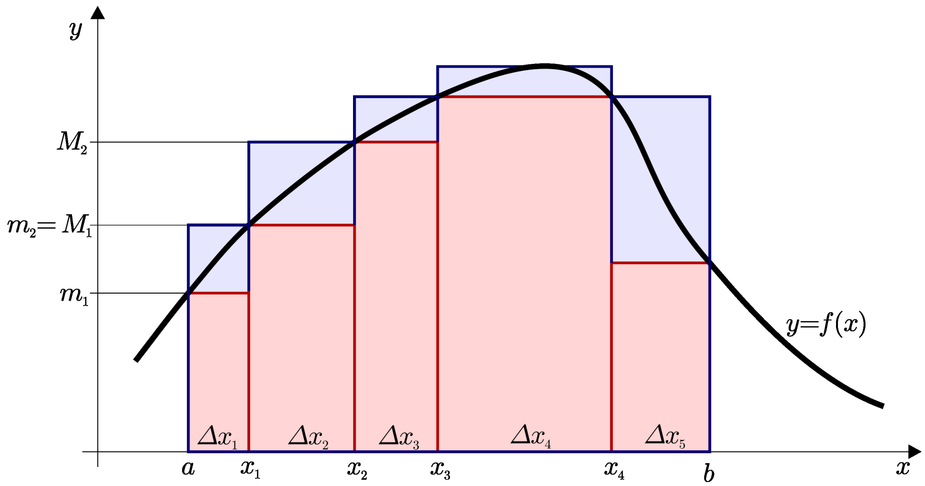
Určitý (Riemannův) integrál

1. Poznámka Existuje též Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův integrál a mnoho dalších.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ provedeme dělení D: $a = x_0,\ x_1, \dots,\ x_n = b;\ x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Toto dělení nemusí být ekvidistantní (na stejné díly). Získáme tak n intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle;\ i = 1, 2, \dots, n$. Viz Obr. 1.



Obrázek 1: Zavedení Riemannova integrálu

2. Označme
$m_i = \inf\{f(x);\ x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$
$M_i = \sup\{f(x);\ x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$

Je-li funkce f ohraničená na intervalu $\langle a, b\rangle$, m_i a M_i existují, jsou vlastní a tedy existuje:

$s(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ **dolní integrální součet** funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ vzhledem k dělení D.

$S(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ **horní integrální součet** funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ vzhledem k dělení D.

$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \sup\limits_D s(f, D)$ **dolní integrál** funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$\overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \inf\limits_D S(f, D)$ **horní integrál** funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Platí vždy:

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \le M(b-a)$$

kde m je infimum a M je suprémum všech funkčních hodnot, tj. $m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a, b\rangle\}$ a $M = \sup\{f(x);\ x \in \langle a, b\rangle\}$.

3. Definice Pokud platí $\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x$ a výsledek je vlastní číslo, pak je funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ **integrovatelná** (v Riemannově smyslu). Potom klademe její určitý (Riemannův) integrál:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x$$

4. Příklad Riemannův integrál může existovat i pro nespojité funkce.

5. Příklad Jak by vypadala situace v případě Dirichletovy funkce na intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$?
$\underline{\int_0^1} \chi(x)\ \mathrm{d}x = 0,$
$\overline{\int_0^1} f(x)\ \mathrm{d}x = 1.$

6. Věta (Newtonova-Leibnizova formule) Jestliže je funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ (Riemannovsky) integrovatelná a existuje-li na intervalu $\langle a, b\rangle$ k ní primitivní funkce F, pak platí, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

7. Poznámka Pokud definujeme určitý integrál přímo vzorcem $F(b) - F(a)$, dostáváme tzv. **Newtonův integrál**. Existují funkce, které jsou integrovatelné v Newtonově smyslu, ale nejsou integrovatelné v Riemannově smyslu a naopak. Pokud jsou integrovatelné v obou smyslech, výsledek je stejný.

8. Příklad $\int_1^3 (x^3+x^2+4)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 4x\right]_1^3 = \underbrace{\left(\frac{81}{4} + \frac{27}{3} + 12\right)}_{F(b)} - \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 4\right)}_{F(a)} = 20 + \frac{26}{3} + 8 = \frac{110}{3}.$

9. Alternativní přístup k definici:
Vybereme reprezentanty $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ a zjistíme jejich funkční hodnotu. $C = \{c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n\}$. Provedeme normu dělení $D : h(D) = \max\limits_{1\le i\le n} \{x_i - x_{i-1}\}$.

Součet: $\sigma(f, D, C) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}),$

$\lim\limits_{h(D)\to 0} \sigma(f, D, C) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$

10. Věta Je-li funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, pak je zde Riemannovsky integrovatelná.

Důkaz: $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ $m_i = f(p_i);$ $M_i = f(P_i)$
$S(f, D) - s(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum\limits_{i=1}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(P_i) - f(p_i))(x_i - x_{i-1})$
Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu, pak je zde stejnoměrně spojitá. Tzn. pro $\varepsilon > 0$ existuje k $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ $\delta > 0$ tak, že pro x, y takové, že $\mid x - y \mid < \delta$ je $\mid f(x) - f(y) \mid < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Pro $\mid P(i) - p(i) \mid < \delta$ tedy $\sum\limits_{i=1}^{n} (f(P_i) - f(p_i))(x_i - x_{i-1}) < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \dfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$

Tzn. $S(f,D) = s(f,D) \Rightarrow f$ je Riemannovsky integrovatelná na $\langle a,b\rangle$.

11. Příklad $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ \mathrm{d}x = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$= (\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\sin 0) + (\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1$

12. Příklad $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x^2 \ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x \ \mathrm{d}x = \ \mathrm{d}t \\ \text{nutno přepočítat meze!!! } \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi^2}{4}, \quad 0 \to 0 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos t \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}[\sin t]_0^{\frac{\pi^2}{4}} =$
$= \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi^2}{4} - \sin 0) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi^2}{4}.$