Vektorové prostory

Uvažujme množinu V obsahující všechny uspořádané n-tice reálných čísel $(a_1,...,a_n)$, tedy $V = R^n$ (n-tá kartézská mocnina R). Tyto uspořádané n-tice budeme nazývat vektory. Korespondence se středoškolským pojetím vektoru je následující. Vektor $\vec{a} = (a_1,...,a_n)$ interpretujeme jako šipku s počátkem v $[0,...,0]$ a koncem v bodě $[a_1,...,a_n]$. Poznamenejme, že jde o tzv. *volné vektory*, které representují směr, ale nikoliv umístění. Pokud bychom brali v úvahu i umístění, hovořili bychom o vázaných vektorech. Ty pak vytvářejí strukturu afinního prostoru, kterému se budeme, a to jen rámcově bez podrobností věnovat později. Pokud nebudeme chtít vektory rozepisovat do složek, budeme užívat buď zápisu se šipkou (např. $\vec{a}$) anebo psát symbol tučně (např. $\mathbf{a}$). Preferovat budeme první možnost. Speciálně budeme symbolem $\vec{0}$ značit tzv. *nulový vektor* $(0,...,0)$.

Ze střední školy víme, jak se sčítají dvou či třírozměrné vektory a jak se násobí číslem. My tyto operace zobecníme na tzv. operace *sčítání vektorů* a operaci *násobení vektoru skalárem*. Budeme je definovat tak, abychom jako speciální případ pro n=2 a n=3 dostali známé doplnění na rovnoběžník a protažení či zkrácení vektoru číslem k (podle toho zda $|k| >= 1$ nebo naopak $|k| < 1$, případně obrácením jeho směru, je-li $k < 0$.

Operace sčítání a násobení skalárem definujme pro číselné vektory takto. Je-li $\vec{a} = (a_1,...,a_n)$ a +, definujme vektor $\vec{a} + \vec{b}$ jako vektor tvořený součtem jednotlivých složek, tedy

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,...,a_n + b_n) \qquad (1)$$

a pro násobení vektoru $\vec{a}$ číslem c definujme $c\vec{a}$ opět po složkách, tedy

$$c\vec{a} = (ca_1,...,ca_n) \qquad (2).$$

Pro zobecnění na tzv. abstraktní vektorový prostor si všimneme, že jsou splněny „samozřejmé" vlastnosti jako např. $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ atd.

Definice 1
Abstraktní vektorový prostor definujeme jako množinu V s operacemi +: $VxV \to V$ a $\cdot : R \times V \to V$ (tečku budeme vynechávat), splňující následující axiomy

1.) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (asociativita sčítání)
2.) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativita sčítání)
3.) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (neutrálnost nulového vektoru vzhledem ke sčítání)
4.) ke každému vektoru $\vec{a}$ existuje právě jeden vektor $\vec{b}$ tak, že $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$
5.) $p \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = p \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b}$
6.) $p \cdot (q \cdot \vec{a}) = (p \cdot q) \cdot a$
7.) $(p + q) \cdot \vec{a} = p \cdot \vec{a} + q \cdot \vec{a}$
8.) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
pro libovolné vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a libovolné skaláry p, q.

Snadno se dokáže, že vektor $\vec{b}$ z bodu 4.) je určen jednoznačně (dokažte). Je tedy korektní užívat zápisu $-\vec{a}$ namísto $\vec{b}$. Poznamenejme, že všechny „samozřejmé vlastnosti" pro vektory a skaláry lze vyvodit z těchto axiomů.

Definice 2
Lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1,...\vec{u}_k$ nazveme libovolný výraz $c_1\vec{u}_1 + ...c_k\vec{u}_k$, kde $c_1,...,c_k$ jsou libovolná reálná čísla. Množinu všech lineárních kombinací $\vec{u}_1,...\vec{u}_k$ nazveme lineárním obalem množiny tvořené vektory $\vec{u}_1,...\vec{u}_k$ (můžeme jej značit např. $L(\vec{u}_1,...\vec{u}_k)$ nebo $\langle \vec{u}_1,...\vec{u}_k \rangle$.

Uveďme nyní definici lineární nezávislosti vektorů $\vec{u}_1,...\vec{u}_k \in V$, je-li V je vektorový prostor.

Definice 3
Řekneme, že vektory $\vec{u}_1,...\vec{u}_k$ jsou lineárně nezávislé, neexistuje-li mezi nimi vektor, který lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. V případě, že některý z uvažovaných vektorů lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních řekneme, že jsou lineárně závislé.

Častěji se používá následující ekvivalentní definice, která je sice méně názorná, ale pro další úvahy či počítání vhodnější.

Definice 4
Řekneme, že vektory $\vec{u}_1,...\vec{u}_k$ jsou lineárně nezávislé, vyplývá-li z rovnosti $c_1\vec{u}_1 + ...c_k\vec{u}_k = \vec{0}$, že všechna z čísel $c_1,...c_k$ se rovnají 0.

Je důležité si uvědomit, že posledně uvedená definice je ve tvaru implikace. Vezmeme-li např. vektory $\vec{u}$ a $-\vec{u}$, jsou lineárně závislé v kterémkoliv vektorovém prostoru neboť zařídit splnění rovnosti $c_1\vec{u} + c_2(-\vec{u}) = \vec{0}$ lze např. volbou $c_1 = 1$ a $c_2 = -1$, tedy koeficienty, z nichž alespoň jeden je nenulový. Jiným příkladem jsou vektory $\vec{u},\vec{v},\vec{u}+\vec{v}$**,** které opět tvoří lineárně závislý systém vektorů v jekémkoliv vektorovém prostoru. (rovnost $c_1\vec{u} + c_2\vec{v} + c_3(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{0}$ lze zařídit např. volbou $c_1 = 1$, $c_1 = 1$ a $c_3 = -1$). Příkladem lineárně nezávislých vektorů v R^3 jsou např. vektory $\vec{u}_1 = (1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,0)$ a $\vec{u}_3 = (0,0,1)$.

Podívejme se nyní blíže na pojem lineárního obalu systému vektorů, to je množiny, kterou uvažovaný systém vektorů vygeneruje pomocí lineárních kombinací.

Vezmeme-li např. jeden vektor $\vec{u}$ v rovině či prostoru a uvážíme všechny jeho lineární kombinace, dostaneme všechny násobky původně zadaného vektoru, což znamená, že $L(\vec{u})$ je právě přímka procházející počátkem.

Vezmeme-li dva vektory $\vec{u},\vec{v}$ z R^3 v „obecné poloze“, množina všech jejich lineárních kombinací vytvoří rovinu v R^3 procházející počátkem $[0,0,0] \in R^3$. Naopak, nebudou-li $\vec{u},\vec{v}$ v „obecné poloze“ a tudíž budou kolineární (což znamená, že leží v jedné přímce – mají tedy stejný směr ale různé velikosti, případně orientace), vytvoří všechny lineární kombinace $\vec{u},\vec{v}$ přímku, je tedy $L(\vec{u},\vec{v}) = L(\vec{u})$. Dále, vektor $\vec{v}$ bude lineární kombinací $\vec{u}$. „Obecná poloha“ pak odpovídá lineární nezávislosti $\vec{u},\vec{v}$.

Pojem lineární závislosti či nezávislosti systému vektorů $\vec{u}_1,...\vec{u}_k$ lze pak též chápat jako existenci či neexistenci „zbytečných“ vektorů v systému z hlediska vygenerování $L(\vec{u}_1,...\vec{u}_k)$. Jsou-li tedy $\vec{u},\vec{v}$ z předchozího příkladu v „obecné poloze, tvoří lineárně nezávislý systém vektorů, nejsou-li v obecné poloze, tvoří lineárně závislý systém.

Nyní se dostáváme k pojmu vektorového (lineárního podprostoru) vektorového prostoru V.