Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA I, zimní semestr 2000/2001
Michal Marvan

7. Determinanty

Determinant je jistá hodnota přiřazená čtvercové matici. Geometricky determinant n-tého řádu vyjadřuje objem n-rozměrného rovnoběžnostěnu.

1. Definice a elementární úpravy

Definice. Buď A čtvercová matice typu n/n nad polem P. Položme

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} A_{2\sigma_2} \cdots A_{n\sigma_n}.$$

Prvek $\det A \in P$ se nazývá *determinant* matice A. Číslo n se nazývá *řád* determinantu. Používá se též označení

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ & & \cdots & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{vmatrix}.$$

Připomeňme, že S_n je grupa permutací na n-prvkové množině $\{1, \dots, n\}$. Každá taková permutace je bijekce $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, kterou budeme chápat jako bijektivní zobrazení z množiny všech řádkových indexů do množiny všech sloupcových indexů matice A.

Ke každému řádku je pak vzájemně jednoznačně přiřazen sloupec. Tudíž, každý součin $A_{1\sigma_1} A_{2\sigma_2} \cdots A_{n\sigma_n}$ je utvořen tak, že obsahuje právě jeden prvek z každého řádku a právě jeden prvek z každého sloupce. Opatřen jest znaménkem $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} = \pm 1 \in P$ příslušné permutace $\sigma \in S_n$.

Příklad. 1) Jestliže $n = 1$, pak grupa S_n má jediný prvek $\mathrm{id} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, přičemž $\operatorname{sgn}(\iota) = 1$. Tudíž, $\det A = \operatorname{sgn} \mathrm{id} \cdot A_{1\,\mathrm{id}_1} = A_{11}$. (Označení $\det A = |A_{11}|$ se vyhýbáme.)

2) Jestliže $n = 2$, pak $S_n = \{\mathrm{id}, \tau\}$, kde $\mathrm{id} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Přitom $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = 1$, $\operatorname{sgn} \tau = -1$, a tedy $\det A = \operatorname{sgn} \mathrm{id} \cdot A_{1\,\mathrm{id}_1} A_{2\,\mathrm{id}_2} - \operatorname{sgn} \tau \cdot A_{1\tau_1} A_{2\tau_2} = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}$. Vzorec pro determinant druhého řádu se snadno pamatuje:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}.$$

3) Jestliže $n = 3$, pak $S_3 = \{\mathrm{id}, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, kde $\mathrm{id} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\tau_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\tau_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\tau_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Přitom $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = \operatorname{sgn} \sigma_1 = \operatorname{sgn} \sigma_2 = 1$, zatímco $\operatorname{sgn} \tau_1 = \operatorname{sgn} \tau_2 = \operatorname{sgn} \tau_3 = -1$. Tudíž, $\det A = A_{11} A_{22} A_{33} + A_{12} A_{23} A_{32} + A_{13} A_{21} A_{32} - A_{11} A_{23} A_{32} - A_{13} A_{22} A_{31} - A_{12} A_{21} A_{33}$. Tento výsledek se nazývá *Sarrusovo pravidlo* pro výpočet determinantu třetího řádu:

$$\begin{array}{c|ccc|}
\oplus & A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ominus \\
\oplus & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \ominus \\
\oplus & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \ominus \\
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{A_{11}} & \multicolumn{1}{c}{A_{12}} & \multicolumn{1}{c}{A_{13}} \\
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{A_{21}} & \multicolumn{1}{c}{A_{22}} & \multicolumn{1}{c}{A_{23}}
\end{array}
\quad = \quad
\begin{aligned}
&A_{11}A_{22}A_{33} + A_{21}A_{32}A_{13} + A_{31}A_{12}A_{23} \\
&- A_{13}A_{22}A_{31} - A_{23}A_{32}A_{11} - A_{33}A_{12}A_{21}.
\end{aligned}$$

4) Podobně lze získat vzorec pro determinant čtvrtého řádu, ten však má již dvacet čtyři sčítanců a je naprosto nevhodný k praktickým účelům. Žádná jednoduchá obdoba Sarrusova pravidla pro $n \geq 4$ *neexistuje.*

Tvrzení. *Je-li některý řádek matice A nulový, pak* $\det A = 0$.

Důkaz. Je-li i-tý řádek nulový, pak je každý součin $A_{1\sigma_1} A_{2\sigma_2} \cdots A_{n\sigma_n}$ nulový, protože se v něm vyskytuje prvek $A_{i\sigma_i} = 0$.

Tvrzení. *Jsou-li některé dva řádky matice A stejné, pak* $\det A = 0$.

Důkaz. Je-li i-tý řádek stejný jako j-tý, pak máme $A_{ik} = A_{jk}$ pro každé k.

Zřejmě $n \geq 2$. Buď τ_{ij} transpozice vyměňující $i, j \in I_n$, takže $\operatorname{sgn} \tau_{ij} = -1$. Ke každé permutaci $\sigma \in S_n$ zaveďme permutaci $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Máme $\operatorname{sgn} \sigma' = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau_{ij} = -\operatorname{sgn} \sigma$. Člen determinantu odpovídající permutaci σ' pak je

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn} \sigma' \cdot A_{1\sigma'_1} \cdots A_{i\sigma'_i} \cdots A_{j\sigma'_j} \cdots A_{n\sigma'_n} \\
&\qquad = -\operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots A_{i\sigma_j} \cdots A_{j\sigma_i} \cdots A_{n\sigma_n} \\
&\qquad = -\operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots A_{i\sigma_i} \cdots A_{j\sigma_j} \cdots A_{n\sigma_n},
\end{aligned}$$

a je tedy právě roven členu odpovídajícímu permutaci σ, ale opatřený opačným znaménkem. Společný příspěvek permutací σ, σ' k součtu $\det A$ je pak roven nule.

Snadno se ověří, že $\sigma' \neq \sigma$ a $\sigma'' = \sigma$. Množiny $\{\sigma, \sigma'\}$ jsou tedy dvojprvkové a tvoří rozklad množiny S_n, jehož každá třída přispívá k součtu $\det A$ právě nulou, takže $\det A = 0$.

Tvrzení (o elementárních úpravách determinantů).

(i) *Přičtením c-násobku i-tého řádku k j-tému řádku se determinant nezmění:*

$$\begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\
 & & \cdots & \\
A_{i1} + cA_{j1} & A_{i2} + cA_{j2} & \cdots & A_{in} + cA_{jn} \\
 & & \cdots & \\
A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\
 & & \cdots & \\
A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\
 & & \cdots & \\
A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}
\end{vmatrix}.$$

(ii) *Vynásobením i-tého řádku determinantu prvkem $c \in P$ se determinant vynásobí prvkem c:*

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ & & \cdots & \\ cA_{i1} & cA_{i2} & \cdots & cA_{in} \\ & & \cdots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ & & \cdots & \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\ & & \cdots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

(iii) *Výměnou i-tého a j-tého řádku, $i \neq j$, determinant změní znaménko:*

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ & & \cdots & \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\ & & \cdots & \\ A_{j1} & A_{j2} & \cdots & A_{jn} \\ & & \cdots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ & & \cdots & \\ A_{j1} & A_{j2} & \cdots & A_{jn} \\ & & \cdots & \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\ & & \cdots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Buď A' upravená matice.

(i) Je-li A' je matice vzniklá přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku matice, pak $A'_{i\sigma_i} = A_{i\sigma_i} + cA_{j\sigma_i}$, načež

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A'_{1\sigma_1} \cdots A'_{i\sigma_i} \cdots A'_{j\sigma_j} \cdots A'_{n\sigma_n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots (A_{i\sigma_i} + cA_{j\sigma_i}) \cdots A_{j\sigma_j} \cdots A_{n\sigma_n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots A_{i\sigma_i} \cdots A_{j\sigma_j} \cdots A_{n\sigma_n} \\ &\quad + c \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots A_{j\sigma_i} \cdots A_{j\sigma_j} \cdots A_{n\sigma_n} \\ &= \det A + c \cdot 0 = \det A. \end{aligned}$$

Zde $\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots A_{j\sigma_i} \cdots A_{j\sigma_j} \cdots A_{n\sigma_n} = 0$, protože se jedná o determinant z matice, která má i-tý řádek stejný jako j-tý.

(ii) Jestliže A' je matice vzniklá vynásobením i-tého řádku matice A prvkem c, pak $A'_{i\sigma_i} = cA_{i\sigma_i}$, kdežto $A'_{j\sigma_j} = A_{j\sigma_j}$ pro $j \neq i$. Tudíž,

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A'_{1\sigma_1} \cdots A'_{i\sigma_i} \cdots A'_{n\sigma_n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots cA_{i\sigma_i} \cdots A_{n\sigma_n} \\ &= c \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots A_{i\sigma_i} \cdots A_{n\sigma_n} \\ &= c \det A. \end{aligned}$$

(iii) Je-li A' matice vzniklá výměnou i-tého a j-tého řádku, potom $A'_{ik} = A_{jk}$ pro každé k. Označme σ' permutaci $\sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\sigma'_i = \sigma_j$ a $\sigma'_j = \sigma_i$, ale $\sigma'_k = \sigma_k$ pro $k \neq i, j$ a máme

$$\begin{aligned}
\det A' &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A'_{1\sigma_1} \cdots A'_{i\sigma_i} \cdots A'_{j\sigma_j} \cdots A'_{n\sigma_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots A_{j\sigma_i} \cdots A_{i\sigma_j} \cdots A_{n\sigma_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots A_{i\sigma_j} \cdots A_{j\sigma_i} \cdots A_{n\sigma_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma'_1} \cdots A_{i\sigma'_i} \cdots A_{j\sigma'_j} \cdots A_{n\sigma'_n} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot A_{1\sigma'_1} \cdots A_{i\sigma'_i} \cdots A_{j\sigma'_j} \cdots A_{n\sigma'_n} \\
&= -\det A.
\end{aligned}$$

Třetí rovnost plyne z komutativního zákona pro násobení, pátá plyne z rovnosti $\operatorname{sgn} \sigma' = -\operatorname{sgn} \sigma$, zatímco poslední rovnost je důsledkem faktu, že přiřazení $\sigma \mapsto \sigma'$ je bijekce $S_n \to S_n$, a proto σ' probíhá celou množinu S_n, pokud σ probíhá celou množinu S_n. (Tvrzení lze dokázat i tak, že výměnu dvou řádků vyjádříme jako posloupnost několika úprav prvního a druhého typu.)

Cvičení. Odvoďte vztah mezi $\det(cA)$ a $\det A$.

Tvrzení. *Platí* $\det E = 1$.

Důkaz. Víme, že $E_{ii} = 1$ pro každé i, ale $E_{ij} = 0$ pro každou dvojici $i \neq j$. V součtu $\det E = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot E_{1\sigma_1} \cdots E_{i\sigma_i} \cdots E_{n\sigma_n}$ se pak vyskytuje právě jeden nenulový sčítanec, a sice $E_{11} \cdots E_{nn} = 1$, se znaménkem $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$. Pro ostatní permutace $\sigma \neq \mathrm{id}$ je totiž alespoň jednou $i \neq \sigma_i$, a proto $E_{i\sigma_i} = 0$, načež celý součin $E_{1\sigma_1} \cdots E_{n\sigma_n}$ je nula.

Tvrzení. *Buď A čtvercová matice, buď $A^\top$ matice k ní transponovaná. Pak* $\det A^\top = \det A$.

Důkaz. Počítejme:

$$\begin{aligned}
\det A^\top &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, A^\top_{1\sigma_1} \cdots A^\top_{i\sigma_i} \cdots A^\top_{n\sigma_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, A_{\sigma_1 1} \cdots A_{\sigma_i i} \cdots A_{\sigma_n n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, A_{1\sigma_1^{-1}} \cdots A_{i\sigma_i^{-1}} \cdots A_{n\sigma_n^{-1}} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} A_{1\sigma_1^{-1}} \cdots A_{i\sigma_i^{-1}} \cdots A_{n\sigma_n^{-1}} \\
&= \det A.
\end{aligned}$$

Třetí rovnost dostaneme uspořádáním součinitelů $A_{\sigma_i i}$ podle vzrůstajícího prvního indexu.

Cvičení. Nechť $A \in M_{nn}(P)$ splňuje $A^\top = -A$ (taková matice se nazývá antisymetrická). Ukažte, že je-li n liché číslo, pak $\det A = 0$.

Problém k řešení. Buďte (x_1, y_1), (x_2, y_2) dva body v rovině $\mathbf{R}^2$. Ukažte, že determinant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

jest roven obsahu rovnoběžníka s vrcholy $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2) [čtvrtým vrcholem je (x_1+x_2, y_1+y_2)].

Buďte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) tři body v prostoru $\mathbf{R}^3$. Ukažte, že determinant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

jest roven obsahu rovnoběžnostěnu s vrcholy $(0, 0, 0)$, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

2. Výpočet determinantu

Připomeňme, že elementárními úpravami můžeme libovolnou matici A převést na Gauss–Jordanův tvar B. Tyto úpravy sice mění hodnotu determinantu, ale známým způsobem.

Jak již víme, nastávají dva případy: (1) $B = E$; (2) B má poslední řádek nulový. V obou případech známe hodnotu $\det B$: v prvním $\det B = 1$, ve druhém $\det B = 0$. Pak ovšem lze určit i hodnotu $\det A$. Dokonce stačí uskutečnit převod jen na tzv. trojúhelníkový tvar, kdy pod hlavní diagonálou $\{ A_{ii} \}$ leží samé nuly.

Definice. Čtvercová matice A je v trojúhelníkovém tvaru, jestliže $A_{ij} = 0$ kdykoliv $i > j$.

Každá matice, která je ve schodovitém tvaru, je zřejmě i ve tvaru trojúhelníkovém. Vidíme, že každou matici lze elementárními úpravami převést na trojúhelníkový tvar.

Tvrzení. *Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků A_{ii}.*

Důkaz. Buď dána trojúhelníková matice A. Rozeznávejme dva případy.

(1) Je-li některý prvek A_{ii} nulový, pak je součin $A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}$ nulový. Ale i na levé straně máme nulu – při převodu matice A na Gauss–Jordanův tvar B totiž v i-tém sloupci nenalezneme hlavní prvek, což, jak víme, má za následek, že B má nulový posledního řádek. Tudíž, $\det B = 0$, načež i $\det A = 0$.

(2) Jsou-li všechny prvky hlavní diagonály nenulové, pak při převodu matice A na Gauss–Jordanův tvar provádíme následující úpravy: (a) pro všechna $i = 1, \dots, n$ vynásobme i-tý řádek prvkem $1/A_{ii}$; (b) přičítáním vhodných násobků řádků vynulujme všechny prvky nad hlavní diagonálou. Takto vzniklý Gauss–Jordanův tvar je jednotková matice E. Při úpravách (a) je nutno kompenzovat změny v hodnotě determinantu; při úpravách (b) se determinant

nemění. Dostáváme

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{(a)}}{=} A_{11}A_{22}\cdots A_{nn} \cdot \begin{vmatrix} 1 & A_{12}/A_{11} & \cdots & A_{1n}/A_{11} \\ 0 & 1 & \cdots & A_{2n}/A_{22} \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(b)}}{=} A_{11}A_{22}\cdots A_{nn} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}.$$

Prakticky provádíme výpočet determinantu tak, že jej převedeme na schodovitý tvar a pak jeho hodnotu určíme z předchozího tvrzení. Nesmíme ovšem zapomenout na změny v hodnotě determinantu, způsobené jednotlivými úpravami. Pro numerické determinanty je metoda dostatečně efektivní.

Příklad. Výpočet hodnoty determinantu může probíhat např. takto:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{vmatrix} = 5 \cdot (-\tfrac{3}{5}) = -3.$$

Ověřte samostatně, že Sarrusovým pravidlem získáme týž výsledek.

3. Cauchyho věta

Cauchyho věta. *Buďte A, B dvě čtvercové matice. Pak platí*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Důkaz. Rozeznávejme několik případů:

(1) Buď A některá z elementárních matic $E_i(c)$, $E_{ij}(c)$, E_{ij}. Podle věty o elementárních úpravách determinantů dostáváme $\det(E_i(c) \cdot B) = c \det B = \det E_i(c) \cdot \det B$, podobně $\det(E_{ij}(c) \cdot B) = \det B = \det E_{ij}(c) \cdot \det B$, a nakonec $\det(E_{ij} \cdot B) = -\det B = \det E_{ij} \cdot \det B$. Tvrzení platí.

(2) Dále buď $A = Q_1 Q_2 \cdots Q_N$ součin několika elementárních matic. Dokazujeme matematickou indukcí vzhledem k N. Pro $N = 1$ viz (1). Indukční krok: Cvičení.

(3a) Nechť při převádění matice A na Gauss–Jordanův tvar dospějeme k jednotkové matici. V tomto případě A je součin elementárních matic (proč?), což je již dokázaný případ (2).

(3b) Nechť při převádění matice A na Gauss–Jordanův tvar dojdeme k matici N s nulovým posledním řádkem, $\det N = 0$. Opět $A = QN$ pro nějakou matici Q, která je součinem elementárních matic, a proto $\det A = \det(QN) = \det Q \cdot \det N = 0$. Na druhé straně, $AB = QNB$, ale matice NB má také nulový poslední řádek (ověřte), a proto analogicky $\det(AB) = \det Q \cdot \det(NB) = 0$. Celkem $\det A \cdot \det B = 0 = \det(AB)$.

Cauchyho věta vlastně praví, že determinant je homomorfismus multiplikativních pologrup

$$(M_{nn}(P), \cdot) \to (P, \cdot).$$

Pozor! Determinant není homomorfismus aditivních pologrup.

Cvičení. Dokažte, že $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Cvičení. Pro determinanty lišící se pouze v jedom řádku platí

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots\cdots\cdots & A_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ A'_{i1} & \cdots\cdots\cdots & A'_{in} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ A_{n1} & \cdots\cdots\cdots & A_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots\cdots\cdots & A_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ A''_{i1} & \cdots\cdots\cdots & A''_{in} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ A_{n1} & \cdots\cdots\cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots\cdots\cdots & A_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ A'_{i1} + A''_{i1} & \cdots\cdots\cdots & A'_{in} + A''_{in} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ A_{n1} & \cdots\cdots\cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dokažte.

Níže se nám bude hodit ještě jedno lemma.

Lemma. *Platí*

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} & A_{k,k+1} & \cdots & A_{k,n} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k+1,k+1} & \cdots & A_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,k+1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{k+1,k+1} & \cdots & A_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,k+1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Říkáme, že determinant A se *rozpadl na subdeterminanty*: subdeterminant A' řádu k a subdeterminant A'' řádu $n - k$. Stručně ale výstižně naše pak tvrzení vyjadřujeme zápisem

$$\begin{vmatrix} A' & X \\ 0 & A'' \end{vmatrix} = |A'| \cdot |A''|.$$

Důkaz. Determinant vlevo jest $\det A = \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots A_{k\sigma_k} A_{k+1,\sigma_{k+1}} \cdots A_{n\sigma_n}$. Každá permutace, která některé $i > k$ zobrazuje na $\sigma_i \le k$ přispívá k součtu $\det A$ nulou, protože $A_{i\sigma_i} = 0$. Tudíž, stačí sčítat jen přes permutace splňující

$$i > k \Rightarrow \sigma_i > k. \tag{$*$}$$

Označme $I'_n = \{1, 2, \ldots, k\}$, $I''_n = \{k+1, k+2, \ldots, n\}$. Podmínka $(*)$ znamená, že σ zobrazuje I'_n do I'_n, načež také I''_n do I''_n (protože σ je bijekce). Každou takovou permutaci σ pak můžeme považovat za dvojici permutací $\sigma' : I'_n \to I'_n$ a $\sigma'' : I''_n \to I''_n$:

$$\begin{array}{c}
\left.\begin{array}{r} 1 \circ \\ 2 \circ \\ \vdots \\ k \circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\sigma'} \left\{\begin{array}{l} \circ\ 1 \\ \circ\ 2 \\ \vdots \\ \circ\ k \end{array}\right. \\
\left.\begin{array}{r} k+1 \circ \\ k+2 \circ \\ \vdots \\ n \circ \end{array}\right\} \xrightarrow[\sigma'']{} \left\{\begin{array}{l} \circ\ k+1 \\ \circ\ k+2 \\ \vdots \\ \circ\ n \end{array}\right.
\end{array}$$

Zřejmě přitom $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{inv}\sigma' + \operatorname{inv}\sigma''$ (proč?). Tudíž

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdots A_{k\sigma_k} A_{k+1,\sigma_{k+1}} \cdots A_{n\sigma_n} \\
&= \sum_{\sigma',\sigma''} \operatorname{sgn}\sigma' \operatorname{sgn}\sigma'' \cdot A_{1\sigma'_1} \cdots A_{k\sigma'_k} A_{k+1,\sigma''_{k+1}} \cdots A_{n\sigma''_n} \\
&= \Big(\sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot A_{1\sigma'_1} \cdots A_{k\sigma'_k}\Big) \cdot \Big(\sum_{\sigma''} \operatorname{sgn}\sigma'' A_{k+1,\sigma''_{k+1}} \cdots A_{n\sigma''_n}\Big). \\
&= \det A' \cdot \det A''.
\end{aligned}$$

4. Minory, kofaktory a Laplaceův rozvoj

Determinant řádu n lze převést na součet n determinantů řádu $n-1$.

Definice. Buď $\det A$ determinant řádu n. Buď A' matice vzniklá vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Determinant $\det A'$ řádu $n-1$ označíme $\bar{A}_{ij}$; nazývá se *minor*. Prvek

$$\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \bar{A}_{ij}$$

se nazývá *kofaktor* (nebo též *algebraický doplněk*) prvku A_{ij}.

Laplaceova věta (o rozvoji determinantu). *Pro každý index* $i = 1, \ldots, n$ *platí*

$$\det A = \hat{A}_{i1} A_{i1} + \cdots + \hat{A}_{in} A_{in}.$$

Uvedený vztah se nazývá *Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku*.

Důkaz. Počítejme

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,j-1} & A_{1j} & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{i,j-1} & A_{ij} & A_{i,j+1} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{n,j-1} & A_{nj} & A_{n,j+1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,j-1} & A_{1j} & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{n,j-1} & A_{nj} & A_{n,j+1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,j-1} & A_{1j} & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{n,j-1} & A_{nj} & A_{n,j+1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ukažme, že

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,j-1} & A_{1j} & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{n,j-1} & A_{nj} & A_{n,j+1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \hat{A}_{ij}.$$

Vyměňujme v tomto determinantu i-tý řádek $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ s následujícími řádky tak dlouho, až se ocitne na nejspodnější pozici; k tomu je třeba $n - i$ výměn. Poté vyměňujme j-tý sloupec $(A_{1j}, \ldots, A_{i-1,j}, 1, A_{i+1,j}, \ldots, A_{nj})$ s následujícími sloupci tak dlouho, až se ocitne na poslední pozici; k tomu je třeba $n - j$ výměn. Determinant, který takto vznikne, je rozpadlý determinant $\bar{A}_{ij} \cdot \det(1) = \bar{A}_{ij}$. Výměnami řádků a sloupců se hodnota determinantu vynásobila číslem $(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$. Celkem $\det A = (-1)^{i+j}\bar{A}_{ij} = \hat{A}_{ij}$ a důkaz je hotov.

5. Adjungovaná matice

Definice. Buď A čtvercová matice. Utvořme matici $\hat{A}$ kofaktorů $\hat{A}_{ij}$. Položme

$$\operatorname{adj} A = \hat{A}^{\top}.$$

Matice adj A se nazývá *adjungovaná* k matici A.

Tvrzení. *Buď A čtvercová matice s nenulovým determinantem. Pak je invertibilní a platí*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Důkaz. Násobme $A \cdot \operatorname{adj} A$:

$$(A \cdot \operatorname{adj} A)_{ij} = \sum_k A_{ik} \hat{A}^{\top}_{kj} = \sum_k A_{ik} \hat{A}_{jk}.$$

Je-li $i = j$, dostáváme $\sum_k A_{ik} \hat{A}_{ik} = \det A$ podle Laplaceovy věty. Je-li $i \neq j$, dostáváme nulu. Skutečně, utvořme matici A', která se od A liší tím, že j-tý řádek je kopií i-tého, takže $\det A' = 0$ (proč?). Podle Laplaceovy věty zase

$$\sum_k A_{ik} \hat{A}_{jk} = \sum_k A'_{ik} \hat{A}'_{jk} = \det A' = 0.$$

Vidíme, že matice $A \cdot \operatorname{adj} A$ je diagonální, přičemž na hlavní diagonále se stále opakuje prvek $\det A \in P$. Tudíž,

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \det A \cdot E.$$

Nyní stačí na obou stranách násobit zleva maticí A^{-1} a dělit nenulovým determinantem $\det A$ a důkaz je hotov.

Tvrzení. *Čtvercová matice A je invertibilní právě tehdy, když* $\det A \neq 0$.

Důkaz. Invertibilita v případě $\det A \neq 0$ byla dokázána v předchozím tvrzení.
Nechť naopak $\det A = 0$. Připusťme, že A je invertibilní s inverzí B. Pak

$$1 = \det E = \det(AB) = \det A \det B = 0,$$

což je spor.

Příklad. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je invertibilní právě tehdy, když $ad - bc = \det A \neq 0$, načež

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Cvičení. Vypočtěte $\det \operatorname{adj} A$.
Návod: $\operatorname{adj} A = A^{-1} \cdot \det A$.