Základní vzorce pro integrování elementárních funkcí

$f(x)$		$F(x)$
x^n	$(x>0,\ n\in \mathrm{R}-\{-1\})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\dfrac{1}{x}$	$(x\neq 0)$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x		$\mathrm{e}^x + C$
a^x	$(a>0,\ a\neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
$\sin x$		$-\cos x + C$
$\cos x$		$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(x\neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in \mathrm{Z}\right)$	$\tan x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(x\neq k\pi,\ k\in \mathrm{Z})$	$-\cot x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$	$\arcsin x + C$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$	$\arccos x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\arctan x + C$
$-\dfrac{1}{1+x^2}$		$\mathrm{arccot}\, x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\lvert x\rvert>1$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$f(x)\neq 0$	$\ln\lvert f(x)\rvert + C$

Metoda per partes

Symbolicky: $\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$ nebo $\int u'\cdot v\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u\cdot v'\,\mathrm{d}x$

Metoda substituce

Věta o substituci:

Nechť f je funkce a $(a;b)\in \mathrm{R}$. Nechť funkce f je spojitá v intervalu $(a;b)$, nechť funkce φ zobrazuje interval $(\alpha;\beta)$ do intervalu $(a;b)$, nechť pro každé $t\in(\alpha;\beta)$ existuje vlastní $\varphi'(t)$ potom:

1. $H(t)=F(\varphi(t))$ $\qquad (H = F\circ\varphi)$
2. je-li ψ libovolná funkce taková, že pro $x\in(a,b)$ je $\varphi(\psi(x))=x$ (například existuje-li inverzní funkce k funkci φ v $(\alpha;\beta)$ je $\psi=\varphi^{-1}$) potom $F(x)=H(\psi(x))$.

Symbolicky: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Další užitečné integrály:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}+C,\ |x| < a \qquad \int \frac{a}{b+bx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\cdot\arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a}\right|+C,\ |x| > a$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a}+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right] \wedge a \in \mathrm{R}$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a-x^2}+a\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}\right] \wedge a > 0$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C \ \text{ nebo } \boxed{\int \frac{1}{x^2+a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}+C}$$

Rekurentní vzorec $\boxed{I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2}I_n + \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}}$

Typové substituce pro goniometrické funkce

1. $\int \sin kx\cdot\cos mx\ \mathrm{d}x \Rightarrow$ používat vzorce

$$\sin kx\cdot\cos mx = \frac{1}{2}\left(\sin(k-m)x+\sin(k+m)x\right)$$

$$\cos kx\cdot\cos mx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-m)x+\cos(k+m)x\right)$$

$$\sin kx\cdot\sin mx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-m)x-\cos(k+m)x\right)$$

2. $\int \sin^k x\cdot\cos^m x\ \mathrm{d}x \Rightarrow$ pro k liché $\quad t = \cos x$

pro m liché $\quad t = \sin x$

k, m sudé a jedno záporné $\quad t = \tan x$

k, m sudé a obě kladná $\Rightarrow$ $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)}$ $\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)}$

3. $\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$, kde $R(u,v)$ značí racionální funkci proměnných u, v, zde používáme substituci

$t = \tan x$ nebo univerzální $t = \tan\frac{x}{2}$

t

$\boxed{\text{Substituce } t = \tan x} \Rightarrow x = \arctan x \Rightarrow \boxed{\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\ \ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$

$\boxed{\text{Substituce } t = \tan\frac{x}{2}} \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow \boxed{\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$

Obsah plochy

Obsah plochy při explicitním vyjádření v kartézských souřadnicích je $\boxed{P = \int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}x}$

Objem rotačního tělesa

Kolem osy x $\boxed{V = \pi\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x}$ kolem osy y $\boxed{V = \pi\int_a^b x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_a^b (\varphi(y))^2\,\mathrm{d}y}$