Diferenciální rovnice

Definice 1. *Diferenciální rovnicí řádu n nazýváme rovnici tvaru*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

kde f je spojitá funkce a $y = y(x)$ je neznámá funkce. Řešením nazýváme libovolnou funkci $f(x)$ splňující (1).

Řešení diferenciální rovnice (1) může být samozřejmě více. Nejjednodušším typem rovnice (1) je zřejmě $y^{(n)} = f(x)$. Je zřejmé, že tato rovnice má řešení tvaru $\int(\int(\dots(\int f(x)dx)\dots)dx)dx$, v němž vystupuje n integračních konstant $c_1, \dots, c_n$ (objeví se při integraci).

Definice 2. *Diferenciální rovnicí 1. nazýváme rovnici tvaru*

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

kde f je spojitá funkce a $y = y(x)$ je neznámá funkce. Počáteční podmínkou nazveme podmínku

$$y(x_0) = y_0. \tag{3}$$

Řešení diferenciální rovnice lze chápat jako závislost dráhy y přímočarého pohybu $y = y(x)$ v čase x. Počáteční podmínku (3) lze pak chápat tak, že poloha pohybujícího se bodu v čase x_0 odpovídá hodnotě y_0. Vzniká otázka, zda zadání diferenciální rovnice 1. řádu (2) spolu spočáteční podmínkou (3) má vždy řešení a zda toto řešení je jednoznačně určeno. Kladnou odpověď (i když jen lokálně) dává následující věta o existenci a jednoznačnosti řešení.

Věta 1. *Nechť funkce $f(x,y)$ a její parciální derivace $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ jsou spojité v uzavřené oblasti*

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\},$$

přičemž

$$|f(x,y)| \le M, \qquad \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le K \qquad \forall (x,y) \in G.$$

Pak diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ má právě jednoo řešení definované pro $x \in \left\langle x_0 - min\{a, \frac{b}{M}\}, x_0 + min\{a, \frac{b}{M}\}\right\rangle$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$.

Některé speciální případy DR 1. řádu

(a) $y' = g(x)h(y)$ je rovnice se separovanými proměnnými ($f(x,y)$ v (2) je tvaru $g(x)h(y)$)

(b) $y' = g(\frac{y}{x})$ je tzv. homogenní rovnice. Transformací $u = \frac{y}{x}$ ji lze převést na předchozí typ

(c) $y' = a(x)y + b(x)$ je tzv. lineární rovnice.

(d) $y' = a(x)y + b(x)y^r$ pro $r \neq 0, 1$ je tzv. Bernoulliova rovnice. Případ $r = 0$ je rovnice lineární, případ $r = 1$ je rovnice se separovanými proměnnými.

(e) $g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0$, kde $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$ je tzv. rovnice exaktní. Taková rovnice je vlastně tvaru $df(x,y) = 0$, přičemž $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$ a obecné řešení je pak tvaru $f(x,y) = c$.

Lineární DR 1. řádu

Uvažujme k lineární DR rovnici

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{1}$$

tzv. homogenní nebo zhomogenizovanou rovnici

$$y' = a(x)y, \tag{2}$$

která je rovnicí se separovanými proměnnými. Řešení provádíme ve dvou etapách

(a) řešení zhomogenizované rovnice
(b) variace konstanty

První krok a jeho souvislost s nalezením úplného řešení dává následující tvrzení

TVRZENÍ 1. *Všechna řešení rovnice* (1) *dostaneme jako součet jednoho, tzv. partikulárního řešení* $y_p(x)$ *rovnice* (1) *a všech řešení homogenní rovnice* (2)*. Všechna řešení homogenní rovnice* (2) *tvoří vektorový prostor, který je podprostorem vektorového prostoru všech spojitých funkcí na nějakém okolí nějakého bodu* x_0 *(v němž by se uvažovala počáteční podmínka).*

Nejprve se vyřeší odpovídající zhomogenizovaná rovnice. Je-li $y_h(x)$ jedno z řešení této rovnice, pak řešení původní rovnice se hledají ve tvaru $y(x) = c(x) \cdot y_h(x)$ pro neznámou funkci $c(x)$ pomocí tzv. metody variace konstanty.

Dosazením do původní rovnice máme $c'(x)y_h(x) + c(x)y_h'(x) = a(x)c(x)y_h(x) + b(x)$. Protože $y_h(x)$ je řešením homogenní rovnice $y' = a(x)y$, je $c'(x) = \frac{b(x)}{y_h(x)}$ a odtud

$$c(x) = \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx. \tag{3}$$

PŘÍKLAD 1. *Určete obecné řešení diferenciální rovnice* $y' = xy + xe^{x^2}$.

Řešení: a) zhomogenizovaná rovnice je tvaru $y' = xy$, což je rovnice se separovanými proměnnými. Máme $\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = xdx$. Integrací dostaneme $\int \frac{dy}{y} = \int xdx$, tedy $ln|y| = \frac{x^2}{2} + c$. Tedy $|y| = e^{ln|y|} = e^{\frac{x^2}{2}+c} = k \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, kde $k > 0$ je libovolná kladná konstanta. Zrušením absolutní hodnoty máme $y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, kde c je již libovolná konstanta. Dle předchozího značení máme jedno homogenní řešení $y_h(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

b) variace konstanty: Dosazením do (3) máme $c(x) = \int \frac{xe^{x^2}}{e^{\frac{x^2}{2}}} dx = \int xe^{\frac{x^2}{2}}$. Volbou substituce $t = x^2$ máme $dt = 2xdx$ a $\int xe^{\frac{x^2}{2}} dx = \int \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} dt = e^{\frac{1}{2}t} + c = e^{\frac{x^2}{2}} + c$. Odtud $y(x) = c(x)y_h(x) = (e^{\frac{x^2}{2}} + c)e^{\frac{x^2}{2}} = e^{x^2} + ce^{\frac{x^2}{2}}$.

Lineární DR řádu n s konstantními koeficienty

Definice 3. *Diferenciální rovnicí řádu n s konstantními koeficienty nazveme*

$$L_n(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_2y^{(2)} + a_1y' + a_0y = f(x), \tag{4}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Je-li $f(x) = 0$, hovoříme o zhomogenizované rovnici (4) *nebo o homogenní rovnici asociovanou s rovnicí* (4). *Je tedy tvaru*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_2y^{(2)} + a_1y' + a_0y = 0. \tag{5}$$

Počátečními podmínkami nazveme sadu n podmínek

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0, \tag{6}$$

které musí rovnice (5) *splnovat.*

Podobně jako u lineární diferenciální rovnice 1. řádu platí následující tvrzení udávající vztah mezi všemi řešeními rovnice (4) a řešeními k ní asociované homogenní rovnice (5) spolu s lineární strukturou všech řešení (5).

Tvrzení 2. *Všechna řešení rovnice* (4) *dostaneme jako součet jednoho, tzv. partikulárního řešení $y_p(x)$ rovnice* (4) *a všech řešení zhomogenizované rovnice* (5). *Všechna řešení zhomogenizované rovnice* (5) *tvoří vektorový prostor dimense n, který je podprostorem vektorového prostoru všech spojitých funkcí na nějakém okolí nějakého bodu x_0, v němž se uvažuje sada počátečních podmínek* (6).

Definice 4. *Báze podprostoru všech řešení rovnice* (5) *se nazývá fundamentální szstém řešení.*

Následující věta dává fundamentální systém řešení rovnice (4). Důkaz je technický a proto ho neuvádíme. Před její formulací uvedeme charakteristickou rovnici asociovanou s (homogenní) diferenciální rovnici diskutovaného typu.

Definice 5. *Algebraickou rovnici*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-)} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0\lambda = 0 \tag{7}$$

nazveme charakteristickou rovnicí asociovanou s (homogenní) diferenciální rovnicí (5).

Věta 2. *Fundamentální systém řešení rovnice* (5) *je tvořen řešeními odpovídajícími jednotlivým kořenům* (7) *následovně.*

(a) je-li λ k-násobný reálný kořen, pak mu přísluší k bazických (fundamentálních) řešení

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}. \tag{8}$$

(b) je-li $\lambda = \alpha + i\beta$ k-násobná dvojice komplexně sdružených kořenů, pak jí přísluší $2k$ bazických (fundamentálních) řešení

(9)

$$e^{\alpha x}cos\beta x, e^{\alpha x}sin\beta x, xe^{\alpha x}cos\beta x, xe^{\alpha x}sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}cos\beta x, x^{k-1}e^{\alpha x}sin\beta x.$$

Eulerovy vzorce

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, \qquad \sin bx = \frac{e^{ibx} - e{-}ibx}{2i}$$

Metoda neurčirých koeficientů pro speciální pravou stranu

Nechť

(10) $$f(x) = P_m(x)e^{ax}\cos bx \text{ nebo } f(x) = P_m(x)e^{ax}\sin bx,$$

kde $P_m(x)$ je polynom stupně m. Nechť k je násobnost čísla $a+ib$ v charakteristické rovnici (5). Pak partikulární řešení $y_p(x)$ je tvaru

(11) $$x^k e^{ax} \cdot (Q_{m,1}(x)\cos bx + Q_{m,2}(x)\sin bx),$$

kde $Q_{m,1}(x), Q_{m,2}(x)$ jsou neznámé polynomy stupně m.

Je-li pravá strana $f(x) = P_m(x)e^{ax}$, pak $b = 0$ a (11) přejde na

(12) $$y_p(x) = x^k e^{ax} \cdot Q_m(x).$$

Na pravé straně může být i libovolná lineární kombinace výrazů tvaru (10). Platí totiž tzv. princip superpozice daný následující větou.

VĚTA 3. *Nechť $y_1(x)$ je řešení $L_n(y) = f_1(x)$ a $y_2(x)$ je řešení $L_n(y) = f_2(x)$. Pak $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ je řešení rovnice $L_n(y) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$.*

PŘÍKLAD 2. *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + 4y = cos2x + x.$$

Homogenní rovnice asociovaná k zadané má tvar $y'' + 4y = 0$ a jí odpovídající charakteristická rovnice tvar $\lambda^2 + 4\lambda = 0$. Fundamentální systém řešení je tvaru $\cos 2x$ a $\sin 2x$ ($a = 0, b = 2$). Lineární kombinace z něho vztvořené vyjadřují obecné řešení homogenní rovnice, které je tvaru $c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

Partikulární řešení $y_{p,1}$ příslušející prvnímu výrazu $\cos 2x$ na pravé starně je tvaru (11). Násobnost k se stanoví jako násobnost čísla $2i$, v charakteristické rovnici, neboť $\cos 2x$ je reálnou složkou čísla $e^{0+2i} = e^{2i}$ (v případě $\sin 2x$ by se jednalo o imaginární složku z e^{2i}). Tedy $k = 1$. Dále $m = 0$ ($\cos 2x$ je napravo jen v konstantním násobku) a tedy $y_{p,1} = x^1 e^{0x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) = x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ pro neznámé konstanty c_1, c_2.

Druhá část partikulárního řešení $y_{p,2}$ je tvaru $d_1 x + d_2$ (zde $m = 1$, $k = 0$, neboť $a = 0$ a 0 není kořen charakteristické rovnice. Tedy celkové partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = y_{p,1} + y_{p,2} = x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + d_1 x + d_2$$

V tomto tvaru y_p dvakrát derivujeme, dosadíme do zadání a srovnáním koeficientů u členů $\cos 2x, \sin 2x, x, 1$ vzpočteme neznámé konstanty.

Systém lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

Lze jej zapsat ve vektorovém tvaru

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x) \tag{13}$$

spolu s počáteční podmínkou (opět ve vektorovém tvaru)

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y_0} \tag{14}$$

VĚTA 4. *Nechť $A(x)$, $b(x)$ jsou spojité na intervalu I. Pak má problém (13) s počáteční podmínkou (14) právě jedno řešení, které existuje na celém I. Toto řešení je limitou tzv. Picardovy posloupnosti postupných aproximací*

$$\varphi_0(x) = 0, \varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [A(s)\varphi_k(x) + b(s)]ds, \quad k = 0, 1, \dots$$

LDR řádu n je fakticky systém lineárních rovnic 1. řádu tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\dots\dots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0(x)y_1 - a_1y_2 - \dots - a_{n-1}y_n + f(x) \end{aligned}$$

(je $y_1 = y, y_2 = y', \dots y_n = y^{(n-1)}$).

VĚTA 5. *(Princip superpozice) Jsou-li $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ řešeními systémů rovnic $\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}_i(x)$ pro $i = 1, 2$ a c_1, c_2 libovolné konstanty, pak funkce $\vec{y}(x) = c_1\vec{y}_1(x) + c_2\vec{y}_2(x)$ je řešením systému $\vec{y}' = A(x)\vec{y} + c_1\vec{b}_1(x) + c_2\vec{y}_2(x)$.*

Každé řešení uvažovaného systému LDR 1. řádu je součtem jednoho tzv. partikulárního řešení $\vec{y}_p(x)$ a všech homogenních. Ta tvoří vektorový prostor dimense n, jehož báze se nazývá fundamentální systém řešení (fundamentální matice). Fakt, že dimense prostoru homogenních řešení je rovna n plyne z následující Jacobiho formule. Determinant fundamentální matice nazýváme wronskián.

VĚTA 6. *Buď $Y(x)$ řešení systému $\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$. Pak platí*

$$detY(x) = detY(x_0) = e^{\int_{x_0}^{x} TrA(s)ds},$$

kde $TrA = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

Vektorová pole

DEFINICE 6. *Vektorovým polem hladkosti C^r na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme hladké zobrazení třídy $C^r(m)$ přiřazující každému bodu $x \in M$ vektor $\vec{X}(x) = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, přičemž hladkostí řádu r na M budeme rozumět hladkost řádu r souřadnicových funkcí $X^i(x)$.*

Nzní zavedeme dva důležité pojmy vážící se k pojmu vektorového pole.

Definice 7. *Integrální křivkou $\gamma(t)$ vektorového pole X nazveme křivku $\gamma(t)$ na M takovou, že $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$.*

Rovnost v poslední definici je zřejmě systémem diferenciálních rovnic s nezávislou proměnnou t (což je parametr integrální křivky hrající roli času) a funkcemi $x^i(t)$ (prostorovými souřadnicemi). Pak lze jednotlivé složky vektorového pole $X^i(x)$ chápat jako složky rychlostí v místě $x = x(t)$ uvažovaného pohybu.

Následující věta zaručuje lokálně existenci integrální křivky vzhledem k danému vektorovému poli a umožňuje zavést pojem toku vektorového pole.

Věta 7. *Nechť X je vektorové pole na M a $x \in M$. Pak existuje integrální křivka $\gamma_x : I_x \to M$ splňující $\gamma_x(0) = x$ vektorového pole X pro nějaký interval I_x obsahující 0. Je-li I_x maximální interval uvedené vlastnosti, je γ_x určena jednoznačně.*

Pokud jde o fyzikální náhled, integrální křivky vektorového pole $\mathbf{E}$ nebo $\mathbf{B}$ intenzity elektrického či magnetického pole odpovídají siločarám těchto polí. Značí-li-li pole X pole rychlostí proudící kapaliny, jedná se o tzv. proudnice.

Definice 8. *Tokem vektorového pole nazveme hladké zobrazení $\mathrm{Fl}^X : \cup_{x\in M} I_x \times \{x\} \to M$ takové, že $\mathrm{Fl}^X_t(x) = \mathrm{Fl}^X(t,x) = \gamma_x(t)$, kde $\gamma_x : I_x \to M$ je integrální křivka z předchozí věty definovaná na maximálním intervalu I_x.*

Tok vektorového pole lze rovněž uvažovat jako zobrazení $\mathrm{Fl}^X_x : M \to M$. Pro všechna $x \in M$ splňuje vlastnosti $\mathrm{Fl}^X(0,x) = x$ a $\mathrm{Fl}^X(t+s,x) = \mathrm{Fl}^X(t, \mathrm{Fl}^X(s,x))$, přičemž poslední vztah platí v následujícím smyslu. Existuje-li pravá strana, existuje i levá a platí rovnost. Naopak, existuje-li levá strana a buď obě t, s jsou kladná nebo záporná, pak existuje i pravá strana a opět platí rovnost.

Vraťme se k integrálním křivkám. Připomeňme, že jejich nalezení vzhledem k danému vektorovému poli je úloha na systém diferenciálních rovnic 1. řádu. Křivku však můžeme chápat jen jako trajektorii (čáru), ne nutně jako pohyb ve smyslu polohy jako funkce času (parametru). Pokud jde o dotyk vektorového pole, lze pak definovat dva typy dotyků.

Definice 9. *Řekneme, že vektorové pole je tečné ke křivce $\gamma(t)$, je-li její integrální křivkou, tzn. $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$. Řekneme, že vektorové pole se dotýká křivky $\gamma(t)$, existuje-li parametrizace $\delta(s)$ určující stejnou trajektorii jako $\gamma(t)$ taková, že křivka $\delta = \delta(s)$ je integrální křivkou pole X.*

Pokud jde o nalezení integrálních křivek $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ k rovinnému vektorovému poli $X(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, máme systém diferenciálních rovnic

$$x'(t) = X(x(t), y(t)), \qquad y'(t) = Y(x(t), y(t)). \tag{14}$$

Pokud se zajímáme jen o křivky ve smyslu trajektorií, jichž se uvažované vektorové pole dotýká, pak lze zvolit parametrizaci trajektorie integrální křivky tvaru $x(t) = t$, z čehož vyplývá $x'(t) = 1$ a $y'(t) = y'(x) \cdot x'(t) = y'(x)$. Odtud pak máme

$$y'(x) = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}. \tag{16}$$

Tuto rovnici lze též psát ve tvaru

$$Y(x,y)dx - X(x,y)dy = 0, \tag{17}$$

chápeme-li derivaci $y'(x)$ v diferenciálním tvaru $\frac{dy}{dx}$.

Ortogonální trajektorie

DEFINICE 10. *Systémem ortogonálních trajektorií* $(\delta(t))_i$ *k systému trjektorií* $(\gamma(s))_j$ *nazveme systém trajektorií takový, že libovolná dvojice trajektorií vybraná z obou systémů se protíná pod pravým úhlem.*

Fyzikální význam ortogonálních trajektorií jsou hladiny potenciálu dvourozměrného pole uvažované vzhledem k systému trajektorií siločar. Vzhledem k (17) je diferenciální rovnice pro systém ortogonálních trajektorií tvaru

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0, \tag{17}$$