, A_3.



5. Ukažte, že platí následující tvrzení: Jsou-li f a g dvě funkce po částech spojité na $\langle a,b\rangle$ takové, že pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$, potom plošný obsah množiny $M = \{(x,y) \,|\, a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ vypočítáme podle vzorce $P = \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$.

6. V čem se liší použití metody per partes a substituční metody při výpočtu určitých integrálů od použití těchto metod při výpočtu neurčitých integrálů?

7. Užitím vhodné substituce ukažte, že platí tvrzení z věty 4.30:
$\int\limits_{-a}^{a} S(x)\,dx = 2\int\limits_0^a S(x)\,dx;\qquad \int\limits_{-a}^{a} L(x)\,dx = 0,$
kde S (resp. L) je sudá (resp. lichá) funkce.

8. Ukažte, že pro spojitou funkci f periodickou s periodou T platí
$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx.$

9. Najděte všechny chyby v následujícím „výpočtu“ (výsledek je správně!):
$\int\limits_0^2 x\,\sin x^2\,dx = |t = x^2| = \int\limits_0^2 (\sin t)\,x\,dx = \int\limits_0^2 (\sin t)\,\frac{1}{2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}\,\cos t\right]_0^2 =$
$= \left[-\frac{1}{2}\,\cos x^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 4).$

10. Bez výpočtu daných integrálů rozhodněte, který z nich je větší:

a) $\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx$ a $\int\limits_{-1}^{1} x^4\,dx$, b) $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{x^2}\,dx$ a $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{x}\,dx$.

Cvičení

1. Vypočítejte následující určité integrály

a) $\int\limits_1^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx$, b) $\int\limits_0^3 |1 - 3x|\,dx$,

c) $\int\limits_{-4}^{-2} \frac{1}{x}\,dx$, d) $\int\limits_0^2 \frac{2x-3}{x-3}\,dx$,

e) $\int\limits_{-4}^{-3} \frac{1}{x^2-4}\,dx$, f) $\int\limits_0^1 \frac{1}{2x^2+11x+12}\,dx$,

g) $\int\limits_1^2 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$, h) $\int\limits_0^3 (\sqrt[3]{x} + \sqrt{3x})\,dx$,

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, j) $\displaystyle\int_0^1 (e^x+1)^3\, e^{2x}\,dx$,

k) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$, l) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$,

m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$, n) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx$,

o) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$, p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$,

q) $\displaystyle\int_1^2 7\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$, r) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}}\,dx$,

s) $\displaystyle\int_0^1 x\ \mathrm{e}^{-x}\ dx$, t) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,dx$,

u) $\displaystyle\int_0^1 x^3\ \mathrm{e}^{2x}\ dx$, v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\ \sin x\,dx$,

x) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$, y) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\ \operatorname{arctg} x\,dx$.

2. Vypočítejte

$$\int_0^3 f(x)\,dx, \quad \text{je-li} \quad f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{pro} \quad x\in\langle 0,1\rangle, \\ 0 & \text{pro} \quad x\in\langle 1,2\rangle, \\ (2-x)^2 & \text{pro} \quad x\in\langle 2,3\rangle. \end{cases}$$

3. Vypočítejte následující integrály ($[x]$ je celá část x)

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x\,dx$, b) $\displaystyle\int_2^5 (-1)^{[x]}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_{-2}^3 [x]\,dx$, d) $\displaystyle\int_0^2 [\mathrm{e}^x]\,dx$.

4. Vypočítejte

a) $\displaystyle\left[\int_2^x \sqrt{5+7t^2}\,dt\right]'$, b) $\displaystyle\left[\int_x^1 \sin^3 t\,dt\right]'$, c) $\displaystyle\left[\int_{-x}^x \sqrt[3]{t^4+1}\,dt\right]'$.

5. Část roviny nad osou x a pod grafem funkce $y = \sin x$ mezi $x = 0$ a $x = \pi$ je rozdělena na dvě části přímkou $x = c$. Najděte c, pro které platí, že obsah levé části je roven třetině obsahu pravé části.

6. Najděte $k \geq 0$ pro které platí $\int\limits_0^2 x^k\,dx = \int\limits_0^2 (2-x)^k\,dx$.

7. Najděte plošný obsah částí roviny omezených čarami o rovnicích:

a)	$y = 6x - x^2,\ y = 0,$	b)	$y = x^2 - 2x,\ y = x,$
c)	$x + y = 2,\ y = 4x - x^2 - 2,$	d)	$y = x^2,\ y^2 = x,$
e)	$y = x^2 - x - 6,\ y = -x^2 + 5x + 14,$	f)	$y = 2x^2,\ y = x^2,\ y = 1,$
g)	$y = x^3,\ y = 4x,$	h)	$xy = 4, x + y = 5,$
i)	$x = 0,\ x = \frac{1}{2},\ y = 0,\ y = x\ \mathrm{e}^{-2x},$	j)	$y = \mathrm{e}^x,\ y = \mathrm{e}^{-x},\ x = \ln 2,$
k)	$x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi,\ y = 0,\ y = x \cos\frac{x}{3},$	l)	$y = \ln x,\ y = \ln^2 x,$
m)	$y = x,\ y = x + \sin^2 x,\ x = 0,\ x = \pi,$	n)	$y = \mathrm{e}^{-x}\sin x,\ y = 0,\ x \in \langle 0, \pi\rangle.$

8. Vypočtěte plošný obsah části roviny ohraničené parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jejími tečnami v bodech $A = [1, 3]$ a $B = [4, 0]$.

9. Vypočtěte objem těles, která vzniknou rotací částí roviny popsaných danými nerovnostmi kolem osy x:

a)	$-2 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^2 + 4,$	b)	$0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq \sqrt{4x},$
c)	$0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \sin x,$	d)	$1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{4}{x},$
e)	$-2 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \cosh x,$	f)	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq y \leq \operatorname{tg} x.$

10. Vypočtěte délku křivek o rovnicích:

a)	$y = x^2,\ x \in \langle 0, 3\rangle,$	b)	$y = 2\sqrt{x},\ x \in \langle 1, 2\rangle,$
c)	$2y = x - x^2,\ x \in \langle 0, 1\rangle,$	d)	$y^2 = 4x^3,\ y > 0,\ x \in \langle 0, 2\rangle,$
e)	$y = \dfrac{2 + x^6}{8x^2},\ x \in \langle 1, 2\rangle,$	f)	$y = \mathrm{e}^x,\ x \in \langle 0, 1\rangle,$
g)	$y = \ln x,\ x \in \langle\sqrt{3}, \sqrt{8}\rangle,$	h)	$y = 1 - \ln\cos x,\ x \in \langle \ln 2, \ln 5\rangle,$
i)	$y = \ln\dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1},\ x \in \langle \ln 2, \ln 5\rangle,$	j)	$y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2},\ x \in \langle 0, 1\rangle.$

11. Vypočtěte délku křivek daných parametrickými rovnicemi:

a)	$\begin{array}{l} x = t^2, \\ y = t - \frac{t^3}{3}, \end{array}\ t \in \langle 0, \sqrt{3}\rangle,$	b)	$\begin{array}{l} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t, \end{array}\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,$
c)	$\begin{array}{l} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t, \end{array}\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,$	d)	$\begin{array}{l} x = \sin^2 t, \\ y = \sin^2 t\ \operatorname{tg} t, \end{array}\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle.$

Výsledky

1. a) $-\frac{1}{6}$, b) $\frac{65}{6}$, c) $-\ln 2$, d) $4-3\ln 3$, e) $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$, f) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$, g) $\ln\frac{32}{27}$, h) $6+\frac{9}{4}\sqrt[3]{3}$, i) $\frac{\pi}{4}$, j) $\frac{\mathrm{e}^5}{5}+3\frac{\mathrm{e}^4}{4}+\mathrm{e}^3+\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{49}{20}$, k) $\frac{\pi}{6}$, l) $\frac{21}{16}\sqrt[3]{2}-\frac{9}{8}$, m) $\ln 2$, n) $\frac{4}{3}$, o) $\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}$, p) $2\ln 2-1$, q) $8+\frac{3}{2}\pi\sqrt{3}$, r) $\ln(7+2\sqrt{7})-\ln 9$, s) $1-\frac{2}{\mathrm{e}}$, t) 1, u) $\frac{1}{8}(\mathrm{e}^2+3)$, v) $\frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi}+1)$, x) $\frac{\pi}{36}(9-4\sqrt{3})+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$, y) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $\frac{5}{6}$;
3. a) 0, b) 1, c) 0, d) $14-\ln 5040$;
4. a) $\sqrt{5+7x^2}$, b) $-\sin^3 x$, c) $2\sqrt[3]{x^4+1}$;
5. $\frac{\pi}{3}$;
6. všechna k;
7. a) 36, b) $\frac{9}{2}$, c) $\frac{9}{2}$, d) $\frac{1}{3}$, e) $\frac{343}{3}$, f) $\frac{2}{3}(2-\sqrt{2})$, g) 8, h) $\frac{15}{2}-8\ln 2$, i) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2e}$, j) $\frac{1}{2}$, k) $\frac{3}{4}(2\sqrt{3}-1)\pi+\frac{9}{2}(1-\sqrt{3})$, l) $3-\mathrm{e}$, m) $\frac{\pi}{2}$, n) $\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-\pi})$;
8. $\frac{9}{4}$;
9. a) $\frac{1792}{15}\pi$, b) 18π, c) $\frac{\pi^2}{2}$, d) 8π, e) $\frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^{-4})$, f) $\frac{\pi}{4}(4-\pi)$;
10. a) $\frac{3}{2}\sqrt{37}+\frac{1}{4}\ln(6+\sqrt{37})$, b) $\sqrt{6}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{6}+5}{2\sqrt{2}+3}$, c) $\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$, d) $\frac{2}{27}(\sqrt{19^3}-1)$, e) $\frac{33}{16}$, f) $\sqrt{1+\mathrm{e}^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+\mathrm{e}^2}}1$, g) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$, h) $\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$, i) $\ln\frac{16}{3}$, j) $4-2\sqrt{2}$;
11. a) $2\sqrt{3}$, b) $2\pi^2$, c) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$, d) $\sqrt{7}-2-\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$.

4.5 Nevlastní integrály

Určitý integrál jsme definovali pro případ konečného intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a ohraničené funkce $f : \langle a,\, b\rangle \to \mathbb{R}$. V této kapitole podáme definici tak, že od těchto omezujících předpokladů upustíme. Takový integrál se nazývá nevlastní na rozdíl od integrálů vlastních, o nichž jsme hovořili doposud.

Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu

Definice 4.49: Buď f funkce definovaná v intervalu $\langle a,\, \infty)$. Nechť je f integrovatelná v intervalu $\langle a,\, \xi\rangle$ pro každé $\xi > a$. Nechť existuje vlastní limita

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

Pak tuto limitu nazýváme ***nevlastním integrálem*** funkce f v intervalu $\langle a,\, \infty)$ (se singularitou v horní mezi) a píšeme

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\xi\to\infty}\int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

a říkáme, že integrál $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ ***konverguje***. Je-li funkce f taková, že předchozí limita je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že integrál $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ ***diverguje***.

Podobně definujeme nevlastní integrál v intervalu $(-\infty, a\rangle$ (se singularitou v dolní mezi) pomocí limity:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\xi\to-\infty} \int_{\xi}^{a} f(x)\,dx,$$

jestliže pro každé $\xi < a$ existuje $\int\limits_{\xi}^{a} f(x)\,dx$ a jestliže existuje limita na pravé straně.

Příklad 4.50: Máme vypočítat nevlastní integrály

$$\text{a)}\quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx, \qquad \text{b)}\quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \qquad \text{c)}\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}\,.$$

Řešení:

a) $$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{\xi\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^\xi = \lim_{\xi\to\infty}\left[-e^{-\xi}+e^0\right] = 0+1 = 1.$$

b) $$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\xi\to-\infty}\int_{\xi}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\xi\to-\infty}\left[\operatorname{arctg} x\,\right]_\xi^0 =$$

$$= \lim_{\xi\to-\infty}\left[-\operatorname{arctg}\xi\,\right] = \frac{\pi}{2}.$$

c) Buď $\alpha \neq 1$. Potom

$$\int_1^\xi \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^\xi = \frac{\xi^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{\xi^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{pro} \quad \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{pro} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Dále je

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to\infty}\left[\,\ln|x|\,\right]_1^\xi = \lim_{\xi\to\infty}\left[\ln|\xi| - \ln 1\right] = \infty.$$

Tedy $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

Integrály z neohraničených funkcí

Definice 4.51: Nechť je funkce f definovaná v intervalu $\langle a, b)$ a v okolí bodu b je neohraničená. Nechť pro každé $\xi \in (a, b)$ existuje integrál $\int_a^\xi f(x)\,dx$ a nechť existuje limita $\lim\limits_{\xi \to b^-} \int_a^\xi f(x)\,dx$. Pak tuto limitu nazýváme ***nevlastním integrálem*** (se singularitou v horní mezi) funkce f v intervalu $\langle a, b)$ a píšeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to b^-} \int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Podobně definujeme nevlastní integrál v intervalu $(a, b\rangle$ z funkce neohraničené v okolí bodu a (se singularitou v dolní mezi) vztahem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to a^+} \int_\xi^b f(x)\,dx.$$

V obou případech říkáme opět, že integrál ***konverguje***, je-li limita napravo vlastní.

Příklad 4.52: Vypočítáme následující integrály:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$.

Řešení:

a)
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi \to 1^-} \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi \to 1^-} [\arcsin x]_0^\xi = \lim_{\xi \to 1^-} \arcsin \xi = \frac{\pi}{2}.$$

b) Buď $\alpha \neq 1$. Potom

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\xi \to a^+} \int_\xi^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\xi \to a^+} \frac{(b-a)^{1-\alpha} - (\xi - a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{pro} \quad \alpha < 1 \\ \infty & \text{pro} \quad \alpha > 1 \end{cases};$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\xi \to a^+} \int_\xi^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\xi \to a^+} [\ln(x-a)]_\xi^b =$$

$$= \lim_{\xi \to a^+} [\ln(b-a) - \ln(\xi - a)] = \infty.$$

Celkem tedy $\int_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^\alpha}$ konverguje pro $\alpha < 1$ a diverguje pro $\alpha \geq 1$.

Obecná definice nevlastního integrálu

V předchozích úvahách jsme vyšetřovali pouze ty nevlastní integrály, které měly singularitu v jedné mezi. Přirozeným způsobem lze tyto úvahy zobecnit:

Definice 4.53: Nechť je funkce f definovaná v intervalu (a,b), kde a může být $-\infty$ a b může být ∞, s výjimkou konečně mnoha bodů, v jejichž okolí je neohraničená. Nechť existují čísla $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ z intervalu (a,b) tak, že integrály

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx, \quad \ldots, \quad \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

mají singularitu pouze v jedné mezi a konvergují. Potom definujeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx,$$

a říkáme také, že integrál nalevo konverguje.

Příklad 4.54:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{arctg} x = t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \frac{1}{1+x^2}\,dx = dt & \end{array} \right| =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{\operatorname{arctg} a}^{0} t\,dt + \lim_{b\to\infty} \int_0^{\operatorname{arctg} b} t\,dt = \frac{1}{2}\left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0\right] = 0.$$

Shrnutí

V této kapitole jsme zobecnili pojem určitého integrálu na případy, kdy buď integrační interval, nebo integrand je neohraničený; zavedli jsme:

- nevlastní integrál z funkce f na neohraničeném intervalu $\langle a,\infty)$ resp. $(-\infty,a\rangle$:
  $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{\xi\to\infty} \int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx$ resp. $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim\limits_{\xi\to-\infty} \int\limits_{\xi}^{a} f(x)\,dx,$
- nevlastní integrál z funkce f, která je neohraničená v okolí horní meze b resp. dolní meze a: $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{\xi\to b^-} \int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx$ resp. $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{\xi\to a^+} \int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx,$

přitom říkáme, že

- nevlastní integrál má singularitu v horní mezi: je-li horní mez nevlastního integrálu ∞ nebo je-li integrand v okolí horní meze integrálu neohraničená funkce,
- nevlastní integrál má singularitu v dolní mezi: je-li dolní mez nevlastního integrálu $-\infty$ nebo je-li integrand v okolí dolní meze integrálu neohraničená funkce.

Má-li integrand v integračním intervalu (a, b) (a může být rovno $-\infty$ a b může být rovno ∞) konečně mnoho bodů nespojitosti, v jejichž okolí je neohraničenou funkcí, vyjádříme daný integrál jako součet integrálů přes dílčí intervaly tak, aby jednotlivé integrály měly singularitu pouze v jedné mezi. Jestliže všechny tyto integrály konvergují, je daný nevlastní integrál roven jejich součtu; v opačném případě diverguje.

Cvičení

1. Vypočítejte následující integrály:

a) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx,$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx,$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx,$ d) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx,$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx,$ f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx,$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx,$ h) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx,$

i) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx,$ j) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

k) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx,$ l) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{1}{1+2\cos x}\,dx,$

m) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx,$ n) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\,dx.$

2. Vypočítejte plošný obsah části roviny ohraničené křivkou $y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$, $x \geq 0$ a souřadnými osami.

3. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací části roviny ohraničené hyperbolou $xy = 1$ a osou x ($x \geq 1$) kolem osy x.

Výsledky

1. a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, c) π, d) $\frac{\pi}{2}$, e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, g) $\frac{\pi^3}{12}$, h) 9, i) diverguje, j) π, k) diverguje, l) diverguje, m) diverguje, n) $\ln 3$;

2. 3; **3.** π.

5 Nekonečné řady

5.1 Číselné řady

V této části rozšíříme operaci sečítání v $\mathbb{R}$ i v $\mathbb{C}$ na nekonečně mnoho sčítanců – zavedeme pojem nekonečné řady čísel a zodpovíme dvě základní otázky pro počítání s nekonečnými číselnými řadami:

- Jak sečíst nekonečnou množinu čísel?
- Platí pro nekonečné součty podobné zákony jako pro konečné součty, zejména zákon distributivní, asociativní a komutativní?

Nejdříve zavedeme potřebné pojmy – zobecníme pojem geometrické řady, který je znám ze střední školy. Postup použitý při určení jejího součtu, tj. utvoření tzv. částečných součtů a provedení limitního přechodu je návodem pro obecnou definici.

Základní pojmy

Definice 5.1: Nechť je dána číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

1. ***Nekonečnou řadou*** (nebo jen ***řadou***)nazýváme symbol
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$
2. Číslo a_n se nazývá ***n-tý člen*** nekonečné řady.
3. ***Posloupnost částečných součtů*** nekonečné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je posloupnost
$$(s_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \text{kde} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$
4. Řekneme, že nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konverguje k číslu s***, a píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, právě když $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

   Číslo s nazýváme ***součtem*** nekonečné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
5. Řekneme, že nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***diverguje***, jestliže diverguje posloupnost jejích částečných součtů.

Příklad 5.2: Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, $q \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ se nazývá ***geometrická***. Vyšetříme, kdy řada konverguje.

Řešení:

1. Nechť $q = 1$. Pak $s_n = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, tj. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ je divergentní.

2. Nechť $q = -1$. Řada má tvar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$, takže pro n-tý částečný součet platí

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{pro liché } n, \\ 0 & \text{pro sudé } n. \end{cases}$$

   Posloupnost $(1, 0, 1, \dots)$ nemá limitu, proto tato řada diverguje.

3. Nechť $|q| \neq 1$. Platí

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

$$q \cdot s_n = \quad q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$$

$$s_n - q \cdot s_n = (1-q)\, s_n = 1 - q^n$$

   Odtud plyne

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

   Uvažujme následující případy pro $q \in \mathbb{R}$:

   a) pro $|q| < 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, proto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$;
   b) pro $q > 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, proto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$;
   c) pro $q < -1$ limita $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ neexistuje.

Proto je geometrická řada pro $|q| \geq 1$ divergentní a pro $|q| < 1$ konvergentní. V tomto případě pro její součet platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Stejné tvrzení platí i pro $q \in \mathbb{C}$.

Poznámka: Obvykle se nazývá geometrickou řadou řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1}$; uvidíme dále, že naše definice není na újmu obecnosti.

Rozhodnutí o konvergenci (resp. o divergenci) dané řady usnadní často následující věta:

Věta 5.3: **(Nutná podmínka konvergence)** *Jestliže řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz: Tvrzení věty je zřejmé:
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Protože $a_n = s_n - s_{n-1}$, plyne odtud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$.

Je třeba si uvědomit, že opak této věty neplatí – splnění podmínky $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ neznamená konvergenci řady, což ilustrujeme na následujícím příkladu:

Příklad 5.4: Ukážeme, že platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$:

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n};$$

tedy

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Odtud plyne, že zadaná řada diverguje, i když platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Vlastnosti číselných řad

Konvergentní řady mají některé vlastnosti konečných součtů; první taková vlastnost je vlastnost analogická asociativnosti. Jak víme, platí pro konečný počet sčítanců asociativní zákon, např:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4).$$

Dejme do závorek v řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ určité skupiny členů podle tohoto schématu:

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \cdot + a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdot + a_{n_2})}_{b_2} + \underbrace{(a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \cdot + a_{n_3})}_{b_3} + \cdots .$$

Přitom zachováváme původní pořadí členů řady; $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ jsou nějaká (libovolně zvolená) čísla. Tím vytvoříme řadu

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \text{kde} \quad b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}.$$

Posloupnost částečných součtů této nové řady je vybraná posloupnost z posloupnosti částečných součtů řady původní, která je podle předpokladu konvergentní - podle věty o relativní limitě musí konvergovat také. Platí tedy

Věta 5.5: *Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a má-li součet s, pak řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ je také konvergentní a má součet s.*

Věta obrácená k předchozí větě neplatí. Konverguje-li řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, může být řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, jak ukazuje následující příklad:

Příklad 5.6: Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = [3+(-3)] + [3+(-3)] + \cdots$$

je konvergentní, neboť její posloupnost částečných součtů $(\bar{s_k}) = (0)$. Ale řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 + (-3) + 3 + (-3) + \cdots ,$$

která vznikne z dané řady odstraněním závorek je divergentní, neboť příslušná posloupnost částečných součtů nemá limitu (osciluje). V konvergentních nekonečných řadách „odstranění“ závorek může narušit konvergenci.

Násobíme-li všechny členy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ číslem k, dostaneme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k\, a_n$, pro kterou platí:

Věta 5.7: *Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a má-li součet s, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k\, a_n$, kde k je libovolná konstanta, je rovněž konvergentní a má součet $\bar{s} = k\, s$.*

Důkaz: Větu snadno dokážeme přímo z definice součtu řady jako limity posloupnosti částečných součtů:

$$\bar{s}_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = k\, s_n; \qquad \bar{s} = \lim_{n\to\infty} \bar{s}_n = k \lim_{n\to\infty} s_n = k\, s.$$

Předchozí věta je rozšířením distributivního zákona na nekonečný počet sčítanců.

Příklad 5.8: Je-li $|q| < 1$, platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = \frac{a}{1-q}$.

Poznámka: Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní a je-li $k \neq 0$, je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ také divergentní (proč?)

Věta 5.9: *Jsou-li řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ konvergentní, je konvergentní i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a má součet $s = A + B$.*

Důkaz: Věta se prověří analogicky jako věta předchozí užitím definice a vlastností limit konvergentních posloupností.

Příklad 5.10: Máme najít součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3^n}\right)$.

Řešení: Platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$, $\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3$, tedy
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3^n}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=5.$

V řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{p-1}+a_p+\cdots$ vynechejme prvních p členů. Dostaneme řadu $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty}a_n=a_{p+1}+a_{p+2}+\cdots$, kterou nazýváme ***zbytek po p-tém členu*** řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Platí:

Věta 5.11: *Nechť $p\in\mathbb{N}$. Řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\quad\sum\limits_{n=p+1}^{\infty}a_n$ současně buď konvergují nebo divergují. Jestliže konvergují, pak platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+\cdots+a_p+\sum_{n=p+1}^{\infty}a_n.$$

Z této věty plyne, že z hlediska konvergence nezáleží na tom, od kterého indexu začneme sečítat.

Kriteria konvergence

V předcházejících příkladech jsme většinou zkoumali konvergenci daných řad přímo z definice tak, že jsme dokázali existenci (popř. neexistenci) vlastní limity posloupnosti částečných součtů (s_n). Výhodou tohoto postupu je, že určením limity posloupnosti (s_n) je zároveň určen součet dané řady. K tomu však potřebujeme znát jednoduchý explicitní vzorec pro s_n, což se podaří jen ve velmi jednoduchých případech. Proto ve většině případů postupujeme jinak: Vyšetříme nejdříve konvergenci dané řady a její součet pak určíme přibližně. Vztahy, pomocí kterých vyšetřujeme konvergenci řad, se nazývají ***kriteria konvergence***. Základním takovým kriteriem je jistě nutná podmínka konvergence řady 5.3; další kriteria jsou formulována pro následující typ řad:

Definice 5.12: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ se nazývá ***řadou s nezápornými členy***, je-li $a_n\geq 0$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$.

Tyto řady mají některé specifické vlastnosti:

a) posloupnost jejich částečných součtů $\{s_n\}$ je neklesající, neboť
$s_{n+1}=s_n+a_{n+1}\geq s_n$.

b) Je-li navíc tato posloupnost shora ohraničená, pak existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, tj. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

Proto jsou řady s nezápornými členy buď konvergentní nebo divergují k ∞.

Základní kriterium, pomocí kterého se odvozují další (poněkud jednodušší pro vlastní výpočty) je

Věta 5.13: **(Srovnávací kriterium)**

Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *řady s nezápornými členy a nechť platí* $a_n \le b_n$ *pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *(tedy všechna s výjimkou nejvýš konečně mnoha). Potom platí:*

1. *konverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;
2. *diverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *diverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

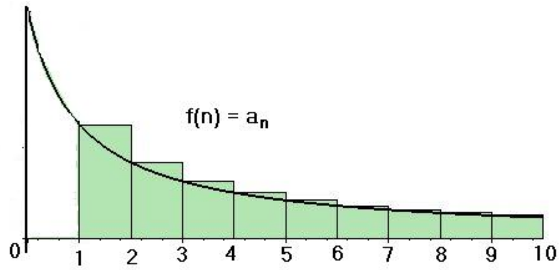
Příklad 5.14: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$ je konvergentní:

Platí $\frac{1}{n\,2^n} \le \frac{1}{2^n}$, přičemž $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentní – je to geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{2} < 1$. Tedy zadaná řada je také konvergentní.
Srovnávací kriterium má velkou nevýhodu v tom, že k vyšetřované řadě musíme zvolit nějakou jinou řadu, se kterou budeme srovnávat; je tedy předem nutné rozhodnout, jestli budeme ukazovat konvergenci nebo divergenci. Výhodnější je pracovat přímo se členy dané řady, tak jak to bude u dalších tří kriterií:

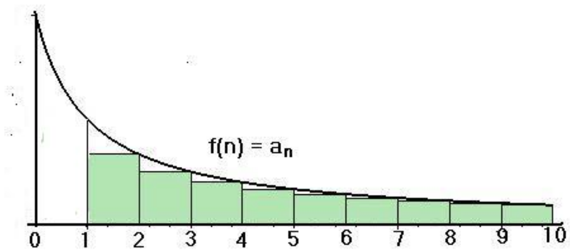
Věta 5.15: **(Integrální kriterium)**

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle 1, \infty)$, která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť $a_n = f(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje nevlastní integrál $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Platnost kriteria demonstrujeme v následujících dvou obrázcích.
Hodnota nevlastního integrálu z funkce f (v obrázku černou barvou) udává obsah plochy pod grafem funkce od jedné do nekonečna; součet příslušné nekonečné řady můžeme znázornit jako obsah (zelené) plochy tvořené obdélníky se základnou délky jedna a výškou rovnou funkční hodnotě v n.



Obr. 5.90: Integrální kriterium



Obr. 5.91: Integrální kriterium

a) Nechť $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ diverguje (první obrázek). Platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^n f(x)\,dx,$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = \int_1^\infty f(x)\,dx = \infty,$$

tedy řada diverguje.

b) Nechť $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ konverguje (druhý obrázek). Potom je

$$s_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx,$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \leq a_1 + \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx$$

a poslední integrál je podle předpokladu roven konečnému číslu – tedy řada konverguje.

Příklad 5.16: Vyšetříme konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a > 0$.

Položme $f(x) = \frac{1}{x^a}$ pro $x \in \langle 1, \infty)$, což je pro $a > 0$ klesající funkce. Platí

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^\infty \tfrac{dx}{x^a} &= \lim_{t\to\infty} \int\limits_1^t x^{-a}\,dx = \tfrac{1}{a-1} \quad \text{pro } a > 1,\\
\int\limits_1^\infty \tfrac{dx}{x} &= \lim_{t\to\infty} \int\limits_1^t \tfrac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} (\ln t) = \infty,\\
\int\limits_1^\infty \tfrac{dx}{x^a} &= \tfrac{1}{1-a}\left(\lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t^{a-1}} - 1\right) = \infty \quad \text{pro } a \in (0, 1).
\end{aligned}$$

Proto daná řada konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $a \in (0, 1\,\rangle$.

Následující dvě kriteria se prověří srovnáním s geometrickou řadou a limitním přechodem:

Věta 5.17: **(Odmocninové kriterium – Cauchyovo)**

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Je-li*

$\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1,$ *řada konverguje,*

$\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1,$ *řada diverguje.*

V případě $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$ *nelze o konvergenci řady tímto kriteriem rozhodnout.*

Věta 5.18: **(Podílové kriterium – d'Alembertovo)**

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Existuje-li*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad kde \;\; q \in \overline{\mathbb{R}},$$

pak v případě $q < 1$ *řada konverguje a v případě* $q > 1$ *řada diverguje. V případě* $q = 1$ *nelze o konvergenci řady tímto kriteriem rozhodnout.*

Příklad 5.19: Rozhodněte o konvergenci řad

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

Řešení:

a) Použijeme odmocninové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Daná řada konverguje.

b) V n-tém členu se vyskytuje faktoriál, je vhodné podílové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Řada diverguje.

c) Použijeme podílové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,(2n+1)}{(2(n+1)+1)\,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n} = 1.$$

Kriterium nerozhodne; stejný výsledek dostaneme při použití odmocninového kriteria. Pro danou řadu však není splněna nutná podmínka konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

– řada diverguje.

Absolutní konvergence

Základní kriteria konvergence jsou formulována pro řady s nezápornými členy, což se může jevit jako jisté omezení. Ovšem současně s řadou s obecnými členy můžeme vyšetřovat i řadu absolutních hodnot jejích členů; to nám umožní také vyšetřovat konvergenci řad komplexních čísel, kterou bez použití absolutní hodnoty nevyšetříme – uvědomme si, že do $\mathbb{C}$ nelze zavést uspořádání. Pro řadu, utvořenou z absolutních hodnot členů řady platí následující důležitá věta:

Věta 5.20: *Nechť je dána řada s libovolnými znaménky* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Utvořme řadu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$; *jestliže tato řada konverguje, potom původní řada je také konvergentní.* Platnost věty nás vede k následující definici:

Definice 5.21: Jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $a_n \in \mathbb{R}$ resp. $a_n \in \mathbb{C}$, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konverguje absolutně***.

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konverguje neabsolutně.***

Příklad 5.22: Vyšetřeme konvergenci řad

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i^n)^n}{n\,3^n}$

Řešení:

a) Ukážeme, že řada konverguje absolutně:

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2} \ \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konverguje} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \text{ konverguje.}$$

Tedy zadaná řada konverguje absolutně.

b) Použijeme odmocninové kriterium; vyšetříme posloupnost n-tých odmocnin absolutních hodnot členů řady:

$$\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{|1+i^n|}{3\,\sqrt[n]{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} \frac{2}{3\,\sqrt[4k]{4k}} & \text{pro } n = 4k \\ \frac{|1-i|}{3\,\sqrt[4k-1]{4k-1}} = \frac{\sqrt{2}}{3\,\sqrt[4k-1]{4k-1}} & \text{pro } n = 4k-1 \\ 0 & \text{pro } n = 4k-2 \\ \frac{|1+i|}{3\,\sqrt[4k-3]{4k-3}} = \frac{\sqrt{2}}{3\,\sqrt[4k-3]{4k-3}} & \text{pro } n = 4k-3 \end{cases}$$

Platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{3\sqrt[4k]{4k}} = \frac{2}{3}, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4k-1]{4k-1}} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4k-3]{4k-3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Tedy} \qquad \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3} < 1$$

– řada konverguje absolutně.

Alternující řady

Definice 5.23: Nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ se nazývá ***alternující***, právě když libovolné dva po sobě jdoucí členy mají opačná znaménka, tj. platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Každou alternující řadu lze psát ve tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, b_n$ nebo ve tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\, b_n$, kde $b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro alternující řady platí následující kriterium konvergence:

Věta 5.24: **(Leibnizovo kriterium)**

Nechť (b_n) je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Potom alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, b_n$ konverguje, právě když platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Příklad 5.25: Pomocí Leibnizova kriteria rozhodneme o konvergenci následujících alternujících řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{3n+2}{2n-3}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n-\ln n}$

Řešení:

a) Tato řada se nazývá Leibnizova. Posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$ je klesající a má limitu 0, proto podle Leibnizova kriteria konverguje (neabsolutně). Později ukážeme, že má součet $\ln 2$.

b) Platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{2}$, proto řada diverguje.

c) Nejprve ověříme, zda je posloupnost $\left(\frac{1}{n-\ln n}\right)$ klesající. Uvažujme funkci $y = \frac{1}{x-\ln x}$. Platí, že

$$y' = -\frac{1}{(x-\ln x)^2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) < 0 \quad \text{pro} \quad x > 1,$$

tj. tato funkce je klesající na intervalu $(1,\infty)$, odkud plyne, že také posloupnost $\left(\frac{1}{n-\ln n}\right)$ je klesající.
Dále je $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\ln n)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{e^n}{n}=\infty$, a proto $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$. Daná řada konverguje.

Přerovnání řad, násobení řad

Asociativní zákon, platný pro konečné součty, lze, jak jsme ukázali, v určitém smyslu rozšířit na konvergentní řady. Komutativní zákon, platný pro konečné součty, vyjadřuje, jak známo, nezávislost součtu na pořadí sčítanců. Tento zákon nelze rozšířit na konvergentní řady, jak je vidět na tomto příkladu:

Příklad 5.26: Leibnizova řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

je konvergentní; označme její součet s. Dále je

$$\frac{s}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots.$$

Přepišme obě řady v následujícím tvaru (do druhé řady vložíme nuly, součet se nezmění):

$$\begin{aligned} s &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots \\ \frac{s}{2} &= 0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots \end{aligned}$$

Sečtením těchto konvergentních řad dostaneme konvergentní řadu:

$$\frac{3}{2}s=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

Podrobnějším vyšetřením lze ukázat, že vzniklá řada obsahuje právě všechny členy Leibnizovy řady (a žádné jiné), ale v jiném pořadí.

Říkáme, že řada vznikla ***přerovnáním*** Leibnizovy řady; přitom přerovnáním řady o součtu s jsme dostali řadu o součtu $\frac{3}{2}s$.

Je tedy vidět, že komutativní zákon nelze rozšířit na konvergentní řady. Poznamenejme, že se dá ukázat platnost tvrzení:

a) *Libovolným přerovnáním absolutně konvergentní řady dostaneme absolutně konvergentní řadu o stejném součtu.*

b) *Je-li řada $\sum a_n$ neabsolutně konvergentní, pak vhodným přerovnáním této řady lze dostat divergentní řadu, popř. konvergentní řadu s libovolným předem daným součtem.*

Násobení řad

Pro násobení součtů o konečném počtu členů platí, jak známo, distributivní zákon – dva součty o konečném počtu členů násobíme podle tohoto zákona „člen po členu“, tj. tak, že násobíme každý člen prvního z nich každým členem druhého a takto vzniklé součiny sečteme. Vzniká otázka, za jakých podmínek a do jaké míry lze platnost tohoto zákona rozšířit i na součty o nekonečném počtu členů, tj. na číselné řady. K tomuto účelu definujeme nejdříve součin řad:

Definice 5.27: ***Cauchyovským součinem řad*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ rozumíme řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, kde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0.$$

Násobením daných dvou řad dostaneme tedy řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots +$$

$$+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) + \cdots$$

Napíšeme-li do tabulky všechny součiny $a_i b_k$ členů obou řad ($i = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, 2, \ldots$), dostaneme schéma

$$\begin{array}{ccccc}
a_0 b_0 & a_1 b_0 & a_2 b_0 & a_3 b_0 & \ldots \\
a_0 b_1 & a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 & \ldots \\
a_0 b_2 & a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 & \ldots \\
a_0 b_3 & a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Každý člen c_n součinové řady je součtem členů ležících v „diagonálách“ tohoto schématu; je součtem takových součinů $a_i b_k$, že součet indexů $i + k = n$.

Pro takto definovaný součin řad platí

Věta 5.28: *Jsou-li řady* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$ *absolutně konvergentní, pak jejich Cauchyovský součin je absolutně konvergentní řada se součtem* $A \cdot B$*. Mimoto je absolutně konvergentní i řada, která ze součinové řady vznikne odstraněním závorek a má stejný součet.*

Příklad 5.29: Máme vynásobit řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}$.

Řešení: Řady jsou zřejmě absolutně konvergentní a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

Dále je

$$c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^0=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\left((-1)^n+(-1)^{n-1}+\cdot+(-1)^0\right);$$

tedy je-li n liché, tj. $n=2k+1$, je $c_n=0$, je-li n sudé, tj. $n=2k$, je $c_n=\frac{1}{3^n}$.

Dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}$$

to je geometrická řada s kvocientem $q=\frac{1}{9}$, tedy má součet

$$C=\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}.$$

Příklad 5.30: Ukážeme, že platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\cdot\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}=\left|(a+b)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k},\quad\text{tedy}\right|=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot a^kb^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}$$

Numerická sumace

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentní řada. Víme, že její součet s lze psát ve tvaru

$$s=s_n+R_n,\qquad\text{kde}\qquad s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\quad\text{a}\quad R_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$$

je zbytek po n-tém členu. To znamená, že číslo R_n udává velikost chyby, které se dopustíme, jestliže přesnou hodnotu dané konvergentní řady aproximujeme částečným součtem. Přitom platí (řada je konvergentní!)

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}(s-s_n)=s-s=0.$$

V tomto odstavci uvedeme některé odhady pro velikost zbytku $|R_n|$.

Nejjednodušší tvar má tento odhad pro alternující řadu:

Věta 5.31: *Nechť* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. *Pak pro zbytek po n-tém členu alternující řady* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, b_n$ *platí* $|R_n| < b_{n+1}$.

Pokud daná řada není alternující, můžeme pro určování chyby použít následující dvě tvrzení, která plynou ze srovnávacího kriteria konvergence (s mocninnou řadou s kvocientem q) a z integrálního kriteria:

Věta 5.32: *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je číselná řada, pro kterou platí* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Pak pro zbytek* R_n *platí* $|R_n| \le |a_n|\,\frac{q}{1-q}$.

Věta 5.33: *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Nechť* $a_n = f(n)$, *kde* f *je nezáporná a nerostoucí funkce na intervalu* $\langle 1, \infty)$.
Pak pro zbytek R_n *platí* $R_n \le \int\limits_n^{\infty} f(x)\, dx$.

Příklad 5.34: Odhadneme zbytek řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, kde $a \in \mathbb{R},\ a > 1$.

Řešení: Daná řada konverguje. Platí

$$R_n \le \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{x^{a-1}}\right]_n^{\infty} = \frac{1}{(a-1)\,n^{a-1}}.$$

Například pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dostáváme $R_n \le \frac{1}{n}$, tj. její konvergence je „pomalá“.

Příklad 5.35: Kolik členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ je třeba sečíst, abychom její součet aproximovali s chybou menší než 0,001?

Řešení: Protože platí $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^3}$, plyne z předchozího příkladu odhad

$R_n < \frac{1}{2\,n^2}$. Nerovnost $\frac{1}{2\,n^2} \le 0{,}001$, tj. $n^2 \ge 500$, je splněna pro $n \ge 23$.

Stačí tedy sečíst 23 členů řady.

Příklad 5.36: Kolik členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ je třeba sečíst, abychom její součet aproximovali s chybou menší než 0,01?

Řešení: Platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ pro $n \geq 3$. Tedy pro $n \geq 3$ platí

$R_n \leq a_n \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = a_n = \frac{2^n}{n!}$.

Nerovnost $\frac{2^n}{n!} < 0{,}01$, tj. $n! > 100 \cdot 2^n$, je splněna, jak se snadno přesvědčíme, pro $n \geq 8$. Stačí tedy sečíst 8 členů řady.

Shrnutí

V této kapitole jsme rozšířili sečítání i na nekonečný počet sčítanců a zkoumali jsme jeho vlastnosti – pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsme zavedli následující pojmy:

- nekonečná řada: symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$,
- n-tý člen nekonečné řady: číslo a_n,
- posloupnost částečných součtů nekonečné řady: posloupnost $(\, s_n \,)_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,
- součet nekonečné řady: limita posloupnosti částečných součtů $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$;

přitom říkáme, že

- řada konverguje: je-li s vlastní,
- řada diverguje: je-li s nevlastní nebo neexistuje,
- řada konverguje absolutně: konverguje-li řada absolutních hodnot členů původní řady,

přitom z absolutní konvergence řady plyne její konvergence;

jedna z řad, jejíž součet umíme zjistit přesně, je:

- geometrická řada: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pro $|q| < 1$;

v mnoha situacích nepotřebujeme znát přesný součet řady, stačí vědět, zda řada konverguje nebo diverguje. K ověření konvergence slouží kriteria konvergence.

Základním kriteriem pro konvergenci řady je

- nutná podmínka konvergence: jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

dále jsme uvedli kriteria pro řady s nezápornými členy, která u řad s členy s libovolnými znaménky slouží k zjištění absolutní konvergence. Je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy, platí následující kriteria konvergence:

- srovnávací: je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jiná řada, o které víme, že konverguje, potom platí-li $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,
  jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje a platí $a_n \geq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;
- integrální: je-li f nezáporná a nerostoucí funkce definovaná na intervalu $\langle 1, \infty)$ a $a_n = f(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje nevlastní integrál $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$;
- odmocninové: je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, řada konverguje,
  $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, řada diverguje;
- podílové: je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, řada konverguje,
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, řada diverguje;

pro neabsolutní konvergenci jsme uvedli kriterium, které rozhodne o konvergenci tzv. alternující řady – řady, jejíž členy pravidelně střídají znaménka:

- Leibnizovo kriterium: alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, b_n$, kde $b_n > 0$, konverguje, platí-li $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost.

Dále jsme vyšetřovali vlastnosti nekonečných řad a operace s nekonečnými řadami; uvedli jsme následující pravidla:
je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$=b, tedy řady jsou konvergentní, potom

- součet řady se nezmění, jestliže v ní sdružíme do závorek skupiny o konečně mnoha sčítancích,
- řadu můžeme násobit číslem člen po členu: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k\, a_n = k \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = k\, a$,
- dvě řady můžeme sečíst člen po členu: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = a + b$;

je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$ a řady jsou absolutně konvergentní, potom

- součet řady se nezmění, jestliže v ní libovolně přerovnáme členy,

- dvě řady můžeme násobit člen po členu: $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = a \cdot b$, kde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0$;

tedy absolutně konvergentní řady mají všechny vlastnosti, které mají součty konečně mnoha sčítanců.

Na závěr kapitoly jsme se věnovali problému, jaké chyby se dopustíme, jestliže součet konvergentní řady nahradíme součtem několika jejích prvních členů. Je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + R_n$, R_n je zbytek po n-tém členu řady, platí následující vztahy :

- je-li daná řada alternující a $|a_n| = b_n$, potom $|R_n| < b_{n+1}$,
- jestliže $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, potom $|R_n| \leq |a_n| \frac{q}{1-q}$,
- jestliže $a_n = f(n)$, kde f je nezáporná a nerostoucí funkce na intervalu $\langle 1, \infty)$, potom $R_n \leq \int\limits_n^{\infty} f(x)\, dx$.

Otázky a úkoly

1. Co je to nekonečná řada a jak definujeme součet nekonečné řady?
2. Kdy řekneme, že je nekonečná řada konvergentní resp. divergentní?
3. Pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Které z následujících tvrzení je pravdivé a proč?

   a) řada je konvergentní, ale k určení jejího součtu potřebujeme více informací,
   b) řada je konvergentní a její součet je roven nule,
   c) řada diverguje,
   d) nemáme dost informací k rozhodnutí, zda řada konverguje nebo diverguje.

4. Předpokládejme, že pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$. Které z následujících tvrzení je pravdivé a proč?

   a) řada je konvergentní, ale k určení jejího součtu potřebujeme více informací,
   b) řada je konvergentní a její součet je roven 6,
   c) řada diverguje,
   d) nemáme dost informací k rozhodnutí, zda řada konverguje nebo diverguje.

5. Pro posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 3$. Které z následujících tvrzení je pravdivé a proč?

a) řada je konvergentní, ale k určení jejího součtu potřebujeme více informací,
b) řada je konvergentní a její součet je roven 3,
c) řada diverguje,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
f) nemáme dost informací k rozhodnutí, zda řada konverguje nebo diverguje;

6. Ukažte, že platí: konverguje-li řada s kladnými členy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$;

7. Zjistěte, zda součet

   a) dvou divergentních řad
   b) divergentní a konvergentní řady

   může být konvergentní.

Cvičení

1. Napište prvních pět členů nekonečné řady, je-li dán její n-tý člen:

   a) $a_n = \frac{1}{(3-(-1)^n)^n}$, b) $a_n = \frac{4n-3}{n^2+n+1}$, c) $\frac{(1-\sin(n\frac{\pi}{2}))\cos(n\pi)}{n!}$;

2. Najděte n-tý člen následujících řad, jsou-li všechny další členy utvořeny podle stejného pravidla:

   a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots$, b) $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \dots$,
   c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \cdots$.

3. Najděte součet následujících nekonečných řad:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{7}\right)^n$.

4. Vyjádřete následující periodické dekadické rozvoje racionálních čísel ve tvaru zlomku:

   a) $0{,}999\overline{9}$, b) $0{,}4\overline{90}$, c) $0{,}30\overline{521}$.

5. Ukažte, že následující řady divergují:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{7n+1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+2(-1)^n}{n+1}$.

6. Pomocí srovnávacího kriteria rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-4)^2}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{3}{8}\right)^n$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

7. Pomocí integrálního kriteria rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$,

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n\,\ln n}$, e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\ln^2 n}$, f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}}$.

8. Pomocí odmocninového kriteria rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n+1)^{n+1}}$.

9. Pomocí podílového kriteria rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

10. Pomocí nutné podmínky konvergence řady ukažte, že platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n!} = 0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(4n)!} = 0$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

11. Pomocí vhodného kriteria rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

12. Najděte součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n+7^{n+1}}{14^n}$.

13. Vynásobte následující řady a vyšetřete konvergenci vzniklé řady:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\,a^n$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\,(-a)^n$, b) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n\right)^2$.

14. Najděte součet řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ s chybou menší než 0,1,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ s chybou menší než 0,01,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n-3}$ s chybou menší než 0,03.

Výsledky

1. a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{64}+\frac{1}{16}+\frac{1}{1024}+\cdots$, b) $\frac{1}{3}+\frac{5}{7}+\frac{9}{13}+\frac{13}{21}+\frac{17}{31}+\cdots$, c) $0+\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}+\frac{1}{4!}+0+\cdots$;
2. a) $\frac{1}{3n-2}$, b) $\frac{n}{3^{n-1}}$, c) $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;
3. a) $\frac{1}{2}$, b) $-\frac{3}{5}$, c) $\frac{7}{12}$;
4. a) 1, b) $\frac{54}{110}$, c) $\frac{30491}{99900}$;
5. nutná podm.,
6. a) div., b) div., c) konv., d) konv., e) konv., f) div.;
7. a) konv., b) konv., c) konv., d) div., e) konv., f) konv. pro $a>1$, div. pro $a\le 1$;
8. a) konv., b) konv., c) konv.;
9. a) konv., b) konv., c) konv,;
11. a) div., b) konv., c) konv., d) konv. neabs., e) konv. neabs., f) konv. abs.;
12. $14+\frac{14}{17}$;
13. a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a^{2n}$, konv. pro $|a|<1$, b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a^{n}$, konv. pro $|a|<1$;

5.2 Mocninné řady

Pojem nekonečné číselné řady jsme motivovali snahou rozšířit operaci sečítání na nekonečně mnoho sčítanců; v tomto odstavci podobným způsobem zobecníme polynomy.

Základní pojmy

Definice 5.37: Nechť $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ je číselná posloupnost, $x_0\in\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$. Řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n + \cdots$$

se nazývá ***mocninná řada*** a číslo x_0 její ***střed***.

Řekneme, že mocninná řada konverguje

1. v x_1, právě když konverguje číselná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x_1-x_0)^n$,
2. na množině M, právě když řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ konverguje pro každé $x\in M$.

Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ konverguje na množině M a současně pro každé $x\notin M$ diverguje, nazývá se M ***oborem konvergence*** této řady.

Příklad 5.38: Máme najít obory konvergence daných mocninných řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n(x+2)^n$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n n^2 x^{2n}$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n},\ z\in\mathbb{C}$

Řešení:

a) Použijeme podílové kriterium pro vyšetření absolutní konvergence:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|c_n(x-x_0)^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{|x-1|^n}=|x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|x-1|;$$

tedy daná řada konverguje absolutně pro $|x-1|<1$. Pro $|x-1|>1$ diverguje, protože zde není splněna nutná podmínka konvergence.
Situaci v krajních bodech konvergenčního intervalu vyšetříme tak, že hodnoty $x=1\pm 1$ do dané řady dosadíme:

- $x=2:\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje
- $x=0:\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konverguje neabsolutně

Tedy obor konvergence dané řady je interval $\langle 0,\,2\,)$; konvergence pro $x=0$ je neabsolutní.

b) Použijeme odmocninové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n(x-x_0)^n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n|x+2|^n}=2|x+2|;$$

Tedy řada konverguje absolutně pro $2|x+2|<1 \quad\Rightarrow\quad |x+2|<\frac{1}{2}$.
V krajních bodech $x=-2\pm\frac{1}{2}$ není splněna nutná podmínka konvergence:
$x=-2\pm\frac{1}{2}:\qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\cdot(-2\pm\frac{1}{2}+2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n$ diverguje.
Tedy obor konvergence dané řady je interval $\left(-\frac{5}{2},\,-\frac{3}{2}\right)$.

c) Použijeme podílové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)^2x^{2n+2}}{2^n n^2 x^{2n}}=2x^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=2x^2;$$

Řada konverguje absolutně pro $2x^2<1 \quad\Rightarrow\quad |x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$. V krajních bodech intervalu i pro $|x|>\frac{1}{\sqrt{2}}$ není splněna nutná podmínka konvergence.
Poznamenejme, že řada má tvar $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n n^2x^{2n}=x^2+4x^4+9x^6+\cdots$, tedy posloupnost koeficientů má každý druhý člen nulový: $(c_n)_{n=0}^{\infty}=(0,\,0,\,1,\,0,\,4,\,0,\,9,\,0,\,\dots)$.

d) Vyšetříme absolutní konvergenci pomocí odmocninového kriteria – vypočítáme limitu n-té odmocniny n-tého členu řady:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{2^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{2}=\frac{|z|}{2};$$

Řada konverguje pro $\frac{|z|}{2}<1\Rightarrow|z|<2$ a diverguje pro $\frac{|z|}{2}>1\Rightarrow|z|>2$ – oborem konvergence je tedy kruh se středem v 0 a poloměrem 2.
Pro $|z|=2$ je $|c_nz^n|=1$, tedy není splněna nutná podmínka konvergence a řada zde diverguje.

Poloměr konvergence

Viděli jsme, že obor konvergence byl v reálném oboru vždy interval souměrný podle středu řady, v komplexním oboru kruh se středem ve středu řady; to platí i obecně, jak říká následující věta:

Věta 5.39: *Pro obor konvergence mocninné řady jsou možné následující tři situace:*

1. *řada konverguje pouze ve svém středu,*
2. *řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$,*
3. *existuje kladné číslo r tak, že řada konverguje absolutně pro $|x - x_0| < r$ a diverguje pro $|x - x_0| > r$.*

Definice 5.40: Číslo r z předchozí věty se nazývá ***poloměr konvergence*** mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x - x_0)^n$.

V případě 1. resp. 2. předchozí věty klademe $r = 0$ resp. $r = \infty$.

Příklad 5.41: Najděte poloměr konvergence a součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n}$

Řešení: V případě, že řada konverguje, můžeme její členy po dvou uzávorkovat; platí tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2k-1}}{(2+(-1)^{2k-1})^{2k-1}} + \frac{x^{2k}}{(2+(-1)^{2k})^{2k}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x^{2k-1} + \frac{x^{2k}}{3^{2k}} \right).$$

Vyšetříme řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{2k-1}$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3^{2k}}$ zvlášť:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} = x + x^3 + x^5 + \cdots$ je geometrická řada s kvocientem $q = x^2$, ta konverguje pro $|x| < 1$ absolutně;

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3^{2k}}$ je geometrická řada s kvocientem $q = \frac{x^2}{9}$, konverguje absolutně pro $\frac{x^2}{9} < 1$, tedy pro $|x| < 3$.

Je-li tedy $|x| < 1$, konvergují absolutně obě řady a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3^{2k}} = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{x(9+9x-x^2-9x^3)}{(1-x^2)(9-x^2)}.$$

Posloupnost koeficientů řady v předchozím příkladu má následující tvar:

$$(c_n)_{n=1}^{\infty} = (1,\ \frac{1}{3^2},\ 1,\ \frac{1}{3^4}\ 1,\ \frac{1}{3^6},\ \dots)$$

Sestavme posloupnost $(\sqrt[n]{c_n})_{n=1}^{\infty}$:

$$(\sqrt[n]{c_n})_{n=1}^{\infty} = (1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{3},\ \dots);$$

tato posloupnost má dvě hromadné hodnoty

$$h_1 = 1,\ h_2 = \frac{1}{3}$$

přičemž horní limita této posloupnosti $\limsup c_n = 1$.

Pomocí horní limity posloupnosti koeficientů mocninné řady se vždy dá vypočítat její poloměr konvergence:

Věta 5.42: *Pro poloměr konvergence mocninné řady* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ *platí*

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Derivace a integrace mocninných řad

Mocninná řada je vyjádřením svého součtu ve tvaru „nekonečného polynomu“; je přirozené ptát se, zda můžeme tuto řadu derivovat (nebo integrovat) člen po členu, a jak souvisí součet vzniklé řady s derivací součtu řady původní. Tohoto problému si nyní blíže všimneme.

Věta 5.43: *Nechť mocninná řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ *má poloměr konvergence* $r > 0$. *Pak platí:*

a) součet této řady je spojitá funkce na $(x_0 - r,\ x_0 + r)$

b) pro všechna $x \in (x_0 - r,\ x_0 + r)$

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(t-x_0)^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} c_n(t-x_0)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má stejný poloměr konvergence r

c) pro všechna $x \in (x_0 - r,\ x_0 + r)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n\,(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,(x-x_0)^{n-1}$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má stejný poloměr konvergence r.

Příklad 5.44: Určete součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ a pomocí integrace této řady určete součet číselné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$.

Řešení: Je
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro} \quad |x| < 1$$
(je to geometrická řada s kvocientem x). Dále platí
$$\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} \qquad \text{a} \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n\,2^n},$$
tedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Příklad 5.45: Určete poloměr konvergence a součet mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,x^n$. Pomocí získaného výsledku sečtěte číselnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Řešení: Obor konvergence zadané řady určíme podílovým kriteriem:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad |x| < 1.$$
Platí tedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$
pro všechna $x \in (-1,\, 1)$. Odtud dosazením za $x = \frac{1}{2}$ dostaneme
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$
Známe-li součet mocninné řady , můžeme určovat součty číselných řad pro všechna x ležící uvnitř oboru konvergence – kruhu v $\mathbb{C}$ a intervalu v $\mathbb{R}$. Chceme-li určit součet číselné řady v krajním bodě konvergenčního intervalu v $\mathbb{R}$, je třeba použít následující Abelovu větu:

Věta 5.46: **(Abelova)** *Nechť mocninná řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ *má poloměr konvergence* r*, kde* $0 < r < \infty$ *a nechť je konvergentní v krajním bodě* $x_0 + r$ *(resp.* $x_0 - r$*) konvergenčního intervalu. Pak součet* $s(x)$ *této řady je funkce zleva spojitá v bodě* $x_0 + r$ *(resp. zprava spojitá v bodě* $x_0 - r$*).*

Příklad 5.47: Vyjádřete funkci $\ln(1+x)$ mocninnou řadou a odtud určete součet Leibnizovy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$.

Řešení: Pro $x \in (-1,\,1)$ Platí

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^n.$$

Odtud

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots)\,dt =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}.$$

Pro $x = 1$ dostaneme Leibnizovu řadu, která je (neabsolutně) konvergentní a podle Abelovy věty je její součet

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x\to 1^-}\ln(1+x) = \ln 2.$$

Taylorovy řady

V tomto odstavci budeme řešit obrácenou úlohu, a to jak rozvinout danou funkci do mocninné řady – tedy k dané funkci najít mocninnou řadu, které je součtem.

V diferenciálním počtu jsme uvedli Taylorovu větu, kde je funkce vyjádřena ve tvaru polynomu a zbytku. Pro dostatečně mnohokrát diferencovatelnou funkci f jsme uvedli vyjádření

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

kde $R_{n+1}(x)$ je Taylorův zbytek, pro který platí $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$ a ξ je mezi x_0 a x.

Je proto přirozené zavést následující definici:

Definice 5.48: Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n$$

nazýváme ***Taylorovou řadou*** funkce f v bodě x_0.

Poznamenejme, že v případě $x_0 = 0$ se řada nazývá též ***Maclaurinova***.

Obecně nemusí platit, že součet Taylorovy řady funkce f je roven této funkci. Uvedeme podmínky, kdy tato rovnost platí:

Věta 5.49: *Nechť funkce f má derivace všech řádů na jistém intervalu $\mathcal{J}$ a existuje takové číslo $k \in \mathbb{R}$, že*

$$|f^{(n)}(x)| < k \quad \textit{pro všechna} \quad n \in \mathbb{N} \quad \textit{a všechna} \quad x \in \mathcal{J}.$$

Potom pro libovolné $x_0 \in \mathcal{J}$ platí:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n \quad \textit{na intervalu } \mathcal{J}.$$

Taylorovy (resp. Maclaurinovy) řady elementárních funkcí dostaneme pomocí jejích Taylorových polynomů, které jsme odvodili v kapitole 3.5. Obory konvergence těchto řad najdeme pomocí kriterií konvergence, nebo pomocí známého vztahu najdeme poloměr konvergence.

Taylorovy řady některých elementárních funkcí jsou v závěrečném shrnutí.

Příklad 5.50: Najdeme Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = (1 + x)^a$, $a \in \mathbb{R}$ – tzv. binomickou řadu.

Řešení: Vypočítáme potřebné derivace:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1 + x)^a, & f(0) &= 1;\\
f'(x) &= a\,(1 + x)^{a-1}, & f'(0) &= a;\\
f''(x) &= a(a-1)\,(1 + x)^{a-2}, & f''(0) &= a(a-1);\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= a(a-1)\cdots(a-n+1)(1 + x)^{a-n}, & f^{(n)}(0) &= a(a-1)\cdots(a-n+1).
\end{aligned}$$

Pro n-tý koeficient řady tedy platí

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} = \binom{a}{n}$$

a řada má tvar

$$(1 + x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n.$$

Pomocí podílového kriteria určíme, že řada konverguje absolutně pro $|x| < 1$. Konvergence v krajních bodech intervalu závisí na čísle a.

Pomocí již známých Taylorových řad můžeme rozkládat další funkce do řad pomocí dovolených operací – substitucí, derivací resp. aritmetických operací:

Příklad 5.51: Rozviňte následující funkce do Maclaurinovy řady a určete jejich obor konvergence:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, c) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Řešení:

a) Položíme-li $-x^2 = t$, dostaneme funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$. Její rozvoj do binomické řady je

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} t + \binom{-\frac{1}{2}}{2} t^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3} t^3 + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^n + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!} t + \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{2!} t^2 + \cdots + \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot \cdots \cdot (-\frac{2n-1}{2})}{n!} t^n + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} t + \frac{3}{2^2\, 2!} t^2 - \frac{15}{2^3\, 3!} t^3 + \cdots + (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n\, n!} t^n + \cdots$$

na intervalu $(-1,\, 1)$. Dosazením $t = -x^2$ dostaneme hledanou Maclaurinovu řadu

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2^2\, 2!} x^4 + \frac{15}{2^3\, 3!} x^6 + \cdots + \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n\, n!} x^{2n} + \cdots ,$$

$|x| < 1$.

b) Derivace dané funkce je $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, což je součet geometrické řady s kvocientem $-x^2$, tj. platí

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \qquad \text{pro } |x| < 1.$$

Podle věty o integraci řady dostaneme pro $x \in (-1,\, 1)$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \cdots)\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Vyšetříme krajní body konvergenčního intervalu $x = \pm 1$:

Po dosazení dostaneme alternující číselné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$, které konvergují, a podle Abelovy věty tedy nalezený rozvoj platí pro $x \in \langle -1,\, 1 \rangle$.

c) Platí $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Víme, že

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,\, 1\rangle, \qquad \text{tedy}$$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in \langle -1,\, 1).$$

Proto

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots\right) =$$

$$= 2\,x + 2\,\frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^5}{5} + \cdots = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \qquad |x| < 1.$$

Příklad 5.52: Určete součet mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\,x^{2n}}{n!}$

Řešení: Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\,x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^{2n+1})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}\right)' = \left(x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\right)'.$$

Přitom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = e^{x^2},$$

tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\,x^{2n}}{n!} = (x\,e^{x^2})' = e^{x^2}(1+2x^2) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 5.53: Pomocí známých řad najděte Taylorovu řadu funkce $\frac{3}{x^2-x-2}$

a) se středem $x_0 = 0$,

b) se středem $x_0 = 3$.

Řešení: Danou funkci rozložíme na parciální zlomky, dostaneme

$$\frac{3}{x^2-x-2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

a každý zlomek budeme rozkládat zvlášť s využitím vztahu pro součet geometrické řady $\frac{1}{1-q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$:

a) rozklad má být v mocninách x:

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}, \qquad \text{pro } \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \text{ tj. } |x| < 2$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n, \qquad \text{pro } |x| < 1,$$

$$\frac{3}{x^2-x-2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right) x^n =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\,x - \frac{9}{8}\,x^2 + \frac{15}{16}\,x^3 - \frac{33}{32}\,x^4 + \frac{63}{64}\,x^5 - \cdots, \quad \text{pro } |x| < 1.$$

V krajních bodech konvergenčního intervalu řada diverguje – není splněna nutná podmínka konvergence.

b) rozklad má být v mocninách $x-3$:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3+3-2} = \frac{1}{1+(x-3)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(x-3)^n$$

pro $|x-3| < 1$, tj. $x \in (2,\,4)$,

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-3+3+1} = \frac{1}{4+x-3} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{x-3}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{4^n}\,(x-3)^n$$

pro $\left|\dfrac{x-3}{4}\right| < 1$, tj. $x \in (-1,\,7)$,

$$\frac{3}{x^2-x-2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(x-3)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{4^{n+1}}\,(x-3)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n+1}-1}{4^{n+1}}\,(x-3)^n = \frac{3}{4} - \frac{15}{16}\,x + \frac{63}{64}\,x^2 - \frac{255}{256}\,x^3 + \cdots$$

pro $x \in (2,\,4)$.

V krajních bodech konvergenčního intervalu řada diverguje – není splněna nutná podmínka konvergence.

Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli pojmy

- mocninná řada se středem x_0: řada tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$,
- obor konvergence mocninné řady: množina M, v jejímž každém bodě řada konverguje a současně pro každé $x \notin M$ diverguje,
- poloměr konvergence mocninné řady: číslo r, pro které platí:
  - pro $|x-x_0| < r$ řada konverguje absolutně,
  - pro $|x-x_0| > r$ řada diverguje,

přičemž r vypočítáme podle vzorce $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$;

je-li r poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, potom v intervalu (x_0-r, x_0+r) platí:

- součet řady je spojitá funkce,
- řadu můžeme derivovat a integrovat člen po členu.

Dále jsme vyšetřovali problém, jak k dané funkci najít řadu, jejímž je součtem; zavedli jsme pojem

- Taylorova řada funkce f: řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$;

Taylorova řada se středem $x_0 = 0$ se nazývá Maclaurinova řada.

Taylorovy (Maclaurinovy) řady některých elementárních funkcí

e^x	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,	$x \in \mathbb{R}$
$(1+x)^a$	$= 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$, (*)	$x \in (-1, 1)$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$	$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$,	$x \in (-1, 1\rangle$
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right)$	$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,	$x \in \langle -1, 1\rangle$

$$(*) \qquad a \in \mathbb{R}, \ \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

Otázky a úkoly

1. Co je to mocninná řada?

2. Předpokládejme, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konverguje pro $x = 9$ a diverguje pro $x = -12$. Které z následujících tvrzení o této řadě je pravdivé a proč:

   a) konverguje pro $x = 7$,
   b) absolutně konverguje pro $x = -7$,
   c) absolutně konverguje pro $x = 9$,
   d) konverguje pro $x = -9$,
   e) diverguje pro $x = 10$,
   f) diverguje pro $x = 15$.

3. Předpokládejme, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$ konverguje pro $x = -4$ a diverguje pro $x = 9$. Které z následujících tvrzení o této řadě je pravdivé a proč:

   a) konverguje pro $x = 5$,
   b) absolutně konverguje pro $x = 5$,
   c) konverguje pro $x = 8$,
   d) absolutně konverguje pro $x = -4$,
   e) diverguje pro $x = -7$,
   f) diverguje pro $x = 6$.

4. Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konverguje pro všechna kladná x, musí konvergovat i pro záporná x?

5. Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverguje pro $x = 3$, pro která další x musí divergovat?

6. Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x+5)^n$ diverguje pro $x = -2$, pro která další x musí divergovat?

7. Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-3)^n$ konverguje pro $x = 7$, pro která další x musí konvergovat?

8. Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence 3 a řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ má poloměr konvergence 5, co můžeme říci o poloměru konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$?

Cvičení

1. Najděte obor konvergence mocninných řad:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\,5^n\,x^n$,	b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$,	c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$,
d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 10^{2n}\,(2x-3)^n$,	e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!x^n}{n^n}$,	f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$,
g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$,	h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,3^n}$,	i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\,(x+1)^n$,
j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+4)^n}{n+2}$,	k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,(x-1)^n$,	l) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}\,(x+2)^n$.

2. Derivováním nebo integrováním vhodné řady najděte součty řad

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1)\,x^{2n}$,	b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}$,	c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n}$,
d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{2^n}$,	e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}\,x^{n-1}$,	f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$.

3. Vypočítejte následující integrály tak, že integrovanou funkci rozložíte do mocninné řady, a to s přesností na tři desetinná místa:

a) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$, b) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^{10}}$.

4. Pomocí operací s řadami pro známé funkce najděte Maclaurinovy rozvoje následujících funkcí:

a) $\dfrac{x}{2-x}$,	b) $(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$,	c) $\cos^2 x$,
d) $(1-x)^{-2}$,	e) $\sin 3x + x\,\cos 3x$,	f) $(1+x)\,\mathrm{arctg}\,x$.

Výsledky

1. a) $(-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$, b) $(-\infty,\infty)$, c) $\langle -9,-7\rangle$, d) $(\frac{299}{200},\frac{301}{200})$, e) $(-e,e)$, f) $(-1,1)$, g) $(-\infty,\infty)$, h) $\langle -2,4)$, i) $(-2,0)$, j) $(-5,-3\rangle$, k) $\{1\}$, l) $\langle -3,-1)$;

2. a) $\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}$, b) $\frac{1}{(1-x)^2}$, c) $-\frac{1}{2}\ln|1-9x-3)^2|$, d) $\frac{2}{(2-x)^2}$, e) $\frac{1}{(1-x)^3}$, f) $\frac{4x-2}{(3-2x0^2}$;

3) a) 0,747, b) 0,500;

4. a) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{32}x^5+\cdots$, b) $1-2*x+\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{24}x^4-\frac{1}{20}x^5+\frac{7}{720}x^6-\cdots$, c) $1-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6+\frac{1}{315}x^8-\cdots$, d) $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+\cdots$, e) $4x-9x^3+\frac{27}{5}x^5-\frac{81}{56}x^7+\frac{243}{1120}x^9+\cdots$, f) $x+x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{5}x^6-\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{7}x^8+\frac{1}{9}x^9-\cdots$.