Základní aplikace určitého integrálu

1 Geometrické aplikace určitého integrálu

1.1 Obsah rovinné plochy

Obsah P plochy omezené křivkou $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, přičemž $a < b$

$\boxed{P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$, jestliže v intervalu $[a, b]$ je $f(x) > 0$

$\boxed{P = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$, jestliže v intervalu $[a, b]$ je $f(x) < 0$.

Obsah plochy při parametrickém vyjádření rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

$P = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \dot{\varphi}(t)\ \mathrm{d}t$, kde $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$.

1.2 Objem rotačního tělesa

Objem tělesa, které vznikne rotací plochy P omezené křivkou $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ kolem osy x

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2\ \mathrm{d}x}$$

Při rotaci kolem osy y

$V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2\ \mathrm{d}y$, kde $x = \varphi(y)$ vypočítáme z explicitní nebo implicitní rovnice.

1.3 Délka oblouku rovinné křivky

Při explicitním tvaru rovnice křivky $y = f(x)$ platí

$$\boxed{s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ \mathrm{d}x}$$

1.4 Obsah rotační plochy

Při explicitním tvaru rovnice křivky $y = f(x)$ a při rotaci kolem osy x platí

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ \mathrm{d}x}$$

Při explicitním tvaru rovnice křivky $y = f(x)$ a při rotaci kolem osy y platí

$S = 2\pi \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ \mathrm{d}x$.

2 Fyzikální aplikace určitého integrálu

2.1 Statický moment a těžiště plochy

Statický moment plochy omezené křivkou $y = f(x)$, $y \geq 0$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ vzhledem k ose x

$$\boxed{M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

Statický moment plochy omezené křivkou $y = f(x)$, $y \geq 0$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ vzhledem k ose y

$$\boxed{M_y = \int_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Souřadnice těžiště $\mathrm{T} = (\alpha, \beta)$ rovinné plochy

$$\boxed{\mathrm{T} = \left(\frac{M_y}{P}, \frac{M_x}{P}\right)}$$

2.2 Statický moment a těžiště rotačních těles

Statický moment rotačních těles při rotaci kolem osy x vzhledem k rovině $\rho \perp x$

$$\boxed{M = \pi\int_a^b x \cdot f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

Souřadnice těžiště, kde V je objem

$$\boxed{\mathrm{T} = \left(\frac{M}{V}, 0\right)}$$

2.3 Statický moment a těžiště oblouku křivky

Statický moment oblouku křivky vzhledem k ose x

$$\boxed{M_x = \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x}$$

Statický moment oblouku křivky vzhledem k ose y

$$\boxed{M_y = \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x}$$

Souřadnice těžiště, kde s je délka oblouku

$$\boxed{\mathrm{T} = \left(\frac{M_y}{s}, \frac{M_x}{s}\right)}$$