Skalární součin

Ve vektorových prostorech umíme sčítat a odčítat vektory, násobit je skalárem c (tedy c-krát protáhnout (nebo zkrátit, případně otočit jejich směr). Dále umíme rozhodnout, zda jistý rozumný počet vektorů tvoří lineárně závislou či nezávislou množinu nebo posloupnost (jsou-li tedy uvažované vektory v obecné poloze či nikoliv a pokud ne, jak ,,velká" je mezi nimi vazba).

Neumíme však dosud měřit úhly mezi vektory ani určovat velikosti vektorů. K tomu potřebujeme pojem skalárního součinu. Při běžných středoškolských úlohách se vystačí s běžným skalárním součinem definovaným v $\mathbb{R}^n$ pro $n = 2, 3$ předpisem

$$(u_1, \dots, u_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) = \Sigma_{i=1}^n u_i \cdot v_i.$$

V náročnějších partiích matematiky a fyziky je však potřeba poněkud obecnějšího přístupu k definici skalárního součinu. Za definici vezmeme 4 vlastnosti, které ,,běžný skalární součin" splňuje

Definice 1. *Řekneme, že zobrazení* $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ *je skalárním součinem na reálném vektorovém prostoru* V*, jestliže splňuje*

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ *(komutativita)*
(b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
(c) $(p\vec{u}) \cdot \vec{v} = p(\vec{u} \cdot \vec{v})$
(d) $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ *a* $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{v} = 0$

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ *a* $\forall p, q \in \mathbb{R}$.

První tři axiomy jsou axiomy tzv. bilinearity (fixujeme-li jeden argument zobrazení $\cdot$, je vzhledem ke druhému argumentu zobrazení $\cdot$ lineární. Bilinearita je svázána s následným pojmem matice skalárního součinu. Pokud jde o čtvrtý axiom, umožnňuje nám zavést tzv. normu nebo velikost vektoru $|\ ||$ vztahem

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Zobrazení $||\ ||$ přiřazující každému vektoru jeho velikost splňuje

(i) $||\vec{u}|| \geq 0$ a $||\vec{u}|| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
(ii) $||p\vec{u}|| = |p| \cdot ||\vec{u}||$
(iii) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (trojúhelníková nerovnost)

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ a $\forall p \in \mathbb{R}$.

Tyto tři vlastnosti jsou axiomy tzv. normy

Definice 2. *Zobrazení* $||\ || : V \to \mathbb{R}$ *splňující vlastnosti* $(i), (ii), (iii)$ *se nazývá (vektorovou) normou. Je-li navíc norma indukovaná skalárním součinem, nazývá se normou euklidovskou.*

Poznámka. a) Poznamenejme, že ne každá norma je indukovaná skalárním součinem. Příkladem je vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ s běžně užívanými normami definovanými předpisem $||\vec{u}|| = ||(u_1, \dots, u_n)|| = \max_{i=1,\dots,n} |u_i|$ nebo $||\vec{u}|| = \Sigma_{i=1,\dots,n}^n |u_i|$.
b) Ověření faktu, že v případě euklidovské normy je skutečně normou, je snadno ověřitelný v prvních dvou bodech. Pokud jde o bod třetí, tzv. trojúhelníkovou nerovnost, důkaz lze najít v učebnicích jako jednu z tzv. klasických nerovností, k nimž se řadí zejména Schwarzova a Cauchy-Buňakovského.

Máme-li k dispozici normu, umíme měřit i vzdálenosti předpisem

$$d(\vec{u}, \vec{v}) := ||\vec{u} - \vec{v}||.$$

Zobrazení $d : V \times V \to \mathbb{R}$ je tzv. metrikou

DEFINICE 3. *Zobrazení $d : V \times V \to \mathbb{R}$ splňující vlastnosti*
(i) $d(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$ a $d(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{v}$
(ii) $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{u})$
(iii) $d(\vec{u}, \vec{v}) + d(\vec{v}, \vec{w}) \geq d(\vec{u}, \vec{w})$ (trojúhelníková nerovnost)
$\forall \vec{u}, \vec{v}\vec{w} \in V$.

Poznámka. Vynecháním 1. axiomu v definici metriky dostáváme pojem pseudometriky. S tzv. Riemannovou pseudometrikou se pracuje v relativistické fyzice.

Vraťme se nyní ke skalárnímu součinu. První tři axiomy (bilinearita) znamenají, že zadáme-li sklární součin na všech dvojicích bázových vektorů, pak užitím těchto axiomů dostaneme hodnotu skalárního součinu pro libovolné dva vektory $\vec{x}, \vec{y}$. Je-li totiž $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ báze V a souřadnice vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ vzhledem k bázi $\mathcal{U}$ jsou $(\vec{x})_{\mathcal{U}} = (x_1, \ldots, x_n)$ a $(\vec{y})_{\mathcal{U}} = (y_1, \ldots, y_n)$, pak $\vec{x} \cdot \vec{y} = \Sigma_{i,j}^n x_i y_j (\vec{u}_i \cdot \vec{v}_j) =$

$$(x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & & \ldots \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \ldots & \ldots & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_n \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & & \ldots \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 & \ldots & \ldots & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{u}_n \cdot \vec{u}_1 & & \ldots \vec{u}_n \cdot \vec{u}_2 & \ldots & \ldots & \vec{u}_n \cdot \vec{u}_2 \end{pmatrix} (y_1, \ldots, y_n)^T,$$

zapisujeme-li vektory řádkově. Uvedená matice se nazývá *matice sklárního součinu v bázi $\mathcal{U}$*. Z komutativity skalárního součinu je zřejmá symetrie matice skalárního součinu.

Nyní definujme konvexní úhel (z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$) sevřený dvěma vektory $\vec{u}, \vec{v}$ vztahem

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}.$$

Dále, vztah

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

definuje tzv. odchylku vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, což je jejich úhel redukovaný na interval $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

DEFINICE 4. *Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nazveme ortogonální (kolmé), jestliže jejich skalární součin je rovný nule.*

Posloupnost vektorů $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ nazveme ortogonální, jestliže $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ kdykoliv $i \neq j$.

Ortogonální posloupnost vektorů nazveme ortonormální, jestliže navíc všechny vektory mají jednotkovou velikost, tedy $||\vec{u}_i|| = 1$.

Z předchozí definice je zřejmé, že má smysl hovořit o ortogonální a ortonormální bázi vektorového prostoru.

Věta. Každá ortogonální posloupnost vektorů je lineárně nezávislá.

Důkaz. Nechť $\Sigma_i c_i \vec{u}_i = \vec{0}$. Vezmeme-li libovolný vektor $\vec{u}_j$ této posloupnosti, máme $\Sigma_i (c_i \vec{u}_i) \cdot \vec{u}_j = c_j = \vec{0} \cdot \vec{u}_j = 0$ a tedy všechna c_j jsouu nulová, což jsme chtěli ukázat.

Je-li $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ libovolná ortonormální báze (nemusí jít zdaleka jen o kanonickou bázi v $\mathbb{R}^n$), je matice skalárního součinu v této bázi jednotková a platí

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x})_{\mathcal{E}} \cdot (\vec{y})_{\mathcal{E}}.$$

Nyní pro každý systém vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ sestrojíme ortogonální posloupnost vektorů $\vec{v}_1, \dots, \vec{u}_l$ generující stejný vektorový podprostor jako $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$, tedy

$$\mathcal{L}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l).$$

Existenci a realizaci této konstrukce dává

Věta-Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces. Ke každé posloupnosti vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ existuje ortogonální posloupnost $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$, pro kterou platí

$$\mathcal{L}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l).$$

Vektory $\vec{v}_i$ jsou pro $i = 1, \dots, l$ konstruovány indukcí takto:

$$\vec{v}_1 := \vec{u}_1, \quad \vec{v}_{i+1} := \vec{u}_{i+1} - \Sigma_{j=1}^{i} \frac{\vec{u}_{i+1} \cdot \vec{v}_j}{\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j} \vec{v}_j.$$

Důkaz. je bezprostřední ověření ortogonality $\vec{v}_{i+1}$ vzhledem k předchozím $\vec{v}_j$. Rovnost lineárních obalů je zřejmá z toho, že se při konstrukci nedostáváme mimo množinu lineárních kombinací původních zadaných vektorů. □

Poznámka. Při konstrukci vpodstatě $\vec{u}_2$ nahradíme jeho ortogonální komponentou při ortogonální projekci $\vec{u}_2$ do přímky $\mathcal{L}(\vec{v}_1)$. V $(i+1)$-ím kroku je $\vec{v}_{i+1}$ ortogonální komponentou $\vec{u}_{i+1}$ při ortogonální projekci do lineárního obalu $\mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i)$. Zastavme se nyní u pojmu o ortogonální projekci a komponenty.

Věta. Nechť $L \subseteq V$ je vektorový podprostor a $\vec{v} \in V$ libovolný vektor. Pak existuje právě jedna dvojice vektorů $\vec{p} \in L$ a $\vec{k} \perp L$ (tzn. $\vec{k} \perp \vec{u}$ pro každý $\vec{u} \in L$) tak, že $\vec{p} + \vec{k} = \vec{v}$.

Vektor $\vec{p}$ nazýváme ortogonální projekcí a $\vec{k}$ ortogonální komponentou vektoru $\vec{v}$. Existence je zaručena Gramm-Schmidtovým ortogonalizačním procesem. Chceme-li dokázat větu, je potřeba dokázat jednoznačnost rozkladu na projekci a komponentu. Důkaz sleduje následující příklad.

Příklad. Jsou dány vektory $\vec{u}_1 = (2,1,1), \vec{u}_2 = (1,1,1)$ a vektor $\vec{u} = (0,0,1)$. Nalezněte ortogonální projekci a komponentu vektoru $\vec{u}$ do roviny $\mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Ortogonální projekci $\vec{p}$ hledejme ve tvaru $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$. Pak platí

$$\vec{u} \cdot \vec{u_1} = (c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \vec{k}) \cdot \vec{u}_1 = c_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u_2} = (c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \vec{k}) \cdot \vec{u}_2 = c_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + c_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2.$$

Po dosazení číselných hodnot máme systém lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & |1 \\ 4 & 3 & |1 \end{pmatrix}.$$

Máme $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = 1$ a tedy $\vec{p} = -\frac{1}{2}(2,1,1) + (1,1,1) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $\vec{k} = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.