Obsah

1 Diferenciální rovnice

1.1 Diferenciální rovnice separovatelné

Řešte následující separovatelné diferenciální rovnice:

1) $xyy' = 1 - x^2$

2) $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$

3) $xy' - y = y^2$

4) $\mathrm{e}^x + 2x + y'\sin y = 0$

5) $x^2 y' = 1 - y$

6) $y^2 - y' + 1 = 0$

7) $1 - y^2 - 2xyy' = 0$

8) $y' = a^2 y^2 + b^2$
a a, b jsou reálná čísla.

9) $y' = \dfrac{1+x-y}{x-y}$

10) $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}$

11) $y' = 3x - 2y + 5$

12) $y' = \dfrac{1}{x+2y}$

13) $(x+y)^2 y' = 4$

14) $(x-1)y^3 - \mathrm{e}^x y' = 0$

15) $y + (1 - x^2) y' = 0$

1.2 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Řešte následující lineární diferenciální rovnice prvního řádu:

1) $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

2) $y' - y\cot x = 2x\sin x$

3) $xy' + 2y = x^3$
s počáteční podmínkou: $y(1) = 1$

4) $y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}$

5) $y' = x - y + 1$

6) $y' + 2y = 4x$

7) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$

8) $y' + y = \cos x$

9) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

10) $(1+x^2)y' + 4xy = 3$

11) $y' - \dfrac{3y}{x} = x$

12) $y' - y = \mathrm{e}^x$

13) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1$

14) $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}$

15) $y' + y\cos x = \cos x$

16) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$
s počáteční podmínkou: $y(1) = 2$

17) $y' - y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$
s počáteční podmínkou: $y(0) = 0$

18) $y'\sin x - y\cos x = \mathrm{e}^x \sin^2 x$

19) $y' = 2xy - x^3 + x$

20) $y' = 3x^2 y + x^5 + x^2$

1.3 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů, homogenní

Řešte následující lineární diferenciální rovnice vyšších řádů, homogenní:

1) $y'' + y' - 2y = 0$
2) $y'' + 6y' + 9y = 0$
3) $-y'' - 2y' - y = 0$
4) $y'' + 4y = 0$
5) $-y'' - 3y' = 0$
6) $-y'' - 4y' + 5y = 0$
7) $2y'' + 5y' = 0$
8) $y'' - 2y' + 10y = 0$
9) $y'' + y = 0$
10) $3y'' - 2y' - 8y = 0$
11) $3y'' - 4y' - 5y = 0$
12) $2y'' + y' + \frac{1}{8}y = 0$
13) $y'' + 4y' + 29y = 0$
14) $y'' + 9y = 0$
15) $2y'' + 5y' - 3y = 0$
16) $-2y'' - 8y' - 26y = 0$
17) $y'' - 2y' + 5y = 0$
18) $-y'' + 2y' - 3y = 0$
19) $y'' - y' + y = 0$
20) $3y'' + y' + 2y = 0$

1.4 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů, nehomogenní

1) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
2) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$
3) $y'' + 4y = 2\tan x$
4) $y'' + 3y' = 9x$
5) $y'' + 4y' - 5y = 1$
6) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$
7) $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$
8) $y'' + 9y = 15\sin 2x$
9) $y'' - 3y' + 2y = 5e^x$
10) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$
11) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$
12) $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x$
13) $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x$
14) $y'' + y = -8\cos 3x$
15) $y'' - 3y' + 2y = \sin 2x + \cos 2x$
16) $y^{(4)} - 81y = 27e^{-3x}$
17) $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y^{(3)} = 8x - 12$
18) $y^{(3)} - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$
19) $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$
20) $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$

2 Funkce dvou a více proměnných

2.1 Definiční obor, graf a vrstevnice

1) Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sin\dfrac{x^2-2y}{y^2-5x}$.

2) Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \arcsin 5xy$.

3) Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \ln(x-1) - \ln\cos y$.

4) Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2} + \arcsin\dfrac{x-y}{2}$.

5) Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \ln\left(9-x^2-y^2\right) + \arccos\dfrac{x+y}{2}$.

6) Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt[4]{\left(9-x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2-4\right)}$.

7) Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} + \sqrt{2x+4}$.

8) Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{9-x^2-y^2}{x^2+y^2-4}}$.

9) Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{(2x+4y)\left(x^2+y^2-4\right)}$.

10) Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \dfrac{\ln(6y-3)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

11) Určete definiční obor funkce $f(x,y)$ a načrtněte její graf: $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$.

12) Určete definiční obor funkce $f(x,y)$ a načrtněte její graf: $f(x,y) = y^2$.

13) Určete definiční obor funkce $f(x,y)$ a načrtněte její graf: $f(x,y) = -1 + \sqrt{x^2+y^2-1}$.

14) Určete definiční obor funkce $f(x,y)$ a načrtněte její graf: $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+1}$.

15) Určete definiční obor funkce $f(x,y)$ a načrtněte její graf: $f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$.

16) Určete definiční obor funkce $f(x,y)$ a načrtněte její graf: $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

17) Určete definiční obor funkce $f(x,y)$ a načrtněte její graf: $f(x,y) = \sqrt{2-x^2-\dfrac{1}{2}y^2}$.

18) Určete definiční obor funkce $f(x,y)$ a načrtněte její graf: $f(x,y):\ x^2+y^2=9$.

19) Určete definiční obor funkce $f(x,y)$ a načrtněte její graf $f(x,y) = \dfrac{x^2}{18} - \dfrac{y^2}{8}$:.

20) Určete definiční obor funkce $f(x,y)$ a načrtněte její graf: $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1}$.

21) Určete a zakreslete průměty vrstevnice plochy $z = \dfrac{x^2-y^2}{2}$ do roviny *xy*.

22) Určete a zakreslete průměty vrstevnice plochy $z = \dfrac{4y}{x^2+y^2}$ do roviny *xy*.

23) Určete a zakreslete průměty vrstevnice plochy $z = y^2 - x$ do roviny *xy*.

24) Určete a zakreslete průměty vrstevnice plochy $z = \frac{y}{x}$ do roviny *xy*.

25) Určete a zakreslete průměty vrstevnice plochy $z = \frac{x^2 + y^2}{5}$ do roviny *xy*.

2.2 Výpočet limit

1) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$.

2) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\tan(x \cdot y)}{y}$.

3) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

4) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy + 5x - 5y}$.

5) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-3y}{2x+y}$.

6) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3-\sqrt{9-xy}}{xy}$.

7) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$.

8) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^4 y^3 + x^3 y^4 + x^3 y^2 + x^2 y^3 + xy^2 + y}{x^3 y^3 + 1}$.

9) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{4-xy}-2}$.

10) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} \frac{xy-9}{\sqrt{xy}-3}$.

11) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$.

12) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3 - y^3}{x^3 - x^2 y + 2x^2 - 2y^2}$.

13) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2 y^2 - 4xy}{\left(\sqrt{xy}-2\right)\cdot\left(\sqrt{4-xy}-4\right)}$.

14) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 y^4 - xy^3 + x^3 y^2 - x^2 y - xy + 1}{x^3 y^3 - 1}$.

15) Vypočítejte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

2.3 Parciální derivace

Vypočítejte první parciální derivace z'_x, z'_y ev. u'_x, u'_y, u'_z následujících funkcí:

1) $z = 3x^2 - 5y^3 + 4xy + 5$
2) $z = x^2 y + e^{xy^2}$
3) $z = 4\sqrt[3]{x^5} - \ln y^2$
4) $z = \sin x \cdot \ln y$
5) $z = x^y$
6) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
7) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{\sqrt[3]{y}}{x^2}$
8) $z = \arctan(x - y)^2$
9) $z = xy\cos(x^2 + y^2)$
10) $z = \ln\dfrac{x - y}{x + y}$
11) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$
12) $z = (\sin x)^{\cos y}$
13) $z = \dfrac{3xy}{x - y}$
14) $z = \sin\dfrac{y^2}{x}$
15) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
16) $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
17) $z = xe^{\frac{y}{x}}$
18) $z = xy\ln(x + y)$
19) $z = (x)^{x^y}$
20) $z = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$
21) $z = \arctan\sqrt{x^y}$
22) $z = \dfrac{\cos x^2}{y}$
23) $z = \ln x \sin y - e^x \cos y$
24) $z = \ln(e^x + e^y)$
25) $z = \tan\left(xy + \dfrac{x}{y}\right)$
26) $u = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z$
27) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
28) $u = \arcsin\sqrt{xyz}$
29) $u = ze^{xyz}$
30) $u = 3 \cdot \ln\sqrt{x^2 z + xy^2 + z^2 - 3xyz}$
31) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + ze^{xy}$
32) $u = \dfrac{5xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$
33) $u = \ln\dfrac{4x}{x^2 z + y^2}$
34) $u = \arcsin\dfrac{z}{x^2 y}$
35) $u = \arctan\sqrt{\dfrac{z}{xy}}$

2.4 Funkce zadaná implicitně, složená funkce

1) Dokažte, že rovnicí $y^2 - x = 0$ a bodem $\mathrm{A} = (0; 0)$ není určena jediná funkce $y = f(x)$. Najděte všechny spojité funkce v R určené danou rovnicí a bodem (v explicitním tvaru).

2) Vypočítejte hodnotu první derivace funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

$\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \arctan\dfrac{y}{x} = 0$ v bodě $\mathrm{A} = (1; 0)$.

3) Vypočítejte první y' a druhou y'' derivaci funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

$x^2 - 2xy - y^2 + 4 = 0$ v bodě $\mathrm{A} = (0; 2)$.

4) Vypočítejte první y' a druhou y'' derivaci funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

$x^2 + 2xy - y^2 - 16 = 0$ v bodě $\mathrm{A} = (4; 0)$.

5) Vypočítejte hodnotu první a druhé derivace funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$ v bodě $\mathrm{A} = (0; 1)$.

6) Vypočítejte hodnotu první a druhé derivace funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

$3xy + \cos 2y - 3x^2 + 11 = 0$ v bodě $\mathrm{A} = (-2; 0)$.

7) Vypočítejte hodnotu první a druhé derivace funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

$x^2 y - \sin y + xy + 2x^2 - 8 = 0$ v bodě $\mathrm{A} = (2; 0)$.

8) Vypočítejte hodnotu první a druhé derivace funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

$x + \tan 2y - 3x^2 y + 7 = 0$ v bodě $\mathrm{A} = (-2; 0)$.

9) Vypočítejte první y' a druhou y'' derivaci funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

$2x^2 - 3y^2 - x + 2y - 5 = 0$.

10) Určete druhou derivaci funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

$\ln(x^2 + y^2) - 2\arctan\dfrac{y}{x} = 0$.

11) Zjistěte, zda funkce $y = f(x)$ zadaná implicitně rovnicí: $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ je v bodě $\mathrm{A} = (1; 1)$ konkávní nebo konvexní.

12) Vypočítejte obě první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí:

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ v bodě $\mathrm{A} = (1; -2; 1)$.

13) Vypočítejte obě první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí:

$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$ v bodě $\mathrm{A} = (1; 1; 1)$.

14) Vypočítejte z''_{xx}, jestliže $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$, kde $z = f(x, y)$.

15) Vypočítejte z''_{xy}, jestliže $xyz - \mathrm{e}^z = 0$, kde $z(x, y)$.

16) Vypočítejte obě první parciální derivace funkce $z = u^2 v - v^2 u$, jestliže

$u = x \cdot \cos y$

$v = x \cdot \sin y$.

17) Vypočítejte obě první parciální derivace funkce $z = \ln(u^2 - v)$, jestliže

$u = \sqrt{x^2 + y^2}$

$v = 3x + 2y$.

18) Vypočítejte obě první parciální derivace funkce $z = \arcsin(u^2 + v)$, jestliže

$u = \sqrt{2xy}$

$v = \frac{x-y}{xy}$.

19) Vypočítejte obě první parciální derivace funkce $z = \frac{u-v}{u+v}$, jestliže

$u = \mathrm{e}^{xy}$

$v = \frac{x}{y}$.

20) Substitucí $u = x$, $v = 3x - 2y$ zjednodušte rovnici $2z''_{xy} + 3z''_{yy} = 0$.

2.5 Tečna a normála křivky, normála a tečná rovina plochy

1) Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = \frac{3x-2}{5-x}$ v bodě $\mathrm{T} = (1; ?)$.

2) Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y^4 - 4x^2 - 6xy = 0$ v bodě $\mathrm{T} = (1; 2)$.

3) Napište rovnici tečny a normály ke křivce $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ v bodě $\mathrm{T} = (1; 1)$.

4) Napište rovnici tečny a normály ke křivce $x^4 + y^4 - x^3y^3 = 9$ v bodě $\mathrm{T} = (1; 2)$.

5) Napište rovnici tečny a normály ke křivce $xy + \ln y - 1 = 0$ v bodě $\mathrm{T} = (1; 1)$.

6) Napište rovnici tečny a normály ke křivce $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2$ v bodě $\mathrm{T} = (1; 1)$.

7) Napište rovnici tečny a normály ke křivce $\cos xy = x + 2y$ v bodě $\mathrm{T} = (1; 0)$.

8) Napište rovnici tečny a normály ke křivce $x^3 + y^3 - \frac{9}{2}xy = 0$ v bodě $\mathrm{T} = (1; 2)$.

9) Napište rovnici tečny a normály ke křivce $(x^2 + y^2)(y-1)^2 - 5y^2 = 0$ v bodě $\mathrm{T} = (4; 2)$.

10) Napište rovnici tečny a normály ke křivce $(x^2 + y^2 - 2x)^2 - 2(x^2 + y^2) + 4 = 0$ v bodě $\mathrm{T} = (1; 1)$.

11) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy $z = 2x^2 - 4y^2$ v bodě $\mathrm{T} = (2; 1; ?)$.

12) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ v bodě $\mathrm{T} = (3; 4; ?)$.

13) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy $z = \arcsin\frac{x}{y}$ v bodě $\mathrm{T} = (0; 1; \pi)$.

14) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy $z = \arctan \frac{y}{x}$
v bodě $T = (1; 1; ?)$.

15) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy $z = y^2 - \ln(2x + y)$
v bodě $T = (1; -1; ?)$.

16) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy $z = y + \ln \frac{x}{z}$
v bodě $T = (1; 1; 1)$.

17) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy dané rovnicí: $x^2 - y^3 + z + xyz = 0$
v bodě $T = (1; 1; 0)$.

18) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy dané rovnicí: $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$
v bodě $T = (1; -1; 1)$.

19) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy dané rovnicí: $x^2 + 3xy + z^3 = 0$
v bodě $T = (3; ?; -3)$.

20) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy dané rovnicí: $2x^2 z + 2yz + y^2 = 0$
v bodě $T = (1; -2; ?)$.

21) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy dané rovnicí: $x^3 + y^2 + z - xyz - 2 = 0$
v bodě $T = (1; 0; 1)$.

22) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy dané rovnicí:
$3x^4 - 4y^3 z + 4z^2 xy - 4xz^3 + 1 = 0$ v bodě $T = (1; 1; 1)$.

23) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy dané rovnicí: $(z^2 - x^2)xyz - y^5 - 5 = 0$
v bodě $T = (1; 1; 2)$.

24) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy dané rovnicí: $y - 3z^2 - \sin(3x + y) = 0$
v bodě $T = (-1; 3; 1)$.

25) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy dané rovnicí:
$4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x - y - z = 0$ v bodě $T = (2; 3; 6)$.

26) Napište rovnici tečné roviny a normály plochy dané rovnicí: $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 0$
v bodě $T = (2; 2; 1)$.

2.6 Totální diferenciál

1) Vypočítejte totální diferenciál funkce $z = \arctan xy$.

2) Vypočítejte totální diferenciál funkce $z = 4xy$ v bodě $A = (3; 2)$,
jestliže $dx = -0{,}2$ a $dy = 0{,}2$.

3) Vypočítejte totální diferenciál funkce $z = x^3 + y^3 - 3x^2 y + \sin x$ v bodě $A = (0; 1)$,
jestliže $dx = 0{,}1$ a $dy = -0{,}2$.

4) Vypočítejte totální diferenciál funkce $z = \ln(1 - x)\ln(1 - y)$.

5) Vypočítejte totální diferenciál funkce $z = \dfrac{1}{1 - (2x + 3y)}$.

6) Vypočítejte totální diferenciál funkce $z = e^{2x}(\cos x + \cos 2y)$ v bodě $A = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

7) V bodě $A = \left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ stanovte totální diferenciál funkce $z = e^{2y}(\sin y + \cos 2x)$.

8) V bodě $\mathrm{A}=(2;1)$ stanovte totální diferenciál funkce $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$.

9) Je dána funkce $z=\arctan\sqrt{x^2+y^2}$, vypočítejte totální diferenciál $\mathrm{d}z$ a pomocí něho určete přibližnou hodnotu funkce v bodě $\mathrm{A}=(0{,}98;0{,}01)$.

10) Je dána funkce $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, vypočítejte totální diferenciál $\mathrm{d}z$ a pomocí něho určete přibližnou hodnotu funkce v bodě $\mathrm{A}=(0{,}02;0{,}99)$.

11) Je dána funkce $z=(1+x)^5(1+y)^{20}$, vypočítejte totální diferenciál $\mathrm{d}z$.

12) Vypočítejte totální diferenciál složené funkce $F(u,v)=f\circ g$ v bodě $\mathrm{A}=\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$, jestliže $f(x,y,z)=x+y^2z$; $g(u,v): x=\sin u\wedge y=v\wedge z=\cos(2uv)$.

13) Nalezněte totální diferenciál funkce zadané implicitně rovnicí $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$.

14) Nalezněte totální diferenciál funkce zadané implicitně rovnicí $x^2+y^2+z^2-49=0$ v bodě $\mathrm{A}=(6;2;3)$.

15) Nalezněte totální diferenciál funkce zadané implicitně rovnicí $x+y+z-\ln z-1=0$ v bodě $\mathrm{A}=(2;-\mathrm{e};\mathrm{e})$.

2.7 Parciální derivace a totální diferenciál vyšších řádů

1) Vypočítejte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z=x^3-3x^4y+y^5$.

2) Vypočítejte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $u=xyz$.

3) Vypočítejte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $u=xy+yz+xz$.

4) Vypočítejte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $u=\left(x^2-y^2\right)^3\cdot z^2$.

5) Vypočítejte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

6) Vypočítejte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z=\mathrm{e}^{2y}\sin x$.

7) Vypočítejte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z=\ln\dfrac{x^2+1}{y^2-1}$.

8) Vypočítejte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$.

9) Vypočítejte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z=\arctan\dfrac{x-y}{x+y}$.

10) Vypočítejte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $u=x^{y^z}$.

11) Vypočítejte všechny parciální derivace třetího řádu funkce $z=x^4+2x^3y-2x^2y^2+3xy^3-y^4$.

12) Vypočítejte u'''_{xyz}, jestliže $u=\mathrm{e}^{xyz}$.

13) Vypočítejte u'''_{zyx}, jestliže $u=\cos(xyz)$.

14) Vypočítejte z'''_{xyy}, jestliže $z=y\ln(xy)$.

15) Vypočítejte $z^{(4)}_{xxyy}$, jestliže $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

16) Vypočítejte z'''_{xxx}, z'''_{xxy}, z'''_{yyy}, jestliže $z=\cos(\sin y+x)$.

17) Nalezněte $\mathrm{d}^2 f(\mathrm{A},\mathrm{X})$, jestliže $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}$, $\mathrm{A}=(0;0)$.

18) Nalezněte $\mathrm{d}^2 f(\mathrm{A},\mathrm{X})$, jestliže $f(x,y,z)=xy+yz+xz$, $\mathrm{A}=(1;-1;2)$.

19) Nalezněte $\mathrm{d}^2 f(\mathrm{A},\mathrm{X})$, jestliže $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}$, $\mathrm{A}=(1;1;0)$.

20) Nalezněte $d^2 f(\mathrm{A},\mathrm{X})$, jestliže $f(x,y)=x^2y^2$, $\mathrm{A}=(1;1)$.

21) Vypočítejte totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$.

22) Vypočítejte totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y)=x^2+2y^2-xy+3x-5y+7$.

23) Vypočítejte totální diferenciál druhého řádu funkce $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

24) Vypočítejte totální diferenciál druhého řádu funkce $z=\mathrm{e}^{x-y^2}+\cos x$.

25) Vypočítejte totální diferenciál druhého řádu funkce $z=y\sin x+x\cos y$.

26) Vypočítejte totální diferenciál druhého řádu funkce $u=\sin(x+y+z)$.

27) Vypočítejte $d^3 f(\mathrm{A},\mathrm{X})$, jestliže $f(x,y,z)=xyz$, $\mathrm{A}=(7;11;-10)$.

28) Vypočítejte totální diferenciál třetího řádu funkce $f(x,y)=\cos\left(x+2y^2\right)$.

2.8 Taylorova a Maclaurinova věta

1) Rozviňte funkci $f(x,y)=3x^2-2xy+y^2-2x-3y+1$ podle Taylorovy věty v bodě $\mathrm{A}=(1;2)$ pro $n=2$.

2) Rozviňte funkci $f(x,y)=x^3+y^3-2xy$ podle Taylorovy věty v bodě $\mathrm{A}=(1;1)$ pro $n=3$.

3) Rozviňte funkci $f(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$ podle Maclaurinovy věty pro $n=3$.

4) Rozviňte funkci $f(x,y)=\ln(1-x)\cdot\ln(1-y)$ podle Maclaurinovy věty pro $n=3$.

5) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x,y)=\sin x\cdot\sin y$ pro $n=2$ v bodě $\mathrm{A}=\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x,y)=x^y$ pro $n=3$ v bodě $\mathrm{A}=(1;1)$.

7) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x,y,z)=x^3+y^3-z^3-3xyz$ pro $n=3$ v bodě $\mathrm{A}=(1;0;1)$.

8) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x,y,z)=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z$ pro $n=2$ v bodě $\mathrm{A}=\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$.

9) Nalezněte Maclaurinův polynom funkce $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$ pro $n=2$.

10) Nalezněte Maclaurinův polynom funkce $f(x,y)=\cos\left(x^2+y^2\right)$ pro $n=5$.

2.9 Lokální a globální extrémy funkce

1) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z=x^3-y^3+3xy$.

2) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

3) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$.

4) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z=x^3-3xy+y^3$.

5) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z=3xy-x^2y-xy^2$.

6) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z=4-(x-2)^2-(y+3)^2$.

7) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z=1+6y-y^2-xy-x^2$.

8) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z=9-(x-5)^2+(y-4)^2$

9) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z=xy(4-x-y)$.

10) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z=x^2-(y-1)^2$.

11) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy$.

12) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = \left(3x^2 + y^2\right)e^{-y} + 4$.

13) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = \left(2x^2 - y^2\right)e^{2x+1}$.

14) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

15) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = e^{-\frac{x}{3}}\left(xy - y^2\right)$.

16) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = \left(2x^2 - 3y^2\right)e^{2-2y}$.

17) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

18) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = y^2 - x^2 y - 2xy$.

19) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y + xy + y^2 + x^2 + xy^2 + x^2 y$.

20) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = \frac{1}{3}x^3 - xy + y^2$.

21) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

22) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$.

23) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = \frac{x^3}{3} - 4x + y^2 + 6y - 2$.

24) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

25) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.

26) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = \left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right)e^{2x+3y}$.

27) Vypočítejte lokální extrémy funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.

28) Vypočítejte lokální extrémy funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí
$x^2 + xy + y^2 = 3$.

29) Vypočítejte lokální extrémy funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí
$x^4 + y^3 + 2x^2 y + 2 = 0$.

30) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí
$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 2z + 5 = 0$.

31) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí
$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z = 0$.

32) Vypočítejte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí
$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

33) Vyšetřete absolutní extrémy funkce $z = x^3 - 3xy + y^3$ na oblasti *D*, jestliže
$x \in [-2; 2] \wedge y \in [-2; 2]$.

34) Vyšetřete absolutní extrémy funkce $z = 3xy - x^2 y - xy^2$ na oblasti *D*, jestliže
$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 6$.

35) Vyšetřete absolutní extrémy funkce $z = 3 + \left(x^2 + y\right)e^y$ na oblasti *D*, jestliže
$x \in [-2; 2] \wedge y \in [-2; 2]$.

36) Vyšetřete absolutní extrémy funkce $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ na oblasti *D*, jestliže
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

37) Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ ve čtverci
$0 \le x \le 4 \wedge 0 \le y \le 4$.

38) Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ v obdélníku
$x = 0 \wedge y = 0 \wedge x = 1 \wedge y = 2$.

39) Ze všech pravoúhlých trojúhelníků s daným součtem odvěsen $2p$ určete ten, který má největší obsah.

40) Ze všech pravoúhlých trojúhelníků o přeponě $p = 1$ určete ten, který má největší obvod.

2.10 Dvojné a trojné integrály

1) $\iint_R xy \;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$ $\quad R: 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1$

2) $\iint_R \frac{\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y}{\sqrt{24 + x^2 + y^2}}$ $\quad R: x^2 + y^2 \le 25$

3) $\iint_R (x + y)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$ $\quad R: 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1$

4) $\iint_R xy^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$ $\quad R$: Oblast ohraničená křivkami $y = x^2$ a $y = x$

5) $\iint_R \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$ $\quad R: x^2 + y^2 \le a^2$

6) V následujících příkladech zaměňte pořadí integrace

a) $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\;\mathrm{d}y$ $\quad$ b) $\int_{-6}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\;\mathrm{d}y$

c) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\;\mathrm{d}y$ $\quad$ d) $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\;\mathrm{d}y$

e) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\;\mathrm{d}y$ $\quad$ f) $\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\;\mathrm{d}y \quad a > 0$

g) $\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\;\mathrm{d}y$ $\quad$ h) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\;\mathrm{d}y$

7) $\iint_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$ $\quad \Omega$: $y^2 = 2px \wedge x = \frac{p}{2} \quad p > 0$

8) $\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{2a - x}}\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y \quad a > 0$ $\quad$ Oblast Ω je ohraničena kratší částí kružnice se středem v bodě (a, a) s poloměrem a a osami souřadnic.

9) $\iint_\Omega |xy|\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$ $\quad$ Oblast Ω je kruh o poloměru a se středem v počátku souřadnic.

10) $\iint_\Omega (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$ $\quad$ Oblast Ω je rovnoběžník se stranami $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 3a$, $a > 0$

11) $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ Ω: $x^2+y^2 \le a^2$

12) $\iint\limits_{\Omega} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ Ω: $\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$

13) $\iint\limits_{\Omega} (x+y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ Ω: $x^2+y^2 = x+y$

14) $\iint\limits_{\Omega} (|x|+|y|)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ Ω: $|x|+|y| \le 1$

15) $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ Ω: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

16) $\iint\limits_{\Omega} (x+y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ Oblast Ω je ohraničena křivkami $y^2 = 2x$, $x+y=4$, $x+y=12$

17) $\iint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ $\qquad$ Ω: $xy=1,\ x+y=\frac{5}{2}$

18) Nalezněte obsah obrazce omezeného křivkami: $xy=a^2$, $\quad x+y=\frac{5}{2}a$, $\quad a>0$.

19) Nalezněte obsah obrazce omezeného křivkami: $y^2 = 2px+p^2$, $\quad y^2=-2qx+q^2$
$p>0$ a $q>0$.

20) Vypočítejte objem tělesa ohraničeného plochami:
$z=1+x+y,\ \ z=0,\ \ x+y=1,\ \ x=0,\ \ y=0$

21) Vypočítejte objem tělesa ohraničeného plochami:
$z=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2=x,\ \ x^2+y^2=2x,\ \ z=0$

22) Vypočítejte objem tělesa ohraničeného plochami: $z=\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}, z=0,\ x^2+y^2=a^2$.

23) Nalezněte obsah části křivé plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$ uvnitř plochy $x^2+y^2=2x$.

24) Nalezněte obsah části křivé plochy $az=xy$ uvnitř plochy $x^2+y^2=a^2$.

25) $\iiint\limits_{V} xy^2z^3\ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}z$ $\qquad$ V: $z=xy,\ \ y=x,\ \ x=1,\ \ z=0$

26) $\iiint\limits_{V} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}z$ $\qquad$ V: $x+y+z=1,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$

27) $\iiint\limits_{V} xyz\ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}z$ $\qquad$ V: $x^2+y^2+z^2=1,\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$

28) $\iiint\limits_{V} \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}z$ $\qquad$ V: $x^2+y^2=z^2,\ \ z=1$

29) $\iiint\limits_{V} \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}z$ $\qquad$ V: $x^2+y^2=2z,\quad z=2$

30) Nalezněte objem tělesa ohraničeného plochami:
$z=x^2+y^2,\quad z=2x^2+2y^2,\quad y=x,\quad y=x^2$.

31) Nalezněte objem tělesa ohraničeného plochami:
$z=x+y,\quad z=xy,\quad x+y=1,\quad x=0,\quad y=0$.

32) Nalezněte objem tělesa ohraničeného plochami: $z=6-x^2-y^2,\quad z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3 Vektorová analýza

3.1 Diferenciální charakteristiky polí

1) Stanovte hladinu skalárního pole $f(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}$ procházející bodem $\mathrm{M}=(0;1;0)$.

2) Vypočítejte gradient skalárního pole $f(x,y,z)=x^2+y+z$.

3) Vypočítejte gradient skalárního pole $f(x,y,z)=\ln\left(x^2+y^2\right)+3xz$ v bodě $\mathrm{A}=(1;0;1)$.

4) Určete gradient skalárního pole $f(x,y,z)=z\mathrm{e}^{xy}-\frac{z}{x}+\sqrt{x^2+y^2+3}$ v bodě $\mathrm{A}=(-1;0;2)$.

5) Stanovte body, v nichž je gradient skalárního pole $f(x,y)=xy+\frac{x}{y}$ roven $2\boldsymbol{i}$.

6) Stanovte body skalárního pole $f(x,y,z)=2x^2-y^2+3xz+2y+5$ v nichž je derivace v libovolném směru nulová.

7) Určete směr maximální změny funkce $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+2xy-4x+2y-4z$ v bodě $\mathrm{M}=(1;1;1)$.

8) Určete směr, ve kterém funkce $u(x,y)=\frac{4x}{x^2+y^2}$ maximálně roste v bodě $\mathrm{M}=(-2;2)$.

9) Určete směr, kdy funkce $f(x,y,z)=\ln\left(x^2+y^2\right)+3xz$ v bodě $\mathrm{A}=(1;0;1)$ maximálně roste.

10) Ve kterém směru nejrychleji klesá funkce $f(x,y,z)=\frac{5}{x^2+y^2+z^2+3}$ v bodě $\mathrm{M}=(-1;1;0)$.

11) Ve kterém směru funkce $f(x,y,z)=\arctan\frac{z}{xy}$ v bodě $\mathrm{M}=(1;2;-2)$ klesá nejrychleji.

12) Vypočítejte derivaci funkce $f(x,y)=\ln\left(\mathrm{e}^x+e^y\right)$ v bodě $\mathrm{A}=(1;2)$ ve směru $\boldsymbol{s}=(1;1)$.

13) Stanovte derivaci skalární funkce $f(x,y,z)=xyz$ v bodě $\mathrm{M}=(5;1;2)$ ve směru MA kde $\mathrm{A}=(9;4;14)$.

14) Stanovte derivaci skalární funkce $f(x,y)=\ln\left(\mathrm{e}^x+e^y\right)$ v bodě $\mathrm{M}=(x;y)$ ve směru osy prvního kvadrantu.

15) Stanovte divergenci vektorového pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\arctan x^2y\,\boldsymbol{i}+xy^2\ln x\,\boldsymbol{j}+\ln xy\,\boldsymbol{k}$ v bodě $\mathrm{A}=(1;-3;0)$.

16) Stanovte divergenci vektorového pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\arcsin x\,\boldsymbol{i}+\arctan y\,\boldsymbol{j}+\sqrt{x^2+y^2}\,z\,\boldsymbol{k}$.

17) Stanovte divergenci vektorového pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ v bodě $\mathrm{P}=(1;2;0)$

$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\,\boldsymbol{i}-\ln\left(x^2-z^2\right)\boldsymbol{j}+\ln x\cos x\,\boldsymbol{k}$.

18) Stanovte divergenci vektorového pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\mathbf{grad}\,f$, kde $f(x,y,z)=xy^2z^3$.

19) Vyšetřete, zda vektorové pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\left(x^2+2y^2\right)\boldsymbol{i}+\left(3z^2+2xy\right)\boldsymbol{j}-(4x-2y+4z)\boldsymbol{k}$ má v bodě $\mathrm{M}=(1;1;1)$ zřídlo.

20) Zjistěte, zda vektorové pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\mathrm{e}^{yz}x^2y\,\boldsymbol{i}+\mathrm{e}^{xz}xy^2\,\boldsymbol{j}+\mathrm{e}^{xy}xy\,\boldsymbol{k}$ má v bodě $\mathrm{A}=(-1;-3;0)$ zřídlo.

21) Rozhodněte, zda dané vektorové pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(y+z)\boldsymbol{i}+(x+z)\boldsymbol{j}+(x+y-1)\boldsymbol{k}$ je solenoidální.

22) Zjistěte, zda vektorové pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\ln(x^2+y^2)\boldsymbol{i}-\sqrt{y^2+z^2}\boldsymbol{j}+\ln x\sin x\,\boldsymbol{k}$ je v bodě $\mathrm{P}=(1;2;0)$ solenoidální.

23) Rozhodněte, zda dané vektorové pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\dfrac{-3y}{(x^2+y^2)}\boldsymbol{i}+\dfrac{3x}{(x^2+y^2)}\boldsymbol{j}$ je solenoidální.

24) Stanovte divergenci gradientu skalární funkce $f(x,y,z)=x^2+3y^2+5z^2+xy-4x+y-4x+y-4z$ v bodě $\mathrm{M}=(1;1;1)$.

25) Stanovte rotaci vektorového pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x^2-y^2)x\,\boldsymbol{i}+(x^2-y^2)y\,\boldsymbol{j}+(x^2-y^2)z\,\boldsymbol{k}$.

26) Stanovte rotaci vektorového pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=x^2y\,\boldsymbol{i}+xy^2\boldsymbol{j}+xy\,\boldsymbol{k}$ v bodě $\mathrm{M}=(1;1;-10)$.

27) Vypočítejte rotaci vektorového pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=xyz\cos x\,\boldsymbol{i}+y\sin y\,\boldsymbol{j}+z\tan z\,\boldsymbol{k}$ v bodě $\mathrm{A}=\left(\dfrac{\pi}{2};2;1\right)$.

28) Je dáno vektorové pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\ln z\sin y\,\boldsymbol{i}-\mathrm{e}^x\cos y\,\boldsymbol{j}$. Určete jeho rotaci v bodě $\mathrm{A}=(0;0;3)$.

29) Stanovte rotaci vektorového pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{i}+z\mathrm{e}^{xy}\boldsymbol{j}+\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2-xyz}\,\boldsymbol{k}$ v bodě $\mathrm{M}=(0;1;0)$.

30) Zjistěte, zda vektorové pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x^2z-y^2)x\,\boldsymbol{i}+(x^2z^2-y^2)y\,\boldsymbol{j}+(x^2-y^2)z^2\,\boldsymbol{k}$ je vírové.

31) Zjistěte, zda vektorové pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=xz\,\boldsymbol{i}+(y^2+xz)\boldsymbol{j}+(z-xyz)\boldsymbol{k}$ má v bodě $\mathrm{P}=(-1;2;1)$ vír.

32) Zjistěte, zda vektorové pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\mathrm{e}^x\sin y\,\boldsymbol{i}-\mathrm{e}^x\cos y\,\boldsymbol{j}$ má v bodě $\mathrm{A}=(0;0;3)$ vír.

33) Vyšetřete, zda vektorové pole $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\sqrt{x^2-z^2}\,\boldsymbol{i}+x\mathrm{e}^{xy}\,\boldsymbol{j}+\ln\sqrt{x^2-xyz}\,\boldsymbol{k}$ má v bodě $\mathrm{P}=(1;0;0)$ vír.

34) Vypočtěte vektorový součin $\{\mathbf{grad}\,[z(x^2-y^2)]\}\times\{(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\}$.

3.2 Křivkový integrál I. druhu (neorientovaný)

1) Vypočítejte křivkový integrál I. druhu podél křivky *C*, jestliže: $f(x,y) = x + y$,
C: Obvod trojúhelníka ABC, kde $\mathrm{A} = (0;0)$, $\mathrm{B} = (1;0)$, $\mathrm{C} = (0;1)$.

2) Vypočítejte křivkový integrál I. druhu podél křivky *C*, jestliže: $f(x,y,z) = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$

$C:\ x = a \cdot \cos t \qquad t \in [0, 2\pi]$
$y = a \cdot \sin t \qquad a > 0$
$z = a \cdot t$.

3) Vypočítejte $\int\limits_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s$ jestliže:

$C:\ x = a(\cos t + t \sin t) \qquad 0 \le t \le 2\pi$
$y = a(\sin t - t \cos t)$.

4) Vypočítejte $\int\limits_C (x + 2y - z - 1)\,\mathrm{d}s$ jestliže:

C: Úsečka AB, kde $\mathrm{A} = (1;1;2)$, $\mathrm{B} = (2;1;0)$.

5) Vypočítejte délku oblouku AB křivky *C*, jestliže A, B jsou průsečíky křivky *C* s osami souřadnic

$C:\ x = 2 - \frac{1}{4}t$
$y = \frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}$.

6) Vypočítejte délku oblouku AB křivky *C*, jestliže:

$C:\ y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$ a $0 \le x \le 1$.

7) Vypočítejte plošný obsah válcové plochy s řídící křivkou *C* (v rovině *z* = 0) ohraničené kartézským grafem funkce $f(x,y) = a^2 - x^2 - y^2$, $a > 0$, $z \ge 0$

$C:\ x^2 + y^2 = ax$

8) Vypočítejte plošný obsah válcové plochy s řídící křivkou *C* (v rovině *z* = 0) ohraničené kartézským grafem funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 1$

$C:\ x = \cos t$
$y = \sin t \qquad t \in [0; 2\pi]$.
$z = 0$

9) Vypočítejte hmotnost křivky *C*, jestliže její hustota je dána *y*-ovou souřadnicí bodu křivky

$C:\ x = a \cdot \cos t \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
$y = a \cdot \sin t \qquad a > 0$

10) Vypočítejte hmotnost křivky *C*, jestliže její hustota je dána čtvercem vzdálenosti bodu křivky od počátku souřadnic:

$C:\ x = a \cdot \cos t \qquad t \in [0, 2\pi]$
$y = a \cdot \sin t \qquad a, b > 0$
$z = b \cdot t$.

3.3 Křivkový integrál II. druhu (orientovaný)

1) Vypočítejte křivkový integrál II. druhu podél křivky C:

$\boldsymbol{F} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + (x + y - 1)\,\boldsymbol{k}$

C: úsečka AB s počátečním bodem $\mathrm{A} = (1;1;1)$ a koncovým bodem $\mathrm{B} = (2;3;4)$.

2) Vypočítejte křivkový integrál II. druhu podél křivky C:

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j}$

C: $y = x^2$ s počátečním bodem $x_{\mathrm{A}} = 1$ a koncovým bodem $x_{\mathrm{B}} = 2$.

3) Vypočítejte křivkový integrál II. druhu podél křivky C: s počátečním bodem A a koncovým bodem B, jestliže:

$\boldsymbol{F} = -x \cdot \cos y\,\boldsymbol{i} + y \cdot \sin x\,\boldsymbol{j}$

C: úsečka AB, kde $\mathrm{A} = (0;0)$, $\mathrm{B} = (\pi; 2\pi)$.

4) Vypočítejte $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ jestliže:

$\boldsymbol{F} = (2r - y)\boldsymbol{i} - (r - y)\,\boldsymbol{j}$

$C: \quad x = r(t - \sin t)$

$y = r(1 - \cos t)$

$z = 0$ s počátečním bodem $t_{\mathrm{A}} = 0$ a koncovým bodem $t_{\mathrm{B}} = 2\pi$.

5) Vypočítejte $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ jestliže:

$\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{i} + z\,\boldsymbol{j} + x\,\boldsymbol{k}$

L: $x = r \cdot \cos t$

$y = r \cdot \sin t$

$z = b\,t$ s počátečním bodem $t_{\mathrm{A}} = 0$ a koncovým bodem $t_{\mathrm{B}} = 2\pi$.

6) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{i}$ podél křivky C, jestliže:

C: je kladně orientovaný obvod obdélníka ohraničeného přímkami:
$x = 0, y = 0, x = 2, y = 4$.

7) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\boldsymbol{F} = (x + y)^2\,\boldsymbol{i} - (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{j}$ podél křivky C, jestliže:

C: je kladně orientovaný obvod trojúhelníka ABC o vrcholech $\mathrm{A} = (1;1)$, $\mathrm{B} = (3;2)$ a $\mathrm{C} = (2;5)$.

8) Užitím křivkového integrálu stanovte plošný obsah obrazce ohraničeného křivkou C a průvodiči $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$, jestliže:

$C: \quad x = a \cdot \cos t$

$y = b \cdot \sin t$.

9) Ukažte, že vektorové pole $\boldsymbol{F}$ je potenciálové a stanovte jeho potenciál, jestliže:

$\boldsymbol{F} = z\,\boldsymbol{i} + (y^2 + z)\,\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$.

10) Ukažte, že vektorové pole $\boldsymbol{F}$ je potenciálové a stanovte jeho potenciál, jestliže:

$\boldsymbol{F} = 3\,\boldsymbol{i} - 4\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

3.4 Plošný integrál I. druhu (neorientovaný)

1) Vypočítejte plošný integrál $\iint_S xyz\ \mathrm{d}S$, kde S je část roviny $x+y+z=1$ ležící v prvním oktantu. Integrační oblast načrtněte.

2) Vypočítejte plošný integrál $\iint_S \left(y+z+\sqrt{a^2-x^2}\right)\mathrm{d}S$, kde S je část plochy $x^2+y^2=a^2$ mezi rovinami $z=0$ a $z=v$, kde $v>0$. Integrační oblast načrtněte.

3) Vypočítejte $\iint_S (x+y+z)\sqrt{9-x^2-y^2}\ \mathrm{d}S$, kde S je část plochy $x^2+y^2+z^2=9$ vyhovující nerovnosti $z\geq 0$. Integrační oblast načrtněte.

4) Vypočítejte plošný integrál $\iint_S xyz\ \mathrm{d}S$, kde S je část plochy dané explicitní rovnicí $z=4-x^2-y^2$ a $z\geq 0$. Integrační oblast načrtněte.

5) Vypočítejte plošný integrál ze skalární funkce $f(x,y,z)=z+2x+\frac{4}{3}y$ po ploše S, kde S je část roviny $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ ležící v prvním oktantu. Integrační oblast načrtněte.

6) Vypočítejte plošný integrál ze skalární funkce $f(x,y,z)=\sqrt{a^2-x^2-z^2}$ po ploše S,

kde S má tyto parametrické rovnice: $\begin{array}{l} x=a\cos\varphi\sin\psi \\ y=a\sin\varphi\sin\psi \\ z=a\cos\psi \end{array}$ pro $\varphi\in[0,\pi]$ a $\psi\in[0,\pi]$.

Integrační oblast načrtněte.

7) Stanovte hmotnost kulové plochy S se středem $\mathrm{O}=(0;0;0)$ a poloměrem R, jestliže její hustota je v každém bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od osy z.
Integrační oblast načrtněte.

8) Vypočítejte plošný integrál $\iint_S x\ \mathrm{d}S$, kde S je horní polovina kulové plochy $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Integrační oblast načrtněte.

9) Vypočítejte plošný integrál $\iint_S x^2y^2\ \mathrm{d}S$, kde S je horní polovina kulové plochy $x^2+y^2+z^2=a^2$. Integrační oblast načrtněte.

10) Vypočítejte plošný integrál $\iint_S \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S$, kde S je část paraboloidu $2z=x^2+y^2$ oddělená rovinou $z=1$. Integrační oblast načrtněte.

3.5 Plošný integrál II. druhu (orientovaný)

1) Vypočítejte tok vektoru $\boldsymbol{F} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$ vnější stranou paraboloidu o rovnici $z = 4 - x^2 - y^2$ ležícího nad rovinou *xy*.

2) Vypočítejte tok vektoru $\boldsymbol{F} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}$ vnější stranou horní části ($z \geq 0$) rotační kuželové plochy o rovnici $z^2 = x^2 + y^2$ a $x^2 + y^2 \leq 9$.

3) Vypočítejte plošný integrál II. druhu po dané ploše *S*, jestliže *S* je vnější strana horní poloviny plochy kulové $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ a $\boldsymbol{F} = (2y-1)\,\boldsymbol{i} + (xy - 2x)\,\boldsymbol{j} + (1 - xz)\,\boldsymbol{k}$.

4) Vypočítejte tok vektoru $\boldsymbol{F} = z^2\,\boldsymbol{k}$ plochou *S*, jestliže *S* je vnější strana krychle ohraničená rovinami $x = 1, y = 1, z = 1, x = 2, y = 2, z = 2$.

5) Vypočítejte plošný integrál II. druhu po dané ploše *S*, která je orientována tak, že v bodě M pro $u = 0$ a $v = 0$ má $\boldsymbol{n} : n_z > 0$, plocha má tyto rovnice:
$\boldsymbol{r} = (u+v)\,\boldsymbol{i} + (u-v)\,\boldsymbol{j} + uv\,\boldsymbol{k} \quad |u| \leq 1 \quad |v| \leq 1$ a $\boldsymbol{F} = x^2\,\boldsymbol{i} + y^2\,\boldsymbol{j} + z^2\,\boldsymbol{k}$.

6) Vypočítejte tok polohového vektoru přes vnější stranu povrchu válce o rovnicích $x^2 + y^2 \leq 1$ a $0 \leq z \leq 3$.

7) Vypočítejte tok vektoru $\boldsymbol{F} = 2x\,\boldsymbol{i} + 2y\,\boldsymbol{j} - (2z-1)\,\boldsymbol{k}$ dolní podstavou tělesa omezeného plochami $x^2 + y^2 = 1$ a $z = 0$ a $z = 1$. Normála směřuje ven z tělesa.

8) Vypočítejte $\iint\limits_S xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ přes plochu $x^2 + y^2 \leq R^2$ a $x = 0$ a $y = 0$ a $z = H$.

Normála je orientována na opačnou stranu, než kde leží počátek soustavy souřadné.

9) Vypočítejte $\iint\limits_S x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xy \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \arctan\sqrt{\dfrac{z+2}{3}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ přes plochu *S*, jestliže

S je plášť válce o rovnicích $x^2 + y^2 = 1$ a $0 \leq z \leq 3$ orientovaný tak, aby normála v bodě $(1; 0; 1)$ byla kladným násobkem vektoru $\boldsymbol{i}$.

10) Vypočítejte $\iint\limits_S x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ přes plochu *S*, jestliže

S je vnější strana kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

3.6 Integrální věty

1) Užitím věty Gauss-Ostrogradského vypočítejte tok vektorového pole $\boldsymbol{F} = x^2\ \boldsymbol{i} + xyz\ \boldsymbol{j} - 2xz\ \boldsymbol{k}$ vnější stranou plochy *S*, jestliže *S* je povrch kvádru $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$.

2) Užitím věty Gauss-Ostrogradského vypočítejte tok vektorového pole $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$ vnější stranou plochy *S*, jestliže *S* je povrch kužele $\mathrm{S}: z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad 0 \le z \le 1$.

3) Užitím věty Gauss-Ostrogradského vypočítejte tok polohového vektoru vnější stranou plochy *S*, jestliže *S* je válec o rovnicích $x^2 + y^2 \le 1$ a $0 \le z \le 3$.

4) Užitím věty Gauss-Ostrogradského vypočítejte tok vektorového pole $\boldsymbol{F} = x^3\ \boldsymbol{i} + y^3\ \boldsymbol{j} + z^3\ \boldsymbol{k}$ vnější stranou plochy *S*, jestliže *S* je plocha o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5) Užitím věty Stokesovy vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\boldsymbol{F} = -z\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}$ podél uzavřené křivky *C*, orientované kladně z bodu $(0; 0; 0)$, jestliže C je kružnice $x^2 + y^2 = 4$ a $z = 1$.

6) Užitím věty Stokesovy stanovte cirkulaci vektorového pole $\boldsymbol{F} = x^2\ \boldsymbol{i} + 2xz\ \boldsymbol{j} - y\,\boldsymbol{k}$ podél uzavřené křivky *C*, orientované kladně z bodu $(0; 0; 4)$, jestliže C je kružnice $x^2 + y^2 = 1$ a $z = 2$.

7) Užitím věty Stokesovy stanovte cirkulaci vektorového pole $\boldsymbol{F} = x^2 y^3\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$ podél uzavřené křivky *C*, orientované proti směru hodinových ručiček z kladného směru osy *z*, jestliže $C: \{(x^2 + y^2 = a^2) \wedge (z = 0)\}$.

8) Užitím věty Greenovy stanovte práci, kterou vykoná síla $\boldsymbol{F} = (x - y)\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j}$ podél křivky *C*, jestliže *C* je čtverec orientovaný proti směru hodinových ručiček a má rovnice $x = \pm 2$ a $y = \pm 2$.

9) Užitím věty Greenovy stanovte cirkulaci vektorového pole $\boldsymbol{F} = -x^2 y\,\boldsymbol{i} + xy^2\ \boldsymbol{j}$ podél uzavřené křivky *C*, ležící v rovině *z* = 0 orientované kladně a *C*: $x^2 + y^2 = a^2$.

10) Užitím věty Greenovy stanovte cirkulaci vektorového pole $\boldsymbol{F} = (xy + x + y)\ \boldsymbol{i} + (xy + x - y)\ \boldsymbol{j}$ podél uzavřené křivky *C*, ležící v rovině *z* = 0 orientované kladně a *C*: $x^2 + y^2 = x$.

4 Úvod do popisné statistiky

4.1 Náhodný výběr

1) Před volbami byl proveden průzkum na základě 1500 voličů. Bylo zjištěno, že 840 z nich by volilo Václava Klause a zbylých 660 Miloše Zemana. Vypočítejte 95% interval spolehlivosti pro podíl Klausových příznivců na populaci.
2) V nově otevřené prodejně bylo nutné rozhodnout, ze které mlékárny budou nakupovat mléčné výrobky. Velice lukrativní nabídky byly z Mlékárny Valašské Meziříčí a Mlékárny Olešnice. Provedli průzkum na základě 500 spotřebitelů. Bylo zjištěno, že 284 z nich dává přednost Mlékárně Valašské Meziříčí a zbytek Mlékárně Olešnice. Vypočítejte 95% interval spolehlivosti pro podíl spotřebitelů upřednostňujících Mlékárnu Valašské Meziříčí na populaci.
3) Dvě velké čokoládovny Orion a Nestlé provedly průzkum mezi 1000 spotřebiteli. Bylo zjištěno, že 826 jich upřednostňuje firmu Orion a zbytek firmu Nestlé. Vypočítejte 95% interval spolehlivosti pro podíl spotřebitelů upřednostňujících čokoládovnu Orion na populaci.
4) Před volbami byl proveden průzkum na základě 2000 voličů. Bylo zjištěno, že 1256 z nich je pro vstup do Nato a zbytek proti. Vypočítejte 95% interval spolehlivosti pro podíl příznivců vstupu do Nato na populaci.
5) Při průzkumu veřejného mínění bylo zjištěno, že 1865 dotázaných z 2000 je pro zpřísnění stávajícího trestního práva a zbytek jej považuje za dostačující. Vypočítejte 95% interval spolehlivosti pro podíl příznivců žádajících zpřísnění trestního práva na populaci.

4.2 Tabulky a grafy rozdělení četností

1) Asistent manažera má k dispozici záznamy 50 zaměstnanců z dopravního oddělení velké firmy za rok 1984. Nechť X vyjadřuje počet dní absencí zaměstnance v daném roce, s vyloučením vážných onemocnění. Pro výběr padesáti zaměstnanců, abecedně seřazený, nabývá X následujících hodnot: 6, 4, 4, 6, 0, 6, 11, 5, 10, 8, 4, 8, 4, 7, 7, 3, 2, 3, 6, 2, 4, 3, 6, 1, 3, 2, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 3, 3, 6, 2, 3, 2, 4, 0, 8, 3, 6, 0, 1, 6, 5, 13, 11, 6. Vytvořte tabulku, ve které bude počet dní absence, četnost a relativní četnost a sestrojte sloupcový graf rozdělení četností absencí. Jaké pravidlo pro vyplácení mzdy do X dní absence byste formulovali?
2) Předpokládejte, že máte výběr 200 sportovců a tento záznam váhy každého z nich v kilogramech: 58,5; 60,5; 61; 61; 61,5; 61,5; 62; 62; 62; 62,5; 62,5; 63; 63,5; 63,5; 64; 64; 64,5; 64,5; 64,5; 64,5; 64,5; 64,5; 65; 65; 65; 65; 65; 65; 65; 65; 65,5; 65,5; 65,5; 65,5; 65,5; 65,5; 65,5; 65,5; 66; 66; 66; 66; 66; 66; 66; 66; 66; 66,5; 66,5; 66,5; 67; 67; 67; 67; 67; 67; 67; 67; 67; 67; 67,5; 67,5; 68; 68; 68; 68; 68; 68; 68; 68; 68,5; 68,5; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69; 69,5; 69,5; 69,5; 69,5; 69,5; 69,5; 69,5; 69,5; 70; 70; 70; 70; 70; 70; 70; 70; 70; 70; 70; 70; 70; 70; 70,5; 70,5; 70,5; 70,5; 70,5; 70,5; 70,5; 70,5; 70,5; 70,5; 71; 71; 71; 71; 71; 71; 71; 71; 71; 71; 71,5; 71,5; 71,5; 71,5; 71,5; 71,5; 71,5; 71,5; 71,5; 71,5; 72; 72; 72; 72; 72; 72; 72; 72; 72; 72; 72; 72; 72; 72; 72; 72; 72,5; 72,5; 72,5; 72,5; 72,5; 72,5; 73; 73; 73; 73; 73,5; 73,5; 73,5; 73,5; 74; 74; 74; 74,5; 75; 75; 75; 75,5; 75,5; 76; 76; 76; 76,5; 78; 79; 79,5. Vytvořte tabulku, ve které budou: hranice intervalu, střed intervalu, četnost a relativní četnost. Vypočítejte dolní kvartil, medián, horní kvartil, modus, rozpětí a mezikvartilové rozpětí. Sestrojte histogram váhy sportovců a krabicový diagram. (Vytvořte 7 ekvidistantních intervalů).

3) Předpokládejte, že máte výběr 100 studentů a tento záznam výšky každého z nich v kilogramech: 166; 177; 177; 177; 178; 178; 170,5; 178,5; 166,5; 178,5; 179,5; 166,5; 166,5; 166,5; 179; 167; 167; 180; 180; 181; 185,5; 167; 167; 167; 167; 168,5; 168,5; 168,5; 169; 169; 169; 169; 171; 171; 171,5; 171,5; 171,5; 169; 172; 172,5; 172,5; 172,5; 169; 169; 169; 169; 169; 169; 169; 169,5; 169,5; 169,5; 169,5; 169,5; 169,5; 169,5; 170; 170; 170; 170; 170; 170; 170; 170; 170; 170; 170; 170; 170; 170; 170,5; 170,5; 170,5; 170,5; 170,5; 170,5; 170,5; 170,5; 170,5; 170,5; 171; 171; 171; 172; 172; 172; 172;; 173; 173; 173; 173,5; 174; 174; 174; 174,5; 175; 175; 175,5; 176; 176,5. Vytvořte tabulku, ve které budou: hranice intervalu, střed intervalu, četnost a relativní četnost. Vypočítejte dolní kvartil, medián, horní kvartil, modus, rozpětí a mezikvartilové rozpětí. Sestrojte histogram výšky studentů a krabicový diagram. (Vytvořte 5 ekvidistantních intervalů).

4) Poradkyně školy zjišťovala výši kapesného u 100 dětí ve škole. Zjistila tyto částky: 10; 10; 15; 15; 20; 20; 20; 20; 25; 25; 25; 30; 30; 30; 30; 40; 40; 40; 50; 50; 50; 60; 70; 70; 75; 30; 30; 50; 50; 50; 50; 70; 65; 45; 80; 50; 50; 50; 25; 25; 25; 30; 30; 30; 30; 40; 40; 40; 50; 50; 50; 60; 70; 70; 75; 75; 80; 30; 30; 10; 10; 20; 30; 20; 20; 20; 20; 25; 25; 25; 30; 30; 30; 30; 40; 40; 40; 50; 50; 50; 60; 70; 70; 75; 75; 80; 100; 100; 75; 50; 50; 50; 50; 70; 65; 45; 80; 50; 50; 30. Vytvořte tabulku, ve které budou: částka, četnost a relativní četnost. Vypočítejte dolní kvartil, medián, horní kvartil, modus, rozpětí a mezikvartilové rozpětí. Sestrojte histogram výše kapesného a krabicový diagram.

5) Manažer podniku má k dispozici záznamy 50 odběratelů jejich součástek za uplynulý rok. jednotlivé firmy seřazené podle abecedy odebraly tyto počty součástek: 200; 200; 200; 150; 150; 150; 300; 300; 350; 350; 400; 400; 500; 500; 100; 100; 250; 250; 350; 400; 250; 300; 450; 450; 500; 250; 300; 400; 200; 250; 300; 300; 300; 350; 350; 350; 400; 500; 150; 300; 300; 350; 350; 400; 400; 500; 500; 100; 100; 250. Vytvořte tabulku, ve které bude počet součástek, četnost a relativní četnost a sestrojte sloupcový graf rozdělení četností počtu součástek.

4.3 Statistické charakteristiky – rozptýlenost rozdělení

1) Při probíhajícím pokusu byly naměřeny tyto hodnoty:

Hodnoty *X*	Hodnoty *Y*
1,8	14,2
2,4	15,6
3,5	24,8
4,1	18,4
4,6	28,9
5,1	34,5
5,6	28,5
7,8	36,2
8,9	42,1
10,8	45,2

Sestrojte bodový graf závislosti *X* na *Y* a vložte do něho graf první regresní přímky. Vypočítejte aritmetický průměr *X* a *Y*, směrodatnou odchylku *X* a *Y*, rozptyl *X* a *Y*, kovarianci, korelaci a rovnice obou regresních přímek.

2) Je dána tato tabulka naměřených hodnot:

x	y
0,25	2,57
0,37	2,31
0,44	2,12
0,55	1,92
0,60	1,75
0,62	1,71
0,68	1,60
0,70	1,51
0,73	1,50
0,75	1,41
0,82	1,33
0,84	1,31
0,87	1,25
0,88	1,20
0,90	1,19
0,95	1,15
1,00	1,00

Vypočítejte aritmetický průměr x a y, směrodatnou odchylku x a y, rozptyl x a y, kovarianci a korelaci.

3) Z velkého počtu pracovníků bylo náhodně vybráno dvacet lidí a změřena doba, kterou potřebují k vykonání jisté technické operace. Odhadněte střední hodnotu a rozptyl doby trvání této technické operace, jestliže máte k dispozici tento záznam změřených dob: 10,5; 10,6; 10,6; 10,9; 10,8; 10,9; 11,3; 10,9; 11,2; 11,0; 10,5; 10,8; 10,9; 10,3; 10,7; 10,7; 10,4; 10,8; 10,8; 11,0.

4) Je dána funkce $f(x): y = \dfrac{4x^2 + 12x + 150}{4x^3 + 2x^2 + 144x + 72}$

a) Vypočítejte primitivní funkci F k funkci f.

b) Vypočítejte plošný obsah obrazce omezeného přímkami: $y = 0$, $x = 4$, $x = 9$ a křivkou f.

c) Tabelujte funkce f a F dvaceti ekvidistatními úseky v intervalu $[4, 9]$.

d) Nalezněte nejvhodnější interpolační křivky (graf, analytický popis).

e) Proložte těmito body regresní přímky a napište jejich rovnice.

f) Vypočítejte aritmetické průměry, směrodatné odchylky, rozptyly, kovariance, korelace a rovnice obou regresních přímek u obou funkcí.

5) Následující tabulka je výsledkem pěti měření různých fyzikálních jevů. Sestrojte bodové grafy závislosti A, B, C, D, E na X, proložte jimi interpolační křivku a první regresní přímku. Vypočítejte aritmetické průměry, směrodatné odchylky, rozptyly, kovariance a korelace. Napište název a rovnice interpolačních křivek a rovnice obou regresních přímek.

X	A	B	C	D	E
0,2	0,608 06	5,289 00	–69,665 50	3,0332 80	7,135 07
0,4	0,747 74	4,358 48	–65,922 60	2,5851 70	7,495 39
0,6	0,863 58	3,719 84	–62,376 40	2,3039 20	7,730 50
0,8	0,921 34	3,355 24	–58,011 80	2,0527 30	8,180 52
1,0	0,980 17	2,993 60	–52,488 80	1,7436 60	8,323 58
1,2	1,064 78	2,759 00	–48,655 40	1,5664 90	8,823 68
1,4	1,105 06	2,564 45	–45,899 70	1,3958 50	8,868 93
1,6	1,158 43	2,311 38	–42,115 60	1,1869 00	9,056 22
1,8	1,196 26	2,203 94	–38,105 00	1,0551 70	9,333 61
2,0	1,241 57	2,018 05	–34,652 80	0,9243 60	9,660 41
2,2	1,294 13	1,901 00	–31,893 50	0,8050 98	9,965 66
2,4	1,335 02	1,756 38	–28,870 10	0,7620 00	10,358 30
2,6	1,361 63	1,681 52	–26,041 60	0,6925 00	10,700 50
2,8	1,407 57	1,534 70	–23,606 90	0,5499 50	10,701 60
3,0	1,424 55	1,472 18	–20,617 00	0,4892 32	11,273 80
3,2	1,461 73	1,373 61	–18,461 70	0,4304 23	11,643 30
3,4	1,478 11	1,275 21	–16,269 60	0,3729 29	11,670 50
3,6	1,506 45	1,218 02	–14,285 10	0,3330 08	12,069 60
3,8	1,498 76	1,143 20	–12,845 00	0,2869 93	12,402 20
4,0	1,550 07	1,072 49	–11,050 70	0,2475 50	12,690 40
4,2	1,545 63	0,991 86	–9,395 82	0,2240 30	12,982 40
4,4	1,560 88	0,928 33	–8,223 77	0,9592 70	13,280 30
4,6	1,606 20	0,851 49	–7,010 40	0,7356 90	13,561 20
4,8	1,604 58	0,818 58	–5,863 78	0,5780 00	13,918 80
5,0	1,639 11	0,759 42	–4,917 51	0,3367 90	13,785 60
5,2	1,691 30	0,691 14	–4,328 60	0,7585 00	14,130 70
5,4	1,716 22	0,632 28	–3,651 71	0,0222 00	14,835 60
5,6	1,742 11	0,576 91	–3,309 77	0,0882 94	14,684 20
5,8	1,731 50	0,528 42	–3,105 53	0,0775 26	15,315 40
6,0	1,774 30	0,501 13	–2,972 50	0,0696 96	15,665 90
6,2	1,769 87	0,440 05	–3,041 23	0,0593 74	15,759 00
6,4	1,784 14	0,402 65	–3,322 19	0,0541 16	15,939 60
6,6	1,840 40	0,361 49	–3,658 75	0,0458 39	16,307 10
6,8	1,829 29	0,320 13	–4,302 93	0,0403 83	16,365 20
7,0	1,828 20	0,279 18	–5,030 54	0,0352 40	16,924 40
7,2	1,878 15	0,234 64	–5,805 89	0,0313 91	16,865 60
7,4	1,863 01	0,201 80	–6,796 75	0,0280 97	17,429 60
7,6	1,927 61	0,160 29	–8,059 52	0,0240 01	17,345 50
7,8	1,888 58	0,125 24	–9,562 08	0,0209 90	18,200 90
8,0	1,907 41	0,089 89	–10,819 50	0,0190 79	18,116 10
8,2	1,934 86	0,053 88	–12,745 90	0,0166 92	18,399 80
8,4	1,932 57	0,020 30	–14,289 60	0,0145 14	18,852 90
8,6	1,990 86	–0,012 53	–16,839 10	0,0126 86	19,367 30
8,8	1,974 43	–0,044 88	–19,032 70	0,0110 29	18,977 90
9,0	2,002 54	–0,074 90	–21,097 60	0,0096 84	19,456 80
9,2	2,014 80	–0,107 42	–23,633 90	0,0085 04	20,114 90
9,4	2,043 20	–0,135 02	–25,696 20	0,0074 22	20,464 40
9,6	2,025 40	–0,167 68	–29,257 90	0,0067 25	20,104 20
9,8	2,070 71	–0,195 52	–31,780 20	0,0057 68	20,354 20
10,0	2,044 95	–0,221 73	–34,706 30	0,0051 08	21,154 90

Výsledky:

1 Diferenciální rovnice

1.1 Diferenciální rovnice separovatelné

Výsledky:

1) $x^2 + y^2 = \ln\left(Cx^2\right)$
2) $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$
3) $\dfrac{y}{y+1} = Cx$, singulární řešení $y = -1$
4) $\mathrm{e}^x + x^2 + C = \cos y$
5) $y = 1 - C\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
6) $y = \tan\left(x + C\right)$
7) $x\left(1 - y^2\right) = C$
8) $y = \dfrac{b}{a}\tan\left(abx + C\right)$
9) $\left(x - y\right)^2 + 2x = C$
10) $y = x\mathrm{e}^{Cx+1}$
11) $-6x + 4y - 7 = C\mathrm{e}^{-2x}$
12) $\left(x + 2y + 2\right)^2 = C\mathrm{e}^{2y}$
13) $y + C = 2\arctan\dfrac{x+y}{2}$
14) $2y^2 = \dfrac{\mathrm{e}^x}{C\mathrm{e}^x + x}$ singulární řešení $y = 0$
15) $y^2 = C\dfrac{x-1}{x+1}$

1.2 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Výsledky:

1) $y = \left(x + C\right)\mathrm{e}^{-x}$
2) $y = \left(x^2 + C\right)\sin x$
3) $y = \dfrac{x^5 + 4}{5x^2}$
4) $y = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{5} + C\mathrm{e}^{-2x}$
5) $y = x + C\mathrm{e}^{-x}$
6) $y = 2x - 1 + C\mathrm{e}^{-2x}$
7) $y = \sin x - 1 + C\mathrm{e}^{-\sin x}$
8) $y = \dfrac{1}{2}\left(\sin x + \cos x\right) + C\mathrm{e}^{-x}$
9) $y = \left(x + C\right)\left(1 + x^2\right)$
10) $y\left(x^2 + 1\right)^2 = x^3 + 3x + C$
11) $y = x^2\left(Cx - 1\right)$
12) $y = \left(x + C\right)\mathrm{e}^x$
13) $y = x^2\left(C\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1\right)$
14) $y = \mathrm{e}^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$
15) $y = C\mathrm{e}^{-\sin x} + 1$
16) $y = \dfrac{x^2 + 3x + x\ln|x|}{x+1}$
17) $y = \dfrac{x}{\cos x}$
18) $y = \sin x\left(C + \mathrm{e}^x\right)$
19) $y = C\mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{x^2}{2}$
20) $y = C\mathrm{e}^{x^3} - \dfrac{1}{3}\left(x^3 + 2\right)$

1.3 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů, homogenní

Výsledky:

1) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

2) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

3) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

4) $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$

5) $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$

6) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{x}$

7) $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x}$

8) $y = e^{x}\left(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\right)$

9) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

10) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$

11) $y = C_1 e^{\frac{2+\sqrt{19}}{3}x} + C_2 e^{\frac{2-\sqrt{19}}{3}x}$

12) $y = e^{-\frac{x}{4}}\left(C_1 + C_2 x\right)$

13) $y = e^{-2x}\left(C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x\right)$

14) $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$

15) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$

16) $y = e^{-2x}\left(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\right)$

17) $y = e^{x}\left(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x\right)$

18) $y = e^{x}\left(C_1 \sin \sqrt{2}x + C_2 \cos \sqrt{2}x\right)$

19) $y = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

20) $y = e^{-\frac{1}{6}x}\left(C_1 \sin \frac{\sqrt{23}}{6}x + C_2 \cos \frac{\sqrt{23}}{6}x\right)$

1.4 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů, nehomogenní

Výsledky:

1) $y = e^{x}\left(x \ln|x| + C_1 + C_2 x\right)$

2) $y = \left(C_1 - \ln|\sin x|\right)\cos 2x + \left(C_2 - x - \frac{1}{2}\cot x\right)\sin 2x$

3) $y = \sin 2x \ln|\cos x| - x \cos 2x + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$

4) $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$

5) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{5}$

6) $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$

7) $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x\right) + \frac{1}{9}e^{-x}$

8) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 3\sin 2x$

9) $y = e^{x}\left(C_1 - 5x\right) + C_2 e^{2x}$

10) $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x + \frac{3}{2}x^2\right)$

11) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{74}\left(5\sin x + 7\cos x\right)$

12) $y = e^{x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) + \cos 3x - 6\sin 3x$

13) $y = C_1 + C_2 e^{2x} + e^{x}\left(-x^2 - x + 1\right)$

14) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos 3x$

15) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{5}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x$

16) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x - \frac{1}{4}x e^{-3x}$

17) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \frac{1}{6}x^4 + C_4 e^{x} + C_5 e^{2x}$

18) $y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 e^{-2x} + \left(x^2 + x - 1\right)e^{-x}$

19) $y = e^{x} \ln|e^{x} - 1| - e^{-x} \ln|e^{x} - 1| - 1 - x e^{x} + C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

20) $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{x}$

2 Funkce dvou a více proměnných

2.1 Definiční obor, graf a vrstevnice

Výsledky:

1) $D(f)=\left\{[x,y]\in \mathrm{R}\times\mathrm{R};x\neq \dfrac{y^2}{5}\right\}$ {Celá rovina bez paraboly $y^2=5x$ }. Obr. 1

2) $D(f)=\left\{[x,y]\in \mathrm{R}\times\mathrm{R};\ -\dfrac{1}{5}\leq xy\leq \dfrac{1}{5}\right\}$. Obr. 2

3) $D(f)=\left\{[x,y]\in \mathrm{R}\times\mathrm{R};x>1\wedge y\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)\wedge k\in \mathrm{Z}\right\}$. Obr. 3

4) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}\times\mathrm{R};x^2+y^2\leq 9\wedge x-2\leq y\leq x+2\}$. Obr. 4

5) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}\times\mathrm{R};x^2+y^2<9\wedge -x-2\leq y\leq 2-x\}$. Obr. 5

6) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}\times\mathrm{R};x^2+y^2\leq 9\wedge x^2+y^2\geq 4\}$. Obr. 6

7) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}\times\mathrm{R};x^2+y^2\leq 4\}$. Obr. 7

8) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}\times\mathrm{R};x^2+y^2\leq 9\wedge x^2+y^2>4\}$. Obr. 8

9) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}\times\mathrm{R};(x\geq -2y\wedge x^2+y^2\geq 4)\vee(x\leq -2y\wedge x^2+y^2\leq 4)\}$. Obr. 9

10) $D(f)=\left\{[x,y]\in \mathrm{R}\times\mathrm{R};x^2+y^2<4\wedge y>\dfrac{1}{2}\right\}$. Obr. 10

11) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}^2\}$ {Rotační paraboloid}. Obr. 11

12) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}^2\}$ {Kolmá parabolická válcová plocha}. Obr. 12

13) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}^2;x^2+y^2\geq 1\}$. {Horní polovina (z ≥ –1) rotačního jednodílného hyperboloidu}. Obr. 13

14) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}^2\}$. {Horní část dvoudílného eliptického hyperboloidu}. Obr. 14

15) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}^2\}$. {Horní část (z ≥ 1) rotační kuželové plochy}. Obr. 15

16) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}^2;x^2+y^2\leq 4\}$. {Horní polovina (z ≥ 0) kulové plochy; $\mathrm{S}=(0;0;0)$ $r=2$}. Obr. 16

17) $D(f)=\left\{[x,y]\in \mathrm{R}^2;\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}\leq 1\right\}$. {Horní polovina ($z\geq 0$) rotačního elipsoidu}. Obr. 17

18) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}^2\}$ {Rotační válcová plocha}. Obr. 18

19) $D(f)=\{[x,y]\in \mathrm{R}^2\}$ {Hyperbolický paraboloid}. Obr. 19

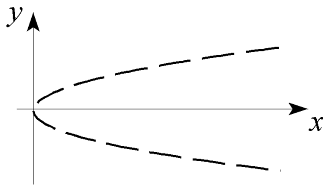
20) $D(f)=\left\{[x,y]\in \mathrm{R}^2;\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\geq 1\right\}$. {Horní polovina ($z\geq 0$) jednodílného eliptického hyperboloidu}. Obr. 20

21) $z=C=0$ … přímky $y=x\wedge y=-x$,

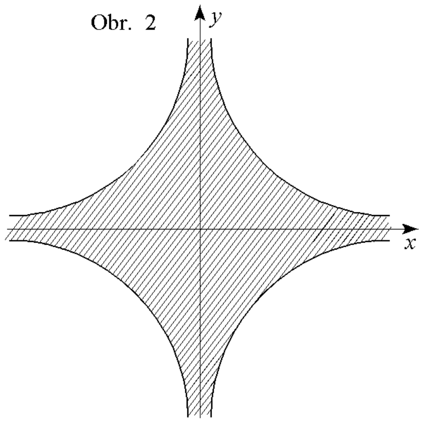
$z=C\neq 0$ … rovnoosé hyperboly $\dfrac{x^2}{2C}-\dfrac{y^2}{2C}=1$. Obr. 21

22) $z=C=0$ … osa $y=0\wedge x\neq 0$,

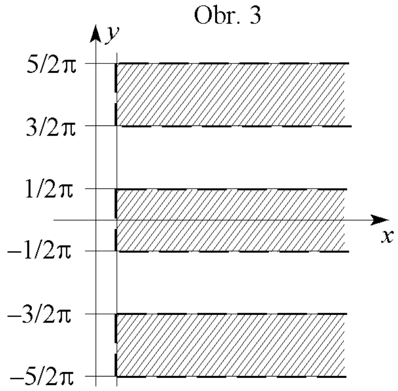
$z=C\neq 0$ …kružnice $x^2+\left(y-\dfrac{2}{C}\right)^2=\dfrac{4}{C^2}$ bez bodu $(0;0)$. Obr. 22



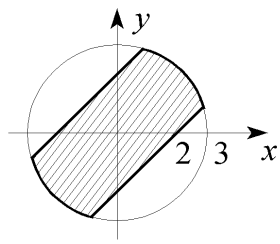
Obr. 1



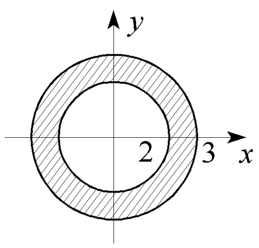
Obr. 2



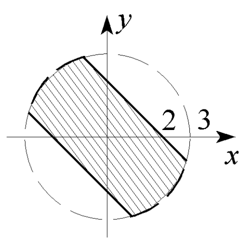
Obr. 3



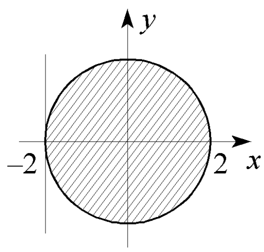
Obr. 4



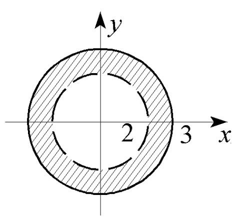
Obr. 6



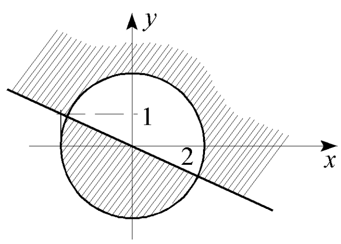
Obr. 5



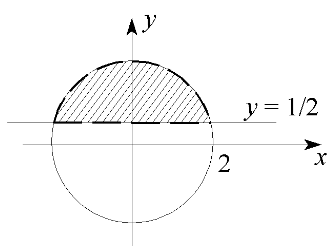
Obr. 7



Obr. 8

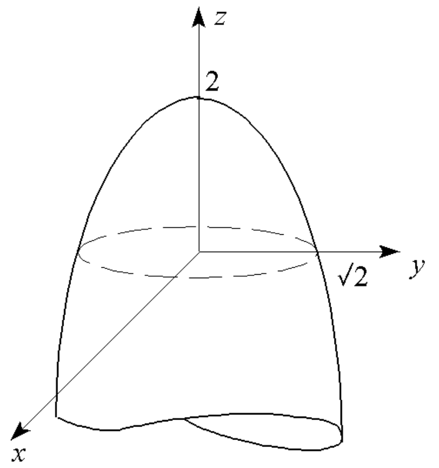


Obr. 9

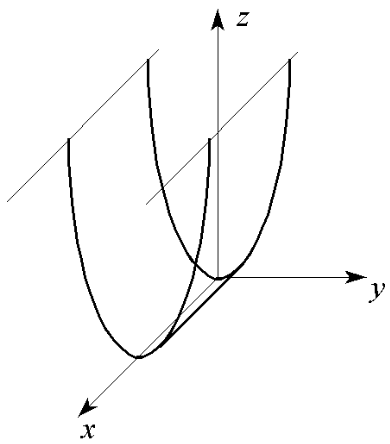


Obr. 10

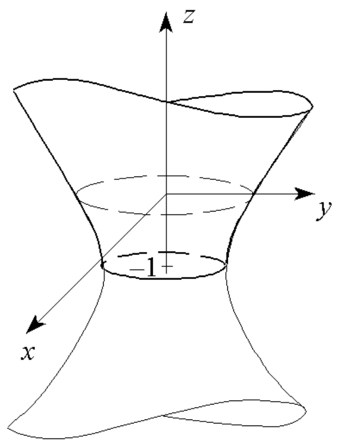
Obr. 11



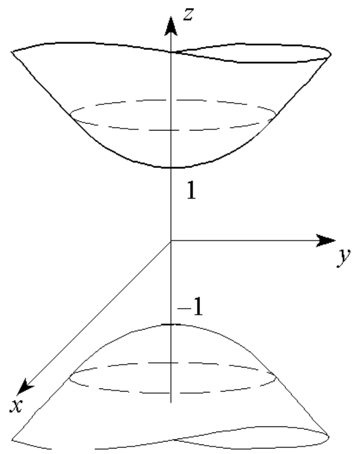
Obr. 12



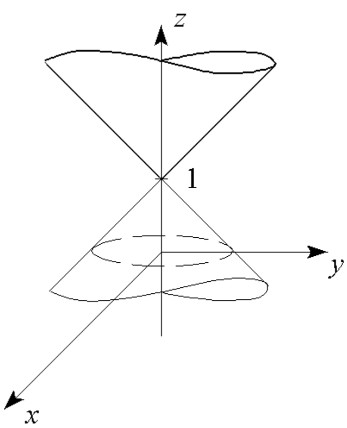
Obr. 13



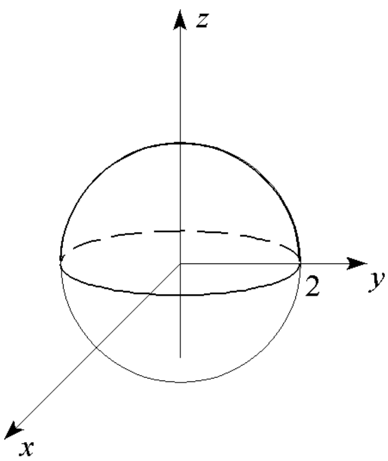
Obr. 14



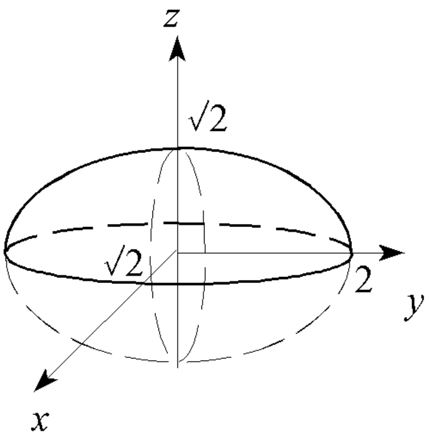
Obr. 15



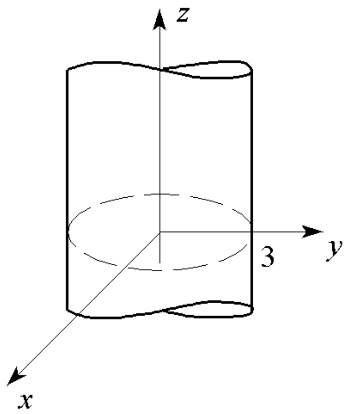
Obr. 16



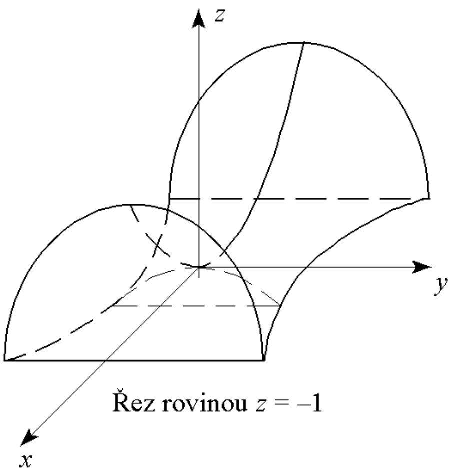
Obr. 17



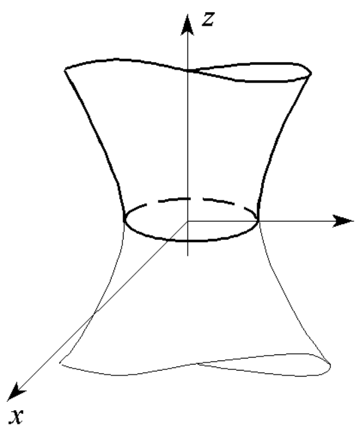
Obr. 18



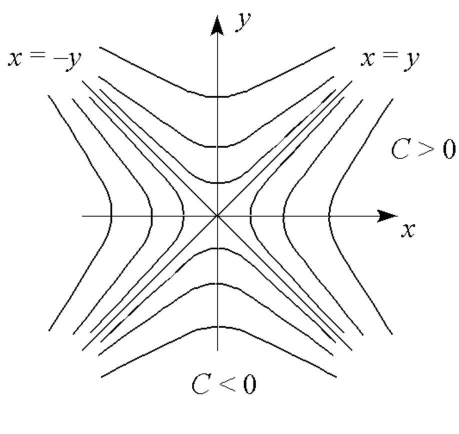
Obr. 19



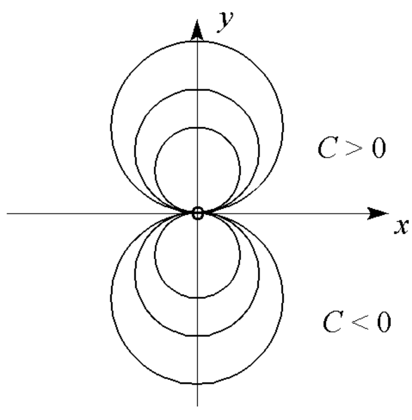
Obr. 20



Obr. 21



Obr. 22



23) $z = C$, paraboly $y^2 = x + C$. Obr. 23

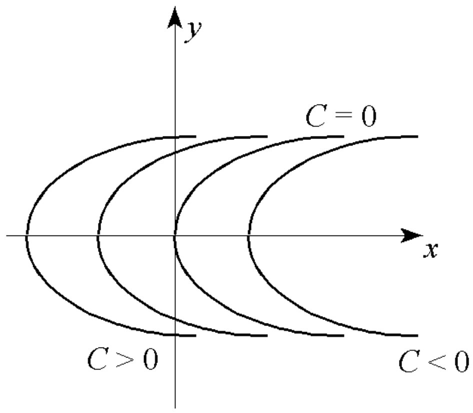
24) $z = C$, svazek přímek procházející počátkem $\mathrm{P} = (0; 0)$, který tam nepatří, mimo přímku $x = 0$. Obr. 24

25) $z = C = 0$ … bod $\mathrm{P} = (0; 0)$

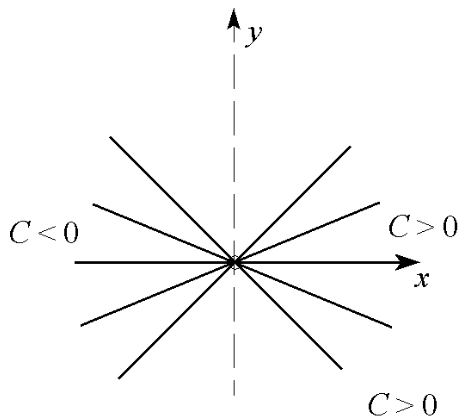
$z = C > 0$ … soustředné kružnice se středem v počátku a o rovnici $x^2 + y^2 = 5C$

$z = C < 0$ … nemá řešení. Obr. 25

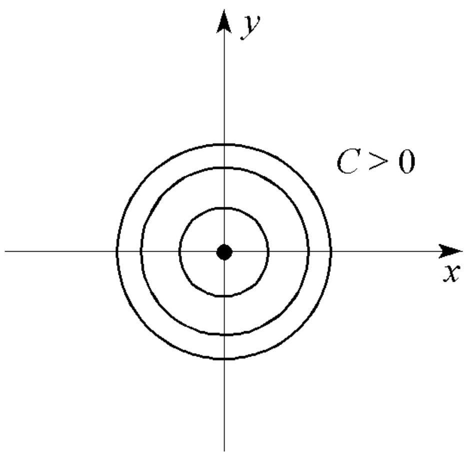
Obr. 23



Obr. 24



Obr. 25



2.2 Výpočet limit

Výsledky:

1) Limita neexistuje
2) 4
3) Limita neexistuje
4) $\frac{4}{7}$
5) Limita neexistuje
6) $\frac{1}{6}$
7) 1
8) $-\frac{1}{3}$
9) –4
10) 6
11) Limita neexistuje
12) $\frac{3}{5}$
13) –4
14) $\frac{1}{3}$
15) Limita neexistuje

2.3 Parciální derivace

Výsledky:

1) $z'_x = 6x + 4y$
   $z'_y = -15y^2 + 4x$

2) $z'_x = 2xy + y^2 e^{xy^2}$
   $z'_y = x^2 + 2xye^{xy^2}$

3) $z'_x = \frac{20}{3}\sqrt[3]{x^2}$
   $z'_y = -\frac{2}{y}$

4) $z'_x = \cos x \ln y$
   $z'_y = \frac{\sin x}{y}$

5) $z'_x = yx^{y-1}$
   $z'_y = x^y \ln x$

6) $z'_x = \frac{x\left(x^3 + 3xy^2 - 2y^3\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$
   $z'_y = \frac{y\left(y^3 + 3x^2y - 2x^3\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

7) $z'_x = \sqrt{y} - \frac{2\sqrt[3]{y}}{x^3}$
   $z'_y = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{3x^2\sqrt[3]{y^2}}$

8) $z'_x = \frac{2(x-y)}{1 + (x-y)^4}$
   $z'_y = \frac{2(y-x)}{1 + (x-y)^4}$

9) $z'_x = y\left[\cos\left(x^2 + y^2\right) - 2x^2 \sin\left(x^2 + y^2\right)\right]$
   $z'_y = x\left[\cos\left(x^2 + y^2\right) - 2y^2 \sin\left(x^2 + y^2\right)\right]$

10) $z'_x = \frac{2y}{x^2 - y^2}$
    $z'_y = -\frac{2x}{x^2 - y^2}$

11) $z'_x = \sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$
    $z'_y = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

12) $z'_x = \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1}$

$z'_y = -\sin y (\sin x)^{\cos y} \ln \sin x$

13) $z'_x = \dfrac{-3y^2}{(x-y)^2}$

$z'_y = \dfrac{3x^2}{(x-y)^2}$

14) $z'_x = -\dfrac{y^2}{x^2} \cos \dfrac{y^2}{x}$

$z'_y = \dfrac{2y}{x} \cos \dfrac{y^2}{x}$

15) $z'_x = \dfrac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

$z'_y = -\dfrac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

16) $z'_x = \dfrac{|y|}{x^2+y^2}$

$z'_y = -\dfrac{x|y|}{y(x^2+y^2)}$

17) $z'_x = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \left(1 - \dfrac{y}{x}\right)$

$z'_y = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$

18) $z'_x = y \ln(x+y) + \dfrac{xy}{x+y}$

$z'_y = x \ln(x+y) + \dfrac{xy}{x+y}$

19) $z'_x = (x)^{x^y} x^{y-1} (y \ln x + 1)$

$z'_y = (x)^{x^y} x^y \ln^2 x$

20) $z'_x = -\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$z'_y = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$

21) $z'_x = \dfrac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)}$

$z'_y = \dfrac{\sqrt{x^y} \ln x}{2(1+x^y)}$

22) $z'_x = -\dfrac{2x \sin x^2}{y}$

$z'_y = -\dfrac{\cos x^2}{y^2}$

23) $z'_x = \dfrac{\sin y}{x} - \mathrm{e}^x \cos y$

$z'_y = \ln x \cos y + \mathrm{e}^x \sin y$

24) $z'_x = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}$

$z'_y = \dfrac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}$

25) $z'_x = \dfrac{y^2+1}{y \cos^2\left(xy + \dfrac{x}{y}\right)}$

$z'_y = \dfrac{x(y^2-1)}{y^2 \cos^2\left(xy + \dfrac{x}{y}\right)}$

26) $$u'_x = 3x^2 + 3y - 1$$
$$u'_y = z^2 + 3x$$
$$u'_z = 2yz + 1$$

27) $$u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$u'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

28) $$u'_x = \frac{yz}{2\sqrt{xyz(1 - xyz)}}$$
$$u'_y = \frac{xz}{2\sqrt{xyz(1 - xyz)}}$$
$$u'_z = \frac{xy}{2\sqrt{xyz(1 - xyz)}}$$

29) $$u'_x = yz^2 \mathrm{e}^{xyz}$$
$$u'_y = xz^2 \mathrm{e}^{xyz}$$
$$u'_z = \mathrm{e}^{xyz}(1 + xyz)$$

30) $$u'_x = \frac{3(2xz + y^2 - 3yz)}{2(x^2 z + xy^2 + z^2 - 3xyz)}$$
$$u'_y = \frac{3x(2y - 3z)}{2(x^2 z + xy^2 + z^2 - 3xyz)}$$
$$u'_z = \frac{3(x^2 + 2z - 3xy)}{2(x^2 z + xy^2 + z^2 - 3xyz)}$$

31) $$u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z\mathrm{e}^{xy} y$$
$$u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z\mathrm{e}^{xy} x$$
$$u'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \mathrm{e}^{xy}$$

32) $$u'_x = \frac{5yz(y^2 + z^2 - x^2 + 3)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2}$$
$$u'_y = \frac{5xz(x^2 - y^2 + z^2 + 3)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2}$$
$$u'_z = \frac{5xy(x^2 + y^2 - z^2 + 3)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2}$$

33) $$u'_x = \frac{y^2 - x^2 z}{x(x^2 z + y^2)}$$
$$u'_y = -\frac{2y}{x^2 z + y^2}$$
$$u'_z = -\frac{x^2}{x^2 z + y^2}$$

34) $$u'_x = -\frac{2z}{x\sqrt{x^4 y^2 - z^2}}$$
$$u'_y = -\frac{z}{y\sqrt{x^4 y^2 - z^2}}$$
$$u'_z = \frac{1}{\sqrt{x^4 y^2 - z^2}}$$

35) $$u'_x = -\frac{1}{2(xy + z)}\sqrt{\frac{yz}{x}}$$
$$u'_y = -\frac{1}{2(xy + z)}\sqrt{\frac{xz}{y}}$$
$$u'_z = \frac{1}{2(xy + z)}\sqrt{\frac{xy}{z}}$$

2.4 Funkce zadaná implicitně, složená funkce.

Výsledky:

1) $y' = \dfrac{1}{2y}$ v bodě $(0;0)$ není spojitá, funkce $f_1 : y = \sqrt{x} \quad x \in [0,\infty)$

$f_2 : y = -\sqrt{x} \quad x \in [0,\infty)$

2) $y' = \dfrac{x+y}{x-y} \qquad y'(\mathrm{A}) = 1$

3) $y' = \dfrac{x-y}{x+y} \qquad y'(\mathrm{A}) = -1 \qquad y'' = \dfrac{-2\left(x^2-2xy-y^2\right)}{(x+y)^3} \qquad y''(\mathrm{A}) = 1$

4) $y' = \dfrac{x+y}{y-x} \qquad y'(\mathrm{A}) = -1 \qquad y'' = \dfrac{-2\left(x^2+2xy-y^2\right)}{(y-x)^3} \qquad y''(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2}$

5) $y'(\mathrm{A}) = 0 \qquad y''(\mathrm{A}) = -\dfrac{2}{3}$

6) $y'(\mathrm{A}) = 2 \qquad y''(\mathrm{A}) = -\dfrac{5}{3}$

7) $y'(\mathrm{A}) = -\dfrac{8}{5} \qquad y''(\mathrm{A}) = \dfrac{12}{5}$

8) $y'(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{10} \qquad y''(\mathrm{A}) = \dfrac{6}{25}$

9) $y' = \dfrac{1-4x}{2(1-3y)} \qquad y'' = \dfrac{-5+48y-72y^2-24x+48x^2}{4(1-3y)^3}$

10) $y'' = \dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}$

11) $y''(\mathrm{A}) = -\dfrac{1}{3}$ Funkce je v bodě A konkávní.

12) $z'_x = \dfrac{2x+y}{1-6z} \qquad z'_x(\mathrm{A}) = 0 \qquad z'_y = \dfrac{x+4y}{1-6z} \qquad z'_y(\mathrm{A}) = \dfrac{7}{5}$

13) $z'_x = \dfrac{8x+y+1}{y+6z} \qquad z'_x(\mathrm{A}) = \dfrac{10}{7} \qquad z'_y = \dfrac{x+4y-z}{y+6z} \qquad z'_y(\mathrm{A}) = \dfrac{4}{7}$

14) $z''_{xx} = \dfrac{(1-z)^2+x^2}{(1-z)^3}$

15) $z''_{xy} = -\dfrac{z}{xy(z-1)^3}$

16) $z'_x = 3x^2 \sin y \cos y(\cos y - \sin y) \qquad z'_y = x^3(\cos y + \sin y)(1 - 3\sin y \cos y)$

17) $z'_x = \dfrac{2x-3}{x^2+y^2-3x-2y} \qquad z'_y = \dfrac{2(y-1)}{x^2+y^2-3x-2y}$

18) $z'_x = \dfrac{y\left(2x^2y+1\right)}{x\sqrt{x^2y^2-\left(2x^2y^2+x-y\right)^2}} \qquad z'_y = \dfrac{x\left(2xy^2-1\right)}{y\sqrt{x^2y^2-\left(2x^2y^2+x-y\right)^2}}$

19) $z'_x = \dfrac{2y\mathrm{e}^{xy}(xy-1)}{\left(y\mathrm{e}^{xy}+x\right)^2} \qquad z'_y = \dfrac{2x\mathrm{e}^{xy}(xy+1)}{\left(y\mathrm{e}^{xy}+x\right)^2}$

20) $-4F''_{uv} = 0 \Rightarrow F''_{uv} = 0$

2.5 Tečna a normála křivky, normála a tečná rovina plochy

Výsledky:

1) $t: 13x - 16y - 9 = 0$ $\quad n: 64x + 52y - 77 = 0$
2) $t: 10x - 13y + 16 = 0$ $\quad n: 13x + 10y - 33 = 0$
3) $t: x + y - 2 = 0$ $\quad n: x - y = 0$
4) $t: x - y + 1 = 0$ $\quad n: x + y - 3 = 0$
5) $t: x + 2y - 3 = 0$ $\quad n: 2x - y - 1 = 0$
6) $t: x + y - 2 = 0$ $\quad n: x - y = 0$
7) $t: x + 2y - 1 = 0$ $\quad n: 2x - y - 2 = 0$
8) $t: 4x - 5y + 6 = 0$ $\quad n: 5x + 4y - 13 = 0$
9) $t: x + 3y - 10 = 0$ $\quad n: 3x - y - 10 = 0$
10) $t: x + y - 2 = 0$ $\quad n: x - y = 0$
11) $\tau: 8x - 8y - z - 4 = 0$ $\quad n: x = 2 + 8t,\ y = 1 - 8t,\ z = 4 - t \quad t \in \mathrm{R}$
12) $\tau: 17x + 11y + 5z - 60 = 0$ $\quad n: x = 3 + 17t,\ y = 4 + 11t,\ z = -7 + 5t \quad t \in \mathrm{R}$
13) $\tau: x - z + \pi = 0$ $\quad n: x = t,\ y = 1,\ z = \pi - t \quad t \in \mathrm{R}$
14) $\tau: x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0$ $\quad n: x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = \frac{\pi}{4} + 2t \quad t \in \mathrm{R}$
15) $\tau: 2x + 3y + z = 0$ $\quad n: x = 1 + 2t,\ y = -1 + 3t,\ z = 1 + t \quad t \in \mathrm{R}$
16) $\tau: x + y - 2z = 0$ $\quad n: x = 1 + t,\ y = 1 + t,\ z = 1 - 2t \quad t \in \mathrm{R}$
17) $\tau: 2x - 3y + 2z + 1 = 0$ $\quad n: x = 1 + 2t,\ y = 1 - 3t,\ z = 2t \quad t \in \mathrm{R}$
18) $\tau: x - 2y + 3z - 6 = 0$ $\quad n: x = 1 + t,\ y = -1 - 2t,\ z = 1 + 3t \quad t \in \mathrm{R}$
19) $\tau: 4x + 3y + 9z + 9 = 0$ $\quad n: x = 3 + 4t,\ y = 2 + 3t,\ z = -3 + 9t \quad t \in \mathrm{R}$
20) $\tau: 4x - z - 2 = 0$ $\quad n: x = 1 + 4t,\ y = -2,\ z = 2 - t \quad t \in \mathrm{R}$

21) $\tau: 3x - y + z - 4 = 0$ $\quad n: x = 1 + 3t$

$y = -t \qquad t \in \mathrm{R}$

$z = 1 + t$

22) $\tau: 3x - 2y - 2z + 1 = 0$ $\quad n: x = 1 + 3t$

$y = 1 - 2t \qquad t \in \mathrm{R}$

$z = 1 - 2t$

23) τ: $2x + y + 11z - 25 = 0$ $\quad n$: $x = 1 + 2t$

$y = 1 + t \qquad t \in \mathrm{R}$

$z = 2 + 11t$

24) τ: $x + 2z - 1 = 0$ $\quad n$: $x = -1 + t$

$y = 3 \qquad t \in \mathrm{R}$

$z = 1 + 2t$

25) τ: $5x + 4y + z - 28 = 0$ $\quad n$: $x = 2 + 5t$

$y = 3 + 4t \qquad t \in \mathrm{R}$

$z = 6 + t$

26) τ: $x + y - 4 = 0$ $\quad n$: $x = 2 + t$

$y = 2 + t \qquad t \in \mathrm{R}$

$z = 1 - 4t$

2.6 Totální diferenciál

Výsledky:

1) $\mathrm{dz} = \dfrac{1}{1 + x^2 y^2}\left(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y\right)$

2) $\mathrm{dz}(\mathrm{A}) = 0{,}8$

3) $\mathrm{dz}(\mathrm{A}) = -0{,}5$

4) $\mathrm{dz} = \dfrac{\ln(1 - y)}{x - 1}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\ln(1 - x)}{y - 1}\,\mathrm{d}y$

5) $\mathrm{dz} = \dfrac{1}{(1 - 2x - 3y)^2}\left(2\,\mathrm{d}x + 3\,\mathrm{d}y\right)$

6) $\mathrm{dz}(A) = 2\,\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}y$

7) $\mathrm{dz}(\mathrm{A}) = -2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$

8) $\mathrm{dz}(\mathrm{A}) = -\dfrac{5}{9}\left(\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}y\right)$

9) $\mathrm{dz} = \dfrac{1}{\left(1 + x^2 + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y\right) \qquad f(\mathrm{A}) \cong \dfrac{\pi}{4} - 0{,}01$

10) $\mathrm{dz} = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\left(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y\right) \qquad f(\mathrm{A}) \cong -0{,}01$

11) $\mathrm{dz} = 5(1 + x)^4 (1 + y)^{19}\left[(1 + y)\,\mathrm{d}x + 4(1 + x)\,\mathrm{d}y\right]$

12) $\mathrm{d}F(\mathrm{A}) = -2\,\mathrm{d}v$

13) $\mathrm{dz} = \dfrac{1}{\sin z \cos z}\left(-\sin x \cos x\,\mathrm{d}x - \sin y \cos y\,\mathrm{d}y\right)$

14) $\mathrm{dz}(\mathrm{A}) = -2\,\mathrm{d}x - \dfrac{2}{3}\,\mathrm{d}y$

15) $\mathrm{dz}(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}}\left(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\right)$

2.7 Parciální derivace a totální diferenciál vyšších řádů

1) $z''_{xx} = 6x - 36x^2 y$; $z''_{xy} = z''_{yx} = -12x^3$; $z''_{yy} = 20y^3$

2) $u''_{xx} = u''_{yy} = u''_{zz} = 0$; $u''_{xy} = u''_{yx} = z$; $u''_{xz} = u''_{zx} = y$; $u''_{yz} = u''_{zy} = x$

3) $u''_{xx} = u''_{yy} = u''_{zz} = 0$; $u''_{xy} = u''_{yx} = u''_{xz} = u''_{zx} = u''_{yz} = u''_{zy} = 1$

4) $u''_{xx} = 6z^2\left(x^2 - y^2\right)\left(5x^2 - y^2\right)$; $u''_{yy} = 6z^2\left(x^2 - y^2\right)\left(5y^2 - x^2\right)$; $u''_{zz} = 2\left(x^2 - y^2\right)^3$

$u''_{xy} = -24xyz^2\left(x^2 - y^2\right)$; $u''_{xz} = 12xz\left(x^2 - y^2\right)^2$; $u''_{yz} = -12yz\left(x^2 - y^2\right)^2$

5) $u''_{xx} = \dfrac{y^2 + z^2}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3}}$; $u''_{yy} = \dfrac{x^2 + z^2}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3}}$; $u''_{zz} = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3}}$

$u''_{xy} = u''_{yx} = -\dfrac{xy}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3}}$; $u''_{xz} = u''_{zx} = -\dfrac{xz}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3}}$;

$u''_{yz} = u''_{zy} = -\dfrac{yz}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3}}$

6) $z''_{xx} = -\mathrm{e}^{2y}\sin x$; $z''_{yy} = 4\mathrm{e}^{2y}\sin x$; $z''_{xy} = z''_{yx} = 2\mathrm{e}^{2y}\cos x$

7) $z''_{xx} = \dfrac{2\left(1 - x^2\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2}$; $z''_{yy} = \dfrac{2\left(y^2 + 1\right)}{\left(y^2 - 1\right)^2}$; $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$

8) $z''_{xx} = (2 - y)\cdot\cos(x + y) - x\cdot\sin(x + y)$; $z''_{yy} = -(x + 2)\cdot\sin(x + y) - y\cdot\cos(x + y)$;

$z''_{xy} = z''_{yx} = -(1 + x)\cdot\sin(x + y) + (1 - y)\cdot\cos(x + y)$

9) $z''_{xx} = -\dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$; $z''_{yy} = \dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$; $z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

10) $u''_{xx} = \dfrac{x^{y^z}\cdot y^z\left(y^z - 1\right)}{x^2}$; $u''_{yy} = x^{y^z}\cdot z\cdot y^{z-2}\cdot\ln x\left(z - 1 + z\cdot y^z\cdot\ln x\right)$;

$u''_{zz} = x^{y^z}\cdot y^z\cdot\ln x\cdot\ln^2 y\left(1 + y^z\cdot\ln x\right)$; $u''_{xy} = u''_{yx} = \dfrac{x^{y^z}\cdot y^{z-1}\left(y^z\cdot\ln x + 1\right)}{x}$;

$u''_{xz} = u''_{zx} = \dfrac{x^{y^z}\cdot y^z\cdot\ln y\left(y^z\cdot\ln x + 1\right)}{x}$; $u''_{yz} = u''_{zy} = x^{y^z}\cdot y^{z-1}\cdot\ln x\left(1 + z\cdot\ln y\left(y^z\cdot\ln x + 1\right)\right)$

11) $f'''_{xxx} = 12(2x + y)$; $f'''_{yyy} = 6(3x - 4y)$; $f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} = 4(3x - 2y)$;

$f'''_{xyy} = f'''_{yyx} = f'''_{yxy} = 2(9y - 4x)$

12) $u'''_{xyz} = \mathrm{e}^{xyz}\left(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1\right)$

13) $u'''_{zyx} = \sin(xyz)\cdot\left(x^2y^3z - 1\right) - 3\cos(xyz)\cdot xyz$

14) $z'''_{xyy} = 0$

15) $z^{(4)}_{xxyy} = \dfrac{12\left(x^4 + y^4 - 6x^2y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^4}$

16) $z'''_{xxx} = \sin(\sin y + x)$; $z'''_{xxy} = \sin(\sin y + x)\cdot\cos y$;

$z'''_{yyy} = \sin(\sin y + x)\cdot\cos y\left(\cos^2 y + 1\right) + 3\cos(\sin y + x)\cdot\sin y\cdot\cos y$

17) $\mathrm{d}^2 f(\mathrm{A},\mathrm{X}) = 2xy$

18) $\mathrm{d}^2 f(\mathrm{A},\mathrm{X}) = 2[(x - 1)(y + 1) + (x - 1)(z - 2) + (y + 1)(z - 2)]$

19) $\mathrm{d}^2 f(\mathrm{A},\mathrm{X}) = -z(x+y-2)$

20) $\mathrm{d}^2 f(\mathrm{A},\mathrm{X}) = 2(x-1)^2 + 8(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2$

21) $\mathrm{d}^2 f = \dfrac{2y}{x^3}\,\mathrm{d}x^2 - \dfrac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

22) $\mathrm{d}^2 f = 2\,\mathrm{d}x^2 - 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}y^2$

23) $\mathrm{d}^2 z = \dfrac{(y^2-x^2)\mathrm{d}x^2 - 4xy\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}y^2}{(x^2+y^2)^2}$

24) $\mathrm{d}^2 z = \left(\mathrm{e}^{x-y^2} - \cos x\right)\mathrm{d}x^2 - 4y\cdot\mathrm{e}^{x-y^2}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2(2y^2-1)\cdot\mathrm{e}^{x-y^2}\;\mathrm{d}y^2$

25) $\mathrm{d}^2 z = -y\sin x\,\mathrm{d}x^2 + 2(\cos x - \sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - x\cos y\,\mathrm{d}y^2$

26) $\mathrm{d}^2 u = -\sin(x+y+z)\left(\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2 + 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}z^2\right)$

27) $\mathrm{d}^3 f(\mathrm{A},\mathrm{X}) = 6(x-7)(y-11)(z+10)$

28) $\mathrm{d}^3 f = \sin(x+2y^2)\,\mathrm{d}x^3 + 12y\sin(x+2y^2)\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y +$
$12\left(4y^2\sin(x+2y^2) - \cos(x+2y^2)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2 + 16y\left(4y^2\sin(x+2y^2) - 3\cos(x+2y^2)\right)\mathrm{d}y^3$

2.8 Taylorova a Maclaurinova věta

1) $f(x,y) = -4 - (y-2) + 3(x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) + (y-2)^2$

2) $f(x,y) = (x-1) + (y-1) + 3(x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2 + (x-1)^3 + (y-1)^3$

3) $f(x,y) = y + xy + \dfrac{x^2 y}{2} - \dfrac{y^3}{6}$

4) $f(x,y) = xy + \dfrac{xy^2}{2} - \dfrac{x^2 y}{2}$

5) $f(x,y) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)^2$

6) $f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \dfrac{(x-1)^2(y-1)}{2}$

7) $f(x,y,z) = 3(x-1) - 3y - 3(z-1) + 3(x-1)^2 - 3(z-1)^2 - 3(x-1)y - 3y(z-1) +$
$(x-1)^3 + y^3 - (z-1)^3 - 3(x-1)y(z-1)$

8) $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left[1 + \left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) + \left(y-\dfrac{\pi}{4}\right) + \left(z-\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)^2 +\right.$
$\left.\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right) + \left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right) + \left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

9) $f(x,y) = 1 + x + y + x^2 + xy + y^2$

10) $f(x,y) = 1 - \dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{2}$

2.9 Lokální a globální extrémy funkce

Výsledky:

1) Lokální minimum –1 v bodě $(1;-1)$.
2) Lokální minimum 0 v bodě $(0;0)$.
3) Lokální minimum –21 v bodě $(1;4)$.
4) Lokální minimum –1 v bodě $(1;1)$.
5) Lokální maximum 1 v bodě $(1;1)$.
6) Lokální maximum 4 v bodě $(2;-3)$.
7) Lokální maximum 13 v bodě $(-2;4)$.
8) Funkce nemá lokální extrém.

9) Lok. maximum $\frac{64}{27}$ v bodě $\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

10) Funkce nemá lokální extrém.

11) Lokální minimum 0 v bodě $(0;0)$.

12) Lokální minimum 4 v bodě $(0;0)$.

13) Lokální maximum $\frac{2}{\mathrm{e}}$ v bodě $(-1;0)$.

14) Lokální maximum 1 v bodě $(0;0)$.

15) Lokální maximum $\frac{9}{\mathrm{e}^2}$ v bodě $(6;3)$.

16) Lokální minimum –3 v bodě $(0;1)$.

17) Lokální minimum $-6\sqrt{3}$ v bodě $(\sqrt{3};-3)$. Lokální maximum $6\sqrt{3}$ v bodě $(-\sqrt{3};-3)$.

18) Lokální minimum $-\frac{1}{4}$ v bodě $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

19) Lokální minimum $-\frac{13}{27}$ v bodě $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

20) Lokální minimum $-\frac{1}{48}$ v bodě $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

21) Lokální maximum 0 v bodě $(0;0)$.

Lokální minimum $-\frac{9}{8}$ v bodech $\left(-\frac{1}{2};-1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $\left(\frac{1}{2};-1\right)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

22) Lokální maximum 108 v bodě $(2;3)$.

23) Lokální minimum $-\frac{49}{3}$ v bodě $(2;-3)$.

24) Lokální maximum15 v bodě $(4;4)$.

25) Lokální maximum 5 ln2 v bodě $(6;4)$.

26) Lokální minimum 0 v bodě $(0;0)$.

27) Lokální maximum 1 v bodě 1. Lokální minimum –3 v bodě 1.

28) Lokální maximum 2 v bodě –1. Lokální minimum –2 v bodě 1.

29) Lokální maximum –1 v bodech –1, 1. Lokální minimum $-\sqrt[3]{2}$ v bodě 0.

30) Lokální maximum 4 v bodě $(-2;3)$. Lokální minimum –2 v bodě $(-2;3)$.

31) Lokální maximum $2+\sqrt{6}$ v bodě $(-1;1)$. Lokální minimum $2-\sqrt{6}$ v bodě $(-1;1)$.

32) Lokální maximum $-\frac{8}{7}$ v bodě $\left(\frac{16}{7};0\right)$. Lokální minimim 1 v bodě $(-2;0)$.

33) Minimum –28 v bodě $(-2;-2)$. Maximum $8+4\sqrt{2}$ v bodech $(2;-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};2)$.

34) Minimum –27 v bodě $(3;3)$. Maximum 1 v bodě $(1;1)$.

35) Minimum $3-\frac{1}{\mathrm{e}}$ v bodě $(0;-1)$. Maximum $3+6\mathrm{e}^2$ v bodech $(2;2)$a $(-2;2)$.

36) Minimum 0 v bodě $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Maximum $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ v bodě $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right)$.

37) Nejmenší hodnota je 0 v bodě $(3;3)$. Největší hodnota je 91 v bodech $(0;4)$ a $(4;0)$.

38) Nejmenší hodnota je –3 v bodě $(1;0)$. Největší hodnota je 17 v bodě $(1;2)$.

39) Největší obsah $\frac{1}{2}p^2$ má trojúhelník s odvěsnami $a=p$, $b=p$.

40) Největší obvod $1+\sqrt{2}$ má trojúhelník s odvěsnami $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.10 Dvojné a trojné integrály

Výsledky:

1) $\frac{1}{4}$

2) $2\pi\left(7-2\sqrt{6}\right)$

3) 1

4) $\frac{1}{40}$

5) $\frac{\pi a^3}{3}$

6) a) $\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx$

b) $\int_{-1}^{0} dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx+\int_0^8 dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)\,dx$

c) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx$

d) $\int_{-1}^{0} dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx$

e) $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

f) $\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx$

g) $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$

h) $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,dx-\int_{-1}^{0} dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\,dx$

7) $\frac{p^5}{21}$

8) $\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}$

9) $\frac{a^4}{2}$

10) $14a^4$

11) $\frac{2}{3}\pi a^3$

12) $-6\pi^2$

13) $\frac{\pi}{2}$

14) $\frac{4}{3}$

15) $\frac{2}{3}\pi ab$

16) $543\frac{11}{15}$

17) $1\frac{37}{128}-\ln 2$

18) $\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)a^2$

19) $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$

20) $\frac{5}{6}$

21) $\frac{45}{32}\pi$

22) $\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$

23) $\pi\sqrt{2}$

24) $\frac{2}{3}\pi a^2\left(2\sqrt{2}-1\right)$

25) $\frac{1}{364}$

26) $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$

27) $\frac{1}{48}$

28) $\frac{\pi}{6}$

29) $\frac{16}{3}\pi$

30) $\frac{3}{35}$

31) $\frac{7}{24}$

32) $\frac{32}{3}\pi$

3 Vektorová analýza

3.1. Diferenciální charakteristiky polí

Výsledky:

1) Trojosý elipsoid $\frac{x^4}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ $\quad$ $S = (0; 0; 0)$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$

2) **grad** $f = 2x\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

3) **grad** $f(\mathrm{A}) = 5\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{k}$

4) **grad** $f(\mathrm{A}) = \frac{3}{2}\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}$

5) Body $(x_0; 1)$, kde $x_0 \in \mathrm{R}$

6) V bodě $\mathrm{M} = (0; 1; 0)$

7) $\boldsymbol{s}(\mathrm{M}) = (0; 4; 1)$ maximální vzrůst,
$\boldsymbol{s}(\mathrm{M}) = (0; -4; -1)$ maximální pokles

8) $\boldsymbol{s}(\mathrm{M}) = \boldsymbol{j}$

9) $\boldsymbol{s}(\mathrm{A}) = (5; 0; 3)$

10) $\boldsymbol{s}(\mathrm{M}) = (-1; 1; 0)$

11) $\boldsymbol{s}(\mathrm{M}) = (-2; -1; -1)$

12) $f'\,\boldsymbol{s}(\mathrm{A}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

13) $f'\,\boldsymbol{MA}(\mathrm{M}) = \frac{98}{13}$

14) $f'\,\boldsymbol{s}(\mathrm{M}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

15) div $\boldsymbol{A}(\mathrm{A}) = -3\,\boldsymbol{i}$

16) div $\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}$

17) div $\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

18) div $\boldsymbol{A} = 2xz(z^2 + 3y^2)$

19) Nemá v bodě M zřídlo

20) Má v bodě A zřídlo { div $\boldsymbol{A}(\mathrm{A}) = 12$}

21) Je solenoidální

22) Není v P solenoidální { div $\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = -\frac{3}{5}$}

23) Je solenoidální

24) div (**grad** $f(\mathrm{M})) = 18$

25) **rot** $\boldsymbol{A} = -2yz\,\boldsymbol{i} - 2xz\,\boldsymbol{j} + 4xy\,\boldsymbol{k}$

26) **rot** $\boldsymbol{A}(\mathrm{M}) = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

27) **rot** $\boldsymbol{A}(\mathrm{A}) = \boldsymbol{o}$

28) **rot** $\boldsymbol{A}(\mathrm{A}) = (-1 - \ln 3)\,\boldsymbol{k}$

29) **rot** $\boldsymbol{A}(\mathrm{M}) = -\boldsymbol{k}$

30) Je vírové $\{$**rot** $\mathrm{A} = -2yz(z + x^2)\boldsymbol{i} + x(x^2 - 2z^2)\boldsymbol{j} + 2xy(z^2+1)\boldsymbol{k}\}$

31) Má v bodě P vír { **rot** $\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$}

32) Má v bodě A vír { **rot** $\boldsymbol{A}(\mathrm{A}) = -2\,\boldsymbol{k}$}

33) Má v bodě P vír { **rot** $\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = -\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$}

34) $(-2yz - x^2 + y^2)\boldsymbol{i} - 2xz\,\boldsymbol{j} + 2xz\,\boldsymbol{k}$

3.2 Křivkový integrál I. druhu (neorientovaný)

Výsledky:

1) $1+\sqrt{2}$

2) $\frac{8}{3}a\pi^3\sqrt{2}$

3) $2\pi^2 a^3(1+2\pi^2)$

4) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

5) $\frac{13}{3}$

6) $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

7) $\frac{a^3}{2}\pi$

8) 4π

9) $\frac{a^2}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$

10) $\left(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}$

3.3 Křivkový integrál II. druhu (orientovaný)

Výsledky:

1) 13 2) $\frac{17}{3}$ 3) 4π 4) πr^2

5) $-\pi r^2$ 6) -8 7) $-\frac{140}{3}$ 8) $\frac{\pi ab}{8}$

9) potenciál $u = -\frac{y^3}{3} - xz - yz + C$ 10) potenciál $u = -3x + 4y - z + C$

3.4 Plošný integrál I. druhu (neorientovaný)

Výsledky:

1) $\frac{\sqrt{3}}{120}$ 2) $av(4a + v\pi)$ 3) 54π 4) 0

5) $4\sqrt{61}$ 6) πa^3 7) $R^3\pi^2$ 8) 0

9) $\frac{2\pi}{15}a^6$ 10) $\frac{4\pi}{15}\left(1+6\sqrt{3}\right)$

3.5 Plošný integrál II. druhu (orientovaný)

Výsledky:

1) 24π 2) -18π 3) 9π 4) 3

5) $\frac{8}{9}$ 6) 9π 7) $-\pi$ 8) $\frac{R^4}{8}$

9) 0 10) $4\pi a^3$

3.6 Integrální věty

Výsledky:

1) 2 2) π 3) 9π 4) $\frac{12}{5}\pi$

5) -4π 6) 4π 7) $-\frac{\pi a^6}{8}$ 8) 32

9) $\frac{\pi a^4}{2}$ 10) $-\frac{\pi}{8}$

4 Úvod do popisné statistiky

4.1 Náhodný výběr

Výsledky:

1) Se spolehlivostí 95% bude podíl Klausových příznivců v populaci mezi 53-59%.
2) Se spolehlivostí 95% bude podíl spotřebitelů upřednostňujících Mlékárnu Valašské Meziříčí v populaci mezi 52-61%.
3) Se spolehlivostí 95% bude podíl spotřebitelů upřednostňujících čokoládovnu Orion v populaci mezi 80-85%.
4) Se spolehlivostí 95% bude podíl příznivců vstupu do Nato v populaci mezi 61-65%.
5) Se spolehlivostí 95% bude podíl příznivců žádajících zpřísnění trestního práva v populaci mezi 92-94%.

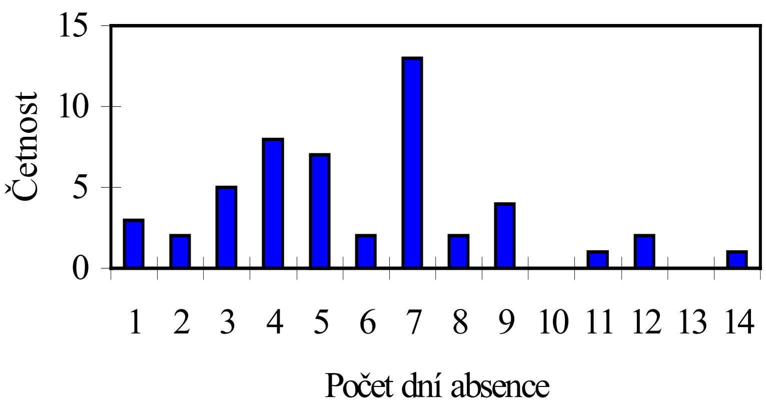
4.2 Poloha rozdělení

Výsledky:

1) Absence zaměstnanců – diskrétní náhodná veličina.

Počet dní absence	Četnost *f*	Relativní četnost *f* / *n*
0	3	0,06
1	2	0,04
2	5	0,10
3	8	0,16
4	7	0,14
5	2	0,04
6	13	0,26
7	2	0,04
8	4	0,08
9	0	0,00
10	1	0,02
11	2	0,04
12	0	0,00
13	1	0,02

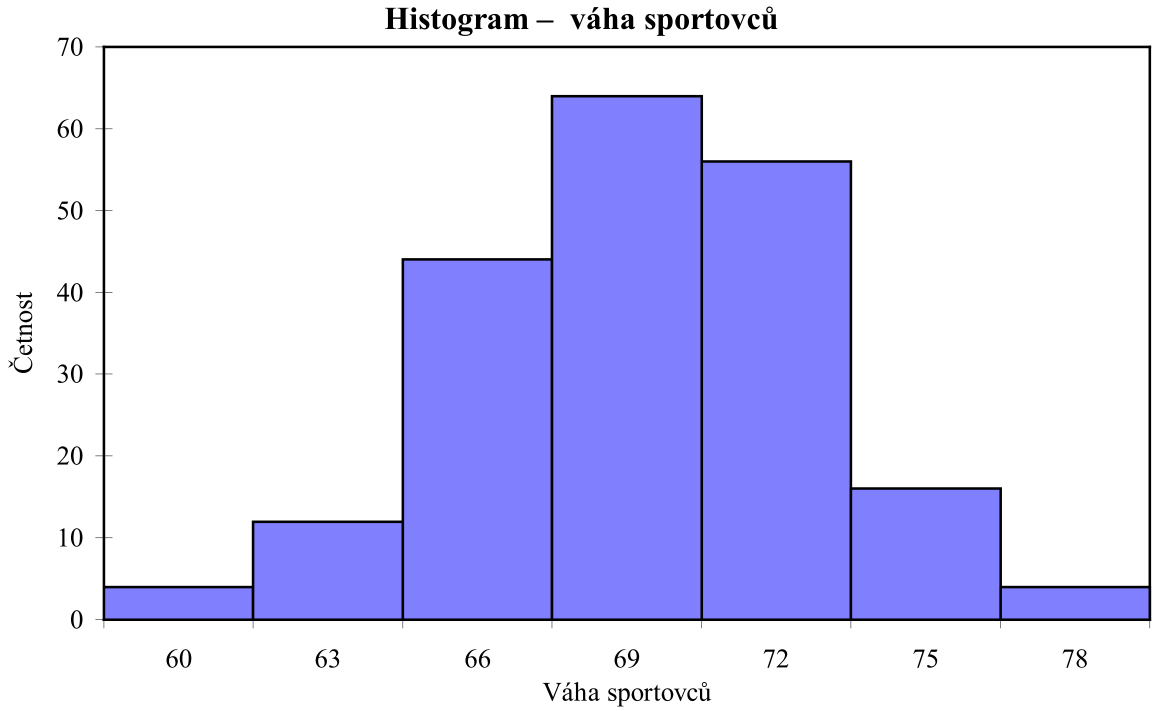
Z tabulky vidíme, že 13 zaměstnanců má absenci 6 dnů, což je 26% zaměstnanců. V pravidlech podnikové politiky se říká, že plná mzda se vyplácí do 6 dnů absence v roce.



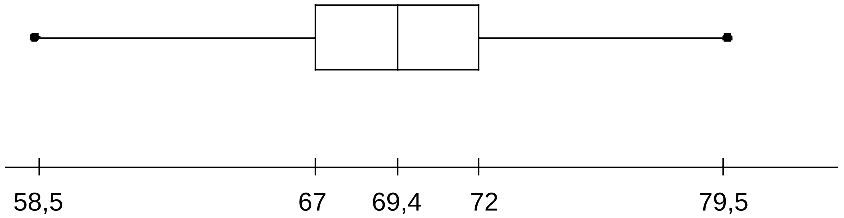
2) Váha sportovců – spojitá náhodná veličina.

Hranice intervalu	Střed intervalu	Četnost f	Relativní četnost f/n
58,5-61,5	60	4	0,02
61,5-64,5	63	12	0,06
64,5-67,5	66	44	0,22
67,5-70,5	69	64	0,32
70,5-73,5	72	56	0,28
73,5-76,5	75	16	0,08
76,5-79,5	78	4	0,02

Dolní kvartil = První kvartil = 25. percentil	66,818 = 67
Medián = Druhý kvartil = 50. percentil	69,375 = 69
Horní kvartil = Třetí kvartil = 75. percentil	71,893 = 72
Modus	69
Rozpětí	21
Mezikvartilové rozpětí	5



Krabicový diagram.

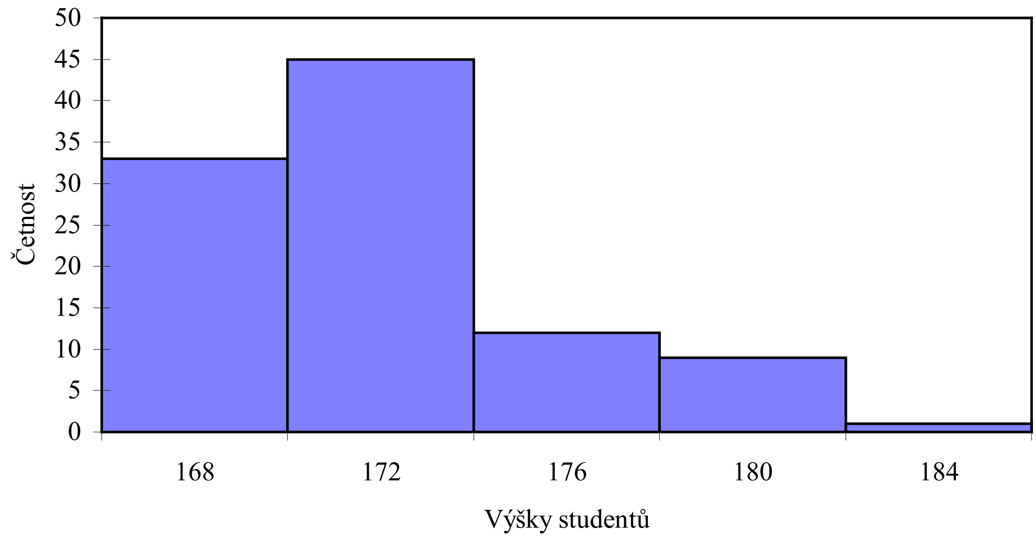


3) Výšky studentů – spojitá náhodná veličina

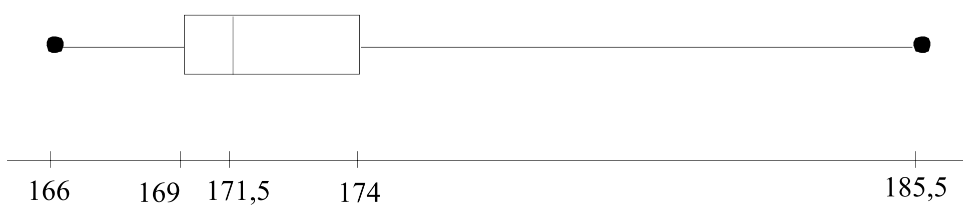
Hranice intervalu	Střed intervalu	Četnost	Relativní četnost
166-170	168	33	0,33
170-174	172	45	0,45
174-178	176	12	0,12
178-182	180	9	0,09
182-186	184	1	0,01

Dolní kvartil	169,03
Medián	171,51
Horní kvartil	173,73
Modus	170
Rozpětí	19,5
Mezikvartilové rozpětí	4,7

Histogram – výšky studentů



Krabicový diagram

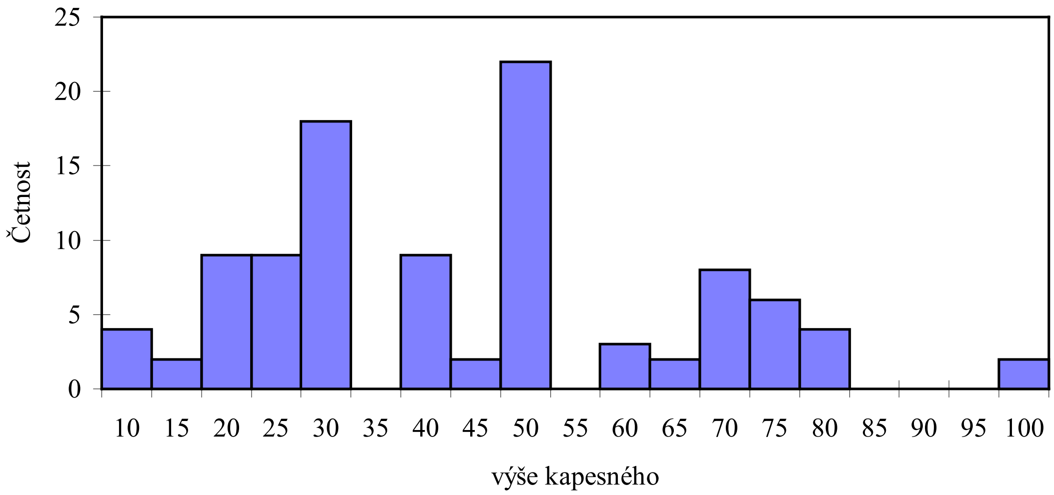


4) Výše kapesného – spojitá náhodná veličina

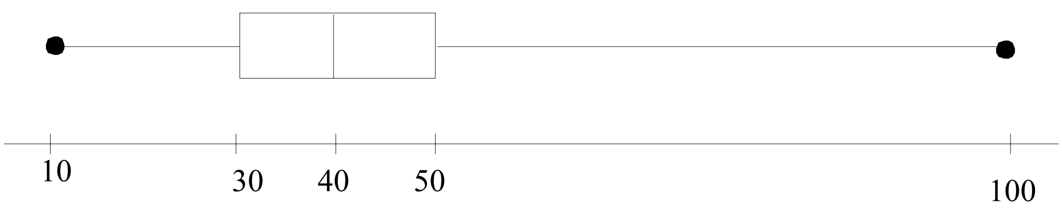
Částka	Četnost	Relativní četnost
10	4	0,04
15	2	0,02
20	9	0,09
25	9	0,09
30	18	0,18
35	0	0,00
40	9	0,09
45	2	0,02
50	22	0,22
55	0	0,00
60	3	0,03
65	2	0,02
70	8	0,08
75	6	0,06
80	4	0,04
85	0	0,00
90	0	0,00
95	0	0,00
100	2	0,02

Dolní kvartil	30
Medián	40
Horní kvartil	50
Modus	50
Rozpětí	90
Mezikvartilové rozpětí	20

Histogram – výše kapesného

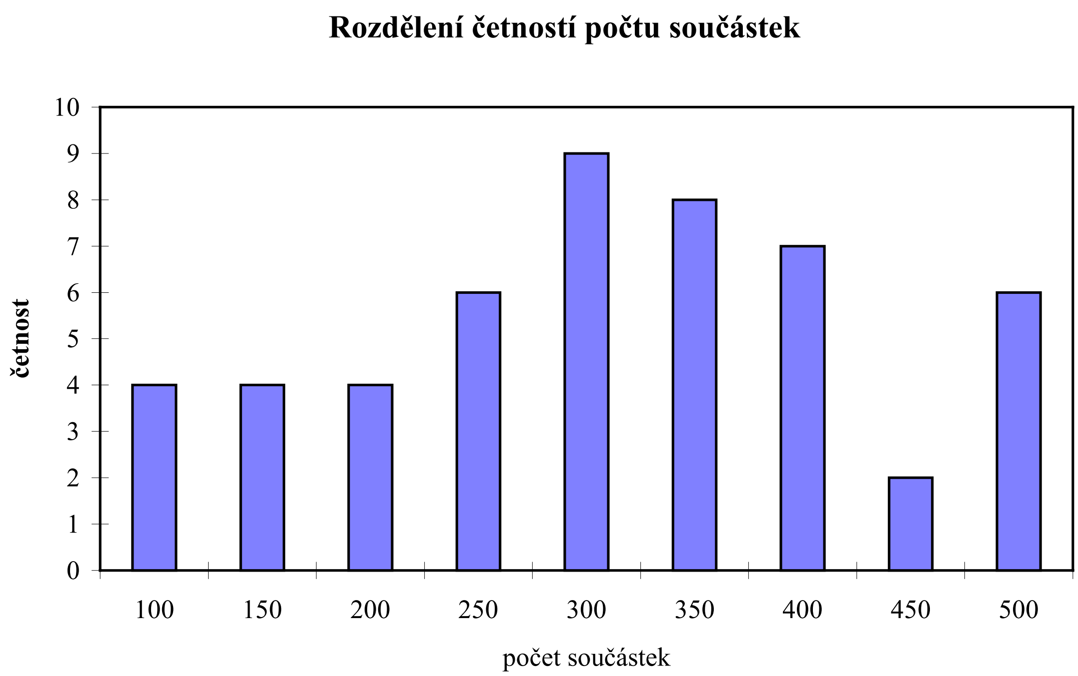


Krabicový diagram



5) Počet součástek – diskrétní náhodná veličina

Počet součástek	Četnost	Relativní četnost
100	4	0,08
150	4	0,08
200	4	0,08
250	6	0,12
300	9	0,18
350	8	0,16
400	7	0,14
450	2	0,04
500	6	0,12



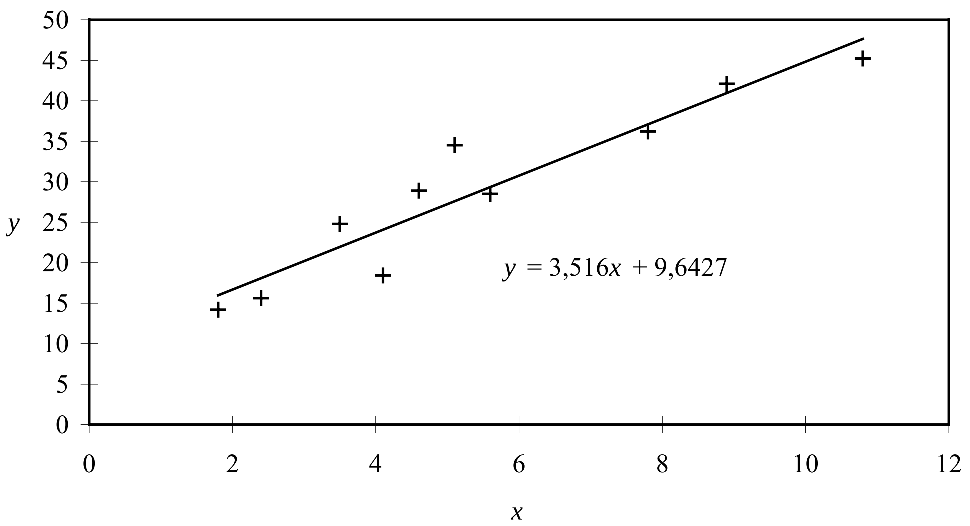
4.3 Statistické charakteristiky – rozptýlenost rozdělení

Výsledky:

1) Při probíhajícím pokusu byly naměřeny tyto hodnoty:

	Hodnoty *X*	Hodnoty *Y*	
Aritmetický průměr	5,46	28,84	
Směrodatná odchylka	2,89	10,77	
Rozptyl	8,35	116,08	
Kovariance		29,36	
Korelace		0,94	
První regresní přímka	3,52	9,64	$y = 3{,}52x + 9{,}64$
Druhá regresní přímka	0,25	27,46	$x = 0{,}25y - 1{,}84$

Graf závislosti



2)

	x	*y*
Aritmetický průměr	0,70	1,58
Směrodatná odchylka	0,211	0,438
Rozptyl	0,044	0,192
Kovariance		–0,092
Korelace		–0,995

3) Střední hodnota doby trvání této technické operace bude přibližně 0,25 a rozptyl 0,06.

4) a) Primitivní funkce $F(x) = \ln|2x+1| + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{6} + C$

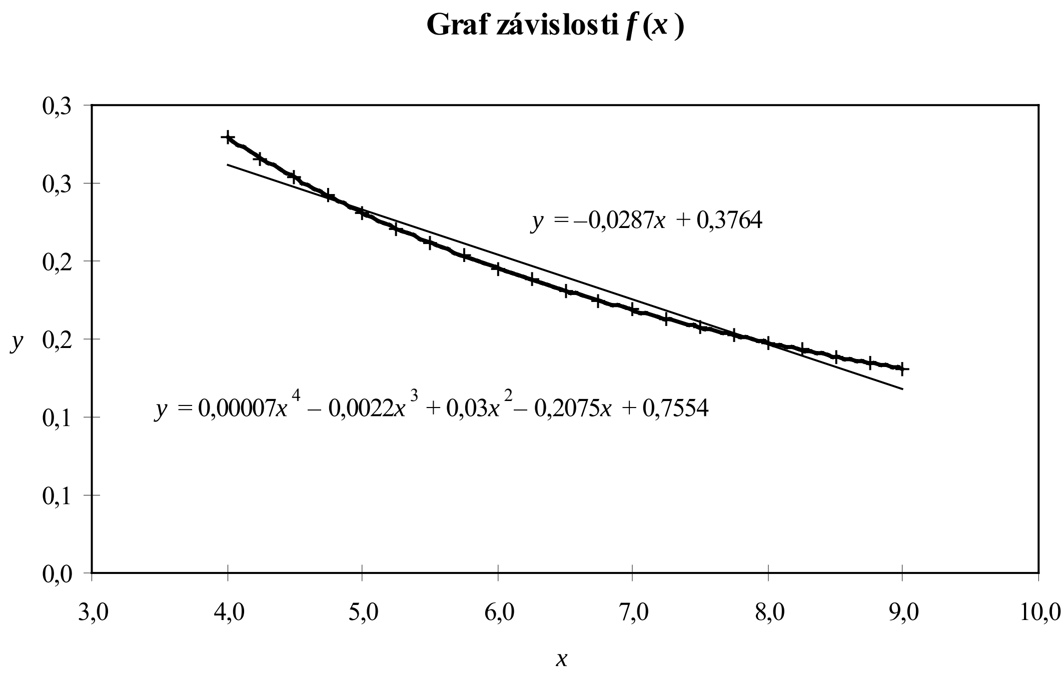
b) Plošný obsah $P = 0{,}94461$

c) Tabelace funkcí

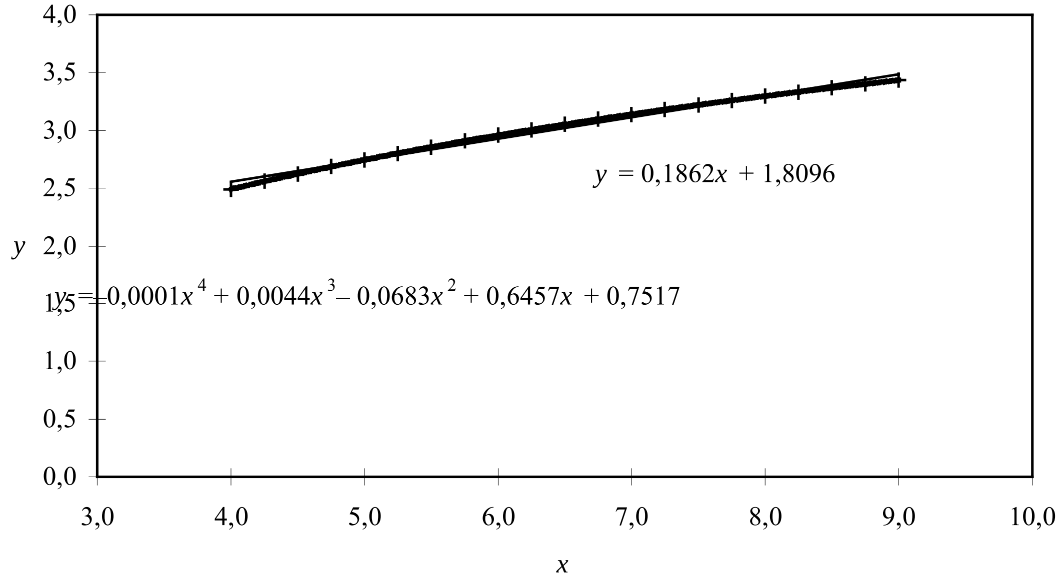
x	$f(x)$	$F(x)$
4,00	0,279 914 5	2,491 225 9
4,25	0,266 017 6	2,559 440 3
4,50	0,253 333 3	2,624 335 6
4,75	0,241 703 5	2,686 194 7
5,00	0,230 998 5	2,745 264 4
5,25	0,221 110 7	2,801 762 0
5,50	0,211 949 7	2,855 880 3
5,75	0,203 438 9	2,907 791 0
6,00	0,195 512 8	2,957 648 4
6,25	0,188 114 8	3,005 591 4
6,50	0,181 195 8	3,051 745 8
6,75	0,174 712 6	3,096 225 6
7,00	0,168 627 5	3,139 135 2
7,25	0,162 906 6	3,180 569 7
7,50	0,157 520 3	3,220 616 4
7,75	0,152 441 8	3,259 355 5
8,00	0,147 647 1	3,296 861 0
8,25	0,143 114 5	3,333 200 9
8,50	0,138 824 7	3,368 438 4
8,75	0,134 760 0	3,402 632 0
9,00	0,130 904 2	3,435 835 8

d) Interpolace funkcí

e) Regresní přímky



Graf závislosti *F* (*x*)



f)

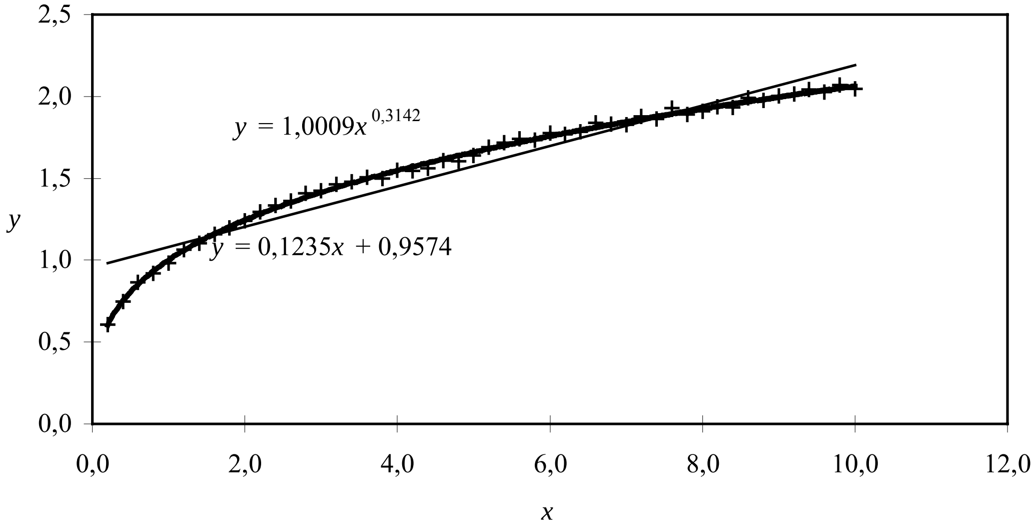
Aritmetické průměry:	6,50	0,189 750	3,019 988
Směrodatné odchylky:	1,55	0,045 285	0,290 365
Rozptyly:	2,41	0,002 051	0,084 312
Kovariance:		–0,069 094	0,448 064
Korelace:		–0,983 610	0,994 776
První regresní přímka funkce $f(x)$			$y = -0{,}029x + 0{,}376$
Druhá regresní přímka funkce $f(x)$			$x = -33{,}693y + 12{,}893$
První regresní přímka funkce $F(x)$			$y = 0{,}186x + 1{,}810$
Druhá regresní přímka funkce $F(x)$			$x = 5{,}314y - 9{,}549$

5)

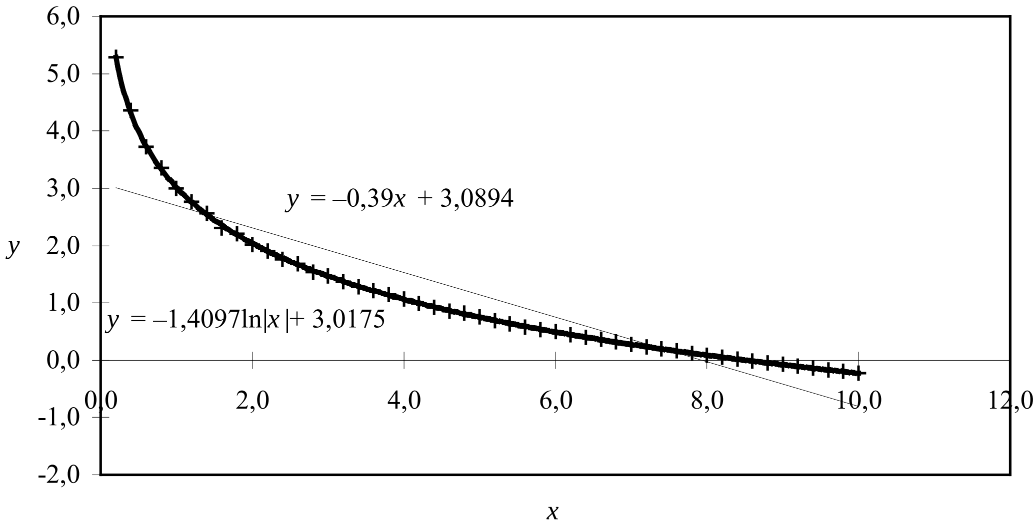
	X	*A*	*B*	*C*
Arit. průměry	5,1	1,587 36	1,100 21	–21,281 86
Směr. odchylky	2,9	0,373 91	1,253 51	18,392 51
Rozptyly	8,5	0,139 81	1,571 28	338,284 49
Kovariance		1,049 93	–3,315 30	30,669 69
Korelace		0,963 13	–0,907 17	0,571 95
První reg. přímky		$y = 0{,}124x + 0{,}957$	$y = -0{,}390x + 3{,}089$	$y = 3{,}608x - 39{,}684$
Druhé reg. přímky		$x = 7{,}510y - 6{,}821$	$x = -2{,}110y + 7{,}421$	$x = 0{,}091y + 7{,}029$

	X	*D*	*E*
Aritmetické průměry	5,1	0,542 48	14,134 88
Směrodatné odchylky	2,9	0,741 06	4,099 91
Rozptyly	8,5	0,549 17	16,809 30
Kovariance		–1,761 94	11,941 72
Korelace		–0,815 51	0,999 04
První regresní přímky		$y = -0{,}207x + 1{,}600$	$y = 1{,}405x + 6{,}970$
Druhé regresní přímky		$x = -3{,}208y + 6{,}840$	$x = 0{,}710y - 4{,}942$

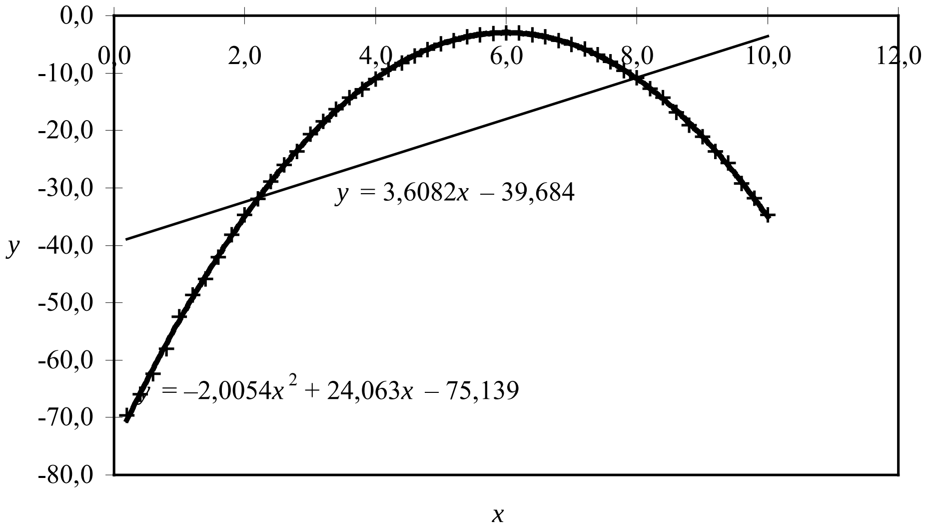
Graf závislosti *A* na *X*



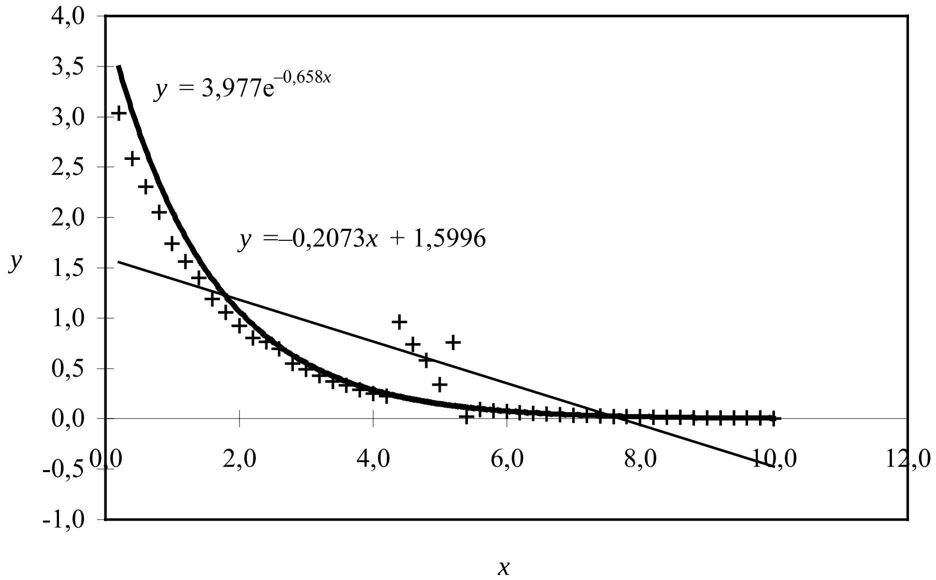
Graf závislosti *B* na *X*



Graf závislosti *C* na *X*



Graf závislosti *D* na *X*



Graf závislosti *E* na *X*