Základy vysokoškolské matematiky pro beznadějné případy

TŘETÍ ROZŠÍŘENÉ VYDÁNÍ

Vladimír Mach

České vzdělávací projekty
www.vzdelavaci-projekty.cz

Brno 2004 - 2005

Obsah

ÚVOD

Toto v pořadí již třetí rozšířené vydání jsem připravil na základě neočekávaného pozitivního ohlasu původních dvou vydání a pod vlivem značné poptávky po dalších. První vydání těchto skript vzniklo za poněkud odlišných okolností, než za jakých byla napsána většina podobných publikací. Napsal jsem ho v době, kdy jsem studoval první ročník ESF, a to v návaznosti na poznatky, kterých jsem nabyl během hodin, v nichž jsem některé své kolegy z prvního ročníku doučoval matematiku k písemkám a závěrečné zkoušce.

Hlavním poznáním, kterého se mi během doučování kolegů dostalo, bylo zjištění, že ačkoliv mnoho studentů umí více či méně typů příkladů spočítat (někdy i rychle a přesně), většina z nich vůbec netuší, *co* vlastně počítá. Studenti si většinou pracně osvojí početní postupy při řešení matematických úloh, aniž by věděli, co výpočty vlastně představují, proč se počítají právě tím kterým postupem, či jakým způsobem je možné si spoustu vzorců, postupů či definic logickou a přirozenou cestou odvodit. Jinými slovy, většina studentů se učí nazpaměť vzorce a postupy, aniž by jim *rozuměla*. Kdekdo je pak kupříkladu schopen vypočítat derivaci funkce, aniž by jen náznakem tušil, co vlastně derivace funkce vyjadřuje. Takový způsob studia je zvláště u matematiky krajně nevhodný. Snesitelný (a občas i nevyhnutelný) je snad u některých humanitních oborů (např. historie), avšak u exaktních věd je v konečných důsledcích jednoznačně kontraproduktivní, neboť „znalosti" osvojené cestou bezmyšlenkového memorování nebude student nikdy schopen použít v budoucím životě k řešení praktických problémů.

To je důvod, proč vznikla tato skripta. Jejich účelem je názorně, šetrně a kamarádsky ukázat čtenáři, co jednotlivé pojmy, vzorce a postupy v matematice přestavují a jak se dají přirozeně a nenásilně odvodit. Skripta jsem se snažil napsat tak, aby se dala přečíst takříkajíc „jedním dechem". Základní prioritou je jejich srozumitelnost. Při vysvětlování a odvozování matematických jevů jsem proto nepoužíval přesný, korektní a chladný jazyk matematických definic, nýbrž jazyk prostý, lidský.

Taková koncepce skript však zákonitě přináší i své nevýhody. Hlavní z nich je skutečnost, že používání onoho „prostého, lidského" jazyka je oproti kodifikovanému jazyku matematických definic dosti nedokonalé. Jinými slovy, názornosti je dosaženo na úkor přesnosti vyjadřování. Jednoduchost vysvětlování je vykoupena daní v podobě újmy na exaktnosti. Jelikož se však tento postup ukázal být pro studenty podstatně přijatelnější, přínosnější a efektivnější než šroubovaný jazyk vědeckých definic, rozhodl jsem se i další vydání realizovat ve stejném duchu.

Závěrem bych se jako autor rád pokusil čtenáře trochu povzbudit. Ani moje vlastní cesta k půvabům matematiky nebyla tradiční – profesně jsem totiž lingvista a nikoliv matematik. Matematiku se mi dařilo celý život ignorovat a vyhýbat se jí. Než jsem zahájil studium ESF, absolvoval jsem Filosofickou fakultu, kde se matematika vůbec nevyučovala, a poté jsem začal podnikat v oblasti jazykových vzdělávacích projektů. Ještě rok a půl před vznikem těchto skript jsem bez nadsázky neuměl ani sčítat zlomky. K matematice mě přivedla až touha vystudovat ještě jednu fakultu, tentokrát ekonomického zaměření. Pustil jsem se tedy do práce a začal jsem téměř od nuly. Nakonec jsem si osobní zkušeností ověřil, že i při plném podnikatelském nasazení je možné naučit se matematiku během půl roku tak, že z ní člověk úspěšně vykoná přijímací zkoušku na VŠ, a během dalších několika měsíců tak, že se solidním výsledkem absolvuje zkoušku na akademické půdě. Proto chci čtenáře ujistit, že při správném pochopení matematických jevů není matematika tak náročná, jak se může mnohým zdát.

Přeji proto čtenáři nejen úspěšné zvládnutí zkoušky z matematiky, nýbrž především to, aby i jeho cesta vedla k odkrytí půvabů této překrásné a vznešené vědy.

Autor

Poděkování

Není možné vyjmenovat všechny osobnosti, vědce, znalce a kamarády, kteří mi dopomohli k napsání těchto skript. Za všechny bych alespoň tímto rád poděkoval především **Mgr. Petru Vodstrčilovi**, špičkovému matematickému expertovi, geniálnímu vědci a vynikajícímu učiteli, jehož trpělivým konzultacím a vysoce profesionální asistenci vděčím za většinu svých znalostí matematiky.

Autor prosí čtenáře, aby mu sdělili své zkušenosti s těmito skripty na e-mailovou adresu mach@vzdelavaci-projekty.cz za účelem případných dalších vylepšení a modifikací. Za vyjádření předem děkuje.

1. FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

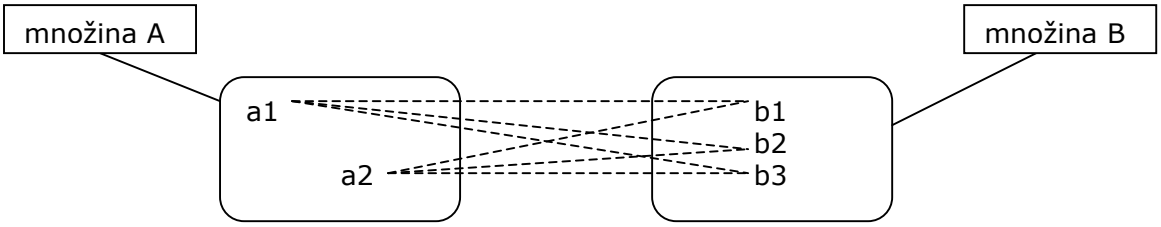
Téměř celý rozsah předmětu Matematika II. v prvním ročníku ekonomických fakult pojednává o velmi krásné a zajímavé látce – o funkcích a zkoumání jejich vlastností. Ačkoliv jsou základní pojmy o funkcích plnohodnotnou součástí osnov matematiky na většině středních škol, nebývá výjimkou, že studenti neměli dosud příležitost pochopit některé vlastnosti funkcí tak, aby je zpětně dokázali jednoduše a logicky vysvětlit a případně si z těchto poznatků dokázali sami snadno a přirozeně odvodit poznatky nové. Abychom takové mezery našli a „opatřili záplatami", projděme si nyní pozorně následující kapitoly.

Zkusme začít tím, že si položíme otázku, co to vlastně funkce je. Moje osobní zkušenost je taková, že většina studentů ekonomicky zaměřených fakult si pod pojmem funkce představuje jakýsi „vzorec obsahující proměnnou x, za kterou když dosadíme nějaké vstupní číslo, vyjde nám nějaké výsledné výstupní číslo y." Jinými slovy, funkce je často považována za jakýsi algoritmus výpočtu, do něhož „něco vložíme" a poté nám z něho „něco vyleze". Ačkoliv toto poněkud kostrbaté vysvětlení není svým významem chybné, je značně nepřesné. Jednak se omezuje na takzvané funkce jedné reálné proměnné (existují ovšem i funkce více reálných proměnných), jednak funkce nemusí být nutně dána matematickým výrazem, nýbrž i jinými prostředky (např. grafem nebo slovním popisem). V těchto skriptech si vysvětlíme definici funkcí jedné reálné proměnné. K funkcím více reálných proměnných postoupíme v případném druhém díle.

1.1 Pojmy „dvojice“ a „uspořádaná dvojice“

V matematice se s dvojicemi (a zvláště s uspořádanými dvojicemi) setkáváme možná mnohem častěji, než si sami uvědomujeme. Pojďme si tyto pojmy nyní osvěžit na množinách, znázorněných pomocí tzv. Vennových[1] diagramů:

Na výše uvedeném obrázku máme dvě množiny – množinu A a množinu B. Množina A nechť má dva prvky a_1 a a_2, množina B třeba tři prvky b_1, b_2 a b_3. Pokud jakýkoliv prvek jedné množiny zapíšeme spolu s jakýmkoliv prvkem množiny druhé, půjde o zápis takzvané **dvojice** prvků $\{a;b\}$. Proto můžeme říci, že dvojicí prvků je například $\{a_1;b_1\}$ či $\{a_2;b_2\}$, ale také $\{a_1;b_2\}$, $\{a_1;b_3\}$, $\{a_2;b_1\}$ či $\{a_2;b_3\}$. Navíc je lhostejné, zda napíšeme nap. $\{a_1;b_1\}$ nebo $\{b_1;a_1\}$, protože v obou případech jde o tutéž dvojici prvků – nezáleží na pořadí (pokud nezáleží na pořadí, vypisujeme prvky dvojic do složených závorek), **proto platí rovnost** $\{a;b\}=\{b;a\}$. To vše je znázorněno na obrázku níže:



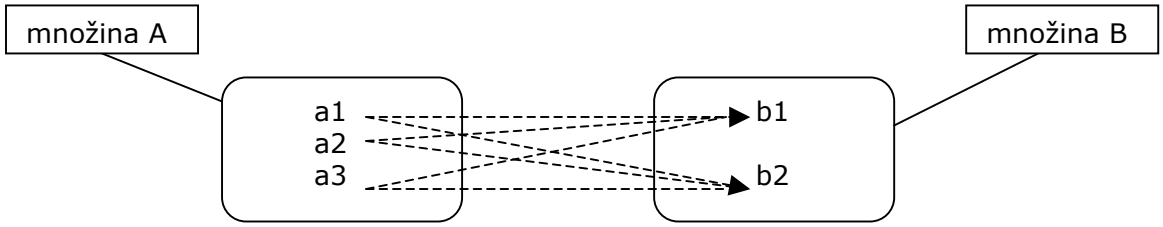
[1] John Venn, 1834-1923, anglický matematik a logik. Právě podle něho se jmenují množinové diagramy, používané ve školské matematice.

Představme si nyní na situaci, kdy nebude záležet jen na tom, který prvek množiny jedné je s kterým prvkem množiny druhé ve dvojici, nýbrž bude také záležet na pořadí, v jakém jsou prvky uvnitř kterékoliv z dvojicí uspořádány (pokud záleží na pořadí prvků uvnitř dvojice, zapisujeme prvky do hranatých závorek). Jistě teď už čtenáře napadne, že tím pádem například dvojice $[a_1;b_1]$ nebude totožná s dvojicí $[b_1;a_1]$, neboť pořadí prvků – byť shodných – je v těchto dvojicích rozdílné. **Pokud ve dvojicích prvků záleží na pořadí**, používáme pro ně pojem **uspořádané dvojice.** Soubor dvojic prvků, v nichž záleží na pořadí, tedy nazýváme **množina uspořádaných dvojic.**

Projděme si tedy pro úplnost následující příklad:

Mějme tříprvkovou množinu $A=\{a_1;a_2;a_3\}$ a dvouprvkovou množinu $B=\{b_1;b_2\}$. Našim úkolem je napsat kompletní množinu všech uspořádaných dvojic $[a;b]$.

Řešení: Protože zadání požaduje vyjmenovat **uspořádané** dvojice, je nasnadě, že **záleží na pořadí prvků**. Proto se podíváme, v jakém pořadí jsou po nás prvky v zadání požadovány. Pořadí dané zadáním je $[a;b]$, nikoliv $[b;a]$. Proto bude v pořadí prvků uvnitř jednotlivých uspořádaných dvojic vždy na prvním místě prvek množiny A a na druhém místě prvek množiny B, nikdy naopak! Řešením jsou tedy uspořádané dvojice $[a_1;b_1]$, $[a_1;b_2]$, $[a_2;b_1]$, $[a_2;b_2]$, $[a_3;b_1]$, $[a_3;b_2]$. Pro dobrou představu je níže celý stav zakreslen (šipky naznačují, že záleží na pořadí prvků uvnitř uspořádaných dvojic):

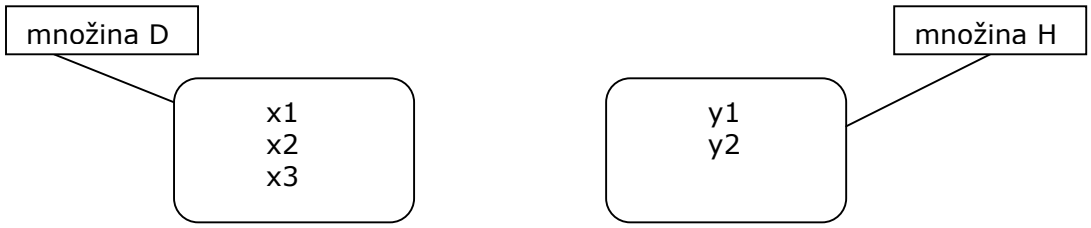


Kdyby se po nás v zadání požadovalo, abychom vyjmenovali kompletní množinu **všech** uspořádaných dvojic (nikoliv jen v pořadí $[a;b]$), museli bychom přidat ještě dvojice $[b_1;a_1]$, $[b_1;a_2]$, $[b_1;a_3]$, $[b_2;a_1]$, $[b_2;a_2]$, $[b_2;a_3]$.

1.2 Pojem „funkce" a jeho význam

V minulé podkapitole jsme si vymezili pojem **množina uspořádaných dvojic**. Nyní si na tomto základě vysvětlíme pravý význam pojmu „funkce", či přesněji řečeno pojmu „funkce jedné reálné proměnné".

Zakresleme si dvě množiny, z nichž jedna se bude jmenovat D (neboli definiční obor) a druhá se bude jmenovat H (neboli obor hodnot). Množina D bude obsahovat prvky x a množina H bude obsahovat prvky y:



Určit množinu všech uspořádaných dvojic $[x;y]$ je prosté. Pro úplnost si ji tedy vypišme: $[x_1;y_1]$, $[x_1;y_2]$, $[x_2;y_1]$, $[x_2;y_2]$, $[x_3;y_1]$, $[x_3;y_2]$.

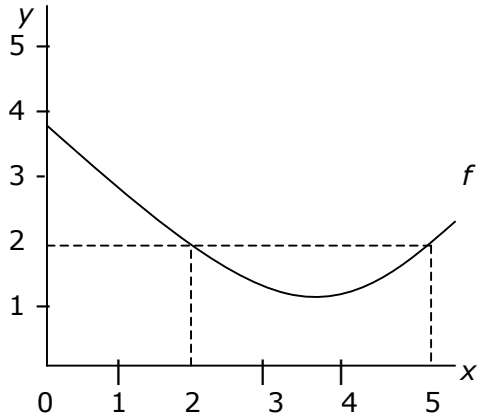
Představme si však nyní, že si před vypsáním množiny uspořádaných dvojic $[x;y]$ zavedeme **důležitou vstupní podmínku**, a sice že **každému x z množiny D může být odteďka přiřazeno jen jedno y z množiny H**. Jinými slovy, zatímco v úplném seznamu uspořádaných dvojic je možné, aby se jedno x vyskytovalo ve více dvojicích, pokaždé s jiným y, tentokrát to možné nebude. Obrazně můžeme říci, že v okamžiku, kdy nějakému x přiřadíme nějaké y, považujeme toto x již za „uspokojené" a další y mu již v jiné dvojici přiřazovat nebudeme. To však nebude platit opačně – i nadále bude možné, aby několika různým x bylo přiřazeno jedno a totéž y. Raději si několik takových možností vypišme: Pokud vytvoříme uspořádanou dvojici $[x_1;y_1]$, pak již nebude možné, abychom vytvořili uspořádanou dvojici $[x_1;y_2]$, neboť podle vstupní podmínky smí být jednomu x přiřazeno pouze jedno y. Bude ovšem bez problému možné, abychom vytvořili dvojici $[x_1;y_1]$ a zároveň také dvojici $[x_2;y_1]$, neboť nikde není zakázáno, aby totéž y bylo přiřazeno více x.

Pokud se čtenáři zdá toto vysvětlení stále složité, mohu nabídnout jisté přirovnání a budu přitom předpokládat, že čtenář omluví jeho poněkud sociologický charakter. Představme si islámskou kulturu. Pokud budeme považovat ženy za prvky x a muže za prvky y, pak ke každému x může být přiřazeno nejvýše jedno y, neboť každá žena smí být provdána pouze za jednoho muže. Jednomu y však může být přiřazeno více x, neboť jeden muž může vstoupit do manželského svazku s více ženami.

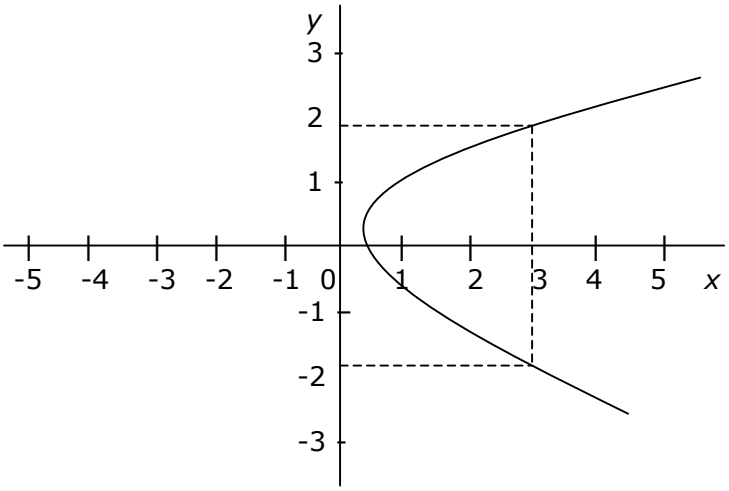
Pokud je nám výše uvedený vztah prvků nyní již jasný, můžeme na tomto místě prohlásit, že **množina uspořádaných dvojic $[x \in D; y \in H]$, pro které platí, že jednomu x může být přiřazeno jen jedno y, se nazývá funkce jedné reálné proměnné x**. Přidáme-li naše úsměvné přirovnání, pak můžeme říct, že množina všech manželských dvojic žena-muž, kde žena je příslušnicí islámské kultury (definiční obor) a muž je ženatý s takovou ženou (obor hodnot), jsou funkcí, neboť platí, že každé ženě smí být přiřazen jen jeden muž, zatímco rozhodně není na závadu, když jednomu muži náleží více žen.

Definice: Funkce jedné reálné proměnné x je množina všech uspořádaných dvojic $[x;y]$ takových, že ke každému x z definičního oboru existuje právě jedno y z oboru hodnot.

Protože se v naší oblasti matematiky počítá s předpokladem, že prvky množiny D i množiny H jsou čísla, je vlastně zbytečné, abychom si je zakreslovali do oválných Vennových diagramů, neboť mnohem přehlednější je znázorňovat je **na číselné osy** (číselná osa je vlastně tradiční způsob znázorňování množiny čísel). Proto na jednu osu – ze zvyku na osu x – znázorňujeme množinu D neboli definiční obor, a na druhou osu – ze zvyku na osu y – znázorňujeme množinu H neboli obor hodnot. Pro dobrou přehlednost tyto osy zakreslujeme tak, že spolu svírají pravý úhel – osa x se znázorňuje horizontálou a osa y vertikálou. Pokud někam do roviny těchto os zakreslíme bod, jehož x-ová souřadnice bude prvkem množiny D a y-ová souřadnice prvkem množiny H, **je tento bod vlastně znázorněním konkrétní uspořádané dvojice** x **a** y**, neboli je znázorněným prvkem funkce**. A protože funkce je (jak již víme) množinou všech uspořádaných dvojic x a y a bod je prvkem této množiny, znázorníme celou množinu uspořádaných dvojic neboli danou funkci **množinou bodů, kterou nazýváme graf funkce**. Pravoúhlá soustava os x a y, která nám k zakreslování grafu poslouží, se nazývá **kartézská soustava souřadnic**[2]:



Křivka f ve výše načrtnuté kartézské soustavě souřadnic **je** grafem funkce, neboť každému x je přiřazeno právě jedno y. Skutečnost, že jedno y (např. číslo 2) je přiřazeno dvěma různým x (číslům 2 a 5), není na závadu. Oproti tomu křivka v kartézské soustavě souřadnic načrtnutá níže grafem funkce **není**, neboť jednomu x je přiřazeno více y (například číslu $x=3$ odpovídá jednak číslo $y=2$, jednak $y=-2$).



[2] Kartézská soustava souřadnic je pojmenována podle francouzského matematika a filosofa, který se jmenoval René Descartes (1596-1650). Byl všestranně nadaným vědcem, který svou prací přinesl řadu objevů v kosmologii, mechanice a fyziologii. Na jeho racionalismus přímo navázalo osvícenství. V matematice zavedl pojem proměnné veličiny, funkce, zmíněnou soustavu souřadnic a založil analytickou geometrii.

Závěrem by mohlo být užitečné naučit se ještě jeden pojem, a sice „zobrazení". Říkáme, že body na ose y, které jsou prvkem oboru hodnot dané funkce, jsou **zobrazením** bodů na ose x, které jsou prvky definičního oboru dané funkce. Jinými slovy, u funkce $f(x)=3x$ říkáme, že bod 4 na ose x **se zobrazí** jako bod 12 na ose y. Ještě jedna obměna: číslo 12 je **obrazem** čísla 4 ve funkci $f(x)=3x$.

Shrnutí: Funkce je **množinou uspořádaných dvojic** x **a** y, kde každému x, které je prvkem **definičního oboru**, je přiřazeno právě jedno y, které je prvkem **oboru hodnot**. Funkce se nejčastěji zapisuje **matematickou formulí** a znázorňuje se grafem do **kartézské soustavy souřadnic**. Každý bod náležící do grafu funkce představuje jednu uspořádanou dvojici x a y. Dosadíme-li za x konkrétní číslo, číselná hodnota celého výrazu po tomto dosazení je hodnotou y; říkáme, že **funkční hodnota** dané funkce v konkrétním bodě x je y. Rovněž říkáme, že bod y je **obrazem** bodu x.

1.3 Definiční obor funkce a obor hodnot funkce

V předchozí kapitole jsem se zmínil, že funkce je množinou uspořádaných dvojic $[x;y]$, kdy ke každému x přiřazujeme právě jedno y, přičemž x jsou **prvky definičního oboru** a y jsou **prvky oboru hodnot**. Z toho tedy vyplývá, že abychom definovali určitou konkrétní funkci, musíme definovat všechna její x a všechna jim přiřazená y. Exaktně řečeno, k úplnému definování konkrétní funkce musíme určit její:

1) **definiční obor D**, což je množina prvků x. Jde tedy o množinu všech x, jimž budou daným **vztahem** přiřazena odpovídající y. Tato množina se stanovuje konkrétním výčtem jejích prvků či intervalů z prvků tvořených. Můžeme například uvést, že $D = R - \{3\}$, tedy že definiční obor obsahuje všechna reálná čísla vyjma čísla 3.

2) **obor hodnot H**, což je množina prvků y, z nichž každé bude přiřazeno některému prvku x. Jde tedy o množinu všech y, která budou určitým daným **vztahem** přiřazena odpovídající y. **Na rozdíl od definičního oboru však nemůže být obor hodnot dán pouhým výčtem jeho prvků či intervalů z prvků složených, neboť z takového výpisu by nebylo jasné, kterému x je přiřazeno které y.** Kdybychom např. napsali, že $D = \{1;2\}$ (neboli že definiční obor obsahuje dva prvky – číslo 1 a číslo 2) a že $H = \{4;5\}$ (neboli že obor hodnot je tvořen dvěma prvky – číslem 4 a číslem 5), nebylo by z tohoto zápisů zřejmé, zda daná funkce je množinou uspořádaných dvojic $[1;4]$ a $[2;5]$, či zda je množinou uspořádaných dvojic $[1;5]$ a $[2;4]$. Funkce by tak vlastně nebyla definována úplně. Proto je nutno definovat obor hodnot H tím, že určíme matematický vztah, podle něhož je každému prvku x přiřazen prvek y. Tento vztah je zvykem zapisovat především matematickým vzorečkem. Pokud například zapíšeme: $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, pak jde o zápis takové funkce, kde každému x z definičního oboru je přiřazeno právě jedno y z oboru hodnot, které se rovná rozdílu druhé mocniny daného x a čísla 9, podělenému rozdílem daného x a čísla 3. Zápisem ve formě matematického vzorečku je obor hodnot dokonale vymezen a zároveň je možno ke každému x ihned přiřadit jemu odpovídající y, a to výpočtem daného vzorečku. Tím vlastně vymezíme danou uspořádanou dvojici. **Na tomto vysvětlení je již také vidět, proč musí platit podmínka, že jednomu x nemůže být přiřazeno více než jedno y: nikdy se totiž nemůže stát, že při dosazení jakéhokoliv čísla za x nám po výpočtu vyjde více hodnot než jedna.**

Důležité je, že zápis vzorečkem můžeme provést dvojím způsobem. Každý z těchto způsobů předvedu na příkladu výše uvedené funkce. Můžeme psát buďto:

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3},$$

nebo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Výraz $f(x)$ použitý ve druhém z výše uvedených způsobů v tomto případě čteme jako „funkční hodnota pro číslo x". **Jednotlivá y (neboli prvky oboru hodnot) jsou totiž takzvanými funkčními hodnotami funkce f pro daná x.** Oba zápisy si dobře zapamatujte.

Ukažme si nyní standardní způsob uceleného zápisu definované funkce tak, aby byly náležitě definovány obě nutné složky – definiční obor i obor hodnot. Forma zápisu aplikovaná na příkladu výše uvedené funkce je:

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \mid x \in \{1,2\}$$

Svislá čárka | mezi matematickým vztahem $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ a vymezením definičního oboru $x \in \{1,2\}$ se obvykle čte jako „kde" nebo „pro".[3] Výraz za ní vymezuje specifickou podmínku pro výraz uvedený před ní.
Zápis naší funkce bude samozřejmě zcela v pořádku, i pokud místo y napíšeme $f(x)$, tedy:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \mid x \in \{1;2\}$$

[3] Odborně, zvláště je-li použita ve výpočetní technice a v programování, se svislá čárka nazývá „roura" či „trubka", anglicky "pipe". Nesmírně cenného uplatnění se jí dostává například při práci s operačními systémy typu UNIX.

POZOR! Velmi častou chybou bývá mylná domněnka, že funkce může být zadána, aniž by byl zároveň zadán její definiční obor, přičemž stanovení definičního oboru zadané funkce je úkolem pro samotného řešitele úlohy. Jinými slovy, mnozí si mylně představují, že může být zadán pouze matematický vztah mezi y a x konkrétní funkce, přičemž definiční obor vyplývá z povahy daného vztahu. Tato představa je ovšem nesprávná! **Jak je již výše uvedeno, má-li být dána konkrétní funkce, musí být jednoznačně dán i její definiční obor. Definiční obor se nehledá, definiční obor musí být vymezen již v samotném zadání** konkrétní funkce. Předmětem úlohy nemůže být hledání definičního oboru, nýbrž nanejvýš hledání **největší podmnožiny reálných čísel, na které lze definovat funkci zadanou vzorečkem**. Jak příklad uvedu funkci $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$. Z daného zápisu této funkce vyplývá, že funkci nelze definovat pro číslo 3, neboť dosazením trojky za x by vznikla ve jmenovateli nula, což je nepřípustné. Proto můžeme říci, že **největší podmnožinou reálných čísel, na níž lze definovat funkci zadanou vzorečkem**, jsou všechna reálná čísla vyjma čísla 3. Tato podmnožina však v žádném případě nemusí být shodná s definičním oborem; v naší funkci je kupříkladu dáno, že definiční obor obsahuje pouze dva prvky – číslo 1 a číslo 2.

Uveďme si jiný příklad. Je dána funkce:

$$f(x)=\frac{1}{x}\mid x\in\langle\pi;\infty)$$

V tomto případě je definiční obor roven uzavřenému intervalu od π do ∞. Pro ostatní čísla mimo tento interval funkce definována není, ačkoliv největší podmnožinou reálných čísel, na které lze definovat funkci zadanou vzorečkem $f(x)=\frac{1}{x}$, je $R-\{0\}$ neboli všechna reálná čísla kromě nuly.

Závěrem ještě jedna poznámka. Způsob, jak u konkrétní funkce definovat vztah mezi prvky x a y, se neomezuje jen na zadání matematickým vzorečkem. Kromě zápisu vzorečkem připadá v úvahu i několik alternativních metod:

1) **Výčtem prvků** – tedy jednoduše vypíšeme seznam všech uspořádaných dvojic, které daná funkce obsahuje. Tato metoda však nemusí vždy být (a většinou není) možná, neboť definiční obor funkce obsahuje často nekonečné množství prvků a tudíž i funkce je množinou nekonečného množství uspořádaných dvojic.
2) **Verbálním popisem vztahů mezi prvky x a y** – tedy prostě slovy popíšeme, v jakém vzájemném vztahu jsou prvky definičního oboru D a oboru hodnot H. Můžeme např. popsat funkci větou: Každému x z oboru reálných čísel přiřazujeme jedno y, které je rovno jeho dvojnásobku.
3) **Znázorněním funkce do kartézské soustavy souřadnic** – funkci znázorníme do grafu tak, aby z něj bylo zřejmé, jaké má daná funkce vlastnosti.

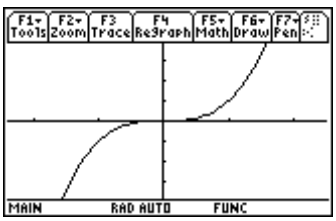
1.4 Některé základní typy a vlastnosti funkcí

Účelem této podkapitoly je zopakovat či vysvětlit některé důležité pojmy, charakterizující typy a vlastnosti funkcí. Nyní se budeme soustředit převážně na takové pojmy, které budou potřebné pro dobré pochopení látky vyložené v dalších kapitolách těchto skript. Jako hlavní nástroj vysvětlování jednotlivých pojmů bude použito grafické znázornění, neboť umožňuje snadnou představu o podstatě dané problematiky.

Funkce liché a sudé

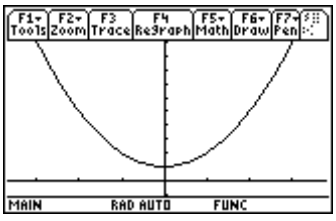
Lichost a sudost jsou vlastnosti vždy posuzované u funkce jako celku.

Funkce je **lichá** tehdy, když pro každé x z definičního oboru platí, že funkční hodnota opačného x je rovna opačné funkční hodnotě pro x. Jinými slovy, funkční hodnotou liché funkce pro x vynásobené mínus jedničkou odpovídá funkční hodnotě pro x vynásobená mínus jedničkou. Snadno srozumitelný je obecný matematický zápis podmínky platné pro lichou funkci: $f(-x) = -f(x)$. Graf liché funkce je souměrný podle počátku (pro lepší přesnost jsem předkládám graf vytvořený kapesní matematickou laboratoří TI-89).



Graf liché funkce. V tomto případě jde o funkci $f(x) = x^3$.

Funkce je **sudá** tehdy, když pro každé x z definičního oboru platí, že funkční hodnota opačného x je rovna funkční hodnotě pro x. Jinými slovy, funkční hodnotou sudé funkce pro x vynásobené mínus jedničkou odpovídá funkční hodnotě pro x. Snadno srozumitelný je obecný matematický zápis podmínky platné pro sudou funkci: $f(-x) = f(x)$. Graf sudé funkce je souměrný podle osy y.



Graf sudé funkce. V tomto případě jde o funkci $f(x) = x^2 + 1$.

Sudé či liché mohou být jsou jen některé funkce; mnohé funkce samozřejmě nejsou ani liché, ani sudé.

Funkce afinní

Afinní funkce jedné reálné proměnné je taková funkce, jejímž grafem je přímka. Má obecný tvar $f(x) = a.x + b$, kde a a b jsou reálná čísla. (V následující kapitole se dozvíme, že koeficient a se nazývá směrnice a vyjadřuje naklonění této přímky.)

Funkce lineární

Lineární funkce je takovým speciálním případem afinní funkce, která v kartézské soustavě souřadnic prochází počátkem (neboli bodem $[0;0]$). Má obecný tvar $f(x) = a.x$, kde a je reálné číslo. (Samozřejmě, že i zde se koeficient a nazývá směrnice a vyjadřuje naklonění této přímky.)

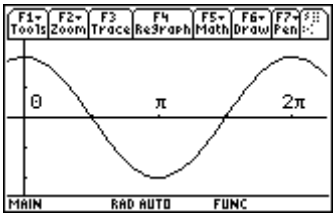
Funkce rostoucí a klesající

Zda je funkce rostoucí nebo zda je funkce klesající se posuzuje **vždy na konkrétní podmnožině definičního oboru**, neboli na množině čísel x_r až x_s. Říkáme také, že daná funkce je rostoucí či klesající v určitém intervalu.

Význam pojmů „rostoucí" či „klesající" si většina studentů dovede představit i bez matematické definice. Raději se však přesto naučte vysvětlit tyto pojmy matematicky korektní formulací.

Funkce je **rostoucí** na množině M právě tehdy, když pro každé dva prvky x_1 a x_2 z množiny M platí, že je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce je **klesající** na množině M právě tehdy, když pro každé dva prvky x_1 a x_2 z množiny M platí, že je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

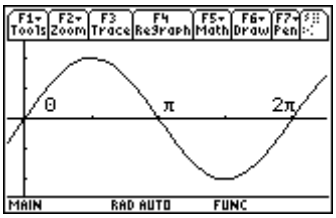


Graf funkce $f(x) = \cos(x)$. Na množině $M = \langle 0;\pi \rangle$ je tato funkce klesající, na množině $M = \langle \pi;2\pi \rangle$ je rostoucí.

Funkce konvexní a konkávní

Zda je funkce konvexní či konkávní se obvykle posuzuje na podmnožině definičního oboru, která odpovídá konkrétnímu intervalu.

Tyto vlastnosti opět nejsnáze pochopíme z grafu. **Konvexní** je funkce v tom intervalu, kde je její křivka tvaru $\cup$ (jakoby „promáčknutá dolů"), **konkávní** je v tom intervalu, kde je její křivka tvaru $\cap$ („vyboulená nahoru"). Body, v nichž dochází ke zvratu průběhu konkávního v konvexní či naopak, se nazývají **inflexní body**. Tyto vlastnosti mají pochopitelně jen některé funkce.

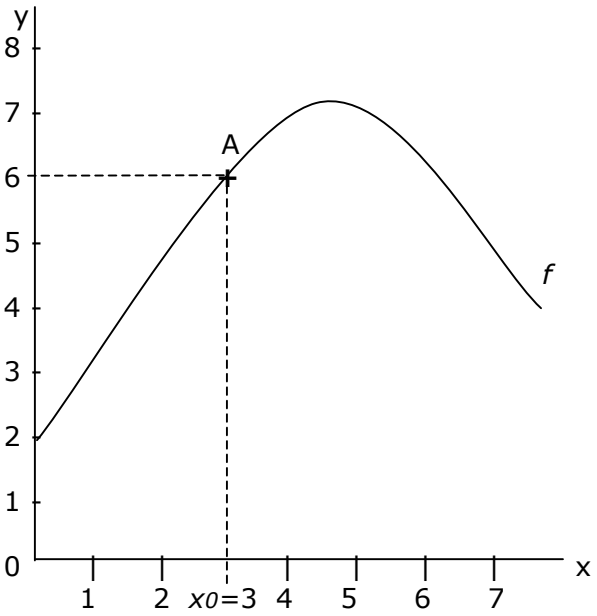


Graf funkce $f(x) = \sin(x)$. V intervalu $\langle 0;\pi \rangle$ je tato funkce konkávní, v intervalu $\langle \pi;2\pi \rangle$ je konvexní. Body $x = 0$, $x = \pi$ a $x = 2\pi$ se nazývají inflexní body.

Spojitost funkce

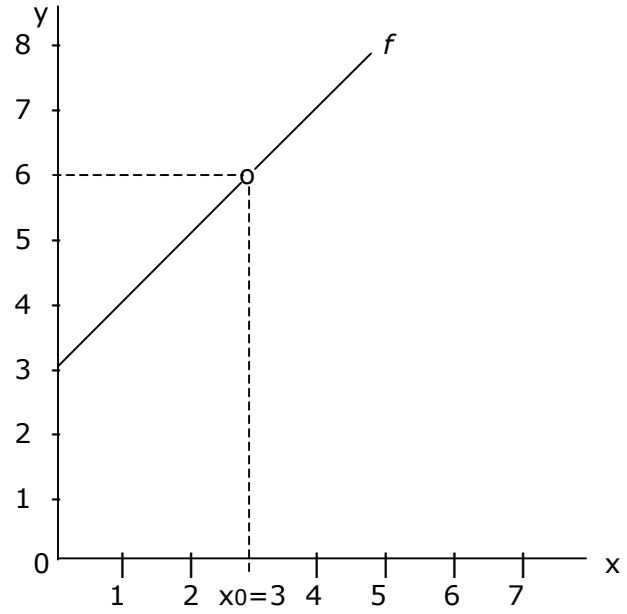
Pojem spojitosti funkce je nesmírně důležitý, neboť v dalším výkladu uvnitř těchto skript bude použit k vyjasnění velmi závažné látky.

Spojitost funkce je vlastnost, kterou budeme posuzovat v konkrétním bodě o souřadnici x_0. Podívejme se na níže zobrazený graf:

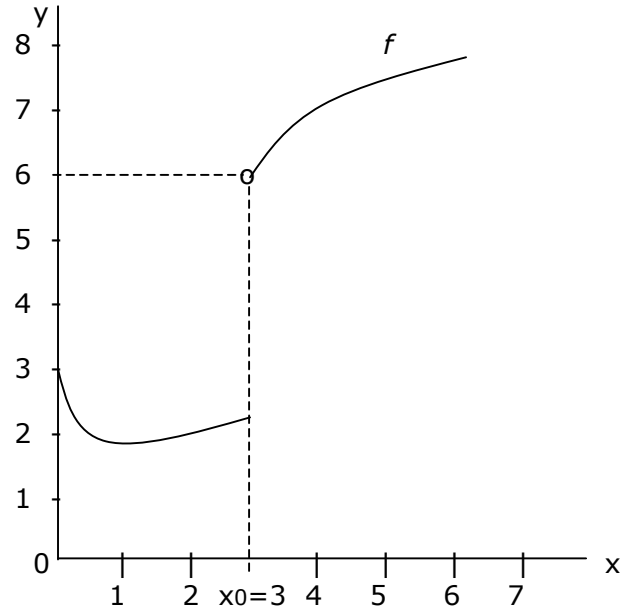


Dejme tomu že budeme chtít popsat spojitost výše načrtnuté funkci v bodě $x_0 = 3$. Výše zobrazená funkce f je definována v bodě x_0 i v bodech v jeho okolí. Funkční hodnotou pro $x_0 = 3$ je číslo 6, takže jedním z prvků funkce je uspořádaná dvojice $[3;6]$. Tato uspořádaná dvojice je v grafu zobrazena bodem označeným A. Z grafu je patrné, že bod $A\,[3;6]$ náleží do průběhu funkce zcela „plynule", aniž by se z celého grafu funkce nějak vyjímal. Jinými slovy, křivka, která je grafem funkce f, není v bodě A nijak přerušena ani „přetržena", její průběh je hladký a beze změn. Proto říkáme, že **funkce f je v bodě x_0 spojitá**. Raději použiji ještě jednoho přirovnání: Kdybychom znázornili křivku funkce f pomocí provázku, který bychom jednou rukou uchopili v levém okolí bodu o souřadnici x_0 a druhou rukou v pravém okolí bodu o souřadnici x_0 a za provázek jsme z obou stran zatáhli tak, aby se jemně napnul, zůstal by povázek celý (nerozdělil by se na dva kousky). Pokud tedy provázek není v bodě A přetržený, je v tomto bodě spojitý.

Abychom si ukázali také některé nespojité funkce, pohlédněme na následující grafy:



← Tato funkce je definována pro všechna reálná čísla s výjimkou čísla 3. Jinými slovy, pro číslo 3 tato funkce nemá funkční hodnotu. Proto v jejím grafu chybí bod, který má na ose x souřadnici 3. Chybějící bod v grafech funkcí je zvykem znázorňovat **prázdným kroužkem** tak, jak je vidět na tomto obrázku.
Říkáme, že v bodě $x_0=3$ daná funkce **není spojitá**.



← Tato funkce je již na první pohled „přetržená" v bodě o x-ové souřadnici 3. Říkáme, že v bodě $x_0=3$ daná funkce **není spojitá**.

2. SMĚRNICE PŘÍMKY

2.1 Význam pojmu „směrnice přímky"

Když jsem doučoval na konci prvního ročníku ESF své kolegy z ročníku matematiku, vyšlo najevo, že relativně mnoho studentů nemělo o významu pojmu „směrnice" konkrétní představu. Když jsem se jich zeptal, co si pod pojmem „směrnice" představují, mnozí mi odpověděli, že „asi nějakou přímku", „nějaký vektor" či dokonce „nějakou šipku". Rozhodně nechci čtenáře těchto skript podceňovat, avšak pociťujete-li náhodou pochybnost o významu tohoto pojmu, pak ji po přečtení této kapitoly již snad cítit nebudete.

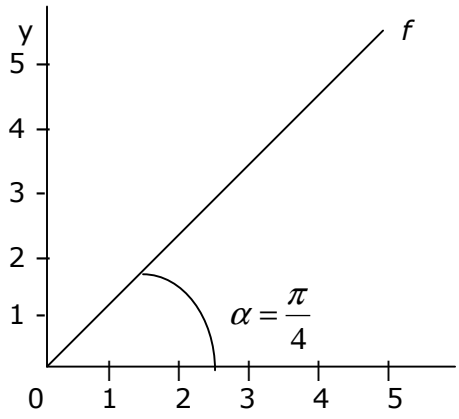
Úvodem bych čtenáře rád ujistil, že směrnice není ani přímka, ani vektor, ani šipka.

Směrnice je číslo.

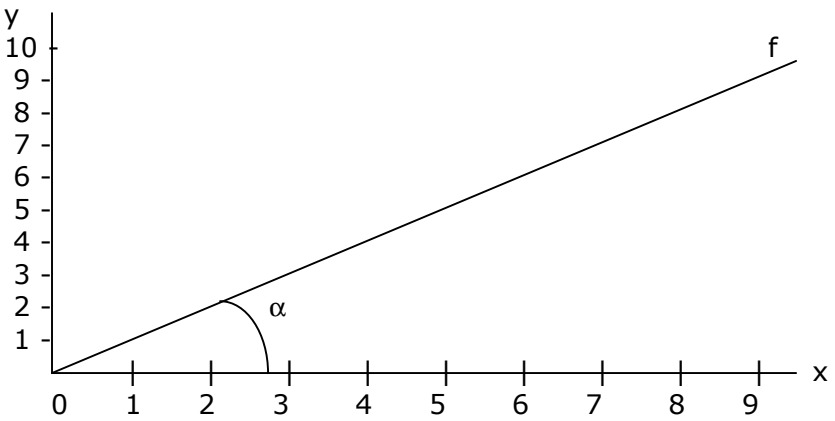
K pochopení toho, jaké číslo a co toto číslo vyjadřuje, nám poslouží právě tato kapitola.

Podíváme-li se na jakoukoliv přímku v kartézské soustavě souřadnic, první její vlastnost, které si pravděpodobně vždy všimneme, je její **naklonění**, tedy vlastnost, která souvisí s její strmostí. Pokusme se nyní zamyslet nad tím, **jakými nástroji můžeme naklonění přímky vyjádřit**.

Základním nástrojem, který je jistě každému z nás již od základní školy znám, je **úhel**. Na následujícím obrázku je pro ilustraci zobrazena přímka f, která je grafem jednoduché funkce $y = x$ a jejíž naklonění je dáno pomocí **úhlu** $\alpha = \frac{\pi}{4}$ neboli $\alpha = 45°$. Úhel lze samozřejmě měřit úhloměrem:

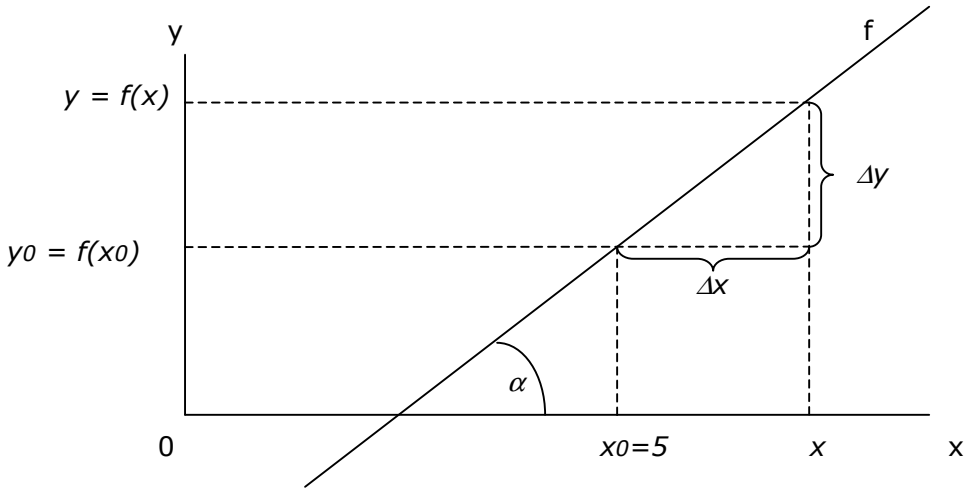


Možná nás na první pohled napadne, že rovnost mezi prvky definičního oboru na ose x a prvky oboru hodnot na ose y u této konkrétní funkce je vystižena právě odpovídajícím úhlem 45°. Mohlo by však být rizikové neuvědomit si, jak zkreslené výsledky by mohla způsobit skutečnost, že bychom definovali naklonění přímky vždy pouze pomocí úhlu. Ne vždy nám totiž musí vyhovovat takové znázornění grafu, kdy jsou osy x a y kalibrovány shodně. Následující graf znázorňuje pohled na tutéž funkci, avšak za předpokladu, že osy x a y jsou kalibrovány rozdílně:



Jak je na výše načrtnutých obrázcích vidět, nemusí být při počítání s funkcemi úhel sám o sobě vždy vhodným faktorem matematických vztahů: funkce je totiž v obou výše uvedených případech stejná, úhel α je však díky rozdílnému kalibrování os x a y v každém z případů různý. Ujasněme si nyní, **že vlastnost, která je popisována úhlem, se nazývá sklon**. Sklon sám o sobě nemusí být matematicky jednoznačnou veličinou, neboť vystihuje pouze vizuální aspekt naklonění. Jinými slovy, **používání úhlu při práci s funkcemi vyžaduje navíc vždy zohlednit kalibraci os** x **a** y.

Abychom mohli s funkcemi počítat snadněji, tedy bez zohledňování kalibrace os, existuje v matematice ještě jeden pohodlný nástroj k vyjadřování naklonění přímky. Tento nástroj se nazývá **směrnice** přímky. Znázorněme si význam pojmu **směrnice přímky** f v kartézské soustavě souřadnic níže uvedeným grafem. Přímku f, jejíž obecnou směrnici si budeme nyní odvozovat, považujme za graf nějaké afinní funkce:



Zvolme si na ose x konkrétní bod x_0, např. 5. Dále si kdekoliv na ose x zvolme libovolný bod x, který bude v tomto případě pro snadnější ilustraci od bodu [0;0] vzdálenější než bod x_0. Jelikož přímka f je grafem funkce, zobrazí se bod x_0 na ose y do bodu y_0. Ze stejného důvodu se také bod x zobrazí na ose y jako bod y. Jelikož body na ose y představují funkční hodnoty bodů ležících na ose x, můžeme si body y a y_0 označit také jako $f(x)$ a $f(x_0)$. Rozdíl hodnot $y - y_0$ neboli rozdíl $f(x) - f(x_0)$ označme jako Δy a rozdíl $x - x_0$ označme jako Δx. Když si nyní graf pozorně prohlédneme, jistě nebudeme pochybovat o tom, že **vzájemný poměr Δy a Δx je schopen vyjádřit naklonění přímky f**. Této skutečnosti analytická geometrie využívá a zavádí pojem **směrnice přímky**, což je číslo, které se rovná podílu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Je-li naklonění přímky popsáno směrnicí, nazývá se **směr[4].**

Směrnice přímky $f = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, neboli $\frac{y - y_0}{x - x_0}$, což lze rovněž zapsat jako $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Poslední formu zápisu berme jako přednostní. Později se nám to vyplatí, neboť až si budeme odvozovat, co je derivace funkce, bude tento zápis nejsnáze použitelný.

Zamyslíme-li se nyní nad vzájemnou souvislostí úhlu α a směrnicí přímky f **za předpokladu, že osy** x **a** y **budou shodně kalibrovány**, jistě nebude těžké ji odhalit. Ze středoškolské nauky o základních goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku víme, že **podíl odvěsny úhlu α protilehlé** (v našem případě Δy) **ku odvěsně úhlu α přilehlé** (v našem případě Δx) je definován jako **tangens orientovaného úhlu α. Tedy:**

směrnice přepony $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha)$

Pozor! Zdůrazněme ještě jednou, že tento vztah platí pouze tehdy, když jsou osy x **a** y **kalibrovány shodně!**

Nyní si tedy znovu zopakujme závěr a neopomeňme se jej naučit a zároveň mu dokonale rozumět tak, abychom jej byli schopni kdykoliv v budoucnosti vysvětlit:

směrnice přímky v kartézské soustavě souřadnic $= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

[4] Význam pojmu „směr" v analytické geometrii nemusí být vždy každému ihned zcela zřejmý, někomu může dokonce ze začátku připadat matoucí. V běžném životě jsme totiž zvyklí používat pojem „směr" spíše pro dynamické jevy jako je pohyb, kdy jde vlastně o to, kterou stranou začneme a kterou skončíme. Hovoříme například o směru zprava doleva či shora dolů. V analytické geometrii má pojem „směr" význam poněkud odlišný – znamená totiž naklonění vyjádřené pomocí směrnice.

V tomto kontextu se zmíním ještě o jednom důležitém postřehu o směrnici přímky. Víme, že přímka je grafem afinní funkce. Zapíšeme-li takovou afinní funkci f matematickým výrazem, pak směrnice přímky, která je grafem této funkce, bude vždy ztělesněna koeficientem před proměnnou x. Ukažme si to názorně. Velmi jednoduchou afinní (a dokonce lineární) funkcí je např. funkce $f(x)=3x$, což můžeme samozřejmě zapsat také jako $y=3x$. A právě tato trojka stojící před proměnnou x je směrnicí přímky, která je grafem této funkce. Je tomu tak proto, že funkce $y=3x$ vlastně říká, že y bude vždy trojnásobkem čísla x. Z toho však samozřejmě také logicky vyplývá, že Δy bude vždy trojnásobkem Δx. A protože směrnice se rovná podílu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, bude rovna 3. To samozřejmě platí i pro ty afinní funkce, které obsahují navíc nějaký absolutní člen, např. ve funkci $f(x)=2x+6$ je směrnicí číslo 2.

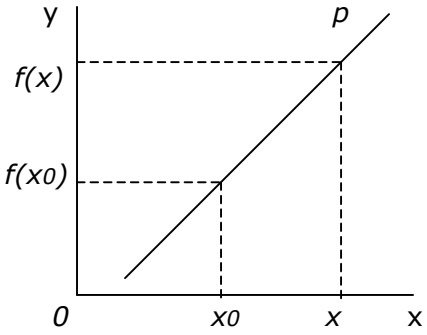
Shrnutí:

1) Naklonění přímky vyjádřené **úhlem** se nazývá **sklon**. Sklon vystihuje pouze vizuální aspekt naklonění.
2) Naklonění přímky vyjádřené **směrnicí** se nazývá **směr**.
3) **Směrnice** je číslo, které je dáno poměrem $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, neboli $\frac{y-y_0}{x-x_0}$, čili $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
4) V matematickém zápisu afinní funkce odpovídá směrnice koeficientu před proměnnou x.

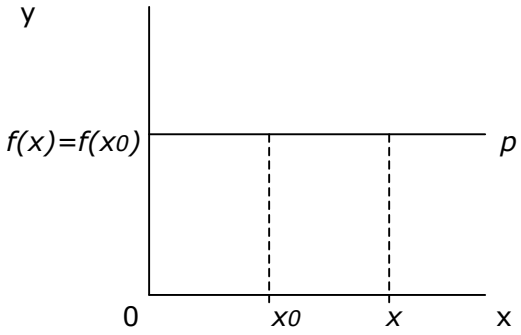
2.2 Sklon přímek ve vztahu ke směrnici

V této podkapitole si do kartézské soustavy souřadnic znázorníme přímky ve všech typických sklonech a popíšeme si základní vlastnosti jejich směrnic. Abychom si jednotlivé případy ukázali co nejnázorněji, budeme postupovat systematicky tak, že do grafu načrtneme přímku *p* a poté ji v každém dalším grafu „pootočíme" po směru hodinových ručiček oproti grafu předchozímu. Tím nám vzniknou následující čtyři grafy, které popisují všechny základní možnosti sklonu přímky *p*:

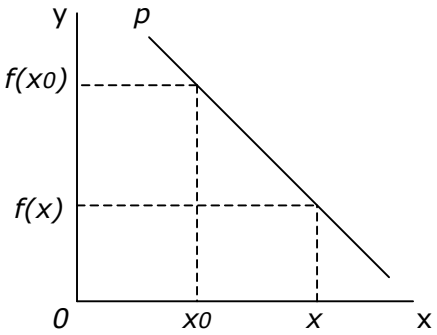
GRAF 1:



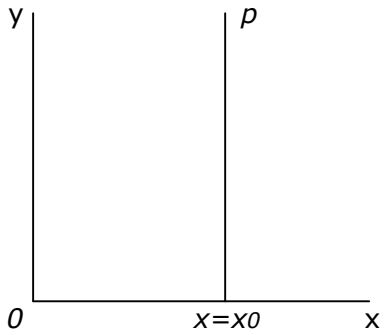
GRAF 2:



GRAF 3:



GRAF 4.



GRAF 1: V tomto základním případě má přímka rostoucí sklon. Zde platí:
$x > x_0 \Rightarrow \Delta x$ je kladná,
$f(x) > f(x_0) \Rightarrow \Delta y$ je kladná,
a proto $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{+}{+} \Rightarrow$ směrnice je kladná.
Závěr: **Má-li přímka rostoucí sklon, je její směrnice kladná.**

GRAF 2: Zde je přímka vodorovná. Proto platí:
$x > x_0 \Rightarrow \Delta x$ je kladná,
$f(x) = f(x_0) \Rightarrow \Delta y = 0$,
a proto $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{0}{+} \Rightarrow$ směrnice je rovna nule.
Závěr: **Je-li přímka horizontálou, je její směrnice rovna nule.**

GRAF 3: V tomto případě má přímka klesající sklon. Zde platí:
$x > x_0 \Rightarrow \Delta x$ je kladná,

$f(x) > f(x_0) \Rightarrow \Delta y$ je záporná,

a proto $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{-}{+} \Rightarrow$ směrnice je záporná.

Závěr: **Má-li přímka klesající sklon, je její směrnice záporná.**

GRAF 4: Zde je přímka svislou kolmicí k ose x. Zde platí:
$x = x_0 \Rightarrow \Delta x = 0$,

vztah mezi $f(x)$ a $f(x_0)$ není definován,

a proto $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\infty}{0} \Rightarrow$ směrnice neexistuje.

Závěr: **Je-li přímka vertikálou, nemá směrnici. Jde o tzv. přímku bez směrnice.**

Závěry uvedené v této podkapitole jsou velmi důležité pro výklad v následujících kapitolách. Velkou důležitost budou mít například při vyšetřování průběhu funkcí.

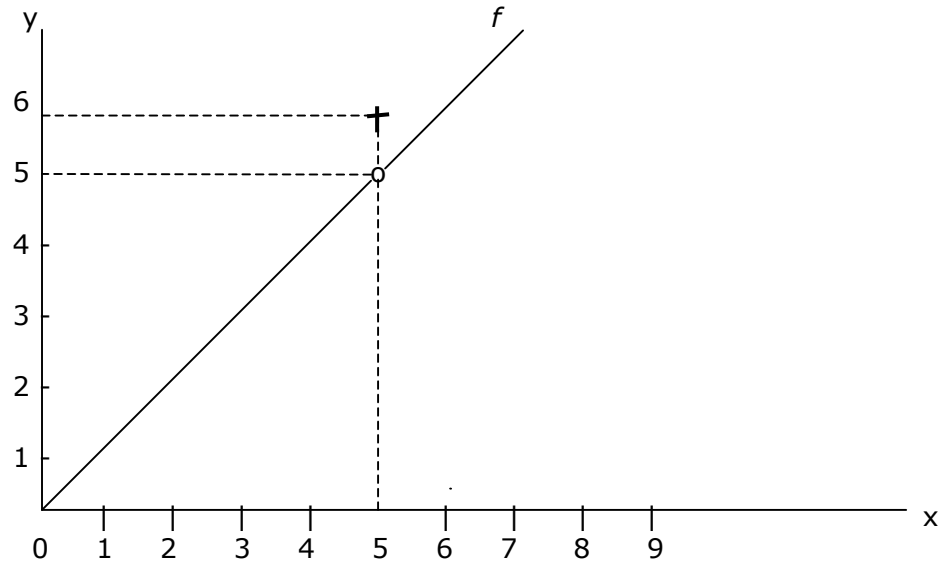
3. LIMITA FUNKCE

3.1 Význam pojmu „limita funkce"

Málokterý pojem se při výuce matematiky stává tak často obětí mylných interpretací, jako právě pojem „limita funkce". Při rozhovorech se svými kolegy z prvního ročníku ESF jsem dospěl k neradostnému závěru, že povážlivá část studentů si limitu funkce představuje jako cosi „přibližného", „nepřesného", takřka podobného zaokrouhlování. Když jsem se snažil si tento jev zdůvodnit, napadla mě jediná možná příčina: Při práci s limitami se používá slovního spojení „x se blíží k…", např. v konkrétní podobě „x se blíží k deseti", což si následně mnozí vykládají jako „x je přibližně deset". Z této iluze jakéhosi domnělého „zaokrouhlování" pak vychází celá chybná představa o významu výrazu limita funkce. Uveďme proto nyní představu o limitě na pravou míru.

Předně si jednou pro vždy ujasněme, že **limita je naprosto přesné číslo**, nikoliv nějaká přibližná či zaokrouhlená hodnota. Na následujícím grafu názorně ukážu, co limita funkce vyjadřuje.

Nejprve načrtněme zajímavou, velmi specifickou funkci f. Nebudeme ji přepisovat matematickým zápisem, který by byl k našemu účelu nepotřebný, ale znázorníme si ji pouhým grafem. **Budiž předem dáno, že tato funkce bude mít tu vlastnost, že pro jakékoliv x bude její funkční hodnota y tomuto x rovna (tedy pro $x=1$ bude $y=1$, pro $x=2$ bude $y=2$, apod.), ovšem s jednou jedinou výjimkou: funkční hodnota pro $x=5$ nebude rovna *5*, nýbrž 6:**



Až si čtenář výše načrtnutou funkci v klidu prohlédne, rád bych mu položil následující soubor otázek. Ačkoliv na každou z nich ihned také odpovím, doporučuji čtenáři, aby to zkusil udělat sám za sebe:

- Jaká je funkční hodnota f v bodě $x=1$? Správná odpověď: 1
- Jaká je funkční hodnota f v bodě $x=2$? Správná odpověď: 2
- Jaká je funkční hodnota f v bodě $x=3$? Správná odpověď: 3
- Jaká je funkční hodnota f v bodě $x=4$? Správná odpověď: 4
- Jaká je funkční hodnota f v bodě $x=5$? Správná odpověď: **6 ← Důležité!**

Nyní se však zeptejme jinak:

- Jaká je limita funkce f pro x se blíží k *1*? Správná odpověď: 1
- Jaká je limita funkce f pro x se blíží k *2*? Správná odpověď: 2
- Jaká je limita funkce f pro x se blíží k *3*? Správná odpověď: 3
- Jaká je limita funkce f pro x se blíží k *4*? Správná odpověď: 4
- Jaká je limita funkce f pro x se blíží k *5*? Správná odpověď: **5 ← POZOR!!!**

Na tomto místě je extrémně důležité srovnat si především odpovědi na otázku poslední z každé pětice otázek. Funkci jsme navrhli již s tím předpokladem, že její funkční hodnota v bodě 5 nebude 5, nýbrž 6. To je také odpovědí na pátou otázku tázající se na funkční hodnotu. **Co však znamená tvrzení, že ačkoliv funkční hodnota pro $x=5$ je rovna *6*, limita této funkce pro x se blíží k 5 je rovna 5?**

Odpověď snad nejlépe pochopíme, pokusíme-li otázku týkající se limity položit jinými slovy, než plně korektním jazykem matematických definic. Níže nabízím několik alternativ, jak takovou otázku položit:

„Bude-li se x na ose x přibližovat co nejtěsněji k číslu 5 aniž by s ním splynula, ke kterému číslu se bude na ose y co nejtěsněji přibližovat jemu odpovídající y, aniž by s ním splynulo?"

Již z této otázky je patrná odpověď, že to nebude číslo 6, nýbrž číslo 5.

Otázku můžeme formulovat i jinak:

„Jestliže za x dosadíme takové číslo nerovné pěti, které bude číslu 5 co nejbližší, kterému číslu bude co nejbližší číslo y, které bude funkční hodnotou pro x?"

Nebo:

„Jestliže číslo x bude těsně sousedit s číslem 5, se kterým číslem bude těsně sousedit číslo $f(x)$?"

Asi nejlepší, nejkorektnější a přitom matematicky již v podstatě bezchybná otázka, která mě napadá, je následující:

„Kdyby byla funkce v bodě $x=5$ spojitá, jaká by byla v tomto bodě její funkční hodnota?" Tentokrát již jistě odpovíme správně. Kdyby byla funkce v bodě $x=5$ spojitá, neplatila by právě ona výjimečná vlastnost, že pro $x=5$ je její funkční hodnota rovna 6. Její funkční hodnota by se rovnala 5.

Z této poslední otázky bych si nyní dovolil nabídnout čtenáři vytvoření své vlastní vysvětlení pojmu limita funkce, které je sice poněkud amatérské, nicméně proti jeho významu nelze ani z odborného hlediska mnoho namítat:

Limita funkce f pro x se blíží ke konkrétnímu číslu x_0 je takové číslo, které by odpovídalo funkční hodnotě funkce f pro x_0 tehdy, kdyby funkce f byla v tomto bodě spojitá.[5]

Ještě by bylo užitečné dodat, že při výpočtu limity tudíž vlastně vůbec nezáleží na tom, zda funkce v bodě x_0 spojitá je či nikoliv. Z toho plyne, že dokonce vlastně vůbec nezáleží ani na tom, jakou má funkce v bodě x_0 funkční hodnotu, ani na tom, zda je funkce pro daný bod x_0 vůbec definována či nikoliv. **POZOR! Důležitou vstupní podmínkou při výpočtu limity jakékoliv funkce však je, aby tato funkce byla definována v bodech v okolí bodu** x_0, protože jedině tak je možné hovořit o „těsném sousedství" s bodem x_0.

Zakončeme tuto kapitolu poučením o tom, jak se správně zapisuje výraz s limitou funkce. Mezinárodně kodifikovaný přepis slovního spojení „limita funkce f pro x se blíží k x_0 se rovná a" je následující:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Některá slovní spojení se mohou mírně lišit, vyslovují-li je různí matematičtí experti. Např. výraz:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

mohou někteří matematici číst jako „limita $f(x)$ pro x jdoucí k nekonečnu."
Je samozřejmé, že v zápisu může být funkce uvedena i konkrétně:

$$\lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

tedy „Limita funkce $\arctan(x)$ pro x jdoucí k nekonečnu je rovna $\frac{\pi}{2}$.

Účelem této kapitoly bylo prozatím vysvětlit čtenáři význam pojmu limita funkce tak, aby byl schopen si představit, co limita vyjadřuje a k čemu může při mnohých typech výpočtů sloužit. V následující kapitole si ukážeme, jak konkrétně se limita funkce počítá.

[5] Ačkoliv je toto vysvětlení zcela pravdivé a velmi dobře srozumitelné, nelze jej považovat za definici. Důvod je ten, že limita funkce obvykle není v matematice definována pomocí spojitosti, neboť standardní definice funguje přesně opačně: spojitost funkce se definuje pomocí již zavedeného pojmu limity. Definice spojitosti funkce zní: Funkce je v daném bodě spojitá, jestliže její limita v daném bodě je rovna její funkční hodnotě. Důvod, proč zde vysvětluji danou souvislost opačně, je moje osobní zkušenost, že zatímco význam pojmu „funkce spojitá v daném bodě" je většině studentů bez problému jasný, pojmem „limita funkce v daném bodě" je často chápán se značnými obtížemi. Dalším důvodem, proč vysvětluji pojem limita pomocí spojitosti funkce, je fakt, že zcela standardní metoda výpočtu limity je založena právě na takovém postupu, že původní funkce v daném bodě nespojitá se algebraickými upraví na jinou funkci, která již v daném bodě spojitá je, přičemž limita funkce původní se vypočte jako funkční hodnota funkce upravené (tento postup ukážu v následující podkapitole „Základní postupy při výpočtu limity funkce").

3.2 Účel a použití výpočtů pomocí limity

Zatím jsme si sice vysvětlili, co limita funkce vyjadřuje. K čemu nám však může posloužit? Limita funkce je v matematice nesmírně důležitý nástroj. V této podkapitole je nutno seznámit čtenáře s praktickým užitím, pro něž byla limita funkce objevena.

Při vysvětlování významu pojmu limita funkce jsme si ukázali, že při výpočtu limity funkce pro $x \to x_0$ vůbec nezáleží na tom, jaká je funkční hodnota dané funkce v bodě x_0, ba dokonce nezáleží ani na tom, zda daná funkce v bodě x_0 vůbec nějakou funkční hodnotu má (neboli zda je pro x_0 definována). Z toho vyplývá velmi pozoruhodný a nesmírně cenný závěr: **Jelikož při výpočtu limit funkcí nezáleží na tom, zda je funkce v daném bodě definována, umožní nám existence limity vypočítat takové hodnoty, které bychom pouhým dosazením za x do funkce a následným vypočtením její funkční hodnoty nespočítali.** Takové situace jsou v podstatě dvě:

1) **Dělení nulou.** Případ, kdy výpočet funkční hodnoty dané funkce není možný, protože dosazením daného čísla za x by ve jmenovateli vznikla nula. Protože nulou nedělíme, vypočteme nikoliv funkční hodnotu dané funkce pro číslo x_0, nýbrž její limitu pro $x \to x_0$. Jinými slovy, budeme-li mít lomenou funkci $f(x)$ s proměnnou x ve jmenovateli takovou, že po dosazení určitého konkrétního čísla za x by se jmenovatel rovnal nule, znamená to, že funkce není pro toto konkrétní číslo definována. Pokud ovšem budeme i přesto trvat na tom, že potřebujeme zjistit, jaká hodnota by po dosazení x vyšla, kdyby v tomto bodě daná funkce definována byla, máme možnost výsledek vypočítat právě pomocí limity.
2) **Výpočty s nekonečnem.** V matematice platí, že nekonečno není číslo, nýbrž množství větší než kterékoliv číslo. V důsledku toho je opodstatněné pravidlo, že **nekonečno se do funkcí nedosazuje**, neboť **funkční hodnoty nejsou pro nekonečno definovány**. Z toho důvodu v takových situacích počítáme pomocí limity, kde x se blíží k nekonečnu.

Oba případy budou rozebrány v následujících dvou podkapitolách.

3.3 Použití výpočtu limity k „dělení nulou“

Jak už jsme se vysvětlili, často se můžeme setkat se situací, kdy funkce, s níž počítáme, není definována pro některé konkrétní číslo x_0 proto, že dosazením tohoto čísla za x by ve jmenovateli vznikla nula. To znamená, že taková funkce není v bodě x_0 spojitá, neboť je právě v bodě o souřadnici x_0 přerušena („chybí“ v ní tento bod). Pokud přesto potřebujeme s takovým číslem x_0 počítat, poskytne nám řešení právě limita. Ta nám vlastně řekne, jaká hodnota by po dosazení x vyšla, kdyby v tomto bodě daná funkce definována byla.

Při odvození postupu k výpočtu limity funkce pro takový případ doporučuji použít již zmíněné vysvětlení limity funkce:

Limita funkce f pro x se blíží ke konkrétnímu číslu x_0 je takové číslo, které by odpovídalo funkční hodnotě funkce f pro x_0 tehdy, kdyby funkce f byla v tomto bodě spojitá.

Co z uvedeného vysvětlení vyplývá? Pokud daná funkce v bodě x_0 spojitá není, vypočteme limitu tím způsobem, **že si danou funkci prostě upravíme na novou funkci tak, aby nová funkce v daném bodě x_0 spojitá byla**, a poté pro daný bod vypočteme funkční hodnotu této nově vzniklé funkce. Demonstrujme si takový výpočet na názorném příkladu. Jako reprezentativní vzor nám poslouží následující úloha:

Mějme funkci $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

Vypočtěte: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Již na první pohled vidíme důvod, proč k tomuto výpočtu používáme jako nástroj limitu a nikoliv funkční hodnotu: pokud bychom totiž dosadili za x číslo 3, vznikla by nám ve jmenovateli nula. Z toho vyplývá, že funkce f není v bodě $x=3$ definována. Proto také v tomto bodě není spojitá (právě v tomto jediném bodě $x=3$ je její průběh přerušen, neboť číslo 3 není prvkem jejího definičního oboru). Protože je však definována pro všechna ostatní x, je jistě definována pro okolí bodu $x=3$. **Proto si tuto funkci základními algebraickými úpravami přetvoříme tak, aby nově vzniklá funkce v bodě 3 definována byla. Poté postačí do nově vzniklé funkce dosadit číslo 3 a vypočíst její funkční hodnotu v tomto bodě.**

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$$

Můžeme tudíž říci, že jsme z původní funkce $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ algebraickými úpravami vytvořili novou funkci $g(x)=x+3$, která se od původní funkce liší tím, že je definována v bodě $x=3$. Pozor! Nesmíme nikdy zapomenout, že funkce f a g si nejsou rovny! Vyplývá to právě z definice o shodnosti funkcí, která říká, že dvě funkce jsou si rovny právě tehdy, když mají stejný definiční obor a jemu odpovídající stejný obor hodnot. Naše dvě funkce nejsou shodné právě proto, že mají různé definiční obory (a tím vlastně i obory hodnot).

Nyní nám již zbývá pouze dosadit do nově vzniklé funkce g za x číslo 3 a výsledek bude na světě: 3+3=6

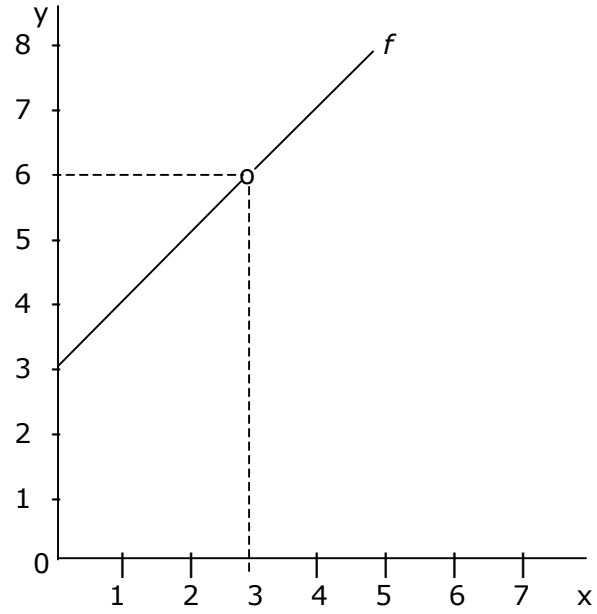
Proto můžeme zapsat výsledek: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

Správný zápis celého výpočetního postupu by měl vypadat následovně:

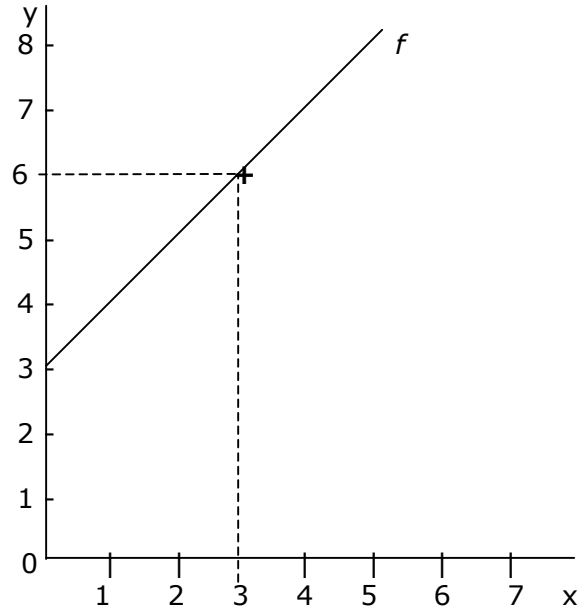
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x+3=3+3=6$$

Aby si čtenář mohl rozdíl mezi původní funkcí a funkcí modifikovanou představit ještě snáze, pro úplnost níže předkládám dva grafy výše uvedených funkcí:

GRAF 1: funkce $y=\frac{x^2-9}{x-3}$



GRAF 2: funkce $y=x+3$



Jelikož funkce znázorněná grafem 1. není pro $x=3$ definována, je v bodě [3;6] přerušena (což je vyznačeno prázdným „kroužkem"). Oproti tomu funkce znázorněná grafem 2. již pro $x=3$ definována je, a tudíž i bod [3;6] je v grafu funkce obsažen, (funkce je v daném bodě spojitá).

Závěrem bude užitečné čtenáře upozornit, že **ne vždy lze výpočet limity provést jednoduchou algebraickou úpravou funkce**. Může se totiž stát, že zadání bude obsahovat takovou funkci, kterou běžnými algebraickými postupy upravit nelze. Zadání může kupříkladu znít: Vypočtěte $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. K výpočtu takových limit existuje ještě jeden nástroj, který se nazývá **L'Hospitalovo**[6] (vysl. [lopitalovo]) **pravidlo**. Jeho použití nebývá složité, používá se však k němu derivace funkce, kterou probereme až v následující kapitole těchto skript. Proto se k L'Hospitalovu pravidlu vrátím až po probrání derivací.

Zajímavé je, že k výpočtu limity funkce matematika příliš mnoho nástrojů nemá. Popravdě řečeno, algebraickými úpravami a zmíněným L'Hospitalovým pravidlem jsou nástroje k výpočtu limity funkce vlastně vyčerpány.

Vztahy mezi limitami

Než se pustíme do dalších výpočtů s limitami, bude potřeba ujasnit si určité jednoduché vztahy, které platí mezi limitami více funkcí:

1) Limita součtu je rovna součtu limit.
$\lim_{x\to x_0}(f+g)=\lim_{x\to x_0} f+\lim_{x\to x_0} g$

2) Limita rozdílu je samozřejmě rovna rozdílu limit.
$\lim_{x\to x_0}(f-g)=\lim_{x\to x_0} f-\lim_{x\to x_0} g$

3) Limita podílu je rovna podílu limit.
$\lim_{x\to x_0}(\frac{f}{g})=\frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}$

4) Limita součinu je rovna součinu limit.
$\lim_{x\to x_0}(f.g)=\lim_{x\to x_0} f\cdot\lim_{x\to x_0} g$

5) Limita funkce složené:
$\lim_{x\to x_0}\big(f(g)\big)=f(\lim_{x\to x_0} g)$, je-li f definována pro všechna reálná čísla

Příklad: $\lim_{x\to 3}\sin(\frac{x^2-9}{x-3})=\sin(\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3})$

[6] Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661-1704), francouzský matematik. Sestavil první učebnici diferenciálního a integrálního počtu.

3.4 Použití limity k výpočtům s nekonečnem

Nejdříve ze všeho si ujasněme, jak matematické vědy definují nekonečno. **Nekonečno není číslo. Nekonečno je množství větší než jakékoliv číslo (protože jakékoliv číslo je konečné).** Stejně tak platí analogie, že **mínus nekonečno je množství menší než jakékoliv číslo (protože jakékoliv číslo je konečné).**

Proto je opodstatněné dodržovat pravidlo, že **plus nekonečno či mínus nekonečno se za** x **do funkce nedosazuje**, neboť dosazovat můžeme jen číslo a nekonečno číslo není. S tím také souvisí fakt, že žádná funkce není definována pro $x=\infty$, jinými slovy **žádná funkce nemá v bodě** $x=\infty$ **funkční hodnotu**. Protože limita funkce je nástroj, který nám umožňuje vypočíst, jaká by byla funkční hodnota, kdyby pro konkrétní x_0 definována byla (přičemž ovšem není), je limita tím pravým nástrojem, který nám umožňuje s nekonečnem počítat. **Budeme tedy počítat limitu dané funkce pro** $x \to \pm\infty$**, což bude takové číslo, k němuž se bude přibližovat funkční hodnota dané funkce, bude-li se** x **stále více blížit** $+\infty$ **či** $-\infty$**.**

Na tomto místě je potřeba ještě uvést, že ani limita pro $x \to \pm\infty$ není definována u každé funkce. Např. není definována $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ - pokud si čtenář průběh dané funkce představí, zřejmě ihned pochopí proč.

V jiných případech je limita pro $x \to \pm\infty$ rovna $\pm\infty$. Jako příklad mohu uvést např. $\lim_{x\to\infty} 3x$. K výsledku snadnou dospějeme logickou úvahou: Protože nekonečno je množství větší než jakékoliv číslo, je i trojnásobek takového množství větší než jakékoliv číslo, je tedy roven ∞.

Zaměřme se tedy nyní na takové funkce, jejichž limita pro $x \to \pm\infty$ je rovna konkrétnímu číslu. Takovým typickým příkladem jsou často některé **lomené funkce**, tedy funkce takové, kdy v čitateli i ve jmenovateli je polynom. Výpočtem limity takových lomených funkcí pro $x \to \pm\infty$ se nyní budeme zabývat.

Zcela zásadním předpokladem, z něhož se při výpočtech limity pro $x \to \pm\infty$ **vychází, je následující poznatek:**

$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x} = 0$, kde k je libovolné reálné číslo (konstanta).

Jak jsme k tomuto předpokladu dospěli? Vyjděme z definice nekonečna: Nekonečno je množství větší než jakékoliv číslo. Nyní si zvolme jakoukoliv konstantu, třeba číslo 7, a postupně ji dělme stále větším a větším číslem. Čím větším číslem ji budeme dělit, tím více se bude výsledek přibližovat nule. Vydělíme-li konstantu číslem velmi velkým, bude podíl téměř roven nule. Z toho logicky vyplývá, že pokud tuto konstantu vydělíme množstvím, které je větší než sebevětší číslo, bude výsledek roven nule. **Z tohoto předpokladu budeme při výpočtech limity pro** $x \to \pm\infty$ **vycházet.**

Nyní si napišme obecný postup, jak takové limity počítat. Podobně jako v případě „dělení nulou" půjde vlastně jen o vhodné algebraické úpravy.

1) Ze jmenovatele dané lomené funkce zvolíme takzvaný **převládající člen**. Jde o proměnnou x v té největší mocnině, v jaké se ve jmenovateli vyskytuje.
2) Tímto převládajícím členem podělíme jak čitatele, tak i jmenovatele dané funkce.
3) Provedeme takovou algebraickou úpravu, která nám umožní dostat co nejvíce zlomků s konstantou v čitateli a x ve jmenovateli, aby se po dosazení nekonečna za x mohly tyto zlomky rovnat nule.
4) Výraz převedeme tak, že limitu zapíšeme jen v takto vzniklých zlomcích s konstantami v čitateli a x ve jmenovateli. Tím se limita těchto zlomků bude rovnat nule.
5) Ze zbývajících prvků dopočítáme výsledek.

Jelikož aplikaci výše uvedeného obecného postupu si jen těžko představíme bez konkrétního praktického příkladu, ukažme si nyní řešení postupným prováděním těchto kroků na následující úloze.

Zadání: Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{2x^2-3x+4}$

Řešení:

1) Ze jmenovatele dané lomené funkce zvolíme **převládající člen**. Jelikož proměnná x se ve jmenovateli vyskytuje nejvýše ve druhé mocnině, bude převládající člen x^2.
2) Převládajícím členem x^2 podělíme jak čitatele, tak i jmenovatele dané funkce. Dostaneme: $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2+3}{x^2}}{\frac{2x^2-3x+4}{x^2}}=$
3) Provedeme takovou algebraickou úpravu, která nám umožní dostat co nejvíce zlomků s konstantou v čitateli a x ve jmenovateli, aby se po dosazení nekonečna za x mohly tyto zlomky rovnat nule (půjde o jednoduchý rozklad zlomků). Tím dostaneme:
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=$$
Zjednodušíme vhodnými algebraickými úpravami krácením:
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=$$
4) Výraz převedeme tak, že limitu zapíšeme jen ve zlomcích s konstantami v čitateli a x ve jmenovateli. Tím se limita těchto zlomků bude rovnat nule:
$$=\frac{5+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{2-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{5+0}{2-0+0}$$
5) Výsledek je tedy $\frac{5}{2}$.

Pro lepší představu nabízím ještě následující dvě vyřešené úlohy:

ÚLOHA 1:

Zadání: Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}\frac{5x+3}{2x^2-3x+4}$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+3}{2x^2-3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x+3}{x^2}}{\frac{2x^2-3x+4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{2-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{0+0}{2-0+0}=\underline{\underline{0}}$$

ÚLOHA 2:

Zadání: Vypočtěte $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+3}{2x^2-3x+4}$

Řešení:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+3}{2x^2-3x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x^3+3}{x^2}}{\frac{2x^2-3x+4}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=$$

$$=\frac{5\cdot\lim_{x\to-\infty}x+\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}}{2-\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to-\infty}x+0}{2-0+0}=\frac{\lim_{x\to-\infty}x}{2}=\lim_{x\to-\infty}x=\underline{\underline{-\infty}}$$

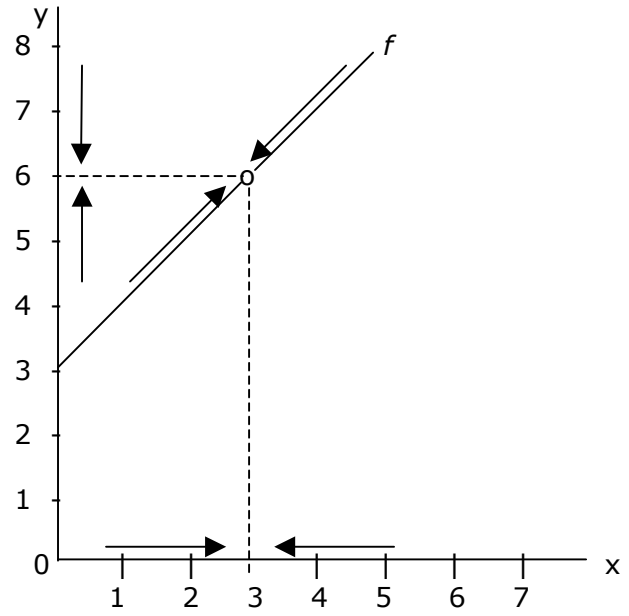
Vřele čtenáři doporučuji, aby si takových úloh ve vlastním zájmu vypočítal co nejvíce! Tato skripta nejsou cvičebnicí, nýbrž výkladem; proto je potřeba najít si k takovému účelu vhodnou sbírku úloh. Ještě mnohem lepší však pro čtenáře bude trochu experimentovat tím, že si bude vymýšlet různé takové úlohy sám a pozorovat, jak se budou při řešení chovat.

3.5 Limita zprava, limita zleva

V předchozích podkapitolách jsme hovořili o limitě funkcí ve dvou základních případech, kdy x se blíží k hodnotě, v níž funkce není definována:

1) pro x se blíží k plus nekonečnu či mínus nekonečnu. V tomto případě je logické, že k $+\infty$ se x blíží vždy zleva (směrem doprava), neboli počítáme limitu pro takovou situaci, kdy se x bude rovnat stále většímu číslu. Ze stejného důvodu že je také logické, že k $-\infty$ se x blíží vždy zprava (směrem doleva), neboli počítáme limitu pro takovou situaci, kdy se x bude rovnat stále menšímu číslu. Jelikož tyto souvislosti jsou zcela jasné, nebudeme se jimi v této podkapitole již dále zabývat.

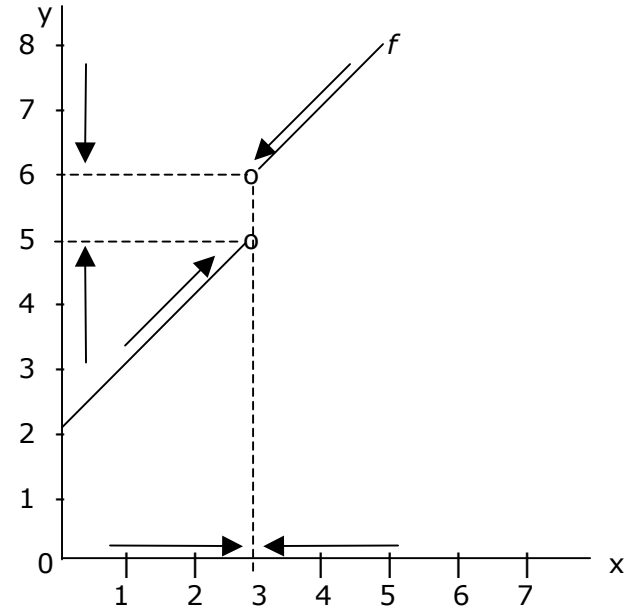
2) pro x se blíží ke konkrétnímu číslu x_0, přičemž přímým dosazením hodnoty x_0 by nám ve jmenovateli vznikla nula (takzvané „dělení nulou"). V tomto případě je nutno si uvědomit, že jsme se dosud vůbec nezabývali tím, zda se x bude k danému x_0 blížit zleva nebo zprava, neboť u funkcí, jejichž limitu jsme dosud řešili, na směru nezáleželo – limita byla stejná, ať se x blížilo k x_0 zleva či zprava. Typický případ ještě jednou ukazuje následující graf funkce $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$. Je dobře vidět, že ať se x přibližuje k číslu $x_0 = 3$ z kterékoliv strany, vždy se jemu odpovídající y bude blížit číslu 6:



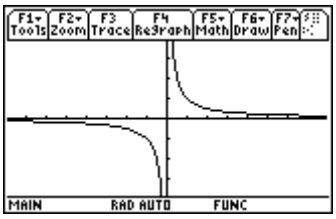
Můžeme se však setkat i s funkcemi, jejichž limita zprava se limitě zleva nerovná, či dokonce s takovými funkcemi, které mají pouze limity zleva či pouze limitu zprava. Následující graf je grafem takové funkce, jejíž limita pro $x \to 3$ je zleva rovna pěti, zprava však šesti. Matematický zápis se v takových případech provádí takto:

$\lim_{x \to 3-} f(x) = 5$, kde znamínko – znamená zleva

$\lim_{x \to 3+} f(x) = 6$, kde znamínko + znamená zprava



Mohou nastat i případy, kdy se limita zprava či zleva rovná plus nekonečnu či mínus nekonečnu. Velmi vhodným příkladem je funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ (v tomto případě je vhodnější ilustrace grafem z kapesní matematické laboratoře):



Pokud se x bude rovnat velmi malému kladnému číslu, bude y velmi velké číslo, proto $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$. Bude-li se naopak x rovnat velmi malému zápornému číslu, bude y velmi velké záporné číslo, $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Velmi důležitá je používaná terminologie! Říkáme, že **funkce má limitu, pouze když má limitu zprava i zleva a tyto limity se sobě rovnají**. Pokud má funkce limitu pro $x \to x_0$ jen zleva či jen zprava, pak říkáme, že **nemá limitu**. Pokud má funkce limitu zleva i limitu zprava, avšak tyto dvě limity si nejsou rovny, pak také **nemá limitu.**

Nyní, když jsme si vysvětlili, co je limita zprava a limita zleva, čtenář se bude zřejmě zajímat o to, jak limitu zleva či zprava vypočítat. Není zrovna potěšující fakt, že limita pouze zleva či pouze zprava se žádným „klasickým" výpočtem nezjišťuje – kýžený výsledek se odvozuje úsudkem. V každém případě nejdřív prověříme výpočtem, zda funkce má v bodě x_0 limitu. Teprve pokud ne, je vhodné vzorec dané funkce co nejvíce zjednodušit algebraickými úpravami, takto vzniklou novou funkci si pečlivě prohlédnout a posoudit její vlastnosti. Rovněž je vhodné dosadit si za x vhodná čísla (dostatečně blízká x_0 z každé strany) a vypočíst funkční hodnoty.

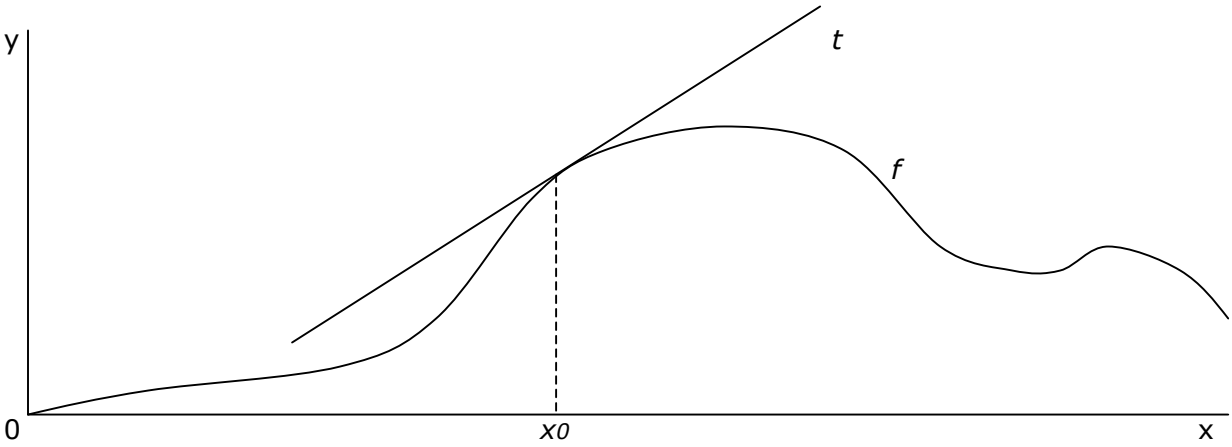
4. DERIVACE FUNKCE

4.1 Význam pojmu „derivace funkce"

V úvodu této kapitoly bych rád požádal čtenáře, aby na chvilku omluvil méně akademický charakter ilustračního příkladu, kterým tuto kapitolu zahájím.

Představme si, že cestujeme autem kdesi v horách. Silnice vede chvíli do kopce, chvíli z kopce, tu mírněji a tu zase příkřeji, v některých okamžicích jedeme dokonce po rovince. A náhle nám zatelefonuje kamarád a zeptá se nás, jak je naše cesta příkrá a v jakém směru (vzhůru či dolů). Nejspíše bychom odpověděli, že jak v kterém místě naší cesty. Kamarád se nás tedy zeptá, jak je příkrá právě tam, kde zrovna jsme. Budeme-li mít náladu mu odpovědět, zastavíme a zjistíme, jak strmá je na daném místě podlaha našeho vozu – zda je vůz výše přední kapotou, či zadním zavazadlovým prostorem. Dá se říci, že pokud bychom vedli podlahou od výfuku k přední značce přímku, odpovídala by strmost této přímky zhruba strmosti silnice v tom konkrétním místě, kde právě stojíme.

Přenesme nyní tento ilustrační příklad do podivuhodného světa analytické geometrie. Vše, co k tomu budeme potřebovat, je níže uvedený obrázek:



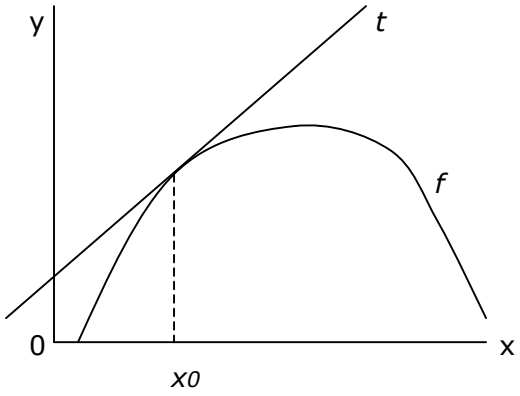
Průběh cesty a tudíž vertikální členitost silnice jsou v tomto případě znázorněny funkcí $f(x)$. Vidíme, že ze začátku mírně stoupá, poté náhle její strmost prudce stoupne směrem vzhůru. Na vrcholku se jakoby narovná, poté má klesající tendenci a tak dále. Místo, kde jsme autem zastavili, je v grafu znázorněno jako bod na křivce o souřadnici x_0. Chceme-li zjistit, jak strmá je křivka právě v bodě o souřadnici x_0 (nebo raději jaký má křivka v bodě o souřadnici x_0 **směr**), nejsnazším řešením bude „přiložit" k této křivce v daném bodě tečnu (znázorněno přímkou *t*) a vyjádřit její směrnici. Můžeme tedy říci, že směr křivky v konkrétním bodě lze přesně vyjádřit směrnicí tečny v tomto bodě. **Číslo vyjadřující směrnici tečny k funkci $f(x)$ v bodě o souřadnici x_0 se nazývá derivace funkce f v bodě x_0.** Tuto větu si vryjte do paměti! Je jedním z nejdůležitějších poznatků v celém prvním ročníku ESF předmětu matematika.

Shrnutí: **Derivace funkce f v bodě x_0 je číslo, které odpovídá směrnici tečny k funkci $f(x)$ v bodě o souřadnici x_0.**

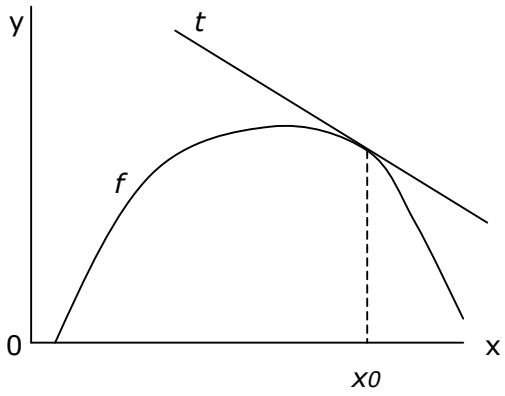
4.2 Typické příklady souvislosti průběhu funkce a derivace

Derivace funkce je schopna o průběhu funkce mnohé říci. Níže uvedený obrázek čtyř grafů tuto souvislost ukazuje:

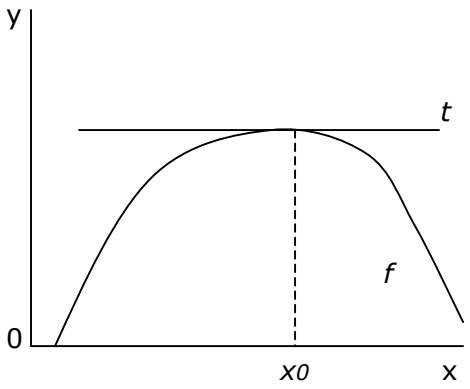
GRAF 1.



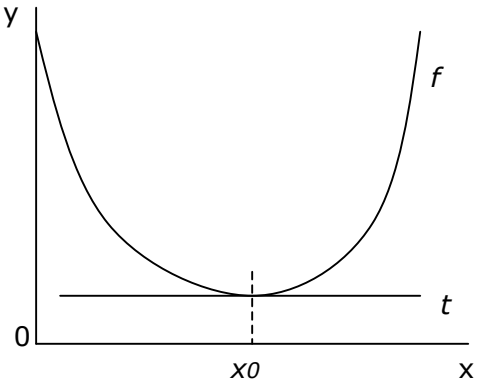
GRAF 2.



GRAF 3.



GRAF 4.



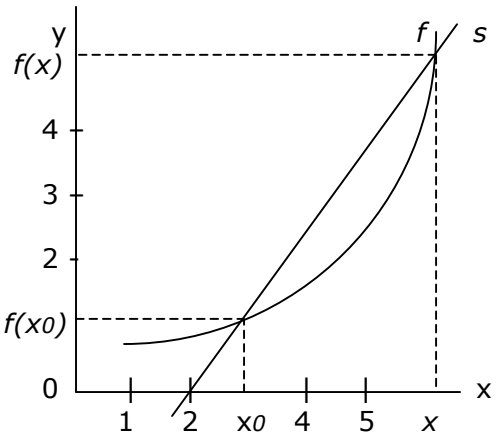
V bodech, kde má funkce rostoucí průběh (GRAF 1.), je derivace kladné číslo (neboli směrnice tečny je kladná, protože sklon tečny je rostoucí). Naopak v bodech, kde je funkce klesající (GRAF 2.), je derivace číslo záporné (neboli směrnice tečny je záporná, protože sklon tečny je klesající). Obzvláště významná je také skutečnost, že v místech, kde má funkce extrémy (maximum – GRAF 3., minimum – GRAF 4., v grafu připomínají „vrcholky kopce" či naopak „dna prohlubní") je derivace rovna nule (neboli směrnice tečny je rovna nule, protože tečna je vodorovná, její sklon je horizontální).

Tyto poznatky nám v dalších kapitolách poslouží právě k takzvanému „vyšetřování průběhu funkcí". Půjde zhruba o to, že student dostane zadánu funkci a jeho úkolem bude zjistit, kde má funkce minimum, kde maximum, v kterých bodech je rostoucí, v kterých klesající, atd.

4.3 Výpočet derivace funkce

Jakmile jsme si vysvětlili, co pojem „derivace funkce" znamená a co derivace funkce vyjadřuje, je nutno si vysvětlit, jak se derivace funkce vypočte. Otázka tedy vlastně zní: **Jak vypočítám směrnici tečny k funkci f v bodě x_0?**

Zkusme na to jít trošku šalamounsky a podívat se na to poněkud „od lesa". Začněme tím, že si položíme otázku: Nevíme-li zatím, jak spočítat směrnici tečny, **dovedli bychom alespoň vypočítat směrnici sečny**? To jistě ano, kdybychom ovšem měli druhý bod, v němž sečna křivku naší funkce protne. A protože takový bod nemáme a na druhé straně jej nutně potřebujeme, tak si jeho souřadnici na osu x prostě někam vyznačme a nazvěme ho x. Ze zvyku z kapitoly o směrnici přímky si jej pro přehlednost nakresleme tak, aby byl od bodu [0;0] vzdálenější, než náš bod x_0. Sečna bude funkci protínat ve dvou bodech: jednak v bodě o souřadnici x_0, jednak v bodě o souřadnici x. Znázorněno je to na níže načrtnutém grafu:

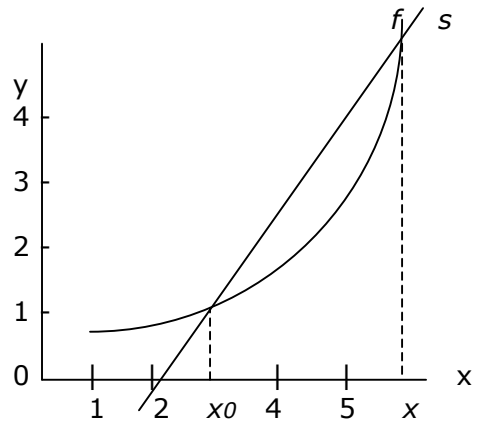


Když máme teď vše přehledně znázorněno v grafu, napišme si rovnou nám již známý vzorec, jak směrnici této sečny vypočítat. Jelikož body, v nichž sečna *s* protíná funkci $f(x)$ jsou sečně i křivce dané funkce společné, můžeme bez ostychu napsat:

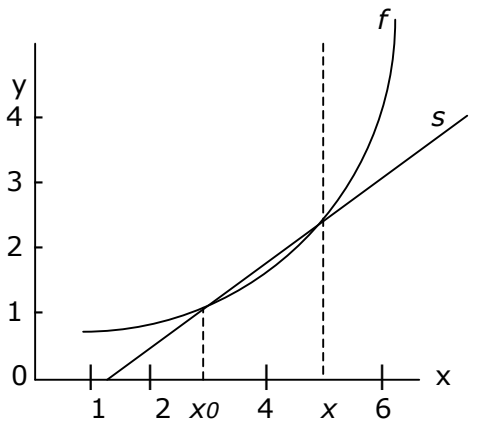
směrnice sečny funkce $f(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Nyní se pozorně podívejme na níže uvedené náčrtky čtyř grafů a zkusme si představit, že bod x budeme pomalu přibližovat k bodu x_0. Co se bude dít se sečnou? Jak obrázky názorně ukazují, sečna se bude jakoby pootáčet po směru hodinových ručiček tak, že se svým směrem začne čím dál tím více „podobat" tečně. A jak ukazuje poslední ze čtveřice grafů, v okamžiku, kdy bod x splyne s bodem x_0 se z této sečny stane tečna k funkci f v bodě x_0. Proto si můžeme říci, že **místo abychom hledali způsob, jak vypočíst směrnici tečny, budeme hledat způsob, jak vypočíst směrnici sečny, a to takové, pro níž platí, že** $x = x_0$. Jinými slovy, můžeme použít i následující amatérskou definici: **Tečna k funkci** f **v bodě** x_0 **je takový specifický případ sečny funkce** f**, pro níž platí, že** $x = x_0$**.**

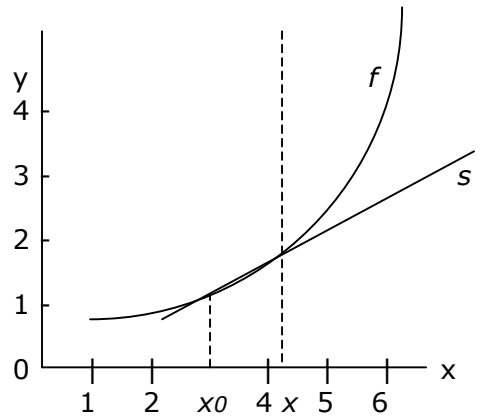
GRAF 1.



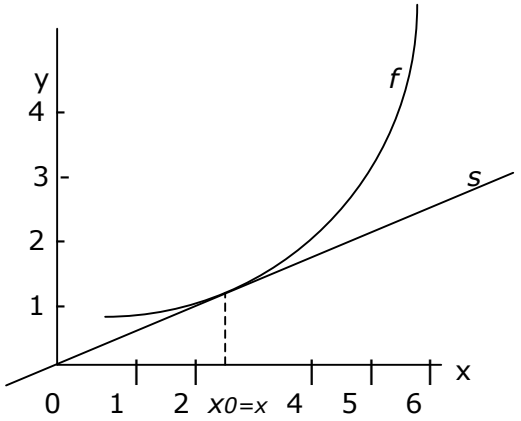
GRAF 2.



GRAF 3.



GRAF 4.



Nyní přejděme k samotnému výpočtu této směrnice. Pokusíme-li se totiž směrnici vypočítat tak, že do vzorce $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ přímo dosadíme x takové, které se bude rovnat x_0, ihned narazíme na problém, že ve jmenovateli nám vznikne 0. Pro takové případy jsme se v předchozí kapitole vybavili silným nástrojem – limitou. **Jelikož kýžený výsledek nejsme schopni spočítat přímo jako funkční hodnotu, použijeme limitu:**

směrnice tečny = $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Tento vzorec si určitě zapamatujte! Důvod je prostý: Právě jsme si totiž odvodili oficiální definici směrnice tečny k funkci f v bodě o souřadnici x_0, tedy **jde o oficiální definici derivace funkce f v bodě x_0**.

Pojďme si nyní ukázat použití tohoto vzorce na konkrétním příkladu:
Zadání: Mějme funkci $f(x) = x^2$. Našim úkolem nyní bude vypočíst směrnici tečny k této funkci v bodě o souřadnici $x_0 = 3$.

Řešení: Víme, že směrnice tečny k funkci f v bodě o souřadnici x_0 (neboli **derivace funkce f v bodě x_0**) se vypočítá jako $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Proto si vypišme jednotlivé prvky obsažené v tomto vzorci a poté si je do vzorce konkrétně dosaďme:

x je x
$x_0 = 3$
$f(x) = x^2$
$f(x_0) = 3^2 = 9$

Po dosazení: derivace v bodě $x_0 = 3$ se vypočte jako $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$. Proveďme vlastní výpočet s úpravami:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 3 + 3 = 6$$

Odpověď: Směrnice tečny k funkci $f(x) = x^2$ v bodě o souřadnici $x_0 = 3$ je rovna 6.

Závěrem si ještě jednou shrňme poznatky získané z této kapitoly. **Derivace funkce f je číslo, které odpovídá směrnici tečny k této funkci v konkrétním bodě o souřadnici x_0**. Toto číslo nám muže umožnit vyšetřit, jaký průběh funkce v daném bodě má: je-li derivace (neboli směrnice tečny) kladná, je funkce v daném bodě rostoucí; je-li naopak záporná, je funkce v daném bodě klesající. Je-li derivace rovna nule, je tečna v daném bodě vodorovná a je zde tudíž podezření, že jde o extrém.

4.4 Derivační vzorce, obecná derivace

V závěru předchozí podkapitoly je uveden názorný příklad, jak lze vypočítat derivaci funkce v konkrétním bodě x_0 přesně podle její definice. **Dnes se však derivace už tak složitě nepočítá.** Moderní matematika totiž disponuje pohodlnějšími a výkonnějšími nástroji, jak derivaci funkce vypočítat. Princip spočíván v tom, že **ke každé funkci lze vytvořit jinou speciální funkci, jejíž funkční hodnotou pro x je derivace původní funkce v bodě o souřadnici x.** Tato speciální funkce se nazývá **obecná derivace** a zapisuje se jako původní funkce s přidaným apostrofem. Jinými slovy, hledáme-li derivaci funkce f v bodě o souřadnici x_0, vytvoříme z původní funkce f speciálním postupem funkci f' (neboli obecnou derivaci), dosadíme do ní za x dané číslo x_0 a vypočteme její funkční hodnotu; výsledkem bude derivace funkce f v bodě x_0. Můžeme také říci, že derivaci funkce f v bodě o souřadnici x_0 vypočteme jako funkční hodnotu funkce f' pro x_0.

Nejdříve si pojďme ukázat použití obecné derivace na jednoduchém příkladu. Pro ilustraci použijme zadání úlohy uvedené v předchozí podkapitole, tedy výpočet derivace funkce $f(x)=x^2$ v bodě o souřadnici 3. Naučíme-li se vytvářet obecné derivace, snadno si odvodíme, že obecnou derivací funkce x^2 je $2x$, což můžeme zapsat také jako $(x^2)'=2x$ neboli $f'(x)=2x$. Do funkce $f'(x)=2x$ nyní dosaďme konkrétní bod x_0, v němž chceme směrnici tečny vypočítat, tedy číslo 3. Vyjde nám $2\cdot 3=6$.

Co z toho pro nás vyplývá? Naučíme-li se vytvářet obecnou derivaci f' k jakékoliv dané funkci f, budeme schopni jednoduše vypočíst derivaci funkci f v konkrétním bodě. Proto tato kapitola pojednává o tom, **jak vytvářet k daným funkcím obecné derivace**.

K vytváření obecných derivací slouží takzvané **derivační vzorce**. Tyto derivační vzorce jsou obecnými derivacemi elementárních funkcí. Jinými slovy, pro elementární funkce máme již přímo k dispozici jejich obecné derivace. Pro úspěšné absolvování předmětu matematika v prvním ročníku ESF je **naprosto nezbytně nutné**, aby se student všechny derivační vzorce naučil a osvojil si práci s nimi. Znalost derivačních vzorců právem patří k nejzákladnějším znalostem, které jsou po studentech vyžadovány. Proto derivační vzorce uvádím níže. Pro všechny z nich platí, že x je reálná proměnná dané funkce, n je reálné číslo a k je konstanta z oboru reálných čísel.

$(x^n)'=n.x^{n-1}$

Příklad: $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$

$k'=0$

Příklad: $f(x)=63$, $f'(x)=0$

$\sin'(x)=\cos(x)$

$\cos'(x)=-\sin(x)$

$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

$\cot'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$

$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(k^x)' = \ln(k).k^x$$

Vztahy mezi derivacemi funkcí:

Jak jsme si již vysvětlili, výše uvedené derivační vzorce jsou obecnými derivacemi elementárních funkcí. Co když ale dostaneme za úkol vypočíst derivaci takové funkce, které není elementární funkcí? V takovém případě si musíme danou funkci rozložit na více funkcí elementárních a derivaci celé funkce vypočíst podle vztahů, které mezi sebou derivace mají. K tomu slouží právě níže uvedené vzorce. V nich se mohou vyskytnout až dvě funkce. Tyto funkce jsou obecně označeny u a v.

$$(k.u)' = k.u'$$

Příklad: $(2x^2)' = 2.(x^2)' = 2.2x = 4x$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Příklad: $(\sin(x) + x^2)' = \sin'(x) + (x^2)' = \cos(x) + 2x$

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

Příklad: $(x^2.\sin(x))' = (x^2)'.\sin(x) + x^2.\sin'(x) = 2x.\sin(x) + x^2.\cos(x)$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Příklad: $\left(\frac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \frac{(x^2)'.\sin(x) - x^2.\sin'(x)}{\sin^2(x)} = \frac{2x.\sin(x) - x^2.\cos(x)}{\sin^2(x)}$

$$(u(v))' = u'(v).v'$$

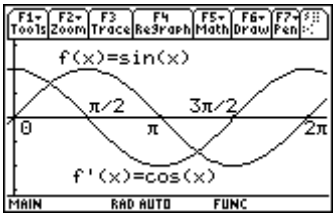
Příklad: $\sin'(x^2)$ lze napsat jako $(\sin(x^2))' = \sin'(x^2).(x^2)' = \cos(x^2).2x$

(Říkáme, že derivace složené funkce je rovna součinu derivace vnější funkce a derivace vnitřní složky.)

Není jistě nutné připomínat, že k dobrému osvojení výše uvedených operací (obzvláště pak jejich kombinací) by si měl čtenář v každém případě vyhledat ve vhodné sbírce úloh dostatek příkladů týkajících se této problematiky a dle svých časových možností jich co nejvíce vyřešit.

Je velmi důležité, aby si čtenář uměl představit vzájemný vztah funkce a její obecné derivace graficky. Proto prosím věnujte maximální pozornost následujícím odstavcům. Docela dobře je takový vztah vidět například na vzájemném vztahu funkce $\sin(x)$ a její obecné derivace $\cos(x)$. Pečlivě si nyní prohlédněte grafický průběh těchto dvou funkcí – funkce $f(x)=\sin(x)$ a její obecné derivace $f'(x)=\cos(x)$.

Na grafu vidíme, že v bodě $x=0$ funkce sinus stoupá – při shodné kalibraci os x a y má tečna v tomto bodě úhel 45°. Její směrnice je proto v počátku rovna jedné, neboli



derivace funkce f je v tomto bodě rovna jedné. Proto je také funkční hodnota její obecné derivace f' v tomto bodě rovna jedné, neboli $f'(0)=1$ (víme, že $\cos(0)=1$). Ve svém dalším průběhu v intervalu mezi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ funkce f stoupá stále méně a proto směrnice její tečny bude menší než jedna. To znamená, že v tomto intervalu klesá funkční hodnota funkce f'. V bodě $x=\frac{\pi}{2}$ je tečna k funkci f vodorovná, neboli její směrnice je rovna nule. Proto je v tomto bodě rovna nule funkční hodnota obecné derivace, neboli $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Další průběh funkce v intervalu $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ je klesající, směrnice tečny v tomto intervalu je tedy záporná. Proto má i funkce f' v tomto intervalu záporné funkční hodnoty. V bodě $x=\pi$ je směrnice tečny k funkci f rovna mínus jedné, takže funkční hodnota $f'(\pi)=-1$. V intervalu $x\in\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$ funkce f i nadále klesá, směrnice jsou i nadále záporné a proto má i funkce f' stále záporné funkční hodnoty. V bodě $x=\frac{3}{2}\pi$ je tečna k funkci f opět vodorovná, její směrnice je tedy rovna nule. Proto $f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$. Za tímto bodem funkce f opět roste, její směrnice je kladná a s ní samozřejmě i funkční hodnoty její obecné derivace f'. V bodě $x=2\pi$ je směrnice tečny k funkce f opět rovna jedné a s ní i funkční hodnota funkce f' v tomto bodě.

Shrňme si nyní tyto nesmírně cenné poznatky do následující tučně vytištěné věty: **Obecná derivace funkce f je taková funkce f', jejímiž funkčními hodnotami pro dosazená x_0 jsou derivace funkce f v těchto bodech x_0.** Jinými slovy, funkční hodnotou funkce f' pro číslo x_0 je derivace funkce f v bodě o souřadnici x_0. Také můžeme říci, pokud dosadíme za x konkrétní číslo do funkce f, vyjde nám funkční hodnota této funkce v tomto bodě, zatímco pokud dosadíme toto číslo za x do funkce f', bude funkční hodnotou derivace funkce f v tomto bodě.

5. L'HOSPITALOVO PRAVIDLO ANEB LIMITA JEŠTĚ JEDNOU

Derivace funkce má velmi široké možností využití. Samotný objev souvislostí mezi vlastnostmi funkcí a jejich derivací otevřel matematikům obrovskou sféru nových možností. Tato kapitola pojednává o speciálním postupu, který využívá derivaci k **výpočtu limity funkce**. Tento postup se nazývá L'Hospitalovo pravidlo a používá se v takových případech, kdy postupy vysvětlené v předchozích kapitolách těchto skript k výpočtu limity nestačí.

5.1 K čemu slouží L'Hospitalovo pravidlo

V kapitole LIMITA FUNKCE se čtenář seznámil s jednoduchými postupy, jak vypočítat limitu funkce pro x jdoucí ke konkrétnímu x_0. Připomeňme si, že postupy spočívaly ve vhodných algebraických úpravách dané funkce. Příkladem byla lomená funkce, kdy v čitateli i ve jmenovateli polynomy, které bylo možné krátit.

V závěru zmíněné kapitoly jsem se zmínil, že u některých lomených funkcí taková metoda výpočtu limity není možná, neboť samotný vzorec definující takovou funkci neumožňuje provést potřebné algebraické úpravy, kterými bychom mohli funkci spojitou v bodě x_0 získat. Jako příklad byla uvedena úloha na výpočet $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

V této kapitole se seznámíme se zajímavým nástrojem, umožňujícím takové případy řešit. A jak už sám název napovídá, tento nástroj se po svém objeviteli nazývá L'Hospitalovo pravidlo.

L'Hospitalovo pravidlo má následující formulaci:

Máme lomenou funkci tvaru $f(x)=\frac{u}{v}$. **Existuje-li limita funkce** $y=\frac{u'}{v'}$**, pak existuje také limita původní funkce** $f(x)=\frac{u}{v}$**, přičemž tyto limity se sobě rovnají.**

Použití tohoto pravidla je znázorněno v následujících podkapitolách.

5.2 Podmínky pro použití L'Hospitalova pravidla

Kdy použijeme k výpočtu limity L'Hospitalovo pravidlo?

Nejdříve si ještě jednou vymezme, u kterých funkcí je L'Hospitalovo pravidlo vhodným nástrojem k výpočtu limity. Jde vždy o takzvané **lomené funkce**, jejichž vzoreček má tvar zlomku. Za takových okolností můžeme brát čitatele jako jednu samostatnou funkci (označujme ji třeba u) a jmenovatele jako druhou samostatnou funkci (označujme ji v). Obecně tedy můžeme napsat, že lomená funkce má tvar $f(x)=\frac{u}{v}$. Obecné zadání úlohy k výpočtu má tedy tvar $\lim_{x\to x_0}\frac{u}{v}$.

Podmínka pro použití L'Hospitalova pravidla je, že **limita funkce ve jmenovateli pro** $x\to x_0$ **je rovna plus nekonečnu nebo mínus nekonečnu, nebo že limita funkce v čitateli i funkce ve jmenovateli pro** $x\to x_0$ **je rovna nule.** Matematicky tuto podmínku můžeme zapsat takto:

$$(\lim_{x\to x_0} u=0 \wedge \lim_{x\to x_0} v=0) \vee \lim_{x\to x_0} v=\pm\infty$$

Než L'Hospitalovo pravidlo použijeme, musíme vždy prověřit, zda výše uvedená podmínka platí.

5.3 Použití L'Hospitalova pravidla

Aplikované L'Hospitalovo pravidlo zní: **Limita podílu dvou funkcí je rovna limitě podílu jejich obecných derivací.** Matematicky můžeme pravidlo zapsat včetně vstupní podmínky uvedené v předchozí podkapitole takto:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u}{v}=\lim_{x\to x_0}\frac{u'}{v'}\quad|\quad(\lim_{x\to x_0}u=0\wedge\lim_{x\to x_0}v=0)\vee\lim_{x\to x_0}v=\pm\infty$$

Princip tedy využívá toho, že derivováním čitatele i jmenovatele se můžeme zbavit nežádoucího nekonečna v lomené funkci či nepřijatelné nuly v jejím jmenovateli.

Postup si můžeme ukázat na již zmíněném příkladu:

Zadání: Vypočtěte: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$

Řešení: Funkci $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ nelze žádnými algebraickými úpravami upravit na funkci v bodě 0 spojitou, jejíž funkční hodnota by odpovídala limitě dané funkce. Jako jediná možnost nám zbývá L'Hospitalovo pravidlo. Musíme ovšem nejdříve prověřit, zda jej můžeme aplikovat.

Víme, že L'Hospitalovo pravidlo můžeme aplikovat pouze tehdy, když daná limita pro čitatele se rovná nule, nekonečnu nebo mínus nekonečnu, a zároveň daná limita pro jmenovatele se rovná nule, nekonečnu nebo mínus nekonečnu. V tomto případě platí:

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)=\sin(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}x=0$$

Obě podmínky jsou tedy splněny. L'Hospitalovo pravidlo aplikovat můžeme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin'(x)}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=\lim_{x\to 0}\cos(x)=\cos(0)=\underline{\underline{1}}$$

Odpověď: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\underline{\underline{1}}$

Čtenář se zcela určitě setká také s úlohami, kdy L'Hospitalovo pravidlo aplikovat můžeme (podmínky splněny budou), nicméně na první pohled to zdánlivě nepovede k řešení, neboť i po derivaci čitatele a jmenovatele se stále bude ve jmenovateli vyskytovat 0 nebo kdekoliv ve funkci se stále bude nacházet nepohodlné ∞. Nuže, v takovém případě prostě **L'Hopitalovo pravidlo aplikujeme opakovaně** (budou-li pro opakovanou aplikaci splněny podmínky)**, dokud nám nevyjde přijatelná funkce**. To si ukažme na následující řešené úloze:

Zadání: Vypočtěte: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}$

Řešení: Algebraické úpravy nepřipadají v úvahu, proto prověříme, zda je možno aplikovat L'Hospitalovo pravidlo:

$\lim_{x\to 0}\sin(x)-x=\sin(0)-0=0$

$\lim_{x\to 0}x^3=0^3=0$

L'Hospitalovo pravidlo tedy aplikovat můžeme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x)-x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2}$$

Tím jsme sice zatím výsledek nezískali, zkusíme však L'Hospitalovo pravidlo zopakovat. Nezapomeneme samozřejmě nejdříve prověřit, zda jej můžeme znovu aplikovat:

$\lim_{x\to 0}\cos(x)-1=\cos(0)-1=1-1=0$

$\lim_{x\to 0}3x^2=3.0^2=0$

Aplikace L'Hospitalova pravidla je tedy možná:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-1)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{6x}$$

Jak je vidět, stále to ještě nestačí, neboť dosazením bychom opět získali ve jmenovateli nulu. Proto prověříme, zda je možno proces ještě jednou opakovat:

$\lim_{x\to 0}-\sin(x)=-\sin(0)=0$

$\lim_{x\to 0}6x=6.0=0$

Podmínka je splněna, proto pokračujeme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin'(x)}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{6}=\frac{-\cos(0)}{6}=-\frac{1}{6}$$

Na závěr si uveďme ještě jednu pěknou řešenou úlohu s nekonečnem:

Zadání: Vypočtěte: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{-x+11}$

Řešení: Prověříme, zda lze aplikovat L'Hospitalovo pravidlo:

$\lim_{x\to\infty}\ln(x)=\infty$

$\lim_{x\to\infty}-x+11=-\infty$

Podmínka je tedy splněna, proto vypočteme:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{-x+11}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln'(x)}{(-x+11)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

6. VYŠETŘOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

Nyní, když je čtenář již zvyklý na zobrazování funkcí v grafech, je čas vysvětlit, jakým způsobem lze průběh funkce zjistit výpočetními metodami. Jde o velmi zajímavou a poutavou látku; proto si myslím, že by se čtenáři mohla líbit. Jak si brzy ukážeme, vyšetřování průběhu funkcí má široké uplatnění v praxi.

6.1 Co znamená vyšetřit průběh funkce

Vyšetřit konkrétní funkci znamená provést několik úkonů, které nám umožní zjistit její vlastnosti a utvořit si představu o tom, jak křivka dané funkce vypadá. To nám umožní mimo jiné načrtnout graf dané funkce.

Celkové vyšetření funkce se dá shrnout do pěti základních kroků. Je třeba:

1. **krok**
   a) zjistit největší podmnožinu reálných čísel, na které lze definovat funkci zadanou vzorečkem
   b) zjistit, pro která x se funkční hodnota rovná nule (takzvané **nulové body**)
   c) zjistit, kde je graf funkce nad osou
   d) zjistit, kde je graf funkce pod osou
2. **krok**
   a) zjistit, kde jsou extrémy funkce
   b) zjistit, kde je funkce rostoucí
   c) zjistit, kde je funkce klesající
3. **krok**
   a) zjistit, kde má funkce inflexní body
   b) zjistit, kde je funkce konvexní
   c) zjistit, kde je funkce konkávní
4. **krok**
   a) zjistit, zda má funkce asymptotu bez směrnice a kde
   b) zjistit, zda má funkce asymptotu se směrnicí a kde
5. **krok**
   načrtnout graf

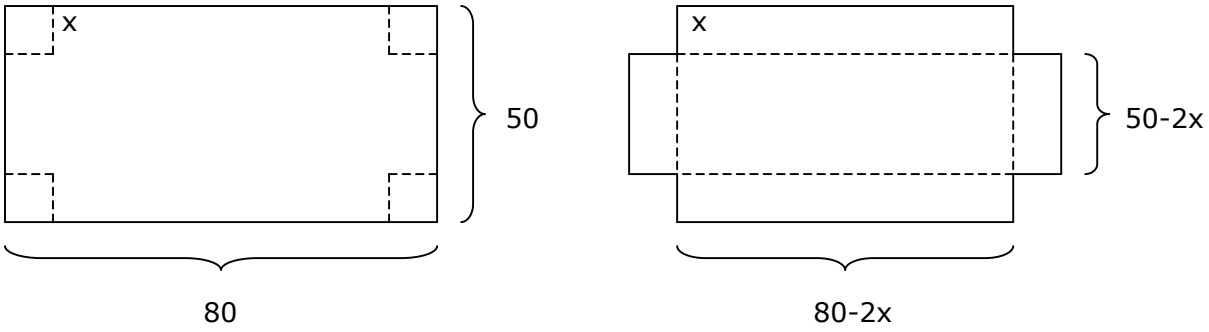
O tom, jaké nástroje a postupy nám k takovému vyšetřování funkcí slouží, bude pojednávat celá tato kapitola.

6.2 K čemu se hodí vyšetřování vlastností funkce

Než se pustíme do podrobnějšího výkladu obecného vyšetřování vlastností funkcí, bude dobré vědět, k čemu nám tato činnost vlastně bude. Proto v této podkapitole předkládám čtenáři docela pěknou úlohu s řešením, která nám poslouží jako ukázka možnosti praktického využití vyšetřování některých vlastností funkce. Patří mezi takzvané **slovní úlohy na extrémy**. Je sice pravda, že konkrétní postupy vyšetřování průběhu funkce budou vyloženy až v následující podkapitole; následující úloha však bude snadno logicky odvoditelná, a proto si ji můžeme vyřešit už nyní za pomocí znalostí, které jsme získali v předchozích kapitolách. Tím, že si ji vyřešíme, si přirozenou cestou odvodíme důležitou část postupů, které se při vyšetřování funkcí používají.

Zadání: Při úklidu bytu potřebujeme krabici bez víka, která má co největší objem. K dispozici máme jen lepicí pásku a kartón tvaru obdélníku 50 x 80 cm. Krabici z něj můžeme vyrobit tak, že v rozích vystřihneme čtyři shodné čtverce a ze zbývajícího tvaru složíme krabici, jejíž stěny slepíme lepicí páskou. Jak dlouhá musí být strana vystřižených čtverců?

Řešení: Nakresleme si náčrtek:



Neznámou délku strany čtverců označíme jako x. Víme, že objem kvádru vypočteme jako součin jeho délky, šířky a výšky. Proto v našem konkrétním případě objem krabice vypočteme:

$$V = (80 - 2x) \cdot (50 - 2x) \cdot x$$

Jde vlastně o funkci a objem je její funkční hodnou. Můžeme ji tedy tak zapsat:

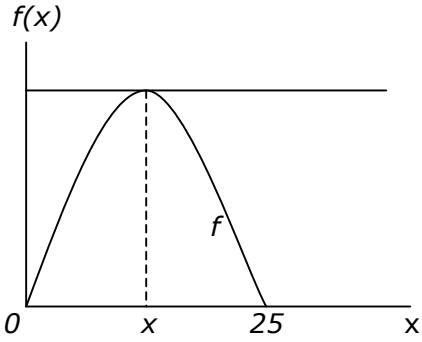
$$f(x) = (80 - 2x) \cdot (50 - 2x) \cdot x$$

Aby se nám s funkcí lépe pracovalo, upravíme její zápis odstraněním závorek:

$$f(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$$

Zamysleme se nyní alespoň v hrubých rysech nad průběhem této funkce. Z náčrtku kartónu je zřejmé, že strana vystřiženého čtverce nemůže být delší než polovina kratší strany krabice. Jelikož kratší strana kartónu má rozměr 50 cm, je (alespoň teoreticky) největší možná délka strany čtverce 25 cm. Bude-li hodnota x tak vysoká, že se bude blížit 25, bude šířka krabice nepatrná, takže i objem bude nepatrný. Pokud bude hodnota x naopak blízká nule, bude zas velmi malá výška krabice a s ní i objem. Největšího možného objemu krabice tedy dosáhneme tehdy, zvolíme-li optimální hodnotu někde mezi 0 a 25. Lze tedy odhadnout, že graf naší funkce bude vypadat přibližně takto:

Maximální objem při hledaném x neboli maximum funkce



Z dosavadního rozboru vyplývá, že **hledaným řešením je takové x, v němž má funkce $f(x)=4x^3-260x^2+4000x$ maximum**. Jak takový bod najdeme? Dobře si v grafu prohlédněme bod, v němž má naše funkce maximum. Tento bod má totiž jedinečnou vlastnost, a sice že tečna k dané funkci je v něm vodorovná. A je-li přímka vodorovná, je její směrnice rovna nule. Jinými slovy, směrnice tečny k funkci v bodě, kde má funkce maximum, je rovna nule. Jak už dobře víme, směrnice tečny k funkci se nazývá derivace funkce. Můžeme tedy konečně vyvodit následující závěr: **V bodě, kde má funkce maximum, je její derivace rovna nule.** Tento závěr je nesmírně důležitý (mimochodem, o této skutečnosti je zmínka již v kapitole „Typické příklady souvislosti průběhu funkce a derivace").

Pro řešení naší úlohy tedy vyplývá, že **budeme hledat takové x, němž je derivace funkce $f(x)=4x^3-260x^2+4000x$ rovna nule**. To lze zapsat rovnicí:

$$(4x^3-260x^2+4000x)'=0$$

Vytvoříme obecnou derivaci:

$$12x^2-520x+4000=0$$

Vznikla nám obyčejná kvadratická rovnice. Vypočteme její kořeny:

$$x_{1,2}=\frac{520\pm\sqrt{(-520)^2-4\cdot 12\cdot 4000}}{2\cdot 12}=\frac{520\pm\sqrt{270400-192000}}{24}=$$

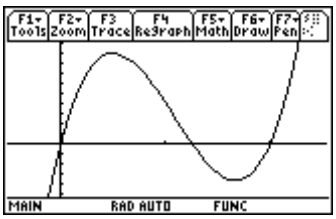
$$=\frac{520\pm\sqrt{270400-192000}}{24}=\frac{520\pm\sqrt{78400}}{24}=\frac{520\pm 280}{24}$$

$$x_1=\frac{240}{24}=\underline{\underline{10}} \qquad x_2=\frac{800}{24}=\underline{\underline{\frac{100}{3}}}$$

Vyšly nám tedy dva kořeny: $x_1 = 10$ a $x_2 = 33,\overline{3}$. Druhý kořen ovšem řešením být nemůže, neboť strana čtverce nemůže být delší než 25 centimetrů[7]. Řešením je tedy $x = 10$.

Odpověď: Maximálního objemu krabice dosáhneme, vystřihneme-li z kartónu čtverce o délce strany 10 cm.

Pro úplnost přidávám ještě graf funkce $f(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$, narýsovaný kapesní matematickou laboratoří:



Hledání extrémů funkce nepředstavuje zdaleka jediné praktické využití vyšetřování průběhu funkce. V současnosti se vyšetřování funkcí nejšíře uplatňuje ve stavebnictví, strojírenství, jaderné fyzice a „královně věd" - synergetice[8].

[7] Tato úloha byla úmyslně navržena tak, aby bylo na první pohled zřejmé, že druhý kořen nepřipadá díky své příliš vysoké hodnotě v úvahu a maximem musí být tedy kořen první. Obecně je však nutno provést ještě další šetření, abychom se ujistili, že konkrétní kořeny skutečně odpovídají maximu funkce. O tom bude podrobněji pojednáno v další podkapitole.

[8] Synergetika je jednou z nejmladších, nejkrásnějších a nejsložitějších věd. Zabývá se synergiemi neboli souvislostmi mezi příčinou a důsledkem. Zkoumá obecné zákonitosti vzniku, stability a zániku uspořádaných časoprostorových struktur ve složitých systémech, samočinně i vynuceně regulovaných. Pracuje např. s vyšší kombinatorikou, náročnou matematikou, náhodnými jevy a simulací zkoumaných systémů počítačově kompilovanými algoritmy (např. v mnohorozměrných neuronových sítích). Využívá hlubinných poznatků ze všech dostupných věd – počínaje humanitními (sociologie, psychologie, historie) a konče ryze exaktními (jaderná fyzika, biochemie). Výsledky synergetického výzkumu se uplatňují především při analýzách paradoxních jevů a vysoce sofistikovaných prognózách. Na celém světě existuje jen několik desítek firem, které se zabývají synergetikou, přičemž zakázky získávají např. od zpravodajských služeb v rámci přísně utajených vládních programů, nejsilnějších světových korporací za účelem dlouhodobých marketingových prognóz, asociací pro kosmický výzkum apod. Ceny zakázek se často pohybují v hodnotě desítek miliónů dolarů. Nadšenější čtenáři si mohou zkusit sami naprogramovat jednoduché počítačové programy pro synergetickou simulaci zkoumaných systémů, např. v jazyce C, C++, Pascal či Bash nebo v programech typu MatLab (například takzvaný model „lišky a zajíci").

6.3 Obecné postupy k vyšetřování funkcí

Nadešel čas odvodit si přirozenou logickou úvahou postupy, které se používají k vyšetřování funkcí. V této podkapitole si tyto postupy odvodíme a vysvětlíme obecně, v příští podkapitole si ukážeme jejich aplikaci prakticky na konkrétní funkci.

Projděme si nyní postupně jednotlivé kroky potřebné pro kompletní vyšetření průběhu funkce.

1. KROK

Nejdříve je třeba **zjistit největší podmnožinu reálných čísel, na které lze definovat funkci zadanou vzorečkem**. Cílem je vlastně zjistit, pro kterou množinu čísel má daná funkce smysl. Postupujeme vylučovací metodou – najdeme taková čísla, která by po dosazení za x dala vzniknout nule ve jmenovateli. Body, v nichž funkci nelze definovat, si pečlivě zapíšeme.

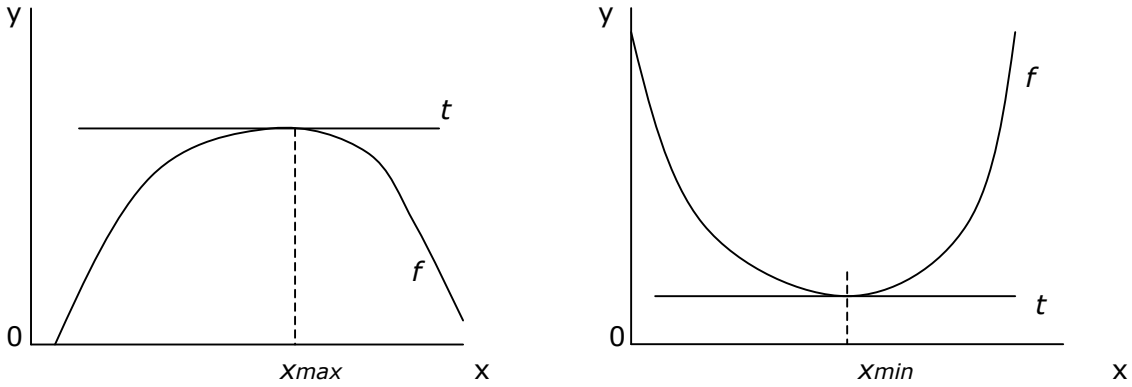
Dále je nutno **zjistit, pro která x se funkční hodnota rovná nule** (takzvané **nulové body**). Tím vlastně prověříme, jestli se graf funkce protíná s osou x, neboť nulové body jsou právě takové body, v nichž funkce protíná osu x. Jak je zjistíme? Odpověď si snadno odvodíme, uvědomíme-li si, že hledat bod, v němž funkce protíná osu x, znamená hledat takové x, pro které se funkční hodnota dané funkce bude rovnat nule (neboť osa x je vlastně množinou bodů s ypsilonovou souřadnicí rovnou nule). Z toho logicky plyne, že stačí vzoreček dané funkce položit rovno nule a vzniklou rovnici vyřešit. Pokud rovnice nemá ani jeden kořen, znamená to, že funkční hodnota dané funkce není nikdy rovna nule a graf funkce se tudíž nikde neprotíná s osou x.

Závěrem prvního kroku je potřeba zjistit, kde je graf funkce nad osou x a kde pod osou x. Čtenáři je jistě jasné, že nad osou je funkce tam, kde jsou její funkční hodnoty kladné, a pod osou naopak tam, kde jsou její funkční hodnoty záporné. Proto je jedním z možných postupů řešení pomocí nerovnice – položit vzoreček funkce vetší než nula (tam je funkce nad osou x) a menší než nula (tam je pod osou x). Ačkoliv tento způsob řešení je matematicky perfektně korektní, je do jisté míry zbytečně pracný. Existuje na to příjemný trik: **Načrtneme si číselnou osu** x **a na ní vyznačíme nulové body a body, v nichž funkce není definována**. Tím vlastně rozdělíme osu x na úseky mezi jednotlivými vyznačenými body. Poté si v každém úseku zvolíme libovolný bod x, v němž se nám bude co nejsnáze počítat funkční hodnota dané funkce. Je samozřejmé, že vyjde-li funkční hodnota **kladná**, je funkce v daném úseku **nad** osou x; vyjde-li naopak záporná $f(x)$, svědčí to samozřejmě o poloze křivky funkce v konkrétním úseku **pod** osou x. **Úseky si podle výsledných hodnot označte podél osy znamínky + a -. Pozor!** Mnoho studentů se dopouští časté chyby, a sice že si polohu křivky vypočtou jen u jediného úseku a ostatní úseky označí tak plusy a mínusy střídavě, neboť mylně předpokládají, že se úseky funkce nad osou x a pod osou x pravidelně střídají. To ovšem rozhodně nemusí platit! Například obyčejná parabola je funkce, která má nulový bod $x = 0$ a nalevo i napravo od něj je nad osou x. Proto **nikdy** nepředpokládejte, že se kladný úsek se záporným střídá! Vždy si poctivě v každém úseku zvolte vhodné číslo mezi nulovými body a vypočtěte pro ně funkční hodnotu.

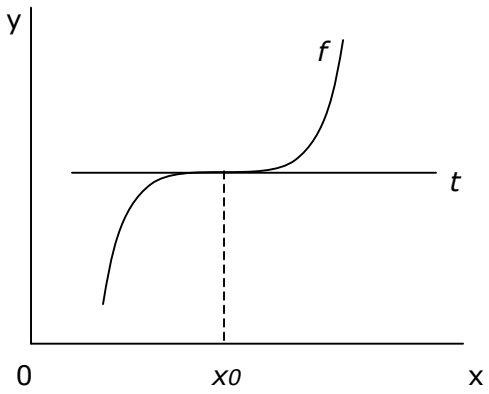
Vyšetřené hodnoty a intervaly zapište do odpovědi.

2. KROK

V druhém kroku musíme zjistit, ve kterých intervalech je funkce rostoucí, ve kterých je klesající a kde má extrémy. Jak jsme se již dopátrali v minulé podkapitole, extrémy jakékoliv funkce mají jednu specifickou vlastnost, a sice že tečna k funkci je v extrémech vodorovná a její směrnice je tedy rovna nule. Jinými slovy, **v extrému je derivace funkce rovna nule** (viz grafický náčrtek).



Pozor! Častou chybou, které se mnoho studentů dopouští, je mylný předpoklad, že v každém bodě, v němž je derivace funkce rovna nule, je extrém. To ovšem rozhodně nemusí být pravda! Na níže uvedeném náčrtku je znázorněn příklad, kdy derivace je rovna nule, avšak o extrém nejde:

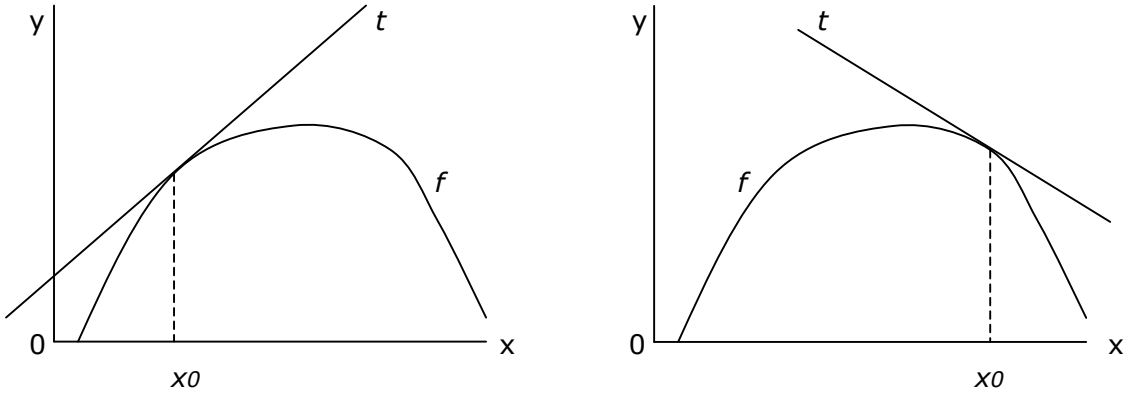


Z výše uvedeného důvodu používáme pojem **podezření na** extrém. Říkáme, že **v bodech, kde je derivace funkce rovna nule, je podezření na extrém.** Proto pro takové body s nulovou derivací zavádíme samostatný pojem **stacionární body**. Stacionární body jsou tedy takové body, v nichž je derivace funkce rovna nule a proto je v nich podezření na extrém.

Jak tedy zjistíme, zda v bodě, kde je derivace rovna nule, se nachází extrém? Zamyslíme-li se nad tím, co extrém je, uvědomíme si, že je to takový bod, v němž se rostoucí průběh funkce mění na klesající (v takovém případě jde o maximum) či klesající průběh na rostoucí (pak jde o minimum). **Za extrém tedy považujeme takový bod, v němž je derivace rovna nule a v němž se zároveň mění průběh funkce z rostoucího na klesající či z klesajícího na rostoucí**. Z toho vyplývá, že abychom našli extrémy funkce, musíme také zjistit, kde je průběh funkce rostoucí a kde klesající. **V těch stacionárních bodech, v nichž se bude průběh funkce střídat, budou extrémy.**

Začneme tedy tím, že si najdeme takové body, v nichž je na extrém podezření. Jak už víme, půjde o takové body, kde je derivace funkce rovna nule, neboli takzvané stacionární body. To provedeme jednoduše tím, že si **vytvoříme obecnou derivaci původní funkce**, položíme ji rovno nule a takto vzniklou rovnici vyřešíme. Výsledné kořeny jsou taková x_0, v nichž je derivace rovna nule. Opět si načrtneme osu x a tyto stacionární body si na ni vyznačíme. **Dále na tuto číselnou osu opět vyznačíme ty body, v nichž funkce není definována**.

Nyní musíme rozlišit, které ze stacionárních bodů jsou extrémy. K tomu je třeba zjistit, kde je funkce rostoucí a kde klesající, neboť jsme si odvodili, že v extrému se rostoucí průběh střídá s klesajícím či naopak. Jak již víme z předchozích kapitol, směrnice tečny k funkci je kladná tam, kde je funkce rostoucí, a záporná tam, kde je funkce klesající. Jinými slovy, **funkce je rostoucí v bodech, v nichž je derivace kladná, a naopak klesající v bodech, kde je derivace záporná** (viz následující náčrtek).

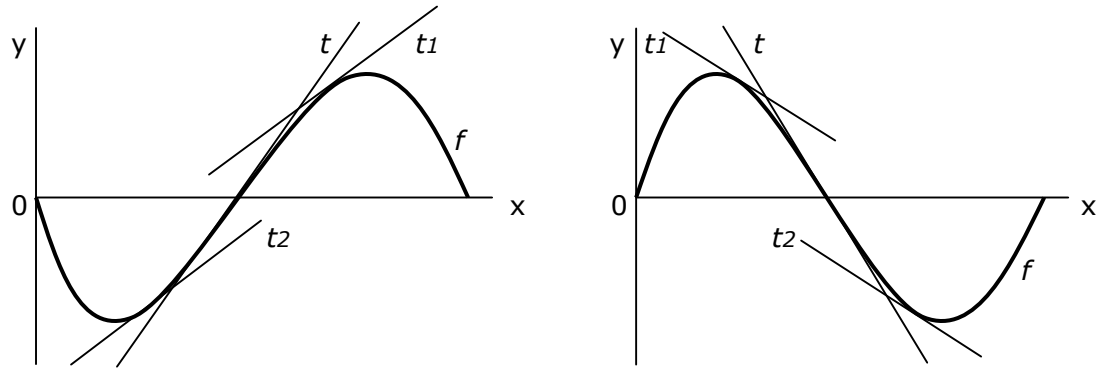


Jelikož všechny body, které by mohly být hranicí mezi kladným a záporným průběhem derivace, jsme si již na načrtnutou číselnou osu x vyznačili, stačí opět vybrat v jednotlivých intervalech mezi vyznačenými body čísla, s nimiž se nám dobře pracuje, dosadit v každém z úseků jedno takové číslo do obecné derivace a vypočíst její funkční hodnotu. V těch úsecích, kde vyjde derivace kladná, je funkce rostoucí. Naopak v úsecích, kde vyjde derivace záporná, je funkce klesající. Rostoucí a klesající úseky si podél osy opět vyznačme (pro rostoucí úsek je zvykem používat značku $\uparrow$ a pro klesající značku $\downarrow$). Nyní se stačí podívat na osu a najít ty stacionární body, v nichž se mění průběh rostoucí na klesající (tam půjde o maxima) a průběh klesající na rostoucí (tam půjde o minima). Vyšetřené extrémy a intervaly rostoucí a klesající zapište do odpovědi.

3. KROK

V tomto kroku je potřeba zjistit, kde je funkce **konvexní** (tvaru $\cup$, jakoby „promáčknutá dolů"), kde je **konkávní** (tvaru $\cap$, jakoby „vyboulená nahoru") a kde jsou **inflexní body** neboli body, v nichž dochází ke zvratu průběhu konkávního v konvexní či konvexního v konkávní.

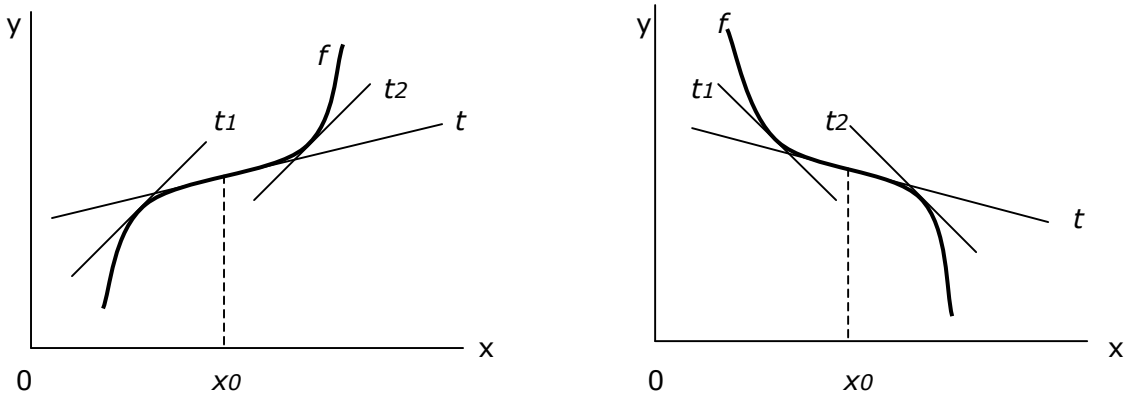
Nyní bych se rád čtenáře zeptal, zda by dokázal sám přijít na způsob, jak tyto vlastnosti vyšetřit. Není totiž tak složité si odpověď logicky odvodit, ačkoliv se na první pohled může zdát, že řešení je velmi daleko. Nejdůležitější je uvědomit si, jaké matematické vlastnosti stacionární bod má. K tomu nám pomohou následující grafy:



V prvním grafu jsou znázorněny tečny k funkci f v různých částech úseku, kde je tato funkce rostoucí. Tečny t_1 a t_2 se dotýkají funkce f v „obyčejných" bodech, zatímco tečna t se dotýká funkce f v inflexním bodě. Všechny tři tečny mají rostoucí sklon a tudíž **kladnou směrnici**. Všimněme si, že ani před inflexním bodem, ani za ním, nemá tečna tak strmý sklon jako právě v inflexním bodě. Jinými slovy, směrnice tečny v inflexním bodě je větší než v jiných bodech, neboli je extrémní. A jelikož směrnice tečny se nazývá derivace, můžeme říct, že **v inflexním bodě je derivace extrémní**.

Ve druhém grafu jsou znázorněny tečny k funkci f v různých částech úseku, kde je tato funkce klesající. Tečny t_1 a t_2 se opět dotýkají funkce f v „obyčejných" bodech, zatímco tečna t se dotýká funkce f v inflexním bodě. Všechny tři tečny mají klesající sklon a tudíž **zápornou** směrnici. Všimněte si, že ani před inflexním bodem, ani za ním, nemá tečna tak strmý sklon jako právě v inflexním bodě. Směrnice tečny v inflexním bodě je nižší než v jiných bodech. A poněvadž směrnice tečny se nazývá derivace, můžeme říct, že **v inflexním bodě je derivace extrémní**.

Uveďme si ještě následující dva modelové případy:



V případě prvního grafu jde o funkci, jejíž křivka má od bodu x_0 doleva tvar části útvaru $\cap$, je zde tedy konkávní. Od bodu x_0 doprava má křivka tvar části útvaru $\cup$, je zde tedy konvexní. Bod x_0 je inflexní bod. Vidíme, že v tomto bodě je tečna sice rostoucí, avšak ve všech ostatních bodech jsou tečny rostoucí ještě příkřeji. Funkce má tedy má tedy v bodě x_0 nejmenší derivaci. Můžeme proto konstatovat, že **v inflexním bodě je derivace extrémní**.
Ve případě druhého grafu jde o funkci, jejíž křivka má od bodu x_0 doleva tvar části útvaru $\cup$, je zde tedy konvexní. Od bodu x_0 doprava má křivka tvar části útvaru $\cap$, je zde tedy konkávní. Bod x_0 je inflexní bod. Vidíme, že v tomto bodě je tečna sice klesající, avšak ve všech ostatních bodech jsou tečny klesající ještě příkřeji. Funkce má tedy má tedy v bodě x_0 největší derivaci. Můžeme proto konstatovat, že **v inflexním bodě je derivace extrémní**.

Z výše uvedených poznatků můžeme nyní vyvodit důležitý závěr: **Inflexní bod je takový bod, v němž je derivace funkce extrémní**. Jinými slovy, hledáme-li inflexní body, musíme zjistit, ve kterých x má daná funkce f extrémní derivaci. Uvědomme si, že vlastně hledáme extrémy té funkce, jejímiž funkčními hodnotami pro dosazená x jsou derivace funkce f v těchto bodech x. A takovou funkcí je f' (obecná derivace funkce f). Nyní je již snadné se dovtípit, jak tyto body najdeme: **Inflexní body jsou tam, kde má extrémy funkce f'.** Jelikož hledání extrémů jsme si vysvětlili v předchozím kroku, kde jsme hledali extrémy funkce f, nebude nic těžkého najít extrémy funkce f'. Použijeme vlastně stejný postup, jaký jsme použily v předchozím kroku - s tím rozdílem, že funkcí, jejíž extrémy budeme hledat, nebude funkce f, nýbrž funkce f'.

Pojďme si postup zapsat. Zapíšeme si funkci f', což je funkce, jejíž extrémy v tomto kroku hledáme. Jelikož víme, že extrémy jsou body, kde je derivace rovna nule a zároveň kde se střídá průběh rostoucí s klesajícím či naopak, musíme si vytvořit obecnou derivaci funkce, jejíž extrémy hledáme. Protože tedy jde o derivaci funkce f', zapíšeme ji jako f''. Tato funkce je obecná derivace obecné derivace funkce f, a proto se nazývá **druhá derivace** funkce f (lidově můžeme říci, že je to *dvakrát zderivovaná funkce* f). Výraz funkce f'' položíme rovno nule a rovnici vyřešíme. Tím získáme body, v nichž je podezření na extrém funkce f' neboli na extrémní derivaci funkce f. Opět si načrtneme číselnou osu x a tyto podezřelé body na ni vyznačíme. Nezapomeneme ani nyní na tuto osu dále vyznačit body, v nichž funkce nemůže být definována. Tím máme vyznačeny všechny body, v nichž by se průběh funkce f' mohl střídat z rostoucího na klesající či naopak. Abychom zjistili, kde funkce f' roste a kde klesá, zvolíme si již tradičně v každém úseku mezi vyznačenými body na číselné ose jeden bod, s nímž se nám bude dobře počítat, dosadíme jej do f'' a vypočteme. **V úsecích, kde vyjde kladné číslo, je funkce f konvexní, a v úsecích, kde vyjde záporné číslo, je funkce f konkávní.** Tyto vlastnosti si opět označíme podél číselné osy, zvykem je používat značky $\cup$ a $\cap$. Inflexní body jsou samozřejmě ty body, kde je druhá derivace rovna nule a kde se zároveň střídá konvexní úsek funkce s konkávním či konkávní s konvexním.

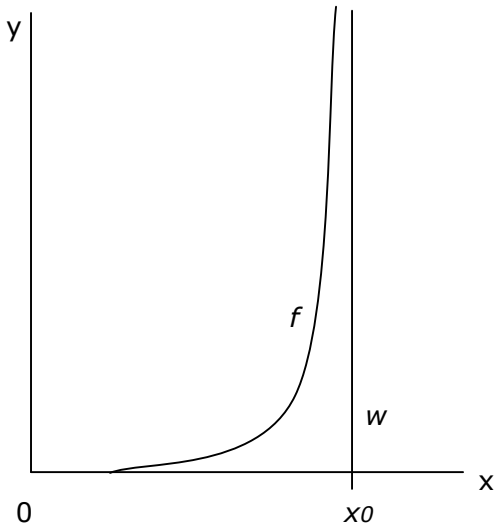
Vyšetřené inflexní body a intervaly zapište do odpovědi.

4. KROK

Nyní je potřeba zjistit, zda vyšetřovaná funkce f má asymptoty, a pokud ano, tak kde. Vysvětleme si nejdřív pojem **asymptota**.

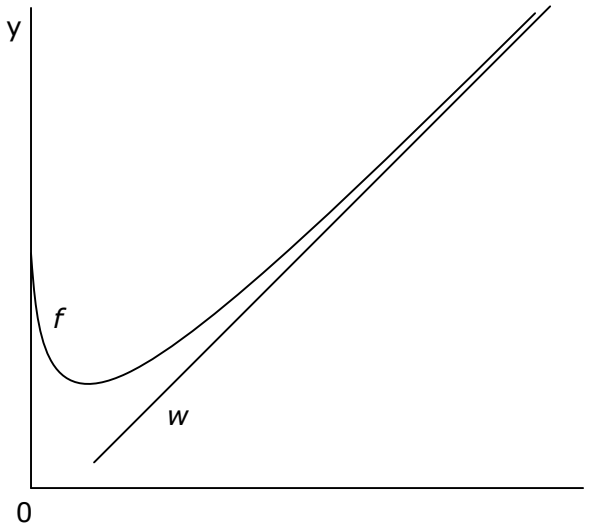
Nejdříve objasním pojem asymptota co nejjednodušeji, ačkoliv ne zrovna úplně korektním matematickým jazykem: Asymptota je tečna k funkci v nekonečnu. Tuto strohou větu ihned upřesním: Asymptota je tečna k dané funkci v bodě $x = \pm\infty$ nebo v bodě $y = \pm\infty$. Je to tedy taková přímka, ke které se graf funkce maximálně těsně přibližuje, avšak v žádném reálném bodě $[x; y]$ se jí nedotkne (dotkne se jí až v nekonečnu nebo v mínus nekonečnu). To vlastně znamená, že měníme-li hodnotu x takovým směrem, že graf funkce v bodě x se bude k této přímce neustále přibližovat, v žádném bodě o souřadnici x se jí „úplně" nedotkne. Je samozřejmé, že asymptotu mají pouze některé funkce.

Rozlišujeme dva druhy asymptoty. Prvním druhem je takzvaná **asymptota bez směrnice**. Nazývá se tak proto, že je vertikálou, a jak víme, vertikální přímky nemají směrnici. Jde tedy o přímku, která protíná osu x kolmo v bodě x_0. Je to tedy tečna k dané funkci v bodě $y = \pm\infty$. Jedna z možností, jak může vypadat asymptota bez směrnice, je znázorněna na níže uvedeném grafu jako přímka w, která protíná osu x v bodě x_0. V levém okolí bodu x_0 je daná funkce f definována, avšak pro samotný bod x_0 definována není. Čím blíže se bude x náležící do definičního oboru funkce f přibližovat zleva k číslu x_0, tím blíže k asymptotě w se pochopitelně bude přibližovat jemu odpovídající bod na funkci f. Protože funkce f je v levém okolí bodu x_0 rostoucí až do $y = \infty$, platí, že čím blíže bude x k bodu x_0, tím vyšší bude funkční hodnota funkce f. Jinými slovy, čím blíže bude x k bodu x_0, tím více se bude $f(x)$ blížit nekonečnu. Proto platí matematický vztah: **Pokud se limita funkce pro x jdoucí zleva či zprava k x_0 blíží k nekonečnu nebo mínus nekonečnu, pak v bodě x_0 se nachází asymptota bez směrnice**.

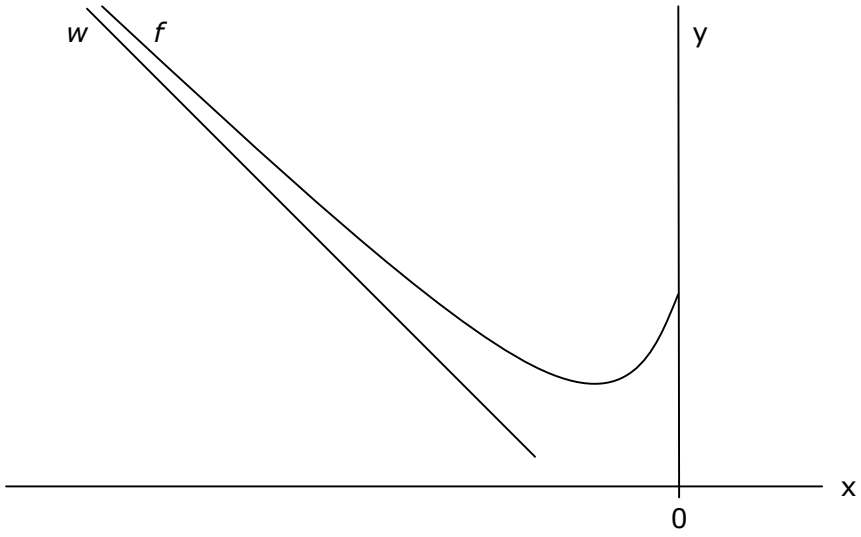


Abychom si nyní odvodili, jak se asymptota bez směrnice hledá, shrňme si nyní vše, co o ní víme: **Asymptota bez směrnice je kolmicí k ose x v bodě x_0, v němž funkce f není definována, přičemž platí, že $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty$.** Z toho vyplývá jednoduchý postup, jak zjistit, jestli má vyšetřovaná funkce asymptotu bez směrnice a kde: **Nejdříve si vypíšeme všechny body, v nichž funkce f není definována, neboť jedině tam se mohou asymptoty nacházet (jde o takzvané body s podezřením na asymptotu). Poté u každého z těchto bodů prověříme, zda limita vyšetřované funkce pro x jdoucí zleva či zprava k tomuto bodu je rovna plus/mínus nekonečnu. Pokud ano, je v daném bodě asymptota bez směrnice.**

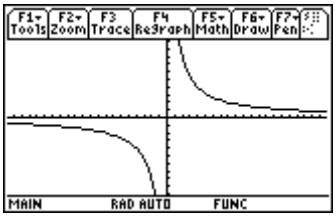
Druhým typem asymptoty je takzvaná **asymptota se směrnicí**. Je to tedy jakákoliv asymptota, které není vertikálou. Jde vlastně o tečnu k funkci v bodě $x = \pm\infty$. Na níže načrtnutých grafech jsou znázorněny různé druhy asymptot se směrnicí. První z grafů znázorňuje případ, kdy se funkce f dotýká asymptoty se směrnicí w v plus nekonečnu. Jinými slovy, bude-li se x blížit k nekonečnu, bude se graf funkce f přibližovat v bodě x velmi těsně k přímce w. Pojmeme-li w jako afinní funkci, pak vlastně platí, že s rostoucím x směrem k nekonečnu bude $f(x)$ stále bližší $w(x)$, avšak neexistuje žádné x takové, v němž by se $f(x)$ a $w(x)$ rovnaly. Proto platí vztah, že $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} w(x)$.



U jiných funkcí může naopak nastat případ, kdy se funkce f dotýká asymptoty se směrnicí w v mínus nekonečnu; jde tedy o tečnu k funkci f v bodě $x = -\infty$. Bude-li se x blížit k mínus nekonečnu, bude se graf funkce f přibližovat velmi těsně k přímce w. Pojmeme-li opět w jako afinní funkci, bude platit, že s rostoucím x směrem k mínus nekonečnu bude $f(x)$ stále bližší $w(x)$, avšak neexistuje žádné x takové, v němž by se $f(x)$ a $w(x)$ rovnaly. Platí vztah $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} w(x)$.



Příkladem hodným pozoru je funkce $f(x)=\frac{1}{x}$. Její asymptotou bez směrnice je osa y a asymptotou se směrnicí (rovnou nule) je osa x, jak je dobře vidět na následujícím grafu:



Nyní si vysvětleme, jak prověříme, zda vyšetřovaná funkce má asymptoty se směrnicí, a pokud má, jaký mají asymptoty zápis jakožto afinní funkce. Protože asymptoty se směrnicí jsou přímky, které se dané funkce dotýkají v bodě $x=+\infty$ nebo $x=-\infty$, může mít funkce asymptoty nejvýše dvě – jednu dotýkající se v mínus nekonečnu a druhou v plus nekonečnu. **Platí, že:**

Funkce f má asymptotu v nevlastním bodě $x=+\infty$ tehdy, pokud $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-a\cdot x-b\right)=0$, přičemž $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ a $b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-a\cdot x\right)$. Tato asymptota je grafem afinní funkce $w(x)=a\cdot x+b$.

Funkce f má asymptotu v nevlastním bodě $x=-\infty$ tehdy, pokud $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-a\cdot x-b\right)=0$, přičemž $a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ a $b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-a\cdot x\right)$. Tato asymptota je grafem afinní funkce $w(x)=a\cdot x+b$.

Zjištěné asymptoty zapíšeme do odpovědi.

Závěrem si ještě zopakujme srozumitelná vysvětlení pojmu asymptota:
Asymptota bez směrnice je tečna k funkci v bodě $y=\infty$ či $y=-\infty$.
Asymptota se směrnicí je tečna k funkci v bodě $x=\infty$ či $x=-\infty$.

5. KROK

Ke kompletnímu vyšetření průběhu funkce zbývá už jen načrtnout graf. Začneme tím, že si načrtneme číselnou osu x a na ni vyznačíme všechny významné body, které jsme si vyznačili na číselné osy ve všech předchozích krocích. Z těchto bodů vybereme x-ové souřadnice extrémů a inflexních bodů a vypočteme pro ně funkční hodnoty vyšetřované funkce. Přikreslíme osu y, výsledné funkční hodnoty na ni vyznačíme a do takto vzniklé kartézské soustavy souřadnic zakreslíme extrémy a inflexní body $[x; y]$, které budou klíčovými prvky vyšetřované funkce. Má-li funkce asymptoty, načrtneme je nyní. Poté klíčové body grafu funkce pospojujeme podle vlastností funkce, vyšetřených ve všech předchozích krocích.

I když čtenář bezvadně vyšetří všechny vlastnosti dané funkce v předchozích krocích, je možné, že graf se mu nepodaří napoprvé či ani napodruhé nakreslit správně. Není to důvod k pesimismu – kreslení grafů vyžaduje cvik, přiměřenou dávku zkušeností a zřejmě taky trochu talentu. Proto doporučuji i v písemkách kreslit grafy nejdříve tužkou a po ruce mít gumu; je-li po studentovi vyžadováno použití pera, postačí perem obtáhnout konečnou podobu grafu.

6.4 Praktické vyšetření průběhu funkce

V této kapitole předvedeme kompletní vyšetření průběhu funkce prakticky. Přistupme rovnou k věci. Zkoumanou funkcí budiž $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$.

1. KROK

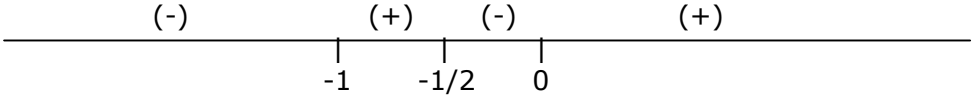
Nejdříve ze všeho **zjistíme největší podmnožinu reálných čísel, na které lze definovat funkci zadanou vzorečkem**. Vyloučíme tedy taková čísla, která by po dosazení za x dala vzniknout nule ve jmenovateli. Jmenovatel se bude rovnat nule, pokud $x=0$ a $x=-1$; funkci lze tedy definovat na množině $R-\{0;-1\}$.

Nyní prověříme, jestli se graf funkce protíná s osou x, a pokud ano, pak ve kterých bodech. **Nulové body** najdeme tak, že vzoreček dané funkce položíme rovno nule a vzniklou rovnici vyřešíme (nevyjde-li nám ani jeden kořen, znamená to samozřejmě, že funkce osu x neprotíná):

$$\frac{2x+1}{x^2+x}=0$$

Na první pohled vidíme kořen: $x=-\frac{1}{2}$. Funkce má tedy jediný nulový bod, a sice pro $x=-\frac{1}{2}$.

Nyní je potřeba ještě zjistit, ve kterých intervalech je funkce nad osou a ve kterých je pod osou. Načrtneme osu x a vyznačíme na ni nulové body a body, v nichž funkce není definována. Tím rozdělíme osu x na úseky. Poté si v každém úseku zvolíme libovolný bod x a vypočteme v něm funkční hodnotu; kde vyjde kladná hodnota, je funkce v daném úseku nad osou x; kde záporná, je úsek funkce pod osou x. V našem případě si jako zástupce bodů od –1 doleva zvolme třeba –2, mezi –1 a $-\frac{1}{2}$ třeba $-\frac{2}{3}$, mezi $-\frac{1}{2}$ a 0 třeba $-\frac{1}{3}$ a od 0 doprava třeba číslo 1. Výpočtem zjistíme, že $f(-2)=-\frac{3}{2}$, $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{2}$ a $f(1)=\frac{3}{2}$. Od –1 doleva je tedy pod osou, mezi –1 a $-\frac{1}{2}$ nad osou, mezi $-\frac{1}{2}$ a 0 pod osou a od 0 doprava opět nad osou. Vyznačíme na číselnou osu:



Odpověď: Graf funkce je pod osou x v intervalu $(-\infty;-1)$, nad osou x v intervalu $(-1;-\frac{1}{2})$, pod osou x v intervalu $(-\frac{1}{2};0)$ a osou x v intervalu $(0;\infty)$.

2. KROK

Dalším úkolem je zjistit, kde má funkce extrémy, kde je rostoucí a kde klesající. K realizaci tohoto kroku budeme potřebovat obecnou derivaci dané funkce. Proto si ji rovnou vytvoříme:

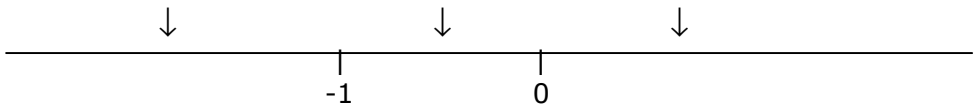
$$\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right)' = -\frac{2x^2+2x+1}{x^2\cdot(x+1)^2}$$

Načrtneme si druhou číselnou osu a vyznačíme si na ni body, pro které není definována funkce f, tedy $x=0$ nebo $x=-1$.

Nyní vypočteme **stacionární body** neboli body, kde je derivace funkce f rovna nule. Vyřešme tedy rovnici:

$$-\frac{2x^2+2x+1}{x^2\cdot(x+1)^2}=0$$

Tato rovnice nemá žádný reálný kořen, funkce tedy nemá stacionární body. Na číselné ose nám tudíž žádné body nepřibudou. Z každého z jednotlivých úseků oddělených vyznačenými body vybereme nyní číslo, s nímž se nám bude dobře počítat, a dosadíme ho do obecné derivace vyšetřované funkce. Zvolme třeba čísla –2, $-\frac{1}{2}$ a 1. Vyjde: $f'(-2)=-\frac{5}{4}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-8$ a $f'(1)=-\frac{5}{4}$. Záporná derivace znamená klesající průběh, funkce je tedy ve všech třech intervalech klesající. Vyznačíme si to na osu x:



Odpověď: Funkce je klesající v intervalu $(-\infty;-1)$, v intervalu $(-1;0)$ i intervalu $(0;\infty)$.

3. KROK

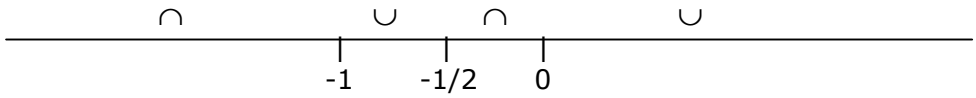
Nyní je třeba vyšetřit, kde má funkce inflexní body, kde je konvexní a kde konkávní. Jelikož inflexní body jsou ty body, v nichž má vyšetřovaná funkce extrémní derivaci, budeme vlastně hledat extrémy funkce f'. A protože se extrémy funkce hledají pomocí derivace, budeme potřebovat k realizaci tohoto kroku druhou derivaci funkce f. Vypočtěme ji:

$$\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right)'' = \left(-\frac{2x^2+2x+1}{x^2\cdot(x+1)^2}\right)' = \frac{2\cdot(2x+1)(x^2+x+1)}{x^3\cdot(x+1)^3}$$

Načrtneme si druhou číselnou osu a vyznačíme si na ni body, pro které není definována funkce f, tedy $x=0$ nebo $x=-1$. Dále budeme hledat body, v nichž je podezření na extrém funkce f', tedy body, v nichž je druhá derivace rovna nule. Vyřešíme rovnici:

$$\frac{2\cdot(2x+1)(x^2+x+1)}{x^3\cdot(x+1)^3}=0$$

Na první pohled vidíme, že čitatel a tím i celý zlomek se bude rovnat nule pouze při $x=-\frac{1}{2}$. Vybereme si vhodná čísla reprezentující intervaly, na něž je vyznačenými čísly osa x rozdělena. Pro úsek od –1 doleva zvolme třeba –2, pro úsek mezi –1 a $-\frac{1}{2}$ třeba $-\frac{2}{3}$, pro úsek mezi $-\frac{1}{2}$ a 0 třeba $-\frac{1}{3}$ a od 0 doprava třeba číslo 1. Hodnoty dosadíme do druhé derivace a vypočteme funkční hodnoty: $f(-2)=-\frac{9}{4}$, $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{189}{4}$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{189}{4}$ a $f(1)=\frac{9}{4}$. Kladné hodnoty znamenají konvexní úsek, záporné konkávní úsek. I tuto vlastnost funkce si v jednotlivých úsecích poznačíme podél číselné osy:



Zapíšeme odpověď: Funkce je konvexní v intervalech $(-\infty;-1)$ a $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, konkávní je v intervalech $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ a $(0;\infty)$.

4. KROK

V tomto kroku zjistíme, zda má funkce asymptoty a jaké. Nejdříve prověřme asymptoty bez směrnice. Víme, že asymptoty bez směrnice jsou kolmicemi k ose x v bodech, v nichž vyšetřovaná funkce není definována. Dále víme, že asymptota bez směrnice se nachází v bodě x_0 tehdy, když platí, že $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty$. V našem případě tedy prověříme, zda jsou asymptoty v bodech $x = 0$ a $x = -1$.

Výpočet v bodě $x = 0$**:**

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2x+1}{x^2+x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{2x+1}{x^2+x} = -\infty$$

Přímka $x = 0$ je asymptotou bez směrnice.

Výpočet v bodě $x = -1$**:**

$$\lim_{x\to -1+} \frac{2x+1}{x^2+x} = \infty$$

$$\lim_{x\to -1-} \frac{2x+1}{x^2+x} = -\infty$$

Přímka $x = -1$ je asymptotou bez směrnice.

Nyní prověřme asymptoty bez směrnice. Vypočítáme:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3x^2+2x} = \underline{\underline{0}}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - a\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{x^2+x} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2+x} = \underline{\underline{0}}$$

Prověříme, zda funkce má asymptotu v nevlastním bodě $+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - a\cdot x - b\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2+x} = \underline{\underline{0}}$$

Přímka $y = 0$ **(neboli osa x) je asymptotou se směrnicí v bodě** $+\infty$**.**

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3x^2+2x} = \underline{\underline{0}}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - a\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x+1}{x^2+x} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x^2+x} = \underline{\underline{0}}$$

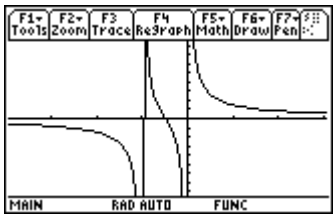
Prověříme, zda funkce má asymptotu v nevlastním bodě $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - a\cdot x - b\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x^2+x} = \underline{\underline{0}}$$

Přímka $y = 0$ **(neboli osa x) je rovněž asymptotou se směrnicí v bodě** $-\infty$**.**

5. KROK

Jelikož nemohu čtenáře provázet při tvorbě náčrtku funkce, nabízím alespoň ke kontrole graf vytvořený kapesní matematickou laboratoří:



Průběh funkce $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$ (včetně asymptot).

Čtenář si jistě povšiml, že vyšetření průběhu funkce je úkolem poměrně pracným a náročným na čas. Zajímavé je, že právě vyšetřování funkcí je činnost, na níž se až nezvykle výrazně promítá míra zkušeností, které řešitel má. Je obrovský rozdíl mezi dobou, kterou zabere vyšetření funkce začátečníkovi, oproti času, který ke stejnému úkolu postačí zkušenějšímu. Jelikož písemné zkoušky mohou být náročné na čas, doporučuji čtenáři, aby si ve vhodných sbírkách vyhledal co nejvíce úloh na vyšetřování funkcí a ve svém vlastním zájmu si jich co nejvíce vyřešil. Dá se předpokládat, že bude sám překvapen, kolik nepřenosných zkušeností při tom získá.

7. VYUŽITÍ DERIVACE K NUMERICKÝM VÝPOČTŮM

7.1 Co jsou numerické výpočty a k čemu nám mohou posloužit

Při práci s funkcemi se často setkáváme s případem, kdy u určité dané funkce známe její funkční hodnoty pro některá „základní" čísla (budeme je obecně označovat x_0), avšak v daném případě potřebujeme spočítat funkční hodnotu pro takové x, které se žádnému ze „základních" vstupních hodnot x_0 nerovná. Jako dobrý příklad nám poslouží funkce $\sin(x)$. Ze středoškolské matematiky jsou nám známy funkční hodnoty pro některá x_0, jmenovitě pro $x_0 = 0$, pro $x_0 = \frac{\pi}{6}$, pro $x_0 = \frac{\pi}{4}$, pro $x_0 = \frac{\pi}{3}$, pro $x_0 = \frac{\pi}{2}$ a pro $x_0 = \pi$. (Má-li čtenář potřebu či chuť si tyto funkční hodnoty zopakovat, nabízím je v tomto řádku: $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\sin(\pi) = 0$.) Co když se ale stane, že budeme potřebovat znát funkční hodnotu sinu pro takové x, které se žádné z těchto známých x_0 nerovná? Konkrétně, co když budeme potřebovat vypočítat například $\sin(3)$? Většina z nás v tomto případě pochopitelně sáhne po kalkulačce. O tom, co se v kalkulačce po zadání takového úkolu děje, zřejmě většina z nás pak ani nepřemýšlí. Nyní se však na chvilku pozastavme a nahlédněme pod pokličku pozoruhodných postupů, které kalkulačka při řešení takových úloh provádí, abychom podstatu toto tajemství okusili.

Napadlo vás někdy, jak to vlastně dělá kalkulačka, že vypočte např. hodnotu funkce $\sin(x)$ pro **jakékoliv** přípustné číslo, které do ní zadáme? V nedávné době, kdy jsem začínal poznávat základy matematiky, mě tato otázka zaujala. Začal jsem tedy pátrat po tom, jaký je „vzorec na výpočet hodnoty funkce sinus". Ke svému zklamání jsem však brzy seznal, že žádný „vzorec na sinus" neexistuje a že sinus je sám o sobě elementární funkcí. S tímto poznáním jsem se nespokojil, neboť jsem usoudil, že není reálné, aby kapesní kalkulačka měla ve své malé paměti uložené hodnoty goniometrických i jiných funkcí *pro úplně všechna čísla, která jsou prvkem definičního oboru (včetně stamiliónů desetinných)*, a že přece musí existovat algoritmus, který k takovému výpočtu poslouží. Nakonec jsem se dopátral, že kalkulačka k tomu skutečně jisté postupy má a že se tyto postupy nazývají **numerické početní metody**. Důležitým poznatkem je při použití těchto metod je fakt, že hodnoty, které kalkulačky jako výsledky vygenerují, jsou ve většině případů u takových funkcí jen přibližné, ačkoliv jejich přesnost je poměrně vysoká a pro daný účel plně postačující.

Než s těmito postupy seznámím čtenáře a zodpovím na otázky podobné té, jíž jsem zahájil předchozí odstavec, musím nejprve konstatovat velmi důležitou skutečnost: **Matematika a její výpočetní metody nejsou zdaleka jednotvárné. Z určitého hlediska můžeme rozlišovat mezi dvěma zcela rozdílnými přístupy** k výpočtům různých zadaných úloh. Jsou jimi: **1) metoda obecných řešení přesných hodnot** a **2) metoda numerických řešení přibližných hodnot.** Pojďme si tyto metody popsat podrobněji.

Metoda obecných řešení přesných hodnot

Jak již název napovídá, tato metoda produkuje vždy výsledky ve formě naprosto přesných hodnot. Jako příklad mohu uvést následující zadání a výsledek:

Zadání: Kolik je $\arcsin(1)$?

Odpověď: $\frac{\pi}{2}$

Výhoda je samozřejmě stoprocentní přesnost výsledků. Nevýhodou však je, že si člověk při pohledu na některé přesné výsledky těžko vybaví, „jakou kvantitu výsledné číslo vlastně vyjadřuje", jinými slovy si dané výsledné číslo někdy jen s obtížemi představíme na číselné ose. Nechť si čtenář sám rozhodne, zda je schopen si ihned bez počítání představit na číselné ose třeba číslo $\sqrt{\frac{5}{7}\pi^3}$. Pozor! Tento zápis zmíněného čísla je skutečně nejjednodušším způsobem, jak danou hodnotu zapsat v režimu přesných hodnot! Jeho přepis do desetinného čísla by byl již nepřesný. Při pohledu na tento zápis čísla se však většina lidí zřejmě neubrání úsměvné dodatečné otázce ve stylu „No dobrá, ale to je vlastně kolik?" Navíc se při počítání s přesnými hodnotami někdy může stát, že nemáme šanci ani na to, aby se výsledek nějak odlišoval od zadání. Například:

Zadání: Kolik je $\sin\left(\frac{2}{7}\right)$?

Odpověď: $\sin\left(\frac{2}{7}\right)$

Jiný zápis přesného výsledku prostě neexistuje (pomineme-li bezvýznamné alternativy s rozšířenými zlomky).

Navíc existuje ještě jeden fakt: **Metoda výpočtů přesných hodnot předpokládá vždy existenci obecného řešení.** To v praxi znamená, že máme-li úspěšně počítat s přesnými hodnotami, musí být možné vytvořit (odvodit) vzorec, který po dosazení příslušných vstupních hodnot vždy vygeneruje správný výsledek. To však rozhodně není možné vždy! Pro některé laiky může být navíc překvapivý fakt, že některé (na první pohled leckdy i velmi jednoduché) úlohy není matematika schopna dodnes obecně vypočítat, přičemž se v mnohých takových případech již s jistotou ví, že to nebude možné ani v budoucnosti, neboť obecné řešení některých takových je prokazatelně nemožné. Proto řešitelé rozličných matematických problémů musejí často používat metody odlišné, jejichž podstata je nastíněna v následujícím odstavci.

Metoda numerického řešení přibližných hodnot

Z názvu vyplývá, že kvalita vypočtených hodnot může být negativně ovlivněna nepřesností, neboť výpočty řešené touto metodou mohou v mnohých případech generovat jen přibližné hodnoty. Jako příklad si uveďme numerické (přibližné) výsledky zadání, která jsme použili jako vzor při vysvětlování hodnot přesných:

Zadání: Kolik je $\arcsin(1)$?
Odpověď: 1,57079630 (zaokrouhleno na 8 desetinných míst)

Výhoda spočívá především ve snadné srozumitelnosti výsledné hodnoty, která nám usnadňuje okamžitě si představit výslednou kvantitu, samozřejmě i na číselné ose. Zajímá-li nás z tohoto hlediska srozumitelnější, byť jen přibližná hodnota $\sqrt{\frac{5}{7}\pi^3}$, můžeme se spokojit s číslem 4,7060961. Nevýhodou je samozřejmě fakt, že tento zápis není přesný (je zaokrouhlený). Při počítání s přesnými hodnotami se pochopitelně setkáme mnohem úspěšněji s výsledky na první pohled odlišnými od zadání. Například:

Zadání: Kolik je $\sin\left(\frac{2}{7}\right)$?
Odpověď: 0,28184285 (zaokrouhleno na 8 desetinných míst)

Pro zajímavost se sluší dodat, že i elektronické matematické pomůcky (kapesní a stolní počítačky či softwarové produkty pro počítače) se vesměs dělí na typy, které počítají jen s hodnotami získanými numerickými postupy, a na typy, které dovedou počítat i s hodnotami přesnými. Jako příklad mohu uvést program Matlab, který je vhodný pouze pro numerické výpočty, oproti programu Maple, který zvládá výpočty s přesnými hodnotami. Kapesní a stolní elektronická zařízení většinou počítají pouze numericky a tudíž přibližně, a proto se nazývají kalkulátory či zdomácněle „kalkulačky" (kalkulovat = počítat přibližně, tipovat). Existují však i špičkové přístroje určené pro nejnáročnější výpočty, které sice svým vzhledem kalkulačky připomínají, avšak dovedou pracovat s hodnotami přesnými a dokonce umožňují uživateli, aby si zvolil mezi výpočty přesnými a numerickými. Takové přístroje lze poměrně výstižně nazývat „kapesní matematické laboratoře". S naprostou samozřejmostí obvykle zvládají i kresby dvoj- a třírozměrných grafů, plnohodnotné výpočty s komplexními čísly, maticové operace, integrální a diferenciální počet, diferenciální rovnice a nekonečné řady, obsahují tabulky pro Laplaceovu transformaci, umožňují programování v několika jazycích, synchronizaci s počítačem a tisíce dalších užitečných funkcí, přičemž jejich ceny bývají oproti cenám kalkulátorů řádově deseti- až stonásobně vyšší (např. špičkový přístroj TI-89).

Vraťme se nyní k otázce uvedené v úvodu této kapitoly: Jaký postup používá kalkulačka, že vypočte např. hodnotu funkce $\sin(x)$ pro jakékoliv číslo, které do ní zadáme? Odpověď má klíčovou důležitost pro celý obsah této kapitoly: **Kalkulátory nám jako výsledek ve skutečnosti neposkytnou hodnotu funkce sinus pro dané číslo, nýbrž hodnotu jiné funkce, jejíž funkční hodnota je pro číslo x velmi blízká funkční hodnotě funkce sinus. Jinými slovy, kalkulátory ve skutečnosti s funkcí sinus nepočítají, nýbrž ji nahrazují jinou funkcí, která má pro x velmi podobnou funkční hodnotu jako funkce sinus. Tato metoda se používá proto, že ona náhražková funkce obsahuje vždy jen nejzákladnější matematické operace (sčítání, zlomky a mocniny), takže tím pádem umožňuje snadný výpočet pro jakoukoliv vstupní hodnotu x. Tento princip je základem numerických početních metod. Pokud výsledek není celé číslo, je zobrazen vždy jako číslo desetinné** (není tedy zobrazen ve tvaru zlomku či jiných znaků představujících přesné hodnoty).

Ačkoliv je v těchto skriptech jako příklad použita funkce sinus, samozřejmě se tato metoda nepoužívá zdaleka jen u goniometrických funkcí, nýbrž při numerických výpočtech hodnot všech „vědeckých" funkcí, které kalkulačka zvládá, např. logaritmů apod.

Příjemné je, že **náhražkovou funkci (obecně ji označujme třeba g), které původní funkci f zastane, lze většinou poměrně snadným způsobem vytvořit, a to právě za použití původní funkce f.** Celá tato kapitola bude proto pojednávat o tom, jak kýženou náhražkovou funkci vytvořit tak, aby byla schopna původní funkci s dostatečně výpočetní přesností nahradit.

Nejdříve je nezbytně nutné objasnit, **jak celý proces funguje v jednotlivých obecných krocích**. Důkladně si nyní prostudujme následující scénář, podle kterého kalkulačky postupují – brzy podle něj budeme postupovat i my:

1) **Uživatel zadá do kalkulačky, že chce znát hodnotu nějaké konkrétní funkce pro konkrétní číslo x. Jako příklad uveďme třeba zadání výpočtu $\sin(3)$.**

2) **Ze skupiny základních čísel, pro něž jsou známy přesné funkční hodnoty dané funkce, vybere takové číslo x_0, jehož hodnota je zadanému číslu x co nejbližší. V našem případě je danou funkcí sinus a hodnota x rovna 3. Přesná funkční hodnota funkce sinus je definována pro čísla 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ a π. Kalkulátor vybere z těchto čísel takové číslo x_0, které je k číslu 3 nejbližší. Tím číslem je v našem případě číslo π (je obecně známo, že $\sin(\pi) = 0$). Proto se zvolené x_0 bude rovnat π.**

3) **Z původní funkce a zjištěného čísla x_0 kalkulátor speciálním postupem vytvoří jinou, náhražkovou funkci, která má v okolí čísla x_0 velmi podobný průběh jako funkce původní, a tou poté původní funkci nahradí. V našem konkrétním případě vytvoří tedy z funkce $\sin(x)$ a zjištěného čísla $x_0 = \pi$ speciálním postupem jinou, náhražkovou funkci, která má v okolí čísla $x_0 = \pi$ (do něhož patří i dané číslo 3) velmi podobný průběh jako funkce sinus.**

4) **Nově vytvořená náhražková funkce má velmi jednoduchou strukturu, takže na rozdíl od funkce původní není problém vypočíst její funkční hodnotu pro jakékoliv přípustné x. Do nově vytvořené funkce kalkulačka dosadí uživatelem danou vstupní hodnotu x a vypočte funkční hodnotu. V našem případě dosadí za x vstupní hodnotu 3 a vypočtenou funkční hodnotu náhražkové funkce zobrazí na displayi, přičemž ji bude vydávat za hodnotu funkce sinus, ačkoliv ve skutečnosti jde o hodnotu funkce jiné, simulující.** Tento drobný podvod milé kalkulačce rádi promineme, neboť **náhražková funkce má v okolí bodu $x_0 = \pi$, do něhož číslo 3 jistě patří, velmi podobný průběh jako funkce sinus, a proto výsledek, ač přibližný, je pro naše účely dostatečně přesný.**

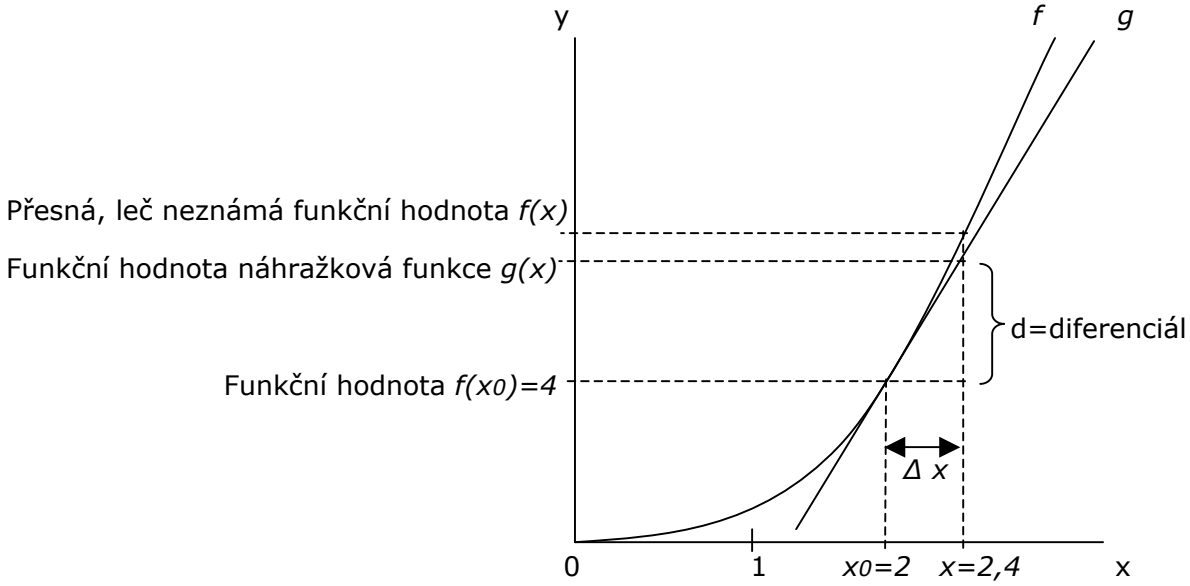
Ačkoliv rychlost kalkulačky je člověkem většinou naprosto nedostižitelná, byla by škoda nenaučit se provádět takové pěkné „triky" jen s pomocí tužky a papíru. Naučí-li se čtenář tyto postupy, bude pro něj hračkou vypočíst bez kalkulačky, kolik je např. $\ln(1{,}24)$. Podle výše uvedeného postupu totiž stačí si uvědomit, že i když zatím nevíme, jaké je funkční hodnota funkce $\ln(x)$ pro $x = 1{,}24$, víme alespoň, jaké jsou funkční hodnoty pro čísla 1 a e (je obecně známo, že $\ln(1) = 0$ a $\ln(e) = 1$). Protože číslo 1 je číslu $x = 1{,}24$ bližší než číslo e (e je přibližně 2,7182818), zvolíme $x_0 = 1$. Poté stačí poměrně jednoduchým postupem vytvořit náhražkovou funkci, která bude mít v okolí čísla $x_0 = 1$ průběh velmi podobný funkci $\ln(x)$ a bude tudíž schopna funkci přirozeného logaritmu nahradit a poskytnout pro $x = 1{,}24$ dostatečně přesný výsledek. A právě **návod k tomu, jak tvořit takové náhražkové funkce** k běžným vědeckým funkcím, nám poskytnou následující dobře míněné podkapitoly.

7.2 Numerické výpočty pomocí diferenciálu

Než se naučíme tuto nejjednodušší numerickou výpočetní metodu, připomeňme si pro jistotu ještě jednou, že **základním postupem numerických metod pro výpočet přibližné hodnoty funkce f pro číslo x je:**

1) **Vybrat ze „základních" čísel, pro které je známa přesná funkční hodnota dané funkce, takové číslo x_0, které je číslu x co nejbližší.**
2) **Poté vytvořit novou náhražkovou funkci g, která má v okolí bodu x_0 podobný průběh jako funkce původní.**
3) **Nakonec nahradit původní funkci náhražkovou funkcí g tím, že do náhražkové funkce dosadíme číslo x a vypočteme její funkční hodnotu $g(x)$. Ta bude přibližným řešením.**

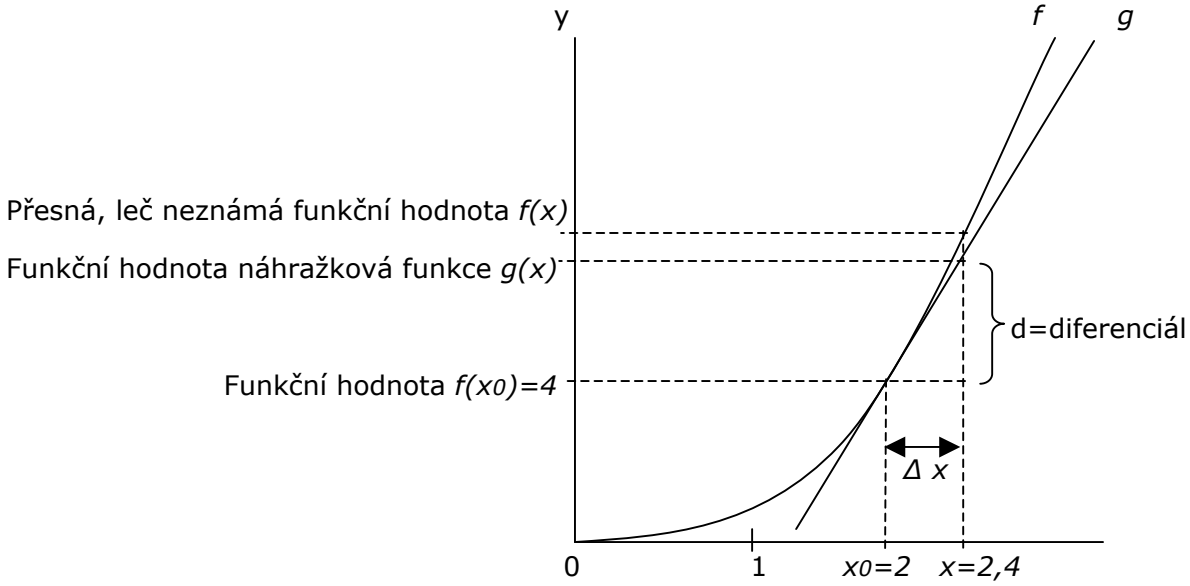
Nejjednodušším, avšak také nejméně přesným nástrojem numerických metod je takzvaný **diferenciál**, o němž pojednává tato kapitola. Princip řešení výpočtů pomocí diferenciálu spočívá v tom, že **grafem náhražkové funkce bude přímka, konkrétně tečna k původní funkci v bodě o souřadnici x_0. Jinými slovy, náhražkovou funkcí g k původní funkci f bude afinní funkce, které bude odpovídat rovnici tečny k původní funkci v bodě x_0.** Velmi zjednodušeně můžeme tedy říci, že křivku původní funkce nahradíme přímkou a výpočet provedeme na ní. Pokud se čtenáři zdá toto vysvětlení příliš spletité, určitě pomůže ilustrace, kterou nabízí graf na následující straně:



Podívejme se pozorně na výše načrtnutý graf (není třeba se ničeho obávat, jeho pochopení je ve skutečnosti mnohem jednodušší, než by se mohlo na první pohled zdát). Máme dánu nějakou zcela konkrétní funkci f, o níž již předem víme, jaké jsou některé její funkční hodnoty. Dejme tomu, že v tomto konkrétním případě známe základní hodnoty této funkce pro $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ a $x_0 = 3$, jmenovitě $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ (vyznačeno přímo v grafu) a $f(3) = 9$. A dejme tomu, že my ovšem potřebujeme zjistit, kolik je její funkční hodnota pro $x = 2{,}4$, a tuto hodnotu nemáme možnost z povahy dané funkce vypočítat. Proto ji musíme vypočítat alespoň přibližně numerickou metodou.

Postupujme proto podle již dvakrát zmíněného procesu: Protože neznáme funkční hodnotu dané funkce pro $x = 2{,}4$, vybereme si alespoň takové x_0, pro které hodnotu funkce známe a které je danému $x = 2{,}4$ co nejbližší. Tomu odpovídá číslo $x_0 = 2$. Nyní se pozorně zadívejme na graf. V grafu je znázorněna funkce f, jejíž funkční hodnotu známe pro $x_0 = 2$ (ze zadání víme, že $f(2) = 4$). **Pokud v bodě o souřadnici $x_0 = 2$ vytvoříme k funkce f tečnu, bude tato tečna vlastně náhražkovou funkcí g, která bude mít v blízkém okolí bodu x_0 průběh podobný průběhu původní funkce f** (z grafu je na pohled patrné, že se od původní funkce v okolí bodu o souřadnici $x_0 = 2$ sice odchyluje, avšak „poměrně málo"). **Jelikož přesná funkční hodnota $f(x)$ pro dané $x = 2{,}4$ je obecně nezjistitelná, spokojíme s řešením v podobě přibližné hodnoty, která bude odpovídat funkční hodnotě náhražkové afinní funkce g pro $x = 2{,}4$.**

Na grafu je vidět, že se tato hodnota $g(x)$ liší od přesné hodnoty $f(x)$ jen o malý rozdíl, takže hodnotu $g(x)$ budeme považovat za dostatečně přesnou (aby se čtenáři dobře pracovalo a nemusel obracet na předchozí stranu, načrtl jsem tentýž graf níže ještě jednou). **Za hledané přibližné řešení budeme tedy považovat funkční hodnotu náhražkové funkce g pro $x = 2{,}4$.** Jak tuto funkční hodnotu vypočteme?



Všimněme si nejprve, že námi hledaná funkční hodnota $g(x)$ v bodě $x = 2{,}4$ se různí od funkční hodnoty funkce f v bodě $x_0 = 2$ o jistou hodnotu, která je v grafu označena jako d (takzvaný diferenciál). Kdybychom dovedli tento diferenciál vypočítat, stačilo by jej přičíst k funkční hodnotě $f(x_0)$ a výsledek by se rovnal hledanému numerickému řešení. Můžeme tedy zapsat: $g(x) = f(x_0) + d$

Z této myšlenky budeme vycházet. K řešení však potřebujeme vědět, kolik je d, neboli potřebujeme znát hodnotu diferenciálu. Podívejme se ještě jednou pozorně na graf. Dovedli bychom diferenciál vypočítat? Vzpomeneme-li si na pojem „směrnice přímky", jistě si uvědomíme, že **směrnice funkce g (označujme si ji třeba s) je vlastně rovna $\frac{d}{\Delta x}$. A protože $\Delta x = x - x_0$, můžeme rovnou napsat: $s = \frac{d}{x - x_0}$. Nám jde ovšem o to, vypočítat d, a proto si jej z daného vzorce vyjádřeme: $d = s.(x - x_0)$**

K použití tohoto vzorce ovšem potřebujeme znát směrnici s. To ovšem není žádný problém! Když si uvědomíme, že s je směrnicí funkce g, která je tečnou k funkci f v bodě x_0, vyplývá z toho logicky, že s je směrnicí tečny k funkci f v bodě x_0 neboli s **je derivací funkce f v bodě x_0.** Můžeme tedy zapsat: $s = f'(x_0)$. **Z toho tedy vyplývá, že výše odvozený vzorec pro výpočet diferenciálu $d = s.(x - x_0)$ můžeme zapsat jako $d = f'(x_0).(x - x_0)$. Nyní tedy můžeme konečně zapsat vzorec pro výpočet funkční hodnoty $g(x)$, která je numerickým přibližným řešením hodnoty funkce f pro číslo x:**

Konečné řešení: $g(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$

Tím jsme vlastně vytvořili obecný zápis funkce, která je tečnou k funkci f v bodě x_0. Do této funkce dosadíme konkrétní hodnoty a máme výsledek.

Po tomto odvození považuji za vhodné celý postup shrnout do jakési rekapitulace v podobě tradičního postupu při numerických výpočtech, která čtenáři poslouží jako přehledný postup pro řešení úloh na výpočet přibližného řešení funkčních hodnot metodou diferenciálu:

Obecné zadání: Máme dánu funkci f, jejíž přesné funkční hodnoty známe jen pro některá základní čísla x_0. Máme za úkol vypočítat hodnotu této funkce pro číslo x, které se žádnému základnímu x_0 nerovná.

Řešení: Protože z povahy dané funkce vyplývá, že její přesnou funkční hodnotu nelze obecnými postupy vypočíst, použijeme numerickou metodu přibližného řešení. Zatím známe metodu diferenciálu, aplikujeme tedy tu:

1) Ze „základních" čísel, pro které je známa přesná funkční hodnota dané funkce, vybereme takové číslo x_0, které je číslu x co nejbližší.
2) Poté vytvoříme novou náhražkovou funkci g, která má v okolí bodu x_0 podobný průběh jako funkce původní. Touto funkcí bude afinní funkce, jejímž grafem je tečna k původní funkci f v bodě x_0. Jak jsme si v předchozích odstavcích této kapitoly odvodili, tato náhražková funkce má tvar: $g(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$
3) Do náhražkové funkce dosadíme číslo x a vypočteme její funkční hodnotu $g(x)$. Ta odpovídá přibližnému numerickému řešení.

Praktická úloha na numerické výpočty pomocí diferenciálu

Nyní, když jsme si odvodili numerickou metodu výpočtu přibližného řešení pomocí diferenciálu a zvládli jsme postup řešení úloh teoreticky, vyřešme si prakticky jeden vzorový příklad. Na tomto místě samozřejmě čtenáři radím, aby si vyhledal ve sbírkách cvičení takových úloh více a vypočetl si je. Velmi čtenáři doporučuji, aby si na tuto metodu zkusil vymyslet sám několik úloh, hrál si s nimi, experimentoval a samostatně bádal – ani jako zábava to není špatné a ohromně to zvyšuje duševní potenciál.

Přistupme tedy k řešení konkrétní úlohy:

Zadání: Vypočtěte hodnotu $\sin(3)$

Řešení: Funkce sinus sama o sobě nenabízí žádný obecný způsob, jak vypočíst svoji funkční hodnotu pro $x = 3$. Budeme proto muset vypočíst přibližné řešení numerickou metodou. Použijeme metodu diferenciálu.

Nejbližším číslem číslu 3, pro které známe přesnou funkční hodnotu, je π (asi 3.14159265). Proto za x_0 zvolíme π. Pro pořádek úhledně zapíšeme:

$x = 3$

$x_0 = \pi$

Nyní vytvoříme náhražkovou funkci g, která při výpočtu zastoupí původní funkci $f(x) = \sin(x)$.Tou bude afinní funkce, jejímž grafem je tečna k funkci $\sin(x)$ v bodě o souřadnici $x_0 = \pi$. Jak již víme (a jak si lze snadno odvodit), její obecnou rovnicí je: $g(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$

Obecnou rovnici upravíme do konkrétní hodnoty: $g(x) = \sin(\pi) + \sin'(\pi).(x - \pi)$

Víme že derivací sinu je cosinus, proto: $g(x) = \sin(\pi) + \cos(\pi).(x - \pi)$

Známe hodnoty doplníme: $g(x) = 0 - 1.(x - \pi)$

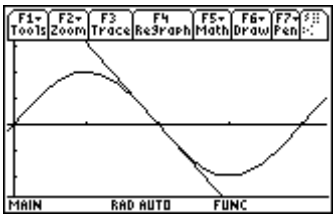
Nakonec zjednodušíme: $g(x) = \pi - x$

Do této náhražkové funkce dosadíme za x a výsledek numericky vyjádříme:

$$g(x) = \pi - 3 \cong 3{,}14159265 - 3 = 0{,}14159265$$

Protože je však řešení metodou diferenciálu jen přibližné, nemá smysl rozepisovat výsledek na příliš mnoho desetinných čísel, protože desetitisíciny a drobnější desetinné cifry stejně nebudou odpovídat skutečnosti. Proto se spokojme s číslem 0,141.

Odpověď: Hodnota funkce sinus pro číslo 3 je přibližně 0,141.



Pro ilustraci přikládám vyobrazení průběhu obou funkcí (původní i náhražkové). Šikmá přímka se zápornou směrnicí je grafem náhražkové funkce $g(x) = \pi - x$. Jak je vidět, v krátkém úseku v okolí čísla $x_0 = \pi$ má skutečně podobný průběh, jako funkce sinus.

Praktická poznámka

Máte-li kalkulátor, který počítá goniometrické funkce, můžete si přibližné numerické výsledky vždy porovnat s výsledky kalkulátoru. Pozor! Při takovém porovnání v mnoha případech zjistíte, že výsledky kalkulátoru se s Vašimi výsledky shodují také jen přibližně! Například pokud zadáme kalkulátoru řešení výše uvedené úlohy $\sin(3)$, většina přístrojů vrátí hodnotu 0,14112001, nikoliv naše 0,14159265. Důležité nyní je odpovědět si na otázku, proč tomu tak je. Důvodem je skutečnost, že **kalkulátory k numerickým výpočtům obvykle nepoužívají metodu diferenciálu,** neboť ta je pouze základní, jednoduchá a málo přesná. Kalkulátory mají pro numerické výpočty k dispozici silnější a chytřejší nástroje, takže výsledné hodnoty jsou podstatně přesnější. **Hlavním takovým nástrojem je Taylorův polynom.** Pokud se čtenář na tomto místě obává, že bude ošizen o tajemství tohoto postupu, může být klidný. Vysvětlení se dočká již v následující kapitole. Stačí otočit list…

7.3 Taylorův polynom

V předchozí podkapitole o numerické metodě výpočtů pomocí diferenciálu jsme si ukázali, jak lze numerickou výpočetní metodou vypočítat přibližnou hodnotu určité funkce pro číslo x, známe-li funkční hodnotu dané funkce pro číslo x_0, které je bodu x blízké. Vysvětlili jsme si, že za určitých podmínek můžeme tuto hodnotu získat tím, že původní funkci f nahradíme funkcí g, jejímž grafem je tečna k funkci f v bodě x_0, a za přibližný výsledek můžeme považovat funkční hodnotu této náhražkové afinní funkce pro číslo x.

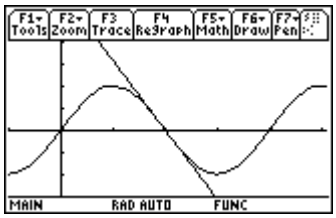
Nevýhoda výpočtů pomocí diferenciálu je zřejmá na první pohled. **Protože grafem náhražkové funkce g je zde přímka, může tato funkce s dostatečnou přesností nahradit původní funkci f jen v takovém omezeném okolí bodu x_0, v němž má původní funkce průběh podobný této přímce.** Stačí však, aby křivka původní funkce f byla v okolí bodu x_0 více zakřivená, a tečna k ní rázem bude očividně přiléhat jen bodě x_0, takže metoda diferenciálu nám bude poskytovat výsledky velmi nepřesné, ne-li úplně zcestné.

Logická otázka tedy zní: **Nešla by náhražková funkce g nějak upravit tak, aby svým zakřivením lépe kopírovala průběh původní funkce f?** Tuto otázku si už před zhruba třemi sty lety položil anglický génius Brook Taylor[9]. Za svůj (bohužel krátký) život stačil dokázat pozoruhodný objev, který má dodnes v matematice dalekosáhlý a nenahraditelný význam.

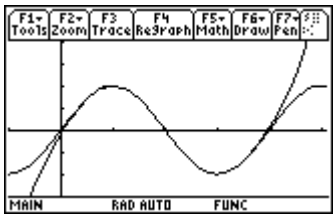
Pan Taylor vyšel z nám již známé metody výpočtu pomocí diferenciálu, kdy náhražkovou funkcí je tečna k funkci původní a má obecný tvar $g(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$. Zjistil, že **pokud tuto náhražkovou funkci $g(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$ dodatečně upraví tím, že ji rozšíří přičítáním speciálních dalších členů, bude se křivka takto upravované funkce v okolí bodu x_0 s každým dalším přičteným členem stále věrněji tvarovat podle původní funkce f.** Náhražková funkce, která takovou úpravou vznikne, se po svém objeviteli jmenuje **Taylorův polynom**. Bude-li vytvořena rozšířením funkce $g(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$ o dostatečné množství dalších speciálních členů, bude mít v okolí bodu x_0 průběh velmi podobný původní funkci f. Důležité je naučit se v tomto kontextu používat sloveso **konvergovat** – korektně říkáme, že **funkce g v okolí bodu x_0 konverguje k původní funkci f (konvergence** znamená **sbíhavost).** Čím více dodatečných speciálních členů přičteme, tím delší bude interval, v němž bude takto vzniklá funkce konvergovat k funkci původní. Proto bude Taylorův polynom jakožto funkce schopen velmi dobře nahradit funkci původní při numerických výpočtech, neboť její funkční hodnota pro x bude velmi blízká funkční hodnotě původní funkce.

[9] Brook Taylor (1685-1731), anglický matematik. Zabýval se zejména využitím teorie řad v matematické analýze.

Pro srovnání si znázorněme, jak graficky vypadají dvě různá numerická řešení úlohy, jejíž zadání nám posloužilo jako vzorový příklad v předchozí kapitole. Úkolem bylo vypočíst přibližné numerické řešení hodnoty $\sin(3)$. První uvedené řešení, známé již z předchozí kapitoly, je řešení pomocí diferenciálu, kdy náhražková funkce má tvar tečny k funkci f v bodě x_0. Druhé řešení je takové, kdy je jako náhražková funkce použit Taylorův polynom. Obě situace jsou znázorněny v následujících dvou grafech, vytvořených kapesní matematickou laboratoří:



Graf 1. – numerické řešení pomocí diferenciálu. Náhražkovou funkcí je $g(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$, jejímž grafem je tečna k původní funkci $\sin(x)$ v bodě $x_0 = \pi$. Z obrázku je patrné, že rozsah, v němž tato funkce konverguje k původní funkci, je značně omezený.



Graf 2. – numerické řešení pomocí Taylorova polynomu. Jako náhražková funkce je použit Taylorův polynom. Křivka této funkce konverguje k původní funkci mnohem lépe a v podstatně větším rozsahu, než tečna použitá k výpočtu pomocí diferenciálu. Proto je Taylorův polynom schopen poskytnout v roli náhražkové funkce podstatně vyšší přesnost.

Abychom tedy mohli získávat vysoce přesná numerická řešení funkčních hodnot rozmanitých funkcí, musíme použít numerických metod výpočtů, které spočívají ve vytvoření takové náhražkové funkce g, která bude k funkci f v okolí bodu x_0 co nejlépe konvergovat. Je matematicky dokázáno, že **takovou funkcí je právě Taylorův polynom**. Jak již lze očekávat, cílem této kapitoly je vysvětlit, jak vytvořit Taylorův polynom konvergující k funkci f, budeme-li mít k dispozici původní funkci f a vhodně zvolené číslo x_0.

Taylorův polynom má obecně tento zápis: $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

Pokud má čtenář s podobnými typy matematických zápisů málo zkušeností, možná v něm pohled na výše uvedený vzorec vyvolá směs různých neblahých pocitů, zdrženlivostí počínaje a obavami konče. Abychom seznali, že jakýkoliv pesimismus je zcela zbytečný, rozeberme si nyní vzorec tak, abychom jej byli schopni používat s náležitou lehkostí.

Ve skutečnosti jde o jednoduchý výraz, který je tvořen **součtem určitého počtu členů. Každý člen** má vždy tvar $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, kde výraz $f^{(k)}(x_0)$ v čitateli znamená hodnotu *k*-té derivace původní funkce f v bodě x_0, přičemž číslo k se rovná u prvního členu 0, u druhého 1, u třetího 2, u čtvrtého 3, u $1+n$tého n. Celkový počet členů je tedy roven $n+1$ (nikoliv n, neboť k počítáme od nuly do n, nikoliv od jedné do n). Celkové n (pochopitelně celé kladné číslo) závisí na nás – čím vyšší n si zvolíme, tím „delší" Taylorův polynom bude, tím lépe bude konvergovat k původní funkci a bude schopen ji při numerických výpočtech nahradit, a tím delší bude také rozsah, v jakém bude k původní funkci konvergovat. Na druhé straně vysoké n znamená rovněž vyšší obtížnost nejen při samotném tvoření Taylorova polynomu, nýbrž také při práci s ním.

Ze zápisu je patrné, že čím vyšší n si zvolíme, tím vyšší mocnina se nachází v posledním členu a tím vyšší je také takzvaný řád Taylorova polynomu. Proto hovoříme o **Taylorovu polynomu n-tého řádu**. Rozepišme si nyní Taylorův polynom pro obecnou funkci f, třeba třetího řádu:

U prvního členu se k rovná 0, proto můžeme první člen zapsat takto:

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)=\frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0=f(x_0)$$

V případě druhého členu se k rovná 1, proto druhý člen má tvar:

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1=f'(x_0)(x-x_0)$$

Podobně vytvoříme člen pro $k=2$:

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)=\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2=\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

Zakončíme členem pro $k=3$:

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)=\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3=\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3$$

Jelikož Taylorův polynom je **součtem těchto členů**, můžeme zapsat:

$$Taylor_4 f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3$$

Důležité!!! Určitě si prohlédněte, jak vypadá obecný tvar **Taylorova polynomu prvního řádu**! Jde totiž o výraz $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, který odpovídá náhražkové funkci při numerických výpočtech pomocí diferenciálu, jejíž rovnicí je tečna k funkci f v bodě x_0. Tím se potvrzuje to, co bylo jsem naznačil už na počátku této kapitoly: Taylorův polynom vyšších řádů tvoříme tak, že funkci $g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ rozšiřujeme přičítáním dalších speciálních členů, čímž se zvyšuje přesnost a rozsah, v němž takto vzniklá funkce konverguje k původní funkci f v okolí bodu x_0. **Funkce $g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, kterou používáme při aplikaci metody diferenciálu, je vlastně Taylorovým polynomem 1. řádu.**

V tomto okamžiku bude jistě užitečné nahlédnout do praxe. Vypočtěme si cvičně následující úlohu:

Zadání: Vypočtěte přibližnou hodnotu $\sin(\frac{1}{4})$.

Řešení:

Z čísel, pro která známe přesnou funkční hodnotu funkce sinus, vybereme takové číslo x_0, které je co nejbližší číslu $x=\frac{1}{4}$. Takovým číslem je $x_0=0$. Nyní si musíme vytvořit náhražkovou funkci g, která bude k funkci $f(x)=\sin(x)$ v okolí bodu x_0 dobře konvergovat. Touto funkcí budiž Taylorův polynom. Protože číslo $x=\frac{1}{4}$ je číslu $x_0=0$ poměrně blízké, předpokládejme, že postačí Taylorův polynom 5. řádu.

Nyní si rozepišme vzorec pro Taylorův polynom 5. řádu a doplňme známé hodnoty a funkce:

$$Taylor_5 \sin(x)_{x_0=0} = \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$\frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \frac{f'''''(x_0)}{5!}(x-x_0)^5 =$$

$$\sin(x_0) + \cos(x_0)(x-x_0) + \frac{-\sin(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{-\cos(x_0)}{6}(x-x_0)^3 +$$

$$+ \frac{\sin(x_0)}{24}(x-x_0)^4 + \frac{\cos(x_0)}{120}(x-x_0)^5 =$$

$$\sin(0) + \cos(0)(x-0) - \frac{\sin(0)}{2}(x-0)^2 - \frac{\cos(0)}{6}(x-0)^3 +$$

$$+ \frac{\sin(0)}{24}(x-0)^4 + \frac{\cos(0)}{120}(x-0)^5 = 0 + x - 0 - \frac{1}{6}x^3 + 0 + \frac{1}{120}x^5 = \underline{\underline{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}}$$

Jako náhražková funkce k funkci sinus nám tedy poslouží funkce:

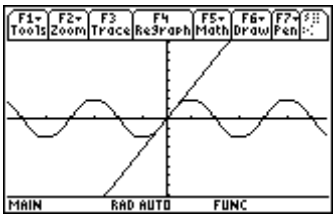
$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Do této funkce dosadíme za x číslo, pro něž hledáme funkční hodnotu, tedy $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5}{120} = \frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{1}{64}\right)}{6} + \frac{\left(\frac{1}{1024}\right)}{120} = \frac{1}{4} - \frac{1}{384} + \frac{1}{122880} = \frac{30401}{122880} = \underline{\underline{0{,}24740397}}$$

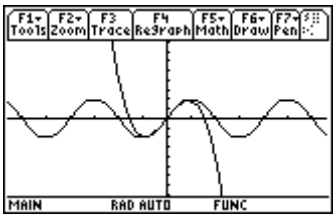
Zadáme-li za účelem porovnání výsledků do kalkulačky $\sin(0{,}5)$, vyjde nám: $0{,}24740396$
Porovnáme-li výsledky, zjistíme, že ačkoliv 5. řád není mnoho, poskytl nám Taylorův polynom 5. řádu již velmi uspokojivou přesnost numerického řešení.

Předveďme si nyní graficky na funkci $f(x)=\sin(x)$, jaký vliv má výše řádu Taylorova polynomu na rozsah, v němž Taylorův polynom konverguje k původní funkci f v okolí bodu $x_0=0$. Na každém z grafů jsou zakresleny dvě funkce – funkce $\sin(x)$ a příslušný Taylorův polynom:



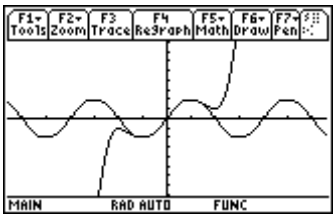
Funkce $\sin(x)$ a Taylorův polynom 1. řádu (odpovídá řešení metodou diferenciálu).

$g(x)=x$



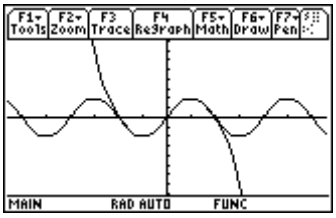
Funkce $\sin(x)$ a Taylorův polynom 3. řádu.

$g(x)=x-\frac{1}{3!}x^3$



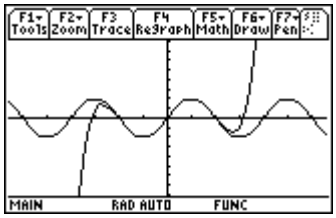
Funkce $\sin(x)$ a Taylorův polynom 5. řádu.

$g(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$



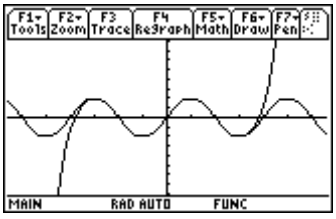
Funkce $\sin(x)$ a Taylorův polynom 7. řádu.

$g(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7$



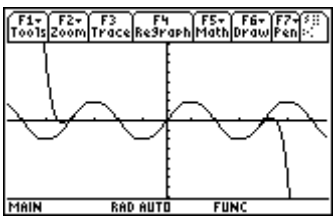
Funkce $\sin(x)$ a Taylorův polynom 9. řádu.

$g(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9$



Funkce $\sin(x)$ a Taylorův polynom 11. řádu.

$g(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}$



Funkce $\sin(x)$ a Taylorův polynom 13. řádu.

$g(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\frac{1}{13!}x^{13}$

Zajímavost: Kdyby se n rovnalo ∞ (výraz by byl součtem nekonečného počtu prvků), šlo by o takzvanou Taylorovu řadu. Její průběh by byl naprosto totožný s původní funkcí f. Proto můžeme zapsat, že pro každou analytickou funkci platí:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Jelikož je průběh nekonečné Taylorovy řady plně totožný s průběhem dané funkce **v celém jejím rozsahu**, nezáleží vlastně vůbec na tom, jakou hodnotu bude mít x_0. A protože je zápis Taylorovy řady z pochopitelných důvodů nejjednodušší pro $x_0 = 0$, můžeme si za x_0 skutečně dosadit nulu[10]. Proto platí:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Z toho plyne pozoruhodný poznatek: Každou analytickou funkci lze definovat nekonečnou řadou. Například funkci sinus můžeme rozepsat takto:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \ldots$$

[10] Pro $x_0 = 0$ se Taylorova řada nazývá Maclaurinova řada.

7.4 Logické odvození Taylorova polynomu

Nyní, když jsme si ukázali, jak Taylorův polynom správně používat, může se mnohý zvídavý čtenář začít zabývat otázkou, jak vlastně pan Taylor tak chytrou věc objevil. Ačkoliv to může znít překvapivě, osobně se domnívám, že v této fázi je již čtenář schopen pochopit logické odvození Taylorova polynomu. Pomoci mu v tom má tato kapitola.

Obecný cíl

Pan Taylor si vzal za cíl najít výraz obsahující proměnnou x, který by obsahoval pouze sčítání a násobení a který by měl jakožto funkce stejnou funkční hodnotu pro x, jako má původní funkce f. Připomeňme si středoškolskou poučku, že výraz obsahující jen sčítání a násobení (násobení se samozřejmě může projevit také jako mocnina) se nazývá **polynom**. Tak třeba polynomem je výraz:

$2x^3 + x^2 + 8x + 4$

Někdy bývá zvykem zapisovat polynom od nejvyššího řádu (mocniny) proměnné x směrem k nejmenšímu tak, jak je to uvedené na našem příkladě. Dohodněme se však nyní, že zde budeme pro lepší přehlednost zapisovat polynomy v opačném pořadí členů, tedy výše uvedený polynom zapíšeme takto:

$4 + 8x + x^2 + 2x^3$

Připomeňme si pro jistotu také, že čísla 4, 8, 1 a 2 se nazývají **koeficienty**. Každý z těchto koeficientů násobí nějakou mocninu x. Čtenář jistě chápe jako samozřejmost, že i číslo 4 je koeficientem proměnné x, ačkoliv to na zápisu není vidět – proměnná x je zde umocněna na nultou, což je rovno jedné.

Nyní si co nejpodrobněji napišme obecný tvar polynomu. Polynom n-tého řádu je výraz v obecném tvaru:

$a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 ... + a_nx^n$

Shrňme si ještě jednou cíl, který sledujeme: Hledáme takový konkrétní výraz tvaru $a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 ... + a_nx^n$ (neboli polynom), jehož funkční hodnota pro x bude pokud možno co nejpřesněji odpovídat funkční hodnotě $f(x)$. Uvědomme si, že **to jediné**, co o našem hledaném polynomu nevíme a **co proto budeme hledat, je konkrétní podoba koeficientů** a_0 **až** a_n. Až budeme konkrétní podobu těchto koeficientů znát, budeme mít k dispozici potřebný polynom.

Hypotetický předpoklad

Základní myšlenka, z níž pan Taylor vycházel a z níž budeme při odvozování Taylorova polynomu vycházet i my, je následující pozoruhodný předpoklad: **Pokud dvě funkce f a g mají shodné všechny derivace (nultou, první, druhou, třetí až nekonečnou) v nějakém bodě, pak mají také shodné funkční hodnoty.** (Poznámka: Nultá derivace znamená, že nederivujeme, takže funkce je v podobě svého zápisu $f(x)$. Hodnota nulté derivace v bodě x_0 pochopitelně odpovídá její funkční hodnotě v témž bodě.)

Jelikož **nemůžeme počítat nekonečné množství derivací**, spokojíme se jen s určitým počtem derivací, který označme n. Pak si ovšem výše uvedený předpoklad můžeme upravit do následujícího znění: **Mají-li tedy funkce f a g shodnou nultou, první, druhou, třetí až $n-$tou derivaci v nějakém bodě, mají v okolí tohoto bodu i velmi podobnou funkční hodnotu.**

Praktické nalezení Taylorova polynomu

V tomto okamžiku už musíme vycházet z výše uvedeného předpokladu a uvědomit si již přesněji, co hledáme: **Hledáme výraz tvaru $a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3\ldots+a_nx^n$, jehož nultá derivace (funkční hodnota) v bodě x_0 je shodná s nultou derivací původní funkce f v bodě x_0, první derivace v bodě x_0 shodná s první derivací původní funkce f v bodě x_0, druhá derivace v bodě x_0 shodná s druhou derivací původní funkce f v bodě x_0, třetí derivace v bodě x_0 shodná s třetí derivací původní funkce f v bodě x_0, až n-tá derivace v bodě x_0 shodná s n-tou derivací původní funkce f v bodě x_0.** Tento požadavek můžeme tedy jednoduše matematicky zapsat:

$$f^{(0)}(x_0)=(a_0{x_0}^0+a_1{x_0}^1+a_2{x_0}^2+a_3{x_0}^3\ldots+a_n{x_0}^n)^{(0)}$$
$$f^{(1)}(x_0)=(a_0{x_0}^0+a_1{x_0}^1+a_2{x_0}^2+a_3{x_0}^3\ldots+a_n{x_0}^n)^{(1)}$$
$$f^{(2)}(x_0)=(a_0{x_0}^0+a_1{x_0}^1+a_2{x_0}^2+a_3{x_0}^3\ldots+a_n{x_0}^n)^{(2)}$$
$$f^{(3)}(x_0)=(a_0{x_0}^0+a_1{x_0}^1+a_2{x_0}^2+a_3{x_0}^3\ldots+a_n{x_0}^n)^{(3)}$$

Obecně tedy: $f^{(n)}(x_0)=(a_0{x_0}^0+a_1{x_0}^1+a_2{x_0}^2+a_3{x_0}^3\ldots+a_n{x_0}^n)^{(n)}$

Když už máme vše tak přehledně zapsané, proč si derivace rovnou nevypočítat? Ihned si zapišme:

$$f^{(0)}(x_0) = (a_0 x_0^{\,0} + a_1 x_0^{\,1} + a_2 x_0^{\,2} + a_3 x_0^{\,3} \ldots + a_n x_0^{\,n})^{(0)}$$

$$f^{(1)}(x_0) = (a_0 x_0^{\,0} + a_1 x_0^{\,1} + a_2 x_0^{\,2} + a_3 x_0^{\,3} \ldots + a_n x_0^{\,n})^{(1)} = a_1 + 2a_2 x_0 + 3a_3 x_0^{\,2} + \ldots + n a_n x_0^{\,n-1}$$

$$f^{(2)}(x_0) = (a_0 x_0^{\,0} + a_1 x_0^{\,1} + a_2 x_0^{\,2} + a_3 x_0^{\,3} \ldots + a_n x_0^{\,n})^{(2)} = 2a_2 + 6a_3 x_0 + \ldots + n(n-1) a_n x_0^{\,n-2}$$

$$f^{(3)}(x_0) = (a_0 x_0^{\,0} + a_1 x_0^{\,1} + a_2 x_0^{\,2} + a_3 x_0^{\,3} \ldots + a_n x_0^{\,n})^{(3)} = 6a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2) a_n x_0^{\,n-3}$$

Obecně tedy: $f^{(n)}(x_0) = (a_0 x_0^{\,0} + a_1 x_0^{\,1} + a_2 x_0^{\,2} + a_3 x_0^{\,3} \ldots + a_n x_0^{\,n})^{(n)} =$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(n-1)) a_n x_0^{\,n-n} = n! a_n$$ (Zajímavé![11])

Nyní si představme, že pro začátek budeme chtít, aby náš polynom k původní funkci f konvergoval v okolí bodu 0, neboli pro $x_0 = 0$. Dosaďme si:

$f^{(0)}(0) = (a_0 0^0 + a_1 0^1 + a_2 0^2 + a_3 0^3 \ldots + a_n 0^n) = a_0$ (neboli $f^{(0)}(0) = 0! a_0$)

$f^{(1)}(0) = a_1 + 2a_2 0 + 3a_3 0^2 + \ldots + n a_n 0^{n-1} = a_1$ (neboli $f^{(1)}(0) = 1! a_1$)

$f^{(2)}(0) = 2a_2 + 6a_3 0 + \ldots + n(n-1) a_n 0^{n-2} = 2a_2$ (neboli $f^{(2)}(0) = 2! a_2$)

$f^{(3)}(0) = 6a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2) a_n 0^{n-3} = 6a_3$ (neboli $f^{(3)}(0) = 3! a_3$)

Obecně tedy: $f^{(n)}(0) = n! a_n$

Prohlédneme-li si pozorně výše uvedený zápis, všimneme si, že v každém řádku před každým a_k (kde k je index) stojí koeficient rovný $k!$. To samozřejmě obecně shrnuje poslední řádek výše uvedeného zápisu: $f^{(n)}(0) = n! a_n$

V této chvíli si připomeňme, že to, co hledáme, je **konkrétní podoba koeficientů** a_0 **až** a_n, abychom si je mohli dosadit do obecného polynomu a tím vypočítat náš konkrétní hledaný polynom. Proto si teď z výše uvedeného zápisu vyjádřeme jednotlivá a_k. Ačkoliv to někomu může připadat malicherné, napišme si daný zápis opravdu detailně, tedy i se součiny faktoriálů nuly a jedničky, které se rovnají jedné:

$$f^{(0)}(0) = 0! a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}$$

$$f^{(1)}(0) = 1! a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!}$$

$$f^{(2)}(0) = 2! a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!}$$

$$f^{(3)}(0) = 3! a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$$

Obecně tedy: $f^{(n)}(0) = n! a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

---

[11] Tento poznatek je obzvláště zajímavý. Vyplývá z něho pozoruhodný závěr o faktoriálu, a sice že n-tá derivace funkce x na n–tou je rovna faktoriálu n. Můžeme zapsat:

$(x^n)^{(n)} = n!$

Ukažme si to ještě názorněji na následujícím příkladu:

$(x^5)'''''= (5x^4)''''= (4.5x^3)'''= (3.4.5x^2)''= (2.3.4.5x)'= 2.3.4.5 = 5!$

Teď už není nic snazšího, než si výše vyjádřené koeficienty dosadit do obecného polynomu $a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 ... + a_nx^n$. Konečná podoba tedy bude:

$$\frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}}{1!}(0)x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Takový polynom lze samozřejmě zjednodušeně zapsat takto:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Podíváme-li se pozorně na výše uvedený zápis, zjistíme, že jsme si právě snadno odvodili vzorec na Taylorův polynom n–tého řádu tak, aby konvergoval k funkci f v okolí bodu 0, tedy pro $x_0 = 0$.

Abychom Taylorův polynom dotvořili do podoby umožňující aproximaci funkce v okolí **libovolného bodu** x_0, stačí provést dvě úpravy:

1) Víme, že nula ve výrazu $f^{(k)}(0)$ v čitateli je v roli konkrétního x_0. Aby byl výraz upraven pro libovolné x_0, musíme tedy tento výraz v čitateli upravit na $f^{(k)}(x_0)$.
2) Je nutno si uvědomit, že pokud má Taylorův polynom konvergovat k původní funkci v okolí libovolného x_0, musíme jeho graf do tohoto bodu posunout. Obecně platí, že u jakékoliv funkce docílíme posunu jejího grafu k určitému bodu x_0 vždy odečtením čísla x_0 od proměnné x. Proto výraz x_0 nahradíme ve vzorci výrazem $(x - x_0)$.

Výsledný vzorec tedy bude:

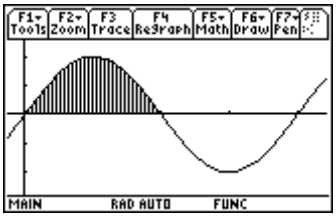
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Tím jsme úspěšně završili postup logického odvození Taylorova polynomu.

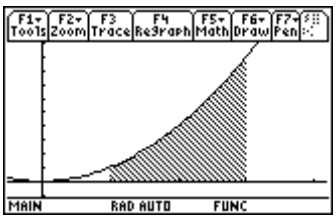
8. INTEGRÁLNÍ POČET

8.1 Význam integrálu aneb k čemu to slouží

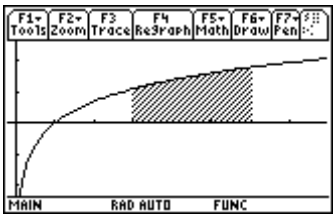
V matematice, obzvláště aplikované, se poměrně často můžeme setkat s požadavkem zjistit plochu mezi křivkou dané funkce a určitým úsekem osy x, který je zleva i zprava vymezen konkrétními body na ose x (ty označujme r a s). Obsah takto vymezené plochy se počítá nástrojem, který se nazývá **určitý integrál** a zapisuje se znakem $\int_r^s f(x)dx$. Body r a s se nazývají **integrační meze.** Přitom platí, že hodnota integrálu úseku funkce nad osou x je kladná a hodnota integrálu úseku funkce pod osou x záporná. Prohlédněme si níže otištěné grafy:



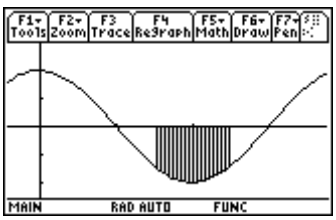
Plocha mezi křivkou funkce sinus a osou x, ohraničená body $r=0$ a $s=\pi$. Říkáme, že jde o určitý integrál funkce sinus v integračních mezích od 0 do π. Matematický zápis je $\int_0^{\pi} \sin(x)dx$. Jelikož je **nad osou x**, je jeho **hodnota kladná**.



Plocha mezi křivkou funkce $f(x)=x^2$ a osou x, ohraničená body $r=1$ a $s=3$. Říkáme, že jde o určitý integrál funkce $f(x)=x^2$ v integračních mezích od 1 do 3. Matematický zápis je $\int_1^3 x^2dx$. Jelikož je nad osou x, je jeho hodnota kladná.



Plocha mezi křivkou funkce $f(x)=\ln(x)$ a osou x, ohraničená body $r=3$ a $s=6$. Říkáme, že jde o určitý integrál funkce $f(x)=\ln(x)$ v integračních mezích od 3 do 6. Zápis je $\int_3^6 \ln(x)dx$. Jelikož je nad osou x, je jeho hodnota kladná.



Plocha mezi křivkou funkce $f(x)=\cos(x)$ a osou x, ohraničená body $r=\frac{3}{4}\pi$ a $s=\frac{5}{4}\pi$. Určitý integrál funkce $f(x)=\ln(x)$ v integračních mezích od $\frac{3}{4}\pi$ do $\frac{5}{4}\pi$. Zápis je $\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \cos(x)dx$. Jelikož je **pod osou x**, je jeho **hodnota záporná**.

8.2 Primitivní funkce, výpočet integrálu

V této kapitole se čtenář dozví pozoruhodný postup, kterým vypočteme plochu mezi křivkou dané funkce a úsekem osy x, vymezeným zleva bodem r a zprava bodem s. Klíčem k tomuto postupu je takzvaný Newtonův-Leibnizův vzorec[12,13]. Než si Newtonův-Leibnizův vzorec zapíšeme korektním matematickým zápisem, rád jej čtenáři přiblížím nejdříve slovy:

Plocha mezi křivkou dané funkce f a úsekem osy x ohraničeným zleva bodem r a zprava bodem je rovna rozdílu funkční hodnoty F pro číslo s a funkční hodnoty F pro číslo r, přičemž F je taková funkce, jejíž derivací je funkce f.

Matematický zápis výše Newtonova-Leibnizova vzorce je tedy následující:

$$\int_r^s f(x)dx = F(s) - F(r) \mid F' = f$$

Z výše uvedeného postupu a vzorce vyplývá, že k výpočtu určitého integrálu dané funkce f je zapotřebí umět vytvořit speciální funkci F takovou, jejíž derivací je funkce f. Funkce F, jejíž derivací je funkce f, se nazývá **primitivní funkce k funkci** f neboli **neurčitý integrál funkce** f. Ten se značí $\int f(x)dx$.

Abychom si ukázali řešení jednoduché úlohy na integrál na pěkném konkrétním případě, přistupme nyní k řešení následujícího příkladu:

Zadání: Vypočtěte velikost plochy mezi křivkou funkce sinus a osou x, ohraničené body 0 a π na ose x.

Řešení: Plochu vypočteme určitým integrálem v integračních mezích 0 a π. Zapišme si známá fakta:

$f(x) = \sin(x)$

$r = 0$

$s = \pi$

Použijeme Newtonův-Leibnizův vzorec: $\int_r^s f(x)dx = F(s) - F(r)$

K použití tohoto vzorce musíme vytvořit primitivní funkci F k funkci f, neboli musíme vytvořit neurčitý integrál funkce sinus. Tou je taková funkce, jejíž derivací je sinus. Z derivačních vzorců víme, že $\cos'(x) = -\sin(x)$, neboli $-\cos'(x) = \sin(x)$. Z toho samozřejmě vyplývá, že $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$ neboli $F(x) = -\cos(x)$. Výpočet tedy bude následující:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx = F(s) - F(r) = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

Odpověď: Daná plocha má obsah 2 jednotky.

---

[12] Sir Isaac Newton (1643-1727), anglický matematik, fyzik, astronom a filosof. Vzorec pro výpočet určitého integrálu objevil nezávisle na Leibnitzovi v rámci svého fyzikálního výzkumu.

[13] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), německý matematik, filosof a diplomat. Za hlavní cíl si kladl vytvořit systém pojmové logiky tak, aby byla zaručena dohoda mezi lidmi a mír mezi národy. Byl autorem mnoha technických vynálezů a konstruktérem prvního počítacího stroje, jehož princip byl založen na mechanice. Zabýval se také fyzikou, biologií, geologií, historií a jazykovědou. Nezávisle na Newtonovi vybudoval integrální a diferenciální počet včetně vzorce pro výpočet určitého integrálu a jako první tyto výsledky publikoval.

8.3 Integrační vzorce

Jak už název napovídá, integrační vzorce nám poslouží k vytváření primitivní funkce neboli neurčitého integrálu jednoduché elementární funkce původní. Jelikož neurčitý integrál je vlastně opačný postup k derivaci, lze si značnou část integračních vzorců odvodit ze vzorců derivačních. Níže uvádím seznam základních integračních vzorců:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Příklad: $f(x) = x$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\int k \ dx = k.x$$

Příklad: $f(x) = 3$, $F(x) = 3x$

$$\int \sin'(x) dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos'(x) dx = \sin(x)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan(x)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot(x)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x)$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x)$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$ (vyplývá z předchozího vzorce)

<u>Vztahy mezi integrály:</u>

V následujících vzorcích je k libovolná konstanta z oboru reálných čísel, u a v jsou funkce.

$$\int (u+v) = \int u + \int v$$

$$\int (k.u) = k.\int u$$

8.4 Problematika neurčitého integrálu

V minulé podkapitole jsme si ujasnili, že při výpočtech určitého integrálu musíme umět vytvořit integrál neurčitý neboli primitivní funkci k funkci původní. K vytvoření funkce F musíme být tedy schopni podrobit funkci f opačnému postupu, než jaký používáme při derivaci. Lidově říkáme, že musíme **umět integrovat**. Mnoho studentů se zpočátku mylně domnívá, že dovedou-li derivovat, dovedou i integrovat – „jde přece pouze o opačný postup". Představa o tom, že je to tak prosté, bohužel odpovídá skutečnosti pouze u některých jednoduchých elementárních funkcí, což je bezpochyby množství jen velmi omezené. Kdyby to bylo tak snadné u všech funkcí, byl by život jistě snazší; vyšší moc to však zařídila jinak. Umět integrovat je daleko náročnější.

V okamžiku, kdy máme neurčitý integrál k dispozici, již není problém aplikovat jej např. do Newtonova-Leibnizova vzorce. Hlavní problém ovšem spočívá v samotném tvoření samotného neurčitého integrálu. Pro některé čtenáře bude možná překvapením, že k některým funkcím (a nemusejí být ani složité) vytvořit primitivní funkci prostě nelze.

V následujících podkapitolách přiblížím čtenáři nástroje k integrování složitějších funkcí. Je možné a dokonce velmi pravděpodobné, že čtenář bude muset vyřešit při písemných zkouškách z matematiky takové typy úloh, v nichž bude nezbytné následující nástroje nejen použít, nýbrž i vhodně zkombinovat. V této souvislosti bych chtěl čtenáře poprosit, aby k řešení složitějších úloh na integrály přistupoval s chladnou hlavou, bez zbytečných emocí a hlavně s nadhledem. Své případné počáteční neúspěchy berte sportovně a nedělejte si z nich příliš těžkou hlavu – věřte, že i zkušenější matematiky dovedou některé integrály pěkně potrápit.

Než přistoupíme k jednotlivým metodám, které slouží k vytvoření neurčitého integrálu, je nutné, aby si čtenář zapamatoval jisté logické pravidlo. Jelikož derivace konstanty je vždy rovna nule a zároveň derivace součtu je rovna součtu derivací, platí:
$(u+k)'=u'+k'=u'+0=u'$
Pokud tedy provedeme zpětné integrování funkce u', je výsledkem samozřejmě u, ovšem také to může být $u+k$. Proto **je nutno zapisovat konečný výsledek neurčitého integrálu ve formě $u+k$, nikoliv jen u**. Bude-li zadáním například $\int \cos(x)dx$, úplné korektní řešení musí obsahovat navíc přičtenou konstantu; správný výsledek je tedy $\int \cos(x)dx = \sin(x)+k$. **To ovšem platí jen pro *neurčitý* integrál**; při výpočtech integrálu určitého se samozřejmě počítá již bez výrazu $+k$.

Sluší se ještě dodat, že různí matematici zapisují přičtenou konstantu různě – někdo píše $+k$, někdo $+c$, některé matematické programy a kapesní matematické laboratoře píší dokonce $+@$ (nejde o chybu tisku, skutečně je tam „zavináč").

8.5 Integrační metoda per partes

Integrační metoda **per partes** (španělsky „po částech“) je postup, který slouží k výpočtu **integrálu součinu dvou funkcí**. Tato metoda je založena na použití následujícího vzorce (odvození je k dispozici v závěru této podkapitoly):
$\int (u'.v) = u.v - \int (u.v')$, kde u a v jsou funkce.

První pohled na výše uvedený vzorec může připadat čtenáři poněkud zvláštní. První zajímavostí je, že levá strana obsahuje nikoliv funkci u, nýbrž její derivaci. Podstata spočívá v tom, že **při výpočtu součinu dvou funkcí si z nich vhodně zvolíme jednu, kterou budeme považovat za derivaci funkce u, přičemž druhou budeme samozřejmě považovat za v**. Jak je ze vzorce patrné, funkci u budeme používat při výpočtu (pravá strana vzorce). Až se tedy při výpočtu bude pracovat se samotnou funkcí u, bude potřeba ji získat tím, že vytvoříme integrál té funkce, kterou si zvolíme za u'. Brzy si to ukážeme prakticky.

Pokud si čtenář výše uvedený vzorec pečlivě prohlédne, možná si ještě všimne, že vzorec, který slouží k řešení integrálu součinu dvou funkcí, nabízí jako řešení výraz, který obsahuje $\int (u.v')$, což je opět integrál součinu dvou funkcí, byť jiných. Po takovém zjištění mnohý student pojme podezření, že vzorec nám nebude k ničemu. Věřte však, že takové podezření by bylo křivdou. V čem tedy spočívá princip použití tohoto vzorce? Vymezme si základní situace, kdy nám vzorec poskytne řešení. První situaci jsem si zvykl nazývat **„derivování funkce v na konstantu“** a druhou situaci přezdívám **„cyklický integrál“** (tyto názvy nám mohou pomoci při studiu, avšak u zkoušek je raději neopakujte, neboť nejde o oficiální pojmy). Tyto situace jsou popsány v následujících odstavcích. V závěru popisuji ještě jeden velmi pěkný případ, který by si snad zasloužil název **„utajený součin“**.

„Derivování funkce v na konstantu"

V tomto případě využíváme vztahu $\int (k.u) = k.\int u$, neboli skutečnosti, že **integrál součinu konstanty a funkce je roven součinu konstanty a integrálu funkce**. Prohlédneme-li si pozorně vzorec na per partes $\int (u'.v) = u.v - \int (u.v')$, uvidíme, že zatímco integrál v zadání $\int (u'.v)$ obsahuje funkci v, integrál obsažený v řešení $\int (u.v')$ obsahuje „už jen" její derivaci. Uvědomme si, že derivací mnohých funkcí (byť i několikerou) můžeme získat konstantu. A získáme-li derivací funkce v konstantu, můžeme ji klidně vytknout před integrál – a v řešení už máme rázem pouze integrál jedné funkce u. Neboli můžeme napsat, že pokud v' je konstantou k, bude $\int (u.v')$ odpovídat $\int (k.u)$, což se rovná $k.\int u$. Tím se zbavíme integrálu součinu v řešení.

Není nad praxi. Ukažme si nejdříve řešení jednoduchého příkladu, kdy již po první derivaci získáme konstantu:

Zadání: Vypočtěte $\int 5x.\cos(x)dx$

Řešení: Jde o integrál součinu funkcí $5x$ a $\cos(x)$. Jelikož vzorec per partes k řešení integrálu součinu dvou funkcí $\int (u'.v) = u.v - \int (u.v')$ předpokládá, že jedna z daných funkcí je u' a druhá v, musíme si vhodně zvolit, kterou z funkcí prohlásíme za u' a kterou za v. Jelikož cílem je získat derivováním funkce v konstantu, zvolíme si za v tu funkci, jejíž derivací je konstanta. A protože $(5x)' = 5$, můžeme zvolit, že $v = 5x$.

Velmi důležité pro přehlednost je po zvolení funkcí okamžitě napsat, čemu se rovná u', v, u a v':

$u' = \cos(x)$

$v = 5x$

$u = \int u' = \sin(x)$

$v' = 5$

Nyní si výše vypsané funkce prostě doplníme do vzorce:

$$\int \cos(x).5x \ dx = \sin(x).5x - \int \sin(x).5 \ dx$$

Konstantu vytkneme před integrál:

$$= \sin(x).5x - 5\int \sin(x) \ dx$$

Vyřešíme integrál:

$$= \sin(x).5x - 5.(-\cos(x)) = \underline{\underline{5x\sin(x) + 5\cos(x)}}$$

V odpovědi bychom neměli zapomenout zapsat výsledek s přidaným $+k$.

Odpověď: $\int 5x.\cos(x)dx = \underline{\underline{5x\sin(x) + 5\cos(x) + k}}$

Určitě se však setkáme také s takovou úlohou, kdy konstantu můžeme získat až druhou či dokonce vícerou derivací. V takovém případě prostě postup integrace per partes opakujeme, dokud nám konstanta nevznikne. Poté ji opět vytkneme před integrál a úlohu normálně dořešíme. To ukazuje následující příklad:

Zadání: Vypočtěte $\int x^3.\sin(x)dx$

Řešení: Jde o integrál součinu funkcí x^3 a $\sin(x)$. Ačkoliv konstantu nemůžeme získat derivací ani jedné z těchto funkcí, můžeme ji získat několikerou derivací funkce x^3. Proto prohlásíme $v = x^3$ a budeme integrovat součiny funkcí metodou per partes tak dlouho, dokud nám konstanta nevznikne.

První aplikace per partes:
Nejdříve si samozřejmě vypíšeme seznam všech potřebných funkcí:

$u' = \sin(x)$

$v = x^3$

$u = \int u' = -\cos(x)$

$v' = 3x^2$

$$\int \sin(x).x^3\,dx = -\cos(x).x^3 - \int -\cos(x).3x^2 dx = \underline{-\cos(x).x^3 + 3\int \cos(x).x^2 dx}$$

Druhá aplikace per partes:
V předchozí aplikaci per partes nám ve výsledku zůstal nedořešený výraz $\int \cos(x).x^2 dx$, proto na něj aplikujeme per partes znovu.

$u' = \cos(x)$

$v = x^2$

$u = \int u' = \sin(x)$

$v' = 2x$

$$\int \cos(x).x^2\,dx = \sin(x).x^2 - \int \sin(x).2x\ dx = \underline{x^2.\sin(x) - 2\int \sin(x).x\ dx}$$

Abychom nezapomněli, že tento dílčí výsledek je pouhou částí výsledku první aplikace per partes, napíšeme si raději dosavadní řešení celé:

$$-\cos(x).x^3 + 3\int \cos(x).x^2 dx = -\cos(x).x^3 + 3\left(x^2.\sin(x) - 2\int \sin(x).x\ dx\right) =$$

$$\underline{3x^2.\sin(x) - 6\int \sin(x).x\ dx - x^3\cos(x)}$$

Zbývá nám dořešit integrál $\int \sin(x).x\ dx$. Už na první pohled půjde o poslední aplikaci per partes, neboť derivací $v = x$ získáme $v' = 1$. Takovou pěknou konstantu nebude potřeba ani vytýkat.

Třetí aplikace per partes:

Dořešíme $\int \sin(x).x\ dx$.

$u' = \sin(x)$

$v = x$

$u = \int u' = -\cos(x)$

$v' = 1$

$$\int \sin(x).x\ dx = -\cos(x).x - \int -\cos(x).1\ dx = -\cos(x).x + \int \cos(x)dx = \underline{\sin(x) - x.\cos(x)}$$

Tento dílčí výsledek vložíme do celého dosavadního řešení a zápis „kosmeticky" dokončíme provedením vhodných algebraických úprav:

$$3x^2.\sin(x) - 6\int \sin(x).x\ dx - x^3\cos(x) = 3x^2.\sin(x) - 6\big(\sin(x) - x.\cos(x)\big) - x^3\cos(x) =$$

$$3x^2.\sin(x) - 6\sin(x) + 6x.\cos(x) - x^3\cos(x) = \underline{\underline{3\sin(x)(x^2 - 2) + \cos(x)(6x - x^3)}}$$

Odpověď:

$$\int x^3.\sin(x)dx = \underline{\underline{3\sin(x)(x^2 - 2) + \cos(x)(6x - x^3) + k}}$$

„Cyklický integrál"

Ne vždy se při zadání úlohy na integrál součinu dvou funkcí vyskytuje taková funkce, jejíž derivací (byť několikerou) lze získat konstantu. Typickým příkladem funkcí, která se derivacemi nijak nezjednodušují, jsou funkce sinus, cosinus či třeba e^x. Co když dostaneme za úkol integrovat součin dvou funkcí, z nichž obě se budou vyznačovat takovouto „neoblomností"?

I v mnohých takových případech nám může metoda per partes pomoci. Princip takového řešení spočívá v tom, že následkem postupné aplikace per partes se jako část dílčího řešení objeví tentýž integrál, jakým je zadání. Takovou situaci lze následně řešit jako rovnici. Nejlépe nám to ilustrují následující dvě úlohy s řešením:

Zadání: Vyřešte $\int \sin(x).\cos(x)dx$

Řešení: Zdánlivým vzhledem neřešitelnosti se nenecháme odradit a zahájíme řešení metodou per partes. Začneme pochopitelně volbou vhodných přiřazení funkcí u' a v. Vzhledem k povaze obou funkcí je v tomto případě zcela lhostejné, jak dané funkce přiřadíme. Zvolme si třeba toto:

$u' = \sin(x)$

$v = \cos(x)$

$u = \int u' = -\cos(x)$

$v' = -\sin(x)$

Přistupme k zápisu pomocí vzorečku:

$$\int \sin(x).\cos(x)dx = -\cos^2(x) - \int \sin(x).\cos(x)dx$$

Nyní si výše uvedené dílčí řešení důkladně prohlédněme. Čtenářově pozornosti jistě neunikl pozoruhodný jev: Zadáním je $\int \sin(x).\cos(x)dx$, který se v nezměněné podobě objevil také jako součást řešení! Cyklus se uzavřel. Proto se na výše uvedený řádek podívejme jako na rovnici:

$$\int \sin(x).\cos(x)dx = -\cos^2(x) - \int \sin(x).\cos(x)dx$$

Výraz $\int \sin(x).\cos(x)dx$ převedeme na levou stranu rovnice přičtením k oběma stranám:

$$2\int \sin(x).\cos(x)dx = -\cos^2(x)$$

Obě strany rovnice vydělíme dvěma:

$$\int \sin(x).\cos(x)dx = -\frac{\cos^2(x)}{2}$$

Tím jsme získali řešení.

Odpověď: $\int \sin(x).\cos(x)dx = -\frac{\cos^2(x)}{2} + k$

U některých podobných úloh musíme aplikovat per partes vícekrát, abychom získali v dílčím řešení integrál identický se zadáním (neboli aby se cyklus uzavřel). Jako vzor nám dobře poslouží následující příklad:

Zadání: Vyřešte $\int \sin(x).e^x dx$

Řešení:

První aplikace per partes:

Opět je vzhledem k povaze obou funkcí je v tomto případě zcela lhostejné, jak dané funkce přiřadíme. Zvolme si třeba takto:

$u' = e^x$

$v = \sin(x)$

$u = \int u' = e^x$

$v' = \cos(x)$

Zapišme podle vzorce:

$$\int \sin(x).e^x dx = e^x.\sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

V dosavadním řešení zbývá nedořešený prvek $\int e^x \cos(x) dx$. Rozepíšeme jej podle vzorce:

Druhá aplikace per partes:

Budeme integrovat prvek $\int e^x \cos(x) dx$. Volba funkcí musí být tentokrát stejná, jako v prvním případě. Proto zvolme:

$u' = e^x$

$v = \cos(x)$

$u = \int u' = e^x$

$v' = -\sin(x)$

Zapišme podle vzorce:

$$\int e^x.\cos(x) dx = e^x.\cos(x) - \int e^x(-\sin(x)) dx = \underline{e^x.\cos(x) + \int e^x \sin(x) dx}$$

V tomto okamžiku nám již vznikl takový integrál, jaký je v zadání úlohy. Cyklus se uzavřel. Vložme si tedy tento dílčí výsledek do celého dosavadního řešení:

$$\int \sin(x).e^x dx = e^x.\sin(x) - \int e^x \cos(x) dx = e^x.\sin(x) - \left(e^x.\cos(x) + \int e^x \sin(x) dx\right) =$$

$$e^x.\sin(x) - e^x.\cos(x) - \int e^x \sin(x) dx$$

Postavme si nyní zadání a toto poslední dosavadní řešení do rovnice:

$$\int \sin(x).e^x dx = e^x.\sin(x) - e^x.\cos(x) - \int e^x \sin(x) dx$$

Vyřešme rovnici:

$$2\int \sin(x).e^x dx = e^x.\sin(x) - e^x.\cos(x)$$

$$\int \sin(x).e^x dx = \frac{e^x.\sin(x) - e^x.\cos(x)}{2}$$

Odpověď: $\int \sin(x).e^x dx = \underline{\underline{\frac{e^x.\sin(x) - e^x.\cos(x)}{2} + k}}$

„Utajený součin"

Metoda per partes nám ve specifických případech umožňuje integrovat i takové funkce, u nichž na první pohled součin nevidíme. Řešením úloh takového typu nelze upřít jistou dávku diplomatického šarmu. Velmi elegantním trikem je kupříkladu důvtipná aplikace per partes k vyřešení následující úlohy:

Zadání: Vyřešte $\int \ln(x)dx$.

Řešení: Integrační vzorec pro přirozený logaritmus se obvykle v tabulkách neuvádí. Zkusme se na daný problém podívat trošku jinak – ne vždy spočívá moudrost v jednoduchosti. Klíč k řešení nalezneme, uvědomíme-li si, že integrovaná funkce je také součinem dvou funkcí:

$$\int \ln(x)dx = \int \ln(x).1 \ dx$$

Koeficient v podobě jedničky je tak cenný, že si samozřejmě nemůžeme dovolit jej ztratit nesmyslným vytknutím či nezobrazením. Víme totiž, že při aplikaci per partes funkci u' vždy integrujeme a funkci v derivujeme. Proč bychom tedy nemohli prohlásit, že $u'=1$ a $v=\ln(x)$ a funkci $\ln(x)$ místo integrování derivovat? Zapišme si rovnou:

$$u'=1$$
$$v=\ln(x)$$
$$u=\int u' = x$$
$$v'=\frac{1}{x}$$
$$\int \ln(x).1 \ dx = x.\ln(x) - \int x.\frac{1}{x}dx = x.\ln(x) - \int 1 \ dx = \underline{\underline{x.\ln(x) - x}}$$

Odpověď: $\int \ln(x)dx = \underline{\underline{x.\ln(x) - x + k}}$

Odvození vzorce pro integraci per partes

Závěrem této podkapitoly bych chtěl pro zajímavost čtenáři navrhnout, aby si zkusil vzorec pro per partes odvodit sám. Napovím, že vyplývá jednoduše z pravidla pro derivaci součinu.

Pokud si chce čtenář svůj postup zkontrolovat, odvození vzorce jsem rozepsal níže:

Jak jsem už sdělil, vycházíme z pravidla pro derivaci součinu, který říká:

$$(u.v)' = u'v + uv'$$

Rovnají-li se dvě funkce, rovnají se samozřejmě i jejich integrály. Jinými slovy, pokud platí, že levá strana se rovná pravé, pak i integrál levé strany se rovná integrálu pravé:

$$\int (uv)' = \int \left(u'v + uv'\right)$$

Jelikož levá strana ve výše uvedené rovnici je integrálem derivace, zjednodušíme ji tím, že odstraníme značku integrálu i značku derivace:

$$uv = \int \left(u'v + uv'\right)$$

Pravá strana rovnice je integrálem součtu. Protože integrál součtu je roven součtu integrálů, můžeme ji takto upravit:

$$uv = \int \left(u'v\right) + \int \left(uv'\right)$$

Jeden z integrálů součinu převedeme na levou stranu rovnice:

$$uv - \int \left(uv'\right) = \int \left(u'v\right)$$

Strany pro lepší přehlednost prohodíme:

$$\int \left(u'v\right) = uv - \int \left(uv'\right)$$

POZNÁMKY:

POZNÁMKY:

MÁTE RÁDI PEJSKY?

A vážně jste si jisti,
že svému pejskovi
z neznalosti neubližujete?

Autor těchto skript doporučuje všem majitelům pejsků

knihu vynikajícího znalce psí psychiky Ing. Viktora Dostála

„**Přirozená komunikace a život se psy**",

dostupnou prostřednictvím pozoruhodných internetových

PSÍCH STRÁNEK na adrese:

http://psiskolafalco.web3.cz

Možná budete velmi překvapeni.